स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

(उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा निर्गत अधिनियम संख्या 10, 1999 द्वारा स्थापित)

UGPHS-08
आधुनिक भौतिक

प्रथम खण्ड
आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धान्त

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद-211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-08
आधुनिक भौतिकी

खंड

1

आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धान्त

आधुनिक भौतिकी

अभी तक आपने भौतिकी के पाठ्यक्रमों में जो कुछ भी पढ़ा है, वह क्लासिकी भौतिकी (classical physics) से ताल्लुक रखता है–भौतिकी के जो नियम आपने पढ़े हैं वे सभी दरअसल क्लासिकी भौतिकी के नियम हैं। आप पूछेंगे कि इस बात का क्या मतलब है? इसका मतलब यह है कि अभी तक आपने अपने चारों ओर के स्थूल संसार में घट रही भौतिक घटनाओं के बारे में पढ़ा है, और उसमें भी विशेष तौर पर उनके सामान्य लक्षणों के बारे में ही पढ़ा है। उदाहरण के लिए, इन नियमों का इस्तेमाल करके आप घिरनी, गतिपालक चक्र (flywheel) और लीवर आदि से बने एक स्थूल (macroscopic) तंत्र की गति का वर्णन कर सकते हैं अगर आपको उनके पदार्थों के घनत्व, प्रत्यास्थता गुणांक आदि दिए गए हों। लेकिन अगर आप यह जानना चाहें कि इनके घनत्वों या प्रत्यास्थता गुणांकों के यही मान क्यों हैं, कुछ और क्यों नहीं, तो इस बात का आपको क्लासिकी भौतिकी के नियमों से कोई जवाब नहीं मिलेगा। इसी तरह, अगर हम यह जानना चाहें कि सोडियम वाष्प पीली रोशनी क्यों देता है, सूरज क्यों चमकता है, यूरेनियम नाभिक अपने आप क्यों विघटित होता है, या क्या होता है जब कोई वस्तु प्रकाश की चाल से चलती है तो क्लासिकी भौतिकी हमें इन बातों के बारे में कुछ नहीं बताती। तब हमें ज्ञान के दूसरे क्षेत्रों जैसे कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत, क्वांटम यांत्रिकी और नाभिकीय भौतिकी का सहारा लेना पड़ता है। भौतिकी के इन क्षेत्रों में वे संकल्पनाएं आती हैं जो हमारे रोज़ाना के अनुभवों के दायरे से बाहर की हैं। वस्तुतः ये संकल्पनाएं बीसवीं सदी की शुरुआत में विकसित भौतिकी की सबसे अधिक विलक्षण बौद्धिक ईजाद कही जा सकती हैं।

आधुनिक भौतिकी के इस पाठ्यक्रम के ज़रिए, आइए हम आपको अपने साथ एक रोमांचकारी बौद्धिक यात्रा पर ले चलें। इस यात्रा में हम आपको भौतिकी के उन क्षेत्रों से परिचित कराएंगे जिन्होंने बीसवीं सदी में भौतिकी के विकास के लिए मूलभूत संकल्पनात्मक आधार तैयार किया। हो सकता है कि आपको यह यात्रा कुछ मुश्किल लगे लेकिन अंततः आप अपने को बौद्धिक स्तर पर पहले से कहीं अधिक सम्पन्न पाएंगे। ये सभी संकल्पनाएं आपको नए ढंग से सोचने के लिए उद्वेलित करेंगी। और साथ ही साथ रोज़मर्रा के अनुभवों के संसार से परे जो भौतिक संसार है, उसकी एक गहरी समझ भी देंगी।

जिस बौद्धिक महायात्रा पर आप प्रस्थान करने वाले हैं, उसकी एक झलक हम यहाँ दे रहे हैं। तो पेश है श्रीमान टॉमकिन्स के एक रोमांचकारी अनुभव की दास्तान। श्री टॉमकिन्स, इस सदी के प्रसिद्ध भौतिकीविद् जॉर्ज गैमोव की किताब, "मिस्टर टॉमकिन्स इन वन्डरलैंड" के हीरो हैं। गैमोव वह भौतिकशास्त्री हैं जिन्होंने ब्रह्मांड की उत्पत्ति के बारे में बिग बैंग सिद्धांत दिया था।

श्रीमान सिरिल जॉर्ज हेनरी टॉमकिन्स, आपेक्षिकता के सिद्धांत पर लेक्चर सुनने के बाद सपना देखते हैं कि वे एक ऐसे शहर में हैं जहाँ प्रकाश की चाल सिर्फ 25 km h^{-1} है। वे वहाँ क्या देखते हैं? पहले तो सब कुछ सामान्य दिखता है– कोने में खड़ा एक पुलिसवाला वैसा ही दिखता है, जैसे कि पुलिसवाले आम तौर पर दिखते हैं। सड़कें लगभग खाली हैं। पर इतने में सड़क पर एक साइकिल सवार श्री टॉमकिन्स की तरफ़ आता दिखता है। और उसे देखकर वे भौंचक्के रह जाते हैं। वह साइकिल सवार और साइकिल इतने चपटे दिखाई देते हैं कि उन्हें अपनी आंखों पर यक़ीन नहीं होता। इतने में घड़ी में बारह बजते हैं और साइकिल सवार, जो शायद जल्दी में है, ज़्यादा तेजी से पेडल मारने लगता है। उसकी रफ़्तार तो ज़्यादा बढ़ी हुई नहीं लगती लेकिन वह और

अधिक चपटा हो जाता है। श्री टॉमकिन्स उसका पीछा करके उससे इसकी वजह पूछने का फैसला करते हैं। वे एक साइकिल मांगकर उसे दौड़ाते हैं और सोचते हैं कि शायद वे भी चपटे हो जाएंगे। पर घोर आश्चर्य कि उनके साथ ऐसा कुछ नहीं होता। बल्कि, उनके इर्द-गिर्द की पूरी तस्वीर बदल जाती है। सड़कें छोटी हो जाती हैं, दुकानों की खिड़कियाँ संकरी दिखने लगती हैं और कोने पर खड़ा वह पुलिसवाला शायद दुनिया का सबसे दुबला आदमी नज़र आता है।

यह कैसी अजीबो-ग़रीब दुनिया है जिसकी सैर श्री टॉमकिन्स अपने सपने में करते हैं; और उनके अनुभव कितने अनोखे हैं! हमें यक़ीन है कि श्री टॉमकिन्स के सपनों की दुनिया में घटी इन घटनाओं को समझने में आपकी दिलचस्पी ज़रूर होगी। इस पाठ्यक्रम से आपको इस कोशिश में मदद मिलेगी। हम उम्मीद करते हैं कि आपको इस पाठ्यक्रम को पढ़ने में आनंद आयेगा। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत

एल्बर्ट आइंस्टीन (1877-1955)

जब भी आप आपेक्षिकता (relativity) शब्द सुनते हैं या उससे आपका सामना होता है तो आपके दिमाग में क्या बात आती है? एल्बर्ट आइंस्टीन का ख़याल या उनका वह प्रसिद्ध समीकरण $E = mc^2$? या फिर सालों-साल अंतरिक्ष यात्रा करके लौटे हुए उन अंतरिक्ष यात्रियों की छवि जिन पर उम्र का कोई असर दिखाई नहीं देता और वे लगभग वैसे ही युवा बने रहते हैं? इसी से ज़ाहिर होता है कि आज (लगभग सौ साल बाद) भी आइंस्टीन के आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत का कितना व्यापक बौद्धिक प्रभाव है।

यह मानना बिल्कुल सही है कि इस सिद्धान्त का विकास, भौतिक संसार को समझने के मानवीय प्रयास में लिए गए महानतम कदमों में से एक है। और फिर भी आपको जानकर ताज्जुब होगा कि आपेक्षिकता की मूल संकल्पना उतनी ही पुरानी है जितनी कि गैलीलियो और न्यूटन की यांत्रिकी। तो आखिर आइंस्टीन ने ऐसा क्या किया कि आज उनका और आपेक्षिकता का नाम एक सांस में लिया जाता है?

बीसवीं सदी की शुरुआत में भौतिक विज्ञान में दो महान सिद्धांत प्रतिष्ठित थे–(1) न्यूटनी यांत्रिकी और (2) मैक्सवेल का विद्युतचुम्बकत्व। इन दोनों ही सिद्धांतों के ज़रिए अनगिनत भौतिक परिघटनाओं की एक एकीकृत समझ विकसित की जा चुकी थी। इन सिद्धांतों को निहायत ही संक्षिप्त गणितीय भाषा में ख़ूबसूरत तरीक़े से पेश किया गया था। आपने इन दोनों के बारे में क्रमशः "प्रारंभिक यांत्रिकी" (पी.एच.ई.-01) पाठ्यक्रम के खंड 1 और "वैद्युत एवं चुंबकीय परिघटनाएं" (पी.एच.ई.-07) पाठ्यक्रम के खंड 4 में पढ़ा है। आप इन सिद्धांतों के अनेकानेक अनुप्रयोगों से भी भली-भांति परिचित हैं। इन सिद्धांतों को प्रयोगों की कसौटी पर कई बार परखा जा चुका है और वे सदा ही उन पर खरे उतरे हैं। साथ ही साथ, ये दोनों ही सिद्धांत अभूतपूर्व सफलता के साथ अनेक घटनाओं का पूर्वानुमान भी लगा सके हैं। लेकिन फिर भी, संकल्पना के स्तर पर इन दोनों सिद्धांतों में परस्पर विरोध है। आपको यह जानकर ताज्जुब हुआ न?

यह परस्पर विरोध क्या है? इस बात को हम इस खंड की इकाई 1 में समझाएंगे। साथ ही साथ, हम उस परेशानी का भी ज़िक्र करेंगे जिसने उस समय के बेहतरीन भौतिकविदों को उलझा रखा था। इन सिद्धांतों के इस अंतर्विरोध को कैसे सुलझाया गया? इसका हल देने वाले और कोई नहीं–एलबर्ट आइंस्टीन ही थे। उन्होंने इस अंतर्विरोध को दूर किया एक नए सिद्धांत (आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत) के ज़रिए जिसकी बुनियाद दो मौलिक संकल्पनाओं पर रखी गई। इन दो संकल्पनाओं के ज़रिए आइंस्टीन ने दिक् (space) और काल (time) की एकदम नई समझ विकसित की, जिनके बारे में आप इकाई 2 में पढ़ेंगे। यह स्वाभाविक था कि दिक् और काल के बारे में इस नई क्रांतिकारी समझ के कारण भौतिकी के तमाम क्षेत्रों में मूलभूत बदलाव आए। इकाई 3 में हम उस नई यांत्रिकी की चर्चा करेंगे जिसने इस बदलाव के फलस्वरूप न्यूटनी यांत्रिकी की जगह ली।

आइंस्टीन का यह सिद्धांत क्रांतिकारी है। इसका प्रभाव कोपरनिकस की क्रांति से कहीं ज़्यादा व्यापक और गहरा है। हमने भरपूर कोशिश की है कि आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत की ख़ूबसूरती और तार्किक मर्म को आप तक पहुँचा सकें। हमें उम्मीद है कि आप इसे सराह सकेंगे और आपको इसे पढ़ने में उतना ही आनंद मिलेगा जितना हमें इसे पेश करने में मिला। हम आपकी सफलता की कामना करते हैं।

इकाई 1 विशिष्ट आपेक्षिकता का उदय

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

आपने अपने स्कूल के विज्ञान के पाठ्यक्रमों में और यहाँ पर भौतिकी के ऐच्छिक पाठ्यक्रम "प्रारंभिक भौतिकी" (पी.एच.ई.-01) में न्यूटनी यांत्रिकी के बारे में पढ़ा है। आप जड़त्वीय निर्देश तंत्र की संकल्पना को अच्छी तरह से समझते हैं। आप जानते हैं कि सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में न्यूटन के गति के नियमों का एक ही स्वरूप होता है। अपने रोज़ाना के जीवन में भी आपने इस बात की सच्चाई को परखा होगा। एकसमान गति से चल रही रेलगाड़ी या हवाई जहाज़ में कोई भी वस्तु ठीक उसी तरह से चलती है जैसे कि वह पृथ्वी पर चलती है। उदाहरण के लिए, जब आप किसी रेलगाड़ी या हवाई जहाज़ में सफर करते हुए कोई सिक्का गिराते हैं या हवा में गेंद उछालते हैं, या उनके फर्श पर डिब्बा खिसकाते हैं तो ये सभी वस्तुएं ठीक वैसे ही गति करती हैं जैसी कि वे पृथ्वी पर करतीं। गैलीलियो और न्यूटन, दोनों ही, इस सिद्धांत को भली-भांति जानते थे कि सभी जड़त्वीय निर्देशांक तंत्रों में यांत्रिकी के नियम समान होते हैं। यही "आपेक्षिकता का क्लासिकी नियम" (classical principle of relativity) है। इसलिए आपेक्षिकता की क्लासिकी धारणा आपके लिए नई नहीं है। हां, आपका अभी इस शब्दावली से सामना नहीं हुआ है। इसलिए इस इकाई की शुरूआत में, भाग 1.2 में, हम आपेक्षिकता की क्लासिकी अवधारणा को प्रस्तुत करेंगे।

"What I see in Nature is a magnificent structure which we can comprehend only very imperfectly, and that must fill a thinking person with a feeling of humility."

-Albert Einstein, 1944-45

आप जानते हैं कि हमारे रोज़मर्रा के अनुभवों वाले संसार में वस्तुओं की गति का वर्णन करने में न्यूटनी यांत्रिकी को अभूतपूर्व सफलता मिली है। तो आखिरकार इस बात की ज़रूरत क्यों पड़ी कि न्यूटनी यांत्रिकी की, और उसमें जो आपेक्षिकता की अवधारणा निहित है उसकी, फिर से जाँच की जाए। यह आवश्यकता तब पड़ी जब कि आपेक्षिकता

के क्लासिकी नियम को विद्युतचुम्बकीय तरंगों के संचरण पर लागू किया गया और उसके कारण कुछ विसंगतियाँ सामने आईं। भाग 1.3 में आप इनमें से कुछ विसंगतियो के बारे में पढ़ेंगे और पाएंगे कि न्यूटनी आपेक्षिकता दृष्टिकोण में विद्युतचुम्बकत्व के नियम फिट नहीं बैठते थे। अब सवाल यह उठता है कि न्यूटनी आपेक्षिकता का स्थान किसने लिया? उसका स्थान भौतिक संसार को समझने के एक पूरी तरह से अलग, नए और क्रांतिकारी तरीके ने लिया जब एल्बर्ट आइंस्टीन ने आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत (special theory of relativity) दिया। इस इकाई के अंतिम भाग (1.4) में आप इस सिद्धांत की प्रमुख विशेषताओं के बारे में पढ़ेंगे।

संक्षेप में, हम इस इकाई में यह कहने जा रहे हैं: भौतिकी में आपेक्षिकता की अवधारणा को सबसे पहले प्रस्तुत करने वालों में आइंस्टीन का नाम नहीं आता। आइंस्टीन की देन यह है कि आपेक्षिकता की जो क्लासिकी अवधारणा सिर्फ़ यांत्रिकी पर लागू होती थी, उन्होंने उसका इस तरह व्यापकीकरण किया कि वह सभी भौतिक परिघटनाओं और नियमों पर लागू की जा सके। यहाँ हम उस पृष्ठभूमि का भी ज़िक्र करेंगे जिसमें आइंस्टीन ने विशिष्ट आपेक्षिकता का सिद्धांत दिया। लेकिन यह विवरण ऐतिहासिक क्रम में नहीं होगा। यहाँ हम संक्षेप में केवल उन कारकों के बारे में बताएंगे जिन्होंने वैज्ञानिकों को अपनी अवधारणाओं को इस क़दर बुनियादी तौर पर बदलने को विवश किया। हमें उम्मीद है कि इस तरह के वर्णन को पढ़कर आप आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत को और बेहतर ढंग से समझ सकेंगे।

अगली इकाई में आप आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के परिणामों के बारे में पढ़ेंगे। ख़ास तौर पर आप यह समझेंगे कि विशिष्ट आपेक्षिकता ने पहले से प्रचलित दिक् और काल (space and time) की अवधारणाओं को किस क़दर बदल डाला।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- विभिन्न जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में घटनाओं का वर्णन करने के लिए गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण का इस्तेमाल कर सकेंगे,
- गैलीलीय आपेक्षिकता नियम को समझा सकेंगे और यह बता सकेंगे कि उसका व्यापकीकरण करने की ज़रूरत क्यों पड़ी,
- आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के अभिगृहीत (postulates) बता सकेंगे,
- भौतिक परिघटनाओं पर आपेक्षिकता के नियम को लागू कर सकेंगे,
- क्लासिकी आपेक्षिकता और आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत में काल की प्रकृति की तुलना कर सकेंगे।

अध्ययन दर्शिका

इस इकाई में हमने उस पृष्ठभूमि को पेश किया है जिसमें आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत का उदय हुआ। इसलिए यहाँ पर हम अपने पहले के भौतिकी पाठ्यक्रमों में दी गई बहुत सी अवधारणाओं का इस्तेमाल करेंगे। हम आपको यह सुझाव देंगे कि आप इस इकाई को पढ़ने से पहले पी.एच.ई.-01 (प्रारंभिक भौतिकी) के खंड 1, पी.एच.ई.-07 (वैद्युत और चुम्बकीय परिघटनाएं) के खंड 4, पी.एच.ई.-09 (प्रकाशिकी) के खंड 2 ज़रूर पढ़ लें। इससे आपको भाग 1.2 और 1.3 में दी गई अवधारणाओं को कम समय में और बेहतर ढंग से समझने में मदद मिलेगी। हमारे हिसाब से आपको यह इकाई पढ़ने में 6 से 7 घंटे लगेंगे।

.2 क्लासिकी आपेक्षिकता

ापने पी.एच.ई.-01 की इकाई 1 में जड़त्वीय निर्देश तंत्र (inertial frame of reference) ौर आपेक्षिक गति की अवधारणाओं के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि एकसमान ापेक्षिक गति से चल रहे दो जड़त्वीय तंत्रों के सापेक्ष किसी वस्तु के वेगों में और ्नके त्वरणों में परस्पर क्या संबंध होता है। आपने पी.एच.ई.-01 की इकाई 2 में ्यूटनी यांत्रिकी के नियमों के बारे में भी पढ़ा है। यहाँ हम क्लासिकी या गैलीलीय ापेक्षिकता की अवधारणा को समझाने के लिए इन संकल्पनाओं का इस्तेमाल करेंगे।

आप पी.एच.ई.-01 की इकाई 2 का भाग 2.2.1 पढ़ना चाहेंगे जहाँ हमने विस्तार से जड़त्वीय प्रेक्षक की चर्चा की है। वहाँ पर जड़त्वीय प्रेक्षक के बारे में जो कुछ कहा गया है, वह जड़त्वीय निर्देश तंत्र पर भी लागू होता है।

ो आइए सबसे पहले हम यह समझें कि किसी भौतिक घटना (event) से हमारा क्या ातलब है। किसी "घटना" के आदर्श रूप का यह अर्थ दिया जा सकता है कि वह ऐसा ुछ है जो आकाश (space) के किसी बिंदु पर और समय के किसी क्षण पर घटता ै। आपेक्षिकता के सिद्धांत के बारे में बताते हुए आइंस्टीन किसी घटना का यह नाटकीय ादाहरण दिया करते थे– बिजली ज़मीन पर गिरती है। एक छोटा-सा विस्फोट भी एक ेसी ही नाटकीय घटना है। इसी तरह आप घटना के कई और उदाहरण खुद भी सोच ाकते हैं। अब किसी भी घटना के बारे में हम दो बुनियादी सवाल पूछ सकते हैं:

यह घटना कहाँ हुई?
यह घटना कब हुई?

ान सवालों का जवाब हम कैसे दें? जैसा कि आप अच्छी तरह जानते हैं कि किसी ािर्देश तंत्र में एक घटना का वर्णन हम चार मापों से कर सकते हैं जिनमें से तीन ासकी स्थिति के लिए होते हैं और एक उस समय t के लिए जबकि वह घटती है। ाम तौर पर, घटना की स्थिति बताने के लिए हम कार्तीय निर्देशांकों (cartesian oordinates) (x, y, z) का प्रयोग करते हैं। आपने अपने भौतिकी के ऐच्छिक पाठ्यक्रमों ें कार्तीय निर्देशांक तंत्र का काफ़ी इस्तेमाल किया है। उदाहरण के लिए, किसी निर्देश ंत्र में दो कणों का संघट्टन ($x = 1\,\text{m}$, $y = 2\,\text{m}$, और $z = 3\,\text{m}$) और क्षण $t = 4\,\text{s}$ पर ोता है। यह निर्देश तंत्र पृथ्वी पर किसी प्रयोगशाला में स्थित हो सकता है। तब ये ार संख्याएं (1, 2, 3, 4) उस निर्देश तंत्र में उस घटना को निर्दिष्ट करती हैं; इनमें से ्हली तीन संख्याएं उसकी स्थिति बताती हैं, और चौथी वह क्षण बताती है जब वह ाटना घटी।

ास तरह, अगर हमें इस बात का सटीक वर्णन करना है कि कोई घटना कब और ाहाँ घटी तो उसके लिए सबसे पहले हमें एक निर्देश तंत्र (frame of reference) ािर्दिष्ट करना होगा। आप जानते ही हैं कि किसी घटना का वर्णन करने के लिए हम ािस भी निर्देश तंत्र का चाहें इस्तेमाल कर सकते हैं। इस पाठ्यक्रम में हम केवल **ज़ड़त्वीय निर्देश तंत्रों (inertial frames of reference)** का इस्तेमाल करेंगे। आपको याद ोगा कि

> एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र वह निर्देश तंत्र होता है जिसमें न्यूटन का गति का पहला नियम लागू होता है।

ानी कि एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में जो वस्तुएं विरामावस्था में हैं वे विरामावस्था में ानी रहती हैं और जो वस्तुएँ एक सरल रेखा में एकसमान गति से चल रही हैं वे वैसी ो चलती रहती हैं, जब तक कि उन पर एक नेट बाह्य बल न लगाया जाए। इस ावधारणा से आप फौरन यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

> **कोई भी निर्देश तंत्र जो किसी जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष अचर वेग से चलता है, एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है।**

ागे पढ़ने से पहले अगर आप यह जाँचना चाहते हैं कि आपने जड़त्वीय निर्देश तंत्र की ांकल्पना को अच्छी तरह समझ लिया है या नहीं तो नीचे दिए गए बोध प्रश्न को ाल करें।

2 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

निम्नलिखित निकायों से जुड़े निर्देश तंत्रों का जड़त्वीय और अजड़त्वीय तंत्रों में वर्गीकरण करें।

क) वर्तुल पथ में चल रही कार।

ख) एकसमान गति से चल रहा अंतरिक्ष यान।

ग) आकाश में स्थित एक विद्युत क्षेत्र में त्वरित गति कर रहा एक इलेक्ट्रॉन।

घ) एकसमान रूप से बह रही नदी में अचर चाल से चल रही एक नाव।

च) आपके कमरे में एक स्थिर मेज़ पर विरामावस्था में रखी एक गेंद।

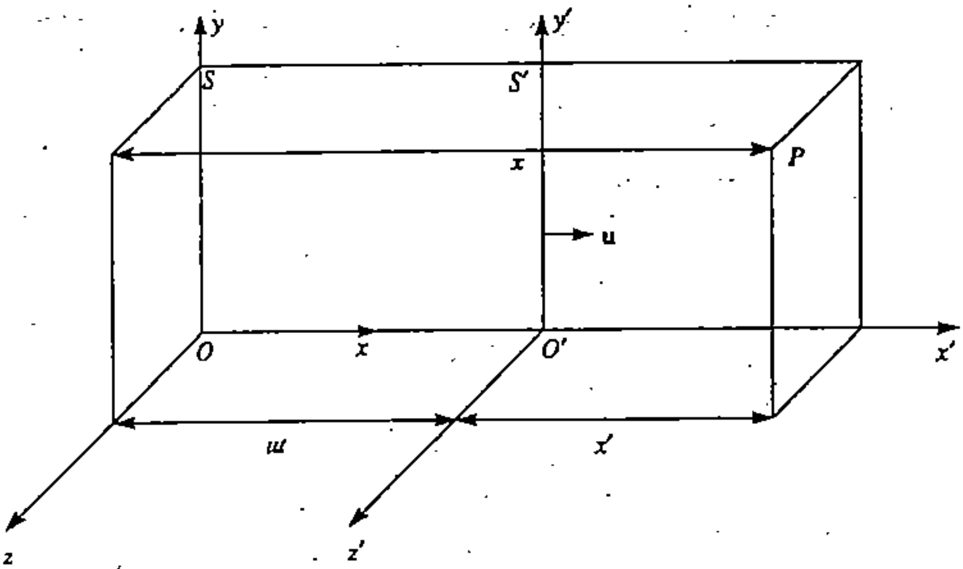
अब माना कि हमने किसी एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में किसी घटना का वर्णन करने के लिए दिक्-काल (space and time) का मापन किया है और हम उसी घटना का किसी और जड़त्वीय निर्देश तंत्र में वर्णन करना चाहते हैं। उदाहरण के लिए, इस घटना को लीजिए। पृथ्वी के सापेक्ष एकसमान वेग से चल रही रेलगाड़ी में एक बच्चा किसी गेंद को ऊर्ध्वाधरतः (ऊपर की ओर) उछालता है। रेलगाड़ी से जुड़े जड़त्वीय निर्देश तंत्र में गेंद सीधे ऊपर जाती है और उसी पथ पर वापस गिरती है। अब हम पृथ्वी से जुड़े एक और जड़त्वीय निर्देश तंत्र में गेंद की गति का वर्णन कैसे करेंगे?

किसी घटना का अलग-अलग जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में वर्णन करने के लिए हम गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण (Galilean coordinate transformation) का इस्तेमाल कर सकते हैं। आइए हम संक्षेप में गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण के बारे में पढ़ें।

1.2.1 गैलीलीय निर्देशांक रूपान्तरण

आइए एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र S लें और एक दूसरा जड़त्वीय निर्देश तंत्र S' लें जो S के सापेक्ष अचर वेग $\mathbf{u}$ से गतिमान है (चित्र 1.1)। इन तंत्रों के x अक्ष और x' अक्ष को हम गति की दिशा के अनुदिश लेते हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि बाकी दोनों अक्ष (y, z) और (y', z') एक-दूसरे के समांतर हैं : y, y' के समांतर है और z, z' के समांतर है। इसके साथ-साथ हम समय का मूल बिंदु $t = 0$, उस क्षण पर लेते हैं जब उन दोनों निर्देश तंत्रों के मूल बिंदु संपाती होते हैं यानी कि जब बिंदु O', बिंदु O से संपाती होता है।

अब माना कि एक घटना E बिंदु P पर घटती है। यहाँ हम यह मान लेंगे कि इन निर्देश तंत्रों में किया गया कोई भी मापन ऐसे प्रेक्षकों ने किया है जिन्होंने अपने मीटर पैमाने और घड़ियों का साथ-साथ अंशांकन (calibration) किया है। S से जुड़ा प्रेक्षक E के लिए निर्देशांक x, y, z, t, निर्दिष्ट करता है और S' से जुड़ा प्रेक्षक उसी घटना को x', y', z', और t' से निर्दिष्ट करता है। निर्देशांक $(x\ y\ z)$, O के सापेक्ष P की स्थिति बताते हैं और t वह क्षण है जिस पर S की घड़ी के अनुसार घटना E घटती है। निर्देशांक $(x'\ y'\ z')$, O' के सापेक्ष P की स्थिति बताते हैं और t' वह क्षण है जिसपर S' की घड़ी के अनुसार E घटती है। सरलता के लिए हम यह मान लेते हैं कि जब S और S' तंत्रों के मूल बिंदु O और O' संपाती हैं तो प्रत्येक प्रेक्षक की घड़ी शून्य समय दिखाती है।



चित्र 1.1: दो जड़त्वीय निर्देश तंत्र S और S'। S', S के सापेक्ष अचर वेग $\mathbf{u}$ ($= u\,\hat{\mathbf{i}}$) से इस तरह से चलता है कि $x - x'$ अक्ष उभयनिष्ठ हैं और $y - y'$, $z - z'$ अक्ष समांतर हैं। S' तंत्र से देखने पर S वेग $-\mathbf{u}$ से गतिमान है यानी कि S' के सापेक्ष S ऋणात्मक x दिशा में चाल u से चलता है। बिंदु P उस घटना E को दिखाता है जिसके दिक्काल निर्देशांक S और S' में प्रेक्षकों द्वारा मापे जा सकते हैं। इनके मूल बिंदु O और O' क्षण $t = 0$ और $t' = 0$ पर संपाती होते हैं। आप देख सकते हैं कि $x = x' + ut$, $y' = y$ और $z' = z$।

निर्देशांकों (x, y, z, t) और (x', y', z', t') के बीच में क्या संबंध है? इनके बीच में हम गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण (देखें चित्र 1.1) के द्वारा इस प्रकार से संबंध स्थापित कर सकते हैं:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (1.1)$$

हम सदिश रूप में गैलीलीय रूपांतरण समीकरणों को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \qquad (1.2\ \text{क})$$

$$t' = t \qquad (1.2\ \text{ख})$$

जहाँ $\mathbf{r}$, S के सापेक्ष, P का स्थिति सदिश है और $\mathbf{r}'$, S' के सापेक्ष। इस विशेष स्थिति के लिए $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$. और समीकरणों (1.2 क और ख) को समीकरण (1.1) में समानीत किया जा सकता है।

समीकरण (1.2 क) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

परंतु चूंकि $t = t'$, $\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{v}'$। इसलिए

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \qquad (1.3\ \text{क})$$

याद कीजिए कि आपने समीकरणों (1.3 क और ख) को सबसे पहले पी.एच.ई.-01 की इकाई 1 के भाग 1.5 में देखा है–ये वहां दी गई समीकरणें (1.37) और (1.38) ही हैं।

t के सापेक्ष समीकरण (1.3 क) का अवकलन करने पर और समीकरण (1.2 ख) को इस्तेमाल करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \qquad (1.3\ \text{ख})$$

इस तरह गति का समीकरण होता है

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{1.4}$$

इसका अर्थ यह है कि हमें तंत्र S' में गति का वही नियम मिलता है जोकि तंत्र S में लागू होता था।

समीकरण (1.4) से जुड़ा एक और सवाल हम आपके सामने रखना चाहेंगे। वह यह है कि एक निर्देश तंत्र से दूसरे निर्देश तंत्र में जाने पर बल **F** का रूपांतरण किस तरह होता है? आप जानते हैं कि यांत्रिकी में बल या तो दूरी पर निर्भर करते हैं (जैसे कि गुरुत्वाकर्षण बल या प्रत्यास्थ बल) या आपेक्षिक वेग पर (घर्षण बल), या फिर समयांतराल पर। तो आइए पता करें कि गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण में दूरी, आपेक्षिक वेग और समयांतराल किस तरह बदलते हैं।

आइए हम दो वस्तुओं P और Q के बारे में यह खोजबीन करें। माना कि उनके बीच लग रहा बल उनके बीच की दूरी, उनके आपेक्षिक वेग और समय पर निर्भर करता है। समीकरण (1.1) से आप तुरंत यह देख सकते हैं कि एक ही क्षण पर नापी गई P और Q के बीच की दूरी तंत्र S और S' में एक ही है :

$$x'_P - x'_Q = x_P - x_Q, \quad y'_P - y'_Q = y_P - y_Q, \quad z'_P - z'_Q = z_P - z_Q$$

या सदिश रूप में

$$\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_Q = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q \tag{1.5 क}$$

समीकरण (1.5 क) को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हम पाते हैं कि Q के सापेक्ष P के आपेक्षिक वेग का भी दोनों तंत्रों में एक ही मान है :

$$\mathbf{v}'_P - \mathbf{v}'_Q = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q \tag{1.5 ख}$$

यहाँ ध्यान रहे कि समीकरण (1.5 ख) लिखने में हमने इस बात का भी इस्तेमाल किया है कि गैलीलीय रूपांतरण में समय का मान नहीं बदलता, यानी कि किन्हीं दो घटनाओं A और B के बीच समयांतराल भी नहीं बदलता :

$$t'_A - t'_B = t_A - t_B \tag{1.6}$$

इस सबसे हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि यांत्रिकी में आने वाले बल, जो समयांतराल, दूरी और आपेक्षिक वेग पर निर्भर करते हैं, **गैलीलीय रूपांतरण के अधीन बदलते नहीं।** इस बात को हम इस तरह से भी कहते हैं: **गैलीलीय रूपांतरण के अधीन बल निश्चर (invariant) रहते हैं।**

इस तरह समीकरण (1.4) में आने वाली सभी राशियाँ गैलीलीय रूपांतरण में बदलती नहीं। इसलिए क्लासिकी यांत्रिकी की मूलभूत समीकरण का – यानी न्यूटन के दूसरे गति नियम का – एक स्थिर तंत्र S में और S के सापेक्ष अचर गति से चल रहे तंत्र S' में एक ही स्वरूप रहता है। अब जबकि आपने ये सब बातें समझ ली हैं, हम **आपेक्षिकता के क्लासिकी नियम** (classical principle of relativity) को पेश कर सकते हैं। इसे **गैलीलीय आपेक्षिकता नियम** (Galilean principle of relativity) भी कहते हैं, क्योंकि इसे पहले पहल गैलीलियो ने ही प्रस्तुत किया था। हालांकि इसका जो गणितीय स्वरूप हमने ऊपर दिया है, उसका श्रेय न्यूटन को जाता है।

1.2.2 गैलीलीय आपेक्षिकता नियम

समीकरण (1.5 क और ख) और समीकरण (1.6) से हमें यह पता चलता है कि गैलीलीय रूपांतरण के मुताबिक, समयांतराल, स्थानांतराल (दूरी) और आपेक्षिक वेग के मापन सभी जड़त्वीय तंत्रों में एकसमान होते हैं। और इस कारण से सभी जड़त्वीय तंत्रों

में यांत्रिकी के बल के नियम एक ही रूप के होते हैं। इन तंत्रों के आपेक्षिक वेगों का कोई भी मान हो सकता है और उससे इन नतीजों पर कोई असर नहीं पड़ता। समीकरण (1.4) में क्लासिकी यांत्रिकी का एक आधारभूत अभिगृहीत (postulate) अंतर्निहित है कि किसी भी वस्तु का द्रव्यमान सदैव नियत रहता है यानी वह एक निश्चर (invariant) राशि है।

अब अगर हम न्यूटनी यांत्रिकी और गैलीलीय रूपांतरण को एक-साथ लें तो उनसे हमें क्या पता चलता है? हमें पता चलता है कि यांत्रिकी की तीन मूलभूत राशियाँ – लंबाई, द्रव्यमान और समय और उनके साथ-साथ यांत्रिकी के बल (जो समयांतराल, स्थानांतरण और आपेक्षिक वेग पर निर्भर करते हैं), किसी जड़त्वीय प्रेक्षक की आपेक्षिक गति पर निर्भर नहीं करते। यांत्रिकी के नियम सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक ही रूप के होते हैं, और वे समान रूप से लागू होते हैं। इन बातों के आधार पर हम क्लासिकी या गैलीलीय आपेक्षिकता नियम को इस तरह लिख सकते हैं :

> **यांत्रिकी के नियमों का सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक ही स्वरूप होता है। यदि वे नियम एक जड़त्वीय तंत्र में सत्य हैं, तो वे अन्य सभी जड़त्वीय तंत्रों में भी सत्य होंगे।**

आप देख सकते हैं कि इस आपेक्षिकता नियम की कुछ सीमाएं हैं क्योंकि यह केवल यांत्रिकी के नियमों पर लागू होता है। आइए एक सरल उदाहरण से यह समझें कि गैलीलीय आपेक्षिकता नियम का क्या मतलब है। मान लीजिए कि आप एक कार में बैठे हैं जो अचर चाल से चल रही है और उसमें से बाहर नहीं देख सकते। तो आपको कार के अंदर किए गए सभी यांत्रिकी के प्रयोग और उसके अंदर घट रही सभी यांत्रिक परिघटनाएं ऐसी लगेंगी मानो कार चल ही न रही हो। उदाहरण के लिए, अगर आप कार के अंदर एक गेंद को ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर फेकेंगे तो वह वापस उसी पथ के अनुदिश गिरेगी जिस पर वह ऊपर की ओर फेंकी गई थी। यह ठीक वैसा ही परिणाम है जो कि कार के स्थिर होने पर आपको मिलता।

कार के अंदर आप कोई भी ऐसा यांत्रिकी का प्रयोग नहीं कर पाएंगे जिससे आप यह पता लगा सकें कि कार एकसमान गति से चल रही है या कहीं विरामावस्था में खड़ी है। हाँ, शर्त यह है कि आप कार से बाहर न देखें। यही तात्पर्य है हमारा जब हम यह कहते हैं कि अगर यांत्रिकी के नियम किसी एक जड़त्वीय तंत्र में सत्य हैं तो वे अन्य सभी जड़त्वीय तंत्रों में भी सत्य होंगे और उनका सब जड़त्वीय तंत्रों में एक ही स्वरूप होगा। यानी जहां तक यांत्रिकी का ताल्लुक है ऐसा कोई जड़त्वीय तंत्र नहीं है जिसे हम और जड़त्वीय तंत्रों के मुकाबले तरजीह देंगे और जिसमें यांत्रिकी के नियमों का सबसे आधारभूत स्वरूप सत्य होगा। **इस तरह, किसी परम, निरपेक्ष (absolute) निर्देश तंत्र का अस्तित्व नहीं होता।**

अब आप कुछ देर रुकना चाहेंगे और जानना चाहेंगे कि आपने इन धारणाओं को ठीक से समझा कि नहीं। इसके लिए आगे दिया गया बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2

2 मिनट लगाएं

क) क्या इस बात का कि समीकरण (1.4) गैलीलीय रूपांतरण के अंतर्गत बदलती नहीं हम यह मतलब निकाल सकते हैं कि सभी जड़त्वीय तंत्रों के प्रेक्षक किसी घटना के लिए उसकी स्थिति, समय, वेग, ऊर्जा, और संवेग के एक ही मान मापेंगे?

ख) क्या संवेग-संरक्षण नियम और ऊर्जा-संरक्षण नियम, गैलीलीय रूपांतरण के अंतर्गत निश्चर (invariant) रहते हैं?

क्लासिकी आपेक्षिकता नियम से जुड़ा हुआ एक रोचक पहलू है – दिक्-काल की प्रकृति (nature of space and time) का। और हम चाहेंगे कि आप इसके बारे में जानें।

निरपेक्ष दिक् और निरपेक्ष काल (absolute space and absolute time)

आपने अभी-अभी पढ़ा कि न्यूटनी यांत्रिकी और गैलीलीय आपेक्षिकता के मुताबिक, लंबाई (आपेक्षिक दूरी), द्रव्यमान, समय और उनके संबंधों की मापें किसी जड़त्वीय प्रेक्षक की आपेक्षिक गति पर निर्भर नहीं करते। वे इस बात पर निर्भर नहीं करते कि कौन-सा जड़त्वीय प्रेक्षक उन्हें माप रहा है : ऐसे सभी प्रेक्षकों के लिए उनके मान एक ही रहते हैं। इस बात को हम इस तरह भी कह सकते हैं कि न्यूटनी यांत्रिकी में **निरपेक्ष** स्थानांतराल (absolute space) और निरपेक्ष समयांतराल (absolute time interval) का अस्तित्व होता है। यानी हम कह सकते हैं कि दिक्-काल (space-time) का अन्य राशियों से स्वतंत्र अपना एक अस्तित्व होता है और उनमें ऐसे गुण होते हैं जो किसी भी और चीज पर निर्भर नहीं करते।

न्यूटन के अपने शब्दों में, "निरपेक्ष दिक् (absolute space) की प्रकृति ऐसी है कि वह किसी बाह्य चीज से सम्बद्ध हुए बिना, सदैव एक-सा और अचल रहता है।" ("Absolute space in its own nature without relation to anything external remains always similar and immovable")। यानी न्यूटन के मुताबिक आकाश/दिक् वास्तव में एक खाली डिब्बे जैसा है जिसके अंदर पदार्थ और वस्तुएं स्थित हैं एवं भौतिकी की विभिन्न परिघटनाएं घटती रहती हैं, और वह इन सबसे प्रभावित नहीं होता। इसी प्रकार काल के बारे में यह सोचा जाता है कि काल का प्रवाह निरपेक्ष रूप से, एकसमान गति से होता रहता है और समय के साथ घटने वाली किसी भी वास्तविक घटना का उस पर कोई असर नहीं पड़ता। एक बार फिर हम न्यूटन का ही कथन उद्धृत करते हैं, "निरपेक्ष, सत्य और गणितीय काल (absolute, true and mathematical time) की प्रकृति ऐसी है कि वह बिना किसी भी बाह्य चीज से संबद्ध हुए एकसमान रूप से प्रवाहित होता है और इसे अवधि (duration) भी कहते हैं।" ("Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably without relation to anything external, and is otherwise called duration.").

इस तरह, न्यूटन के दृष्टिकोण में जहाँ तक दिक्-काल और प्रकृति के संबंध का सवाल है, वे प्रकृति से बाहर की चीज़ें हैं। वे प्रकृति में स्थित किसी भी वस्तु या उसमें हो रही किसी परिघटना से प्रभावित नहीं होते। यही नहीं, उनका आपस में भी कोई संबंध नहीं है – दिक् के गुण, समय के प्रवाह के साथ हो रही वस्तुओं की गति पर निर्भर नहीं करते और समय का प्रवाह इस तरह की वस्तुओं के स्थानिक अभिलक्षणों (spatial properties) पर निर्भर नहीं करता।

संक्षेप में कहें तो न्यूटन के विचारों के मुताबिक दिक् और काल अपने आप में स्वतंत्र अस्तित्व रखते हैं, वे एक-दूसरे पर निर्भर नहीं करते। वे न तो उन भौतिक वस्तुओं पर निर्भर करते हैं जो दिक् में स्थापित हैं और न ही उन भौतिक परिघटनाओं पर निर्भर करते हैं जो समय के साथ उसमें घट रही होती हैं।

हमने यहाँ इन विचारों का बहुत संक्षेप में परिचय दिया है ताकि आप यह समझ सकें कि जब क्लासिकी आपेक्षिकता नियम को विद्युतचुम्बकत्व और प्रकाशिकी पर लागू किया गया तो किस तरह की मुश्किलें सामने आईं। आइए अब समझें कि ये मुश्किलें क्या थीं।

1.3 विद्युतचुम्बकत्व और क्लासिकी आपेक्षिकता

आपने अभी तक पढ़ा कि गैलीलीय आपेक्षिकता नियम यांत्रिकी की परिघटनाओं पर लागू होता है। अब अगला सवाल यह उठता है कि क्या भौतिकी के अन्य नियमों का (उदाहरण के लिए, सभी विद्युतचुम्बकत्व और प्रकाशिकी के नियमों का) भी सभी जड़त्वीय

तंत्रों में एक ही स्वरूप होता है? दूसरे शब्दों में, क्या वे सभी गैलीलीय रूपांतरणों के अधीन निश्चर होते हैं?

वास्तव में जब क्लासिकी आपेक्षिकता नियम को मैक्सवेल समीकरणों पर लागू किया गया तो तुरंत ही कुछ समस्याएं उठ खड़ी हुईं। वे समीकरणें इस नियम का पालन ही नहीं करती थीं। आइए हम उनमें से कुछ समस्याओं पर बात करें।

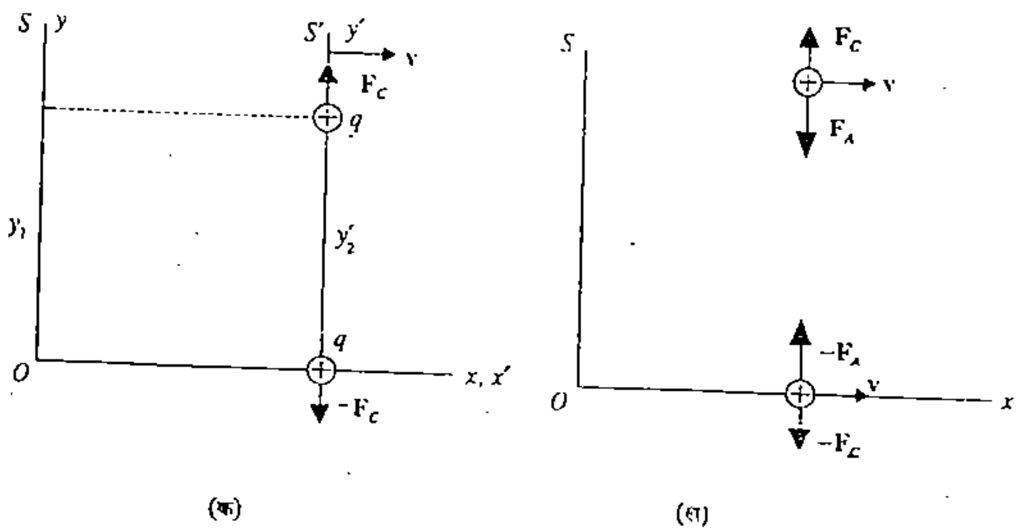
1.3.1 विद्युतचुम्बकत्व के नियम और आपेक्षिकता की समस्याएं

आइए सबसे पहले दो समान धनात्मक बिंदु आवेशों का एक सरल उदाहरण लें जिनमें से हरेक का आवेश q है। इन्हें चित्र 1.2 क में दिखाया गया है। पहले हम इस निकाय को निर्देश तंत्र S' में स्थित एक प्रेक्षक की दृष्टि से देखेंगे।

जैसा कि आप चित्र 1.2 क में देख सकते हैं, इनमें से एक आवेश तंत्र S' के मूल बिंदु पर विरामावस्था में है और दूसरा S' के y अक्ष पर दूरी y_2' पर विरामावस्था में है। मैक्सवेल समीकरणों से हम उस विद्युतचुम्बकीय बल का पता लगा सकते है जो S' तंत्र में विरामावस्था में स्थित आवेश एक-दूसरे पर लगाते हैं; यह तो जाना-पहचाना स्थिर वैद्युत कूलॉम बल (Coulomb force) है जिसका परिमाण है

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{y_2'^2}$$

अब आइए हम S की दृष्टि से आवेशों के बीच लग रहे विद्युतचुम्बकीय बल का परिमाण निकालें। इसमें स्थित प्रेक्षक के लिए आवेश q का मान वही रहता है और $y_1 = y_2'$ यानी कूलॉम बल का परिमाण वही रहता है। लेकिन इसके साथ-साथ S का प्रेक्षक दोनों आवेशों को दायीं ओर चाल v से चलते हुए भी देखता है। अब आप जानते हैं कि दो धनात्मक आवेश अगर दायीं ओर साथ-साथ गतिमान हों तो वे दो समांतर धाराओं के समकक्ष होते हैं जो एक दूसरे को आकर्षित करती हैं। यानी कि S में आवेशों पर लग रहे नेट बल के दो घटक हैं – एक तो प्रतिकर्षण का स्थिर वैद्युत बल और दूसरा समांतर धाराओं के बीच का आकर्षण बल (देखें चित्र 1.2 ख)। हम पाते हैं कि यह S' में आवेशों के बीच लग रहे बल से भिन्न है। लेकिन न्यूटनी भौतिकी के मुताबिक इन बलों का एक ही मान होना चाहिए। यह एक विसंगति है।



चित्र 1.2: (क) निर्देश तंत्र S' के y' अक्ष पर विरामावस्था में स्थित दो एकसमान धनात्मक बिंदु आवेश जिनमें से प्रत्येक का आवेश q है। तंत्र S' में ये आवेश एक-दूसरे को परिमाण F_C के बल से प्रतिकर्षित करते हैं; (ख) तंत्र S में ये आवेश दायीं ओर वेग $\mathbf{v}$ से गतिमान होते दिखाई देते हैं और एक-दूसरे को परिमाण F_A वाले एक अतिरिक्त बल से आकर्षित करते हैं जिससे कि नेट बल का परिमाण होता है $|F_C - F_A|$।

एक और समस्या उठती है जब हम गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरणों का इस्तेमाल करके मैक्सवेल समीकरणों को एक जड़त्वीय तंत्र से दूसरे जड़त्वीय तंत्र में लिखना चाहते हैं: उनका स्वरूप बदल जाता है। उदाहरण के लिए, भौतिकी के वैद्युत और चुम्बकीय परिघटनाएं (पी.एच.ई.-07) नामक ऐच्छिक पाठ्यक्रम की इकाई 14 में आपने मैक्सवेल समीकरणों से प्राप्त विद्युतचुम्बकीय तरंग समीकरणों के बारे में पढ़ा है। गैलीलीय रूपांतरण के अधीन इन तरंग समीकरणों का स्वरूप बदल जाता है। यह आसान-सा सवाल है और इसे आप ख़ुद ही हल करके देखें।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 3

सिद्ध करें कि विद्युतचुम्बकीय तरंग समीकरण

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

गैलीलीय रूपांतरण के अधीन बदल जाती है। (संकेत-निम्न श्रृखंला नियम का प्रयोग करें कि अगर x, (x', y', z', t') का फलन हो तो किसी फलन f के लिए)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

इस तरह हम पाते हैं कि विद्युतचुम्बकीय क्षेत्रों का मैक्सवेल का सिद्धांत, न्यूटनी यांत्रिकी और गैलीलीय आपेक्षिकता सिद्धांत आधारभूत रूप से एक-दूसरे के अनुकूल नहीं हैं– उन्हें एक साथ लागू करने पर विसंगति उठ खड़ी होती है। अगर हम इस विसंगति के इतिहास पर नज़र डालें तो पाएंगे कि इसका अध्ययन मूलतः "प्रकाश की समस्या" पर केन्द्रित था। हम भी अपनी चर्चा इसी समस्या पर केंद्रित रखना चाहेंगे। लेकिन इसमें भी हम बहस का सारा दारोमदार प्रकाश के एक ही आयाम पर रखेंगे; वह है प्रकाश का संचरण। आप जानते हैं कि मैक्सवेल की समीकरणों का एक निष्कर्ष यह है कि प्रकाश एक विद्युतचुम्बकीय तरंग है जो सभी दिशाओं में अचर चाल $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ से चलती है। इन समीकरणों का एक और परिणाम यह है कि भले ही प्रकाश का स्रोत गतिमान हो, उससे निकलने वाला प्रकाश फिर भी उसी चाल c से चलता है। इस बात के चलते जब गैलीलीय आपेक्षिकता नियम को प्रकाश के संचरण पर लागू किया जाता है तो एक निहायत ही रोचक समस्या उठ खड़ी होती है। आइए इस समस्या पर थोड़ी और जानकारी हासिल करें।

1.3.2 गैलीलीय आपेक्षिकता और प्रकाश की चाल

प्रकाश का तरंग स्वरूप तो यंग, हाइगन्स और फ्रेनेल आदि द्वारा किए गए काम के आधार पर बहुत पहले से ही जाना जा चुका था। उसी के बाद मैक्सवेल ने प्रकाश के विद्युतचुम्बकीय स्वरूप को उजागर किया। उसी के साथ-साथ उस माध्यम की खोज भी जारी थी जिसमें प्रकाश का संचरण होता है। मिसाल के तौर पर, ध्वनि की तरंगों को संचरण के लिए कोई न कोई माध्यम (जैसे कि हवा, ठोस या तरल आदि) चाहिए। और सागर से उठने वाली तरंगें पानी पर चलती हैं। तो सवाल था कि प्रकाश किस माध्यम में संचरण करता है? 19वीं सदी के भौतिकीविदों का यह मानना था कि प्रकाश एक विरल, सब जगह विद्यमान (यानी संपूर्ण आकाश (space) में भरे हुए) प्रत्यास्थ माध्यम में चलता है, जिसे ल्यूमैनीफेरस ईथर (lumeniferous ether) कहते हैं। ऐसा माना जाता था कि वह इतना बारीक (सूक्ष्म, fine) है कि सभी ग्रह और अन्य आकाशीय पिण्ड बिना किसी घर्षण के उसमें चलते हैं। प्रकाश की तरंगों की विद्युतचुम्बकीय प्रकृति का वर्णन करते हुए मैक्सवेल ने उनसे सम्बद्ध विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों की परिकल्पना कुछ इस तरह की कि वे क्षेत्र ईथर में लग रहे प्रतिबल (stress) और उसके फलस्वरूप हो रही विकृतियाँ (strains) हैं। यही वह माध्यम था जिसमें प्रकाश $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ की चाल से चलता था।

जब ईथर में प्रकाश के संचरण पर गैलीलीय आपेक्षिकता सिद्धांत को लागू किया गया तो उसमें तुरंत एक विसंगति दिखाई दी। इस विसंगति को समझने के लिए आइए एक तंत्र S लें जिसके सापेक्ष प्रकाश वेग $\mathbf{c}$ से चलता है। अब एक दूसरे तंत्र S' में, जो S के सापेक्ष अचर वेग $\mathbf{u}$ से चलता है प्रकाश का वेग क्या होगा? यहाँ हम गैलीलीय वेग रूपांतरण को लागू करके पाते हैं कि

$$\mathbf{v}' = \mathbf{c} - \mathbf{u}, \quad |\mathbf{v}'| = \left(c^2 + u^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

जहां $|\mathbf{v}'|$, S' में प्रकाश की चाल है। यह साफ है कि तंत्र S' में प्रकाश की चाल उस दिशा पर निर्भर करती है जिसमें वह तंत्र चल रहा है। अगर $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ की दिशा में है तो S' में प्रकाश की चाल $c - u$ होगी और अगर $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$ की विपरीत दिशा में है तो S' में प्रकाश की चाल $c + u$ होगी। किसी और दिशा में इसका मान $c - u$ और $c + u$ के बीच में होगा, जैसा कि समीकरण (1.7) से पता चलता है। आप यह भी देख सकते हैं कि गैलीलीय आपेक्षिकता सिद्धांत के मुताबिक अलग-अलग जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में प्रकाश की चाल अलग-अलग होती है। इससे तुरंत यह नतीजा निकलता है कि अलग-अलग जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में मैक्सवेल समीकरणों का स्वरूप अलग-अलग होगा ताकि उन तंत्रों में प्रकाश की चाल के अलग-अलग मान मिलें। इन सब बातों से तो ऐसा लगता है कि गैलीलीय आपेक्षिकता नियम और विद्युतचुम्बकत्व के नियमों का आपसी तालमेल नहीं बैठता क्योंकि इन नियमों के मुताबिक तो प्रकाश की चाल अचर होती है।

अब माना कि हम यह बात स्वीकार कर लेते हैं कि गैलीलीय रूपांतरण और मैक्सवेल समीकरणें, दोनों ही मूलभूत रूप से सत्य हैं। तब इस बात से यह परिणाम निकलता है कि सिर्फ एक ही कोई अद्वितीय (unique), (और बाकी सभी जड़त्वीय तंत्रों के मुकाबले) विशिष्ट जड़त्वीय निर्देश तंत्र (यानी निरपेक्ष तंत्र) होता है जिसमें मैक्सवेल समीकरणें वैध होती हैं। एकमात्र इसी जड़त्वीय तंत्र में प्रकाश की चाल का मान $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ होगा जबकि अन्य तंत्रों में यह उससे अलग होगा।

अब आइए भौतिकी के इन सभी परिणामों को, जिनकी पृष्ठभूमि में आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत का उदय हुआ, एक परिप्रेक्ष्य में रखकर देखें। 19वीं सदी के अंत में स्थिति कुछ इस प्रकार से है: गैलीलीय आपेक्षिकता नियम न्यूटनी यांत्रिकी पर लागू होता है, लेकिन मैक्सवेल के विद्युतचुम्बकत्व के नियमों पर लागू नहीं होता। इस बात से कई संभावनाएं निकलती हैं जिन्हें हमने नीचे सार रूप में दिया है। इन सभी संभव विकल्पों में से हमें सही विकल्प को चुनना होगा।

1. **आपेक्षिकता नियम को यांत्रिकी के लिए सही मानें लेकिन विद्युतचुम्बकत्व के लिए नहीं।**

   इसका मतलब यह है कि न्यूटनी यांत्रिकी में तो कोई फेर-बदल नहीं होगा, लेकिन विद्युतचुम्बकत्व के नियम एक विशिष्ट अद्वितीय निर्देश तंत्र में ही सही होंगे और वह तंत्र ईथर से जुड़ा होगा। अगर यह विकल्प सही हो तो हमें प्रयोगों द्वारा इस ईथर तंत्र का पता लगा सकना चाहिए।

2. **यह मानें कि आपेक्षिकता नियम, यांत्रिकी और विद्युतचुम्बकत्व दोनों पर ही लागू होता है लेकिन विद्युतचुम्बकत्व के नियम सही नहीं हैं।**

   अगर इस विकल्प को हम सही मान लें तो हमें प्रयोगों की मदद से विद्युतचुम्बकत्व के सिद्धांत को गलत साबित करना होगा। और उसके बाद हमें विद्युतचुम्बकत्व के नियमों को दोबारा इस तरह व्यक्त करना होगा कि इन नए नियमों पर भी गैलीलीय रूपांतरण लागू किया जा सके।

3. **आपेक्षिकता नियम को यांत्रिकी और विद्युतचुम्बकत्व, दोनों के लिए सही मानें लेकिन यह मानें कि न्यूटनी यांत्रिकी सही नहीं है।**

   अगर इस विकल्प को सही माना जाए तो हमें प्रयोगों की मदद से न्यूटनी यांत्रिकी को गलत साबित करना होगा। तब हमें न्यूटन के नियमों को फिर से व्यक्त करना पड़ेगा। इसके साथ-साथ हमें गैलीलीय रूपांतरणों को भी छोड़ना होगा क्योंकि वे मैक्सवेल समीकरणों का निश्चर स्वरूप नहीं देते। तब हमें किसी और रूपांतरण की खोज करनी पड़ेगी जो क्लासिकी विद्युतचुम्बकत्व और यांत्रिकी के इन नए नियमों पर एकसमान रूप से लागू होता हो।

यह तय करने के लिए कि इन तीनों में से कौन-सा विकल्प सही है, बहुत से प्रयोग और खोजें की गईं। अंततः इनकी परिणति यह हुई कि इनसे, पहले और दूसरे विकल्प को नकारने के लिए एक प्रायोगिक आधार तैयार हुआ। इनमें से सबसे प्रसिद्ध है वह प्रयोग जो 1887 में माइकलसन और मोर्ले ने निरपेक्ष तंत्र को खोजने के लिए किया। आपने प्रकाशिकी नामक भौतिकी के ऐच्छिक पाठ्यक्रम पी.एच.ई-09 के खंड 2 की इकाई 7 में इस प्रयोग के बारे में पढ़ा है। फिर भी हम यहाँ इस ऐतिहासिक प्रयोग को संक्षेप में बताना चाहेंगे।

1.3.3 निरपेक्ष तंत्र ढूंढने का प्रयास: माइकलसन-मोर्ले प्रयोग

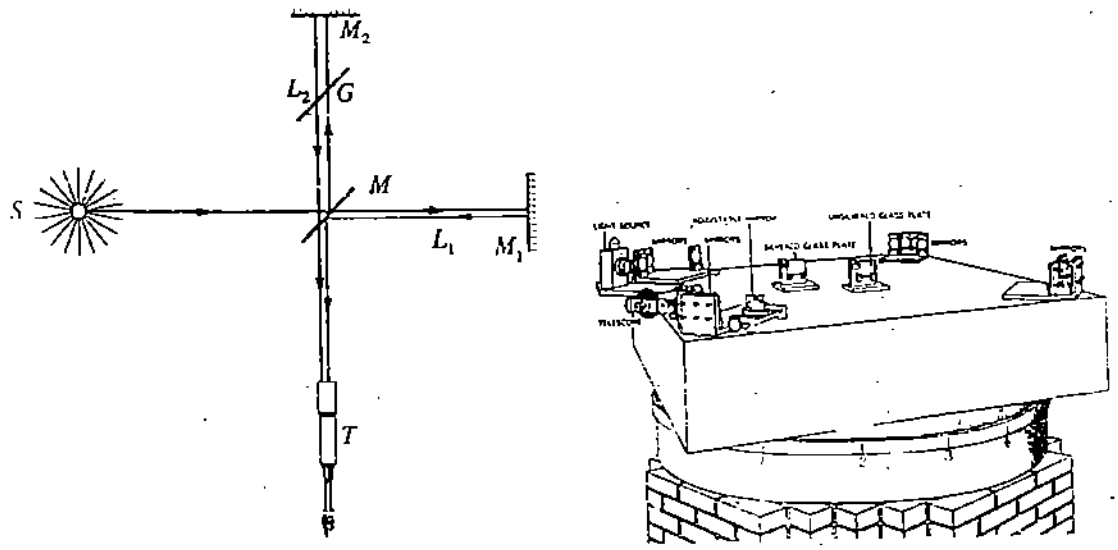
आइए सबसे पहले हम यह समझें कि इस प्रयोग से क्या छानबीन की जा रही थी। इसके लिए एक आसान उदाहरण लेते हैं। जब हम यह कहते हैं कि ध्वनि 340 ms^{-1} की चाल से चलती है तो हम वास्तव में हवा के सापेक्ष ध्वनि की चाल की बात कर रहे होते हैं क्योंकि वह हवा में संचरण कर रही होती है। अगर हम शांत वायुमंडल में (जिसमें हवा स्थिर हो) अपनी ओर आ रही एक ध्वनि तरंग की ओर (हवा के सापेक्ष) 30 ms^{-1} की चाल से चलें तो हम ध्वनि की चाल का मान 310 ms^{-1} मापेंगे। यह साफ़ है कि हमारे सापेक्ष ध्वनि की चाल, हवा के सापेक्ष हमारी चाल पर निर्भर करती है।

अब ईथर की परिकल्पना के मुताबिक हम यह कह सकते हैं कि सूरज के चारों तरफ़ चक्कर काटते हुए पृथ्वी ईथर के माध्यम में चल रही है। तो ऊपर दिए गए ध्वनि के उदाहरण से तुलना करके हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि पृथ्वी पर स्थित किसी प्रेक्षक के सापेक्ष प्रकाश की चाल, ईथर के सापेक्ष पृथ्वी की चाल पर निर्भर करेगी। पृथ्वी, 30 $km\,s^{-1}$ की चाल से सूर्य की परिक्रमा करती है जोकि प्रकाश की चाल का लगभग 0.01% (10^{-4}) है। प्रकाश की चाल में परिवर्तन का यही वह मान है जिसे हम ईथर में चल रही पृथ्वी पर किए गए प्रयोगों में माप सकते हैं। 1881 में अकेले माइकलसन ने और बाद में 1887 में माइकलसन और मोर्ले ने एक प्रयोग किया जो इसी परिवर्तन को मापने के लिए डिज़ाइन किया गया था।

इस प्रयोग में मूल रूप से यह किया गया : एक स्रोत से एक दर्पण तक प्रकाश का संकेत भेजा गया, जिसने प्रकाश को परावर्तित कर दिया। फिर इस प्रक्रिया में लिया गया कुल समय मापा गया। यह प्रयोग दो बार किया गया :

(1) ईथर में पृथ्वी की गति की दिशा में और

(2) ईथर में पृथ्वी की दिशा के लम्बवत्।



(क) (ख)

चित्र 1.3: (क) माइकलसन-मोर्ले प्रायोगिक व्यवस्था का रेखाचित्र; (ख) वह प्रायोगिक उपकरण जिसका माइकलसन और मोर्ले ने इस्तेमाल किया।

प्रयोग में स्रोत S से (जो उपकरण के सापेक्ष स्थिर है) प्रकाश का एक किरण पुंज एक आंशिक रूप से रजतित (partially silvered) दर्पण M पर आपतित होता है और वहां दो कला संबद्ध (coherent) किरण पुंजों में बंट जाता है। दर्पण M प्रकाश के आपतित किरण पुंज की दिशा से 45° का कोण बनाता है (चित्र 1.3 क)। दर्पण M से लगभग बराबर दूरी पर दो दर्पण M_1 और M_2 ~~रखे जाते हैं जोकि एक-दूसरे के लम्बवत्~~ हैं। ये दोनों दर्पण किरण पुंज को परावर्तित करते हैं और वे वापस M पर पहुंचते हैं। क्रमश: M_1 और M_2 से परावर्तित ये दोनों किरण पुंज M पर फिर से मिलते हैं और फिर इन्हें दूरबीन T से देखा जाता है। ध्यान दीजिए कि चूंकि MM_1 पथ पर जाने के लिए प्रकाश M से होकर गुज़रता है, इसलिए वह MM_2 पथ के मुकाबले ज़्यादा दूरी तय करता है। इस अतिरिक्त दूरी की भरपाई करने के लिए M और M_2 के बीच में एक प्लेट G भी रखी जाती है जिससे कि दोनों पथों पर प्रकाश द्वारा तय की गई दूरी लगभग बराबर रहे। अब अगर आपने पी.एच.ई.-09 का खंड 2 पढ़ा है तो आपने जान लिया होगा कि जब इस किरण पुंज के दोनों परावर्तित भाग फिर से M पर मिलते हैं तो उनका व्यतिकरण (interference) होता है। अब माना कि M से M_1 तक जाकर M पर वापस लौटने में प्रकाश द्वारा लिया गया समय t है और M से M_2 तक जाकर वापस लौटने में प्रकाश द्वारा लिया गया समय t' है। तो किसी दिए हुए बिंदु पर व्यतिकरण संपोषी (constructive) होगा अगर उस बिंदु पर

$$t' \sim t = nT, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots \qquad (1.8\ \text{क})$$

और विनाशी (destructive) होगा अगर

$$t' \sim t = n + \frac{1}{2}\ T, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad (1.8\ \text{ख})$$

जहाँ T प्रकाश तरंग का आवर्त काल है। इस तरह प्रकाश द्वारा तय किए गए दोनों पथों के बीच में समयांतराल होने के कारण दूरबीन से देखे जा रहे किसी बिंदु (माना A) की प्रदीप्ति (illumination) प्रभावित होती है। अगर व्यतिकरण संपोषी हो तो वह बिंदु चमकीला दिखता है और अगर वह विनाशी हो तो वह अदीप्त (dark) होता है। अगर M_1 और M_2 लगभग एक-दूसरे के लम्बवत् हों तो यह व्यतिकरण फ्रिंज पैटर्न लगभग समांतर रेखाओं का बना होता है।

अब मान लीजिए कि हम M, M_1 और M_2 के तल में पूरे उपकरण को 90° से घुमा देते हैं। तब ईथर में पृथ्वी की गति की दिशा के सापेक्ष, MM_1 और MM_2 के अभिविन्यास (orientation) की दिशा बदल जाएगी। इस तरह उपकरण को घुमाने से, प्रकाश द्वारा इन पथों की दूरी तय करने में लिया गया समय भी बदल जाएगा और इसके साथ-साथ बिंदु A पर प्रकाश की प्रदीप्ति भी बदल जाएगी। या हम कह सकते हैं कि इससे फ्रिंज पैटर्न अपनी जगह से थोड़ा-सा विस्थापित हो जाएगा। उपकरण के घूमने के कारण किसी भी दिए हुए बिंदु पर प्रकाश की प्रदीप्ति में हो रहे इसी परिवर्तन को, यानि कि व्यतिकरण फ्रिंज पैटर्न के स्थानांतरण को ही माइकलसन ने प्रयोग द्वारा मापने की कोशिश की थी। इस अपेक्षित फ्रिंज स्थानांतरण का परिमाण लगभग एक फ्रिंज के 4/10वें हिस्से के बराबर था।

माइकलसन और मोर्ले ने निहायत ही सावधानीपूर्वक यह प्रयोग किया और त्रुटियों के सभी संभव स्रोतों, मसलन बाह्य बल या तापीय प्रभाव आदि, को हटाने की कोशिश की। इतनी सावधानी से किए गए प्रयोग में यह स्थानांतरण साफ़-साफ़ दिखाई देना चाहिए था। लेकिन फिर भी प्रयोग में,

फ्रिंज पैटर्न में कोई स्थानांतरण नहीं देखा गया।

आप यह कह सकते हैं कि जिस समय यह प्रयोग किया जा रहा था, हो सकता है कि उस समय पृथ्वी ईथर के सापेक्ष विरामावस्था में रही हो, इसलिए यह परिणाम मिला हो।

लेकिन छह महीने बाद किए जाने पर भी इस प्रयोग का परिणाम नहीं बदला। और वाकई, में इस प्रयोग को पचास साल की अवधि में कई लोगों ने कई बार किया, कहीं बेहतर तरीकों से किया और साल भर में अलग-अलग समयों पर किया। लेकिन परिणाम हमेशा ही वही रहा। जहां तक खुद माइकलसन का सवाल था, उनके हिसाब से इस परिणाम का एक ही मतलब निकलता था:

विरामावस्था में स्थित ईथर की परिकल्पना का परिणाम ग़लत साबित होता है।

कहना न होगा कि ईथर की परिकल्पना को तुरंत ही नहीं छोड़ दिया गया। ईथर की परिकल्पना को बनाए रखने के लिए, इस प्रयोग के परिणाम को समझाने के लिए तमाम तरह के संभव उत्तर खोजे और दिए गए। हम उन सभी बातों के बारे में यहाँ पर विस्तार से नहीं बताएंगे। समय गुज़रने के साथ, जैसे-जैसे और परिणाम आते गए, यह पाया गया कि या तो इस तरह के सभी उत्तर प्रेक्षणों और प्रयोगों से प्रमाणित नहीं किए जा सकते थे या फिर उनका कोई तार्किक आधार नहीं था।

आइंस्टीन को अपने काम की प्रेरणा इन दोनों ही बातों से मिली– निरपेक्ष तंत्र के तौर पर ईथर की समस्या से और मैक्सवेल के विद्युतचुम्बकत्व सिद्धांत पर अपने विचारों से, ख़ास तौर पर फ़ैराडे के विद्युतप्रेरण के नियम पर अपने विचारों से। पी.एच.ई.-07 की इकाई 13 से याद कीजिए कि फ़ैराडे का विद्युतचुंबकीय प्रेरण नियम तार के लूप और चुंबक की आपेक्षिक गति की बात करता है। इस गति और चुंबक के चुंबकीय क्षेत्र के कारण ही तार लूप में धारा बहती है। उस समय पर इस प्रभाव की जो व्याख्या की गई उसमें असममिति थी। जब चुंबक के निर्देश तंत्र में व्याख्या की जाती थी तब एक परिणाम मिलता था और लूप के निर्देश तंत्र में व्याख्या करने पर दूसरा। आइंस्टीन को लगा कि क्योंकि इस परिघटना में केवल आपेक्षिक गति हो रही है, इसलिए इसमें पूर्ण रूप से सममिति होनी चाहिए। उन्होंने इस समस्या को आपेक्षिकता का नियम देकर सुलझाया– अभिगृहीत के ज़रिए उन्होंने उस बात को व्यक्त किया जिसे (उनका मानना था कि) प्रकृति हमें सदा ही बताना चाह रही थी। उनकी दृष्टि में प्रकाश की चाल के अचर होने की व्याख्या करने की ज़रूरत नहीं थी; यह तो प्रकृति का एक नया नियम था जिसे स्वीकार किया ही जाना चाहिए था।

माइकलसन-मोर्ले प्रयोग से प्राप्त इस परिणाम की जाँच, प्रकाश की चाल मापने के लिए किए गए बहुत से प्रयोगों द्वारा बार-बार की गई और हर बार यही परिणाम सही साबित हुआ। वास्तव में, मुक्त आकाश में प्रकाश की चाल का मान सभी समयों पर अचर पाया गया है। वह उस स्थान पर निर्भर नहीं करता, जहां मापन किए जाते हैं। प्रकाश की चाल, प्रकाश की आवृत्ति पर, उसके स्रोत की प्रकृति या गति पर और उसके संचरण की दिशा पर भी निर्भर नहीं करती। इसका मान सभी जड़त्वीय तंत्रों के सापेक्ष अचर है। इस प्रकार, प्रयोगों द्वारा निर्विवाद रूप से यह स्थापित हो गया है कि

मुक्त आकाश में, प्रकाश की चाल एक सार्वत्रिक अचर है।

ज़ाहिर है कि यह परिणाम गैलीलीय आपेक्षिकता नियम का विरोध करता है। इसी के साथ-साथ प्रयोगों द्वारा विद्युतचुम्बकत्व के नियम भी सही साबित होते हैं। इसके अलावा, 20वीं सदी की शुरुआत में किए गए कुछ प्रयोगों में यह देखा गया कि सभी स्थितियों पर न्यूटनी यांत्रिकी लागू नहीं होती – कहीं-कहीं उसका उल्लघंन भी होता है। इस सिलसिले में 1902 में, प्रयोगों द्वारा रेडियोधर्मी स्रोतों से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की, विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों में, गति का अध्ययन किया गया। तब यह पाया गया कि न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा इन इलेक्ट्रॉनों की गति, जिनकी चाल प्रकाश की चाल के काफ़ी नज़दीक थी, को सही-सही नहीं समझाया जा सकता।

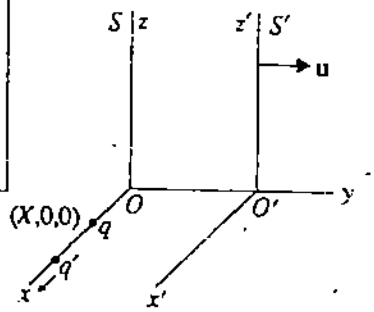
अब आइए इस बातचीत का सार समझें: अभी तक हमने यह पाया है कि क्लासिकी आपेक्षिकता नियम का विद्युतचुम्बकत्व के नियमों से तालमेल नहीं बैठता है। माइकलसन-मोर्ले प्रयोग द्वारा ईथर का यानी कि एक निरपेक्ष निर्देश तंत्र का पता नहीं लगाया जा सका। इसलिए ईथर की परिकल्पना स्वीकार्य नहीं है। प्रयोग द्वारा यह भी तय किया जा चुका है कि मुक्त आकाश में प्रकाश की चाल अचर होती है। और तो और, प्रकाश की चाल के नज़दीक की चालों से चल रहे इलेक्ट्रॉनों की विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों में गति पर किए गए प्रयोगों से साबित हुआ कि बहुत अधिक चाल से चल रहे कणों के लिए न्यूटन की गति के नियम सही नहीं होते। इन सभी बातों के आधार पर हम कह सकते हैं कि यहाँ पर ज़रूर एक ऐसा आपेक्षिकता सिद्धांत काम कर रहा है जो यांत्रिकी और विद्युतचुम्बकत्व, दोनों पर लागू होता है। यह साफ़ है कि वह क्लासिकी (गैलीलीय) आपेक्षिकता सिद्धांत नहीं है क्योंकि उसके मुताबिक प्रकाश की चाल का मान उस तंत्र पर निर्भर करता है जिसमें कि उसे मापा जा रहा है। इस तरह हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि गैलीलीय रूपांतरणों को छोड़ना पड़ेगा और इनकी जगह कोई नया रूपांतरण खोजना पड़ेगा। और इसी कारण से यांत्रिकी के नियमों को, जो कि गैलीलीय रूपांतरणों के संगत हैं, बदलना होगा।

अभी तक की गई चर्चा से आपको उस पृष्ठभूमि का अंदाज़ा लगा होगा जिसमें विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत का उदय हुआ। आइए अब हम आइंस्टीन द्वारा दिए गए आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत की चर्चा करें।

1.4 आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत

आपने पिछले भाग में पढ़ा कि सभी जड़त्वीय तंत्रों में प्रकाश की चाल के अचर होने का तथ्य गैलीलीय रूपांतरण का विरोध करता है। 1905 में, एल्बर्ट आइंस्टीन ने इस विरोधाभास को दूर करने के लिए एक निहायत ही क्रांतिकारी प्रस्ताव रखा। विद्युतचुम्बकत्व के सिद्धांत को अस्वीकार करके बदलने के बजाय, उन्होंने ईथर की परिकल्पना को पूरी तरह से नकार दिया और साथ ही साथ गैलीलीय आपेक्षिकता नियम का व्यापकीकरण (generalisation) किया। अपने पर्चे "ऑन द इलैक्ट्रोडायनामिक्स ऑफ मूविंग बॉडीज़" (On the Electrodynamics of Moving Bodies) में आइंस्टीन ने विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के दो आधारभूत अभिगृहीत (postulate) प्रस्तुत किए जिन्हें हम आजकल की भाषा में यहाँ दे रहे हैं :

> **आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के अभिगृहीत**
>
> **अभिगृहीत 1:** आपेक्षिकता का नियम
> सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में भौतिकी के नियम समान होते हैं: उनका एक ही स्वरूप होता है।
>
> **अभिगृहीत 2:** प्रकाश की चाल की अचरता का नियम
> सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में, प्रकाश की चाल का (निर्वात में) मान अचर रहता है।



चित्र 1.4: एक धनात्मक आवेश q, तंत्र S में $x = X$, $y = 0$ और $z = 0$ पर स्थिर है। x-अक्ष पर छोड़े गए एक और धनात्मक आवेश q' पर त्वरण लगता है जो उसे q से दूर ले जाता है।

इन दोनों अभिगृहीतों के आधार पर आइंस्टीन ने भौतिकी में एक नया सिद्धांत विकसित किया जिसे हम आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत (special theory of relativity) के नाम से जानते हैं। यह विशिष्ट इसलिए है कि यह केवल जड़त्वीय तंत्रों में किए गए प्रेक्षणों की बात करता है। उदाहरण के लिए, यह इस बारे में कुछ नहीं कहता कि एक दूसरे के सापेक्ष त्वरित गति करते हुए दो निर्देश तंत्रों के बीच में क्या संबंध है। ऐसे अजड़त्वीय तंत्रों की बात आइंस्टीन ने एक और सिद्धांत में की है जिसे हम आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत (general theory of relativity) कहते हैं।

आइए अब हम इन दोनों अभिगृहीतों को समझें।

1.4.1 आपेक्षिकता का नियम

आपने भाग 1.2.2 में संक्षेप में गैलीलीय आपेक्षिकता नियम के बारे में पढ़ा है जो न्यूटन के यांत्रिकी के नियमों पर लागू होता है। वास्तव में आइंस्टीन ने इसी नियम को व्यापक बनाकर, इसे भौतिकी के सभी नियमों पर लागू किया, जिसके अनुसार कोई भी भौतिकी का नियम जो किसी भी जड़त्वीय तंत्र में सत्य है, अन्य सभी जड़त्वीय तंत्रों में भी सत्य होगा। आइए इस कथन को एक उदाहरण की मदद से समझें।

चित्र 1.4 देखें। माना कि एक स्थिर जड़त्वीय तंत्र S में एक धनात्मक विद्युत आवेश q बिंदु $(X, 0, 0)$ पर स्थित है। अब अगर किसी दूसरे धनात्मक आवेश q' को x-अक्ष के किसी बिंदु पर विरामावस्था से x-अक्ष के अनुदिश छोड़ा जाए तो वह $x = X$ पर रखे स्थिर आवेश q से विपरीत दिशा की ओर त्वरित होगा। अब हम प्रयोग द्वारा यह मालूम कर सकते हैं कि गतिमान आवेश के त्वरण के x घटक और स्थिर आवेश से उसकी

दूरी के बीच क्या संबंध होगा। किसी आवेशित कण से दूर हट रहे एक और आवेशित कण के लिए यह संबंध निम्न प्रकार का होगा :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{(x - X)^2} \qquad (1.9 \text{ क})$$

जहाँ k एक अचर है।

अब माना कि एक और प्रेक्षक एक जड़त्वीय तंत्र S' में स्थित है जो S के सापेक्ष अचर वेग $\mathbf{u}$ से चल रहा है। आपेक्षिकता का नियम हमें बताता है कि अगर समीकरण (1.9 क) वास्तव में भौतिकी का नियम है तो S' तंत्र के प्रेक्षक को भी निम्न संबंध मिलना चाहिए:

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{k'}{(x' - X')^2} \qquad (1.9 \text{ ख})$$

जहाँ X', S' तंत्र के x' अक्ष पर नियत आवेश q की स्थिति है। इसलिए, भले ही x', t', X', k' के मान x, t, X और k के मानों से अलग हों, लेकिन उनके बीच का संबंध वही है जो समीकरण (1.9 क) द्वारा दिया जाता है। इसके उलट, हम यह भी कह सकते हैं कि किसी भी समीकरण को, जिसे सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक-जैसे रूप में नहीं लिखा जा सकता, हम भौतिकी का नियम नहीं मान सकते। इस तरह आपेक्षिकता का नियम हमें यह भी बताता है कि भौतिकी में कौन-से संबंध (या कौन-सी समीकरणें) नियम कहला सकते हैं और कौन से नहीं।

यह भी ध्यान देने वाली बात है कि इस नियम का इस्तेमाल करके आइंस्टीन ने यह खोज की कि तमाम समीकरणें जिन्हें उनके समय में "भौतिकी के नियम" के तौर पर मान्यता मिली थी, नियम हो ही नहीं सकती थीं; भले ही उनकी उस समय तक किए गए प्रयोगों द्वारा पुष्टि की जा चुकी थी। उन्होंने ऐसे कई 'नियमों' के वैकल्पिक सुधरे हुए रूप दिए– ऐसे स्वरूप जिन्हें आपेक्षिकता के नियम के मुताबिक सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक ही तरह से लिखा जा सकता था। बाद में किए गए प्रयोगों से पता चला है कि ये पुराने 'नियम' भले ही अपने समय के प्रयोगों पर खरे उतरते रहे हों आज उपलब्ध प्रायोगिक परिणामों की व्याख्या नहीं कर सकते।

संक्षेप में, आपेक्षिकता का नियम हमें यह बताता है कि प्रकृति के नियम किसी जड़त्वीय तंत्र के चुनाव या प्रेक्षक की स्थिति या गति पर निर्भर नहीं करते। सभी जड़त्वीय तंत्रों में उनका एक ही स्वरूप होता है। यह बात ज़रूर है कि अलग-अलग जड़त्वीय तंत्रों में भौतिक राशियों, जैसे कि स्थितियों, समय, वेग, ऊर्जा, संवेग, विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों आदि के मान अलग-अलग हो सकते हैं। लेकिन इन राशियों के बीच के संबंध, जो कि विभिन्न नियमों द्वारा दिए जाते हैं, सभी जड़त्वीय तंत्रों में समान रहेंगे।

दार्शनिक तौर पर अगर हम इसी बात को समझना चाहें तो हम कहेंगे कि आपेक्षिकता का नियम प्रकृति के नियमों की वस्तुपरकता (objectivity) को उजागर करता है। यह नियम ऐसा कतई नहीं कहता कि ज्ञान आपेक्षिक है, यानी व्यक्ति, व्यक्ति की समझ के अनुसार ज्ञान बदलता रहता है।

अक्सर भौतिकी की किताबों में आपेक्षिकता के सिद्धांत को एक और तरह से प्रस्तुत किया जाता है जिसे आप भी कहीं न कहीं ज़रूर पढ़ेंगे। वह इस तरह से है: भौतिकी के नियम हमें विभिन्न जड़त्वीय तंत्रों में भेद करने की अनुमति नहीं देते।

दूसरे शब्दों में कहें, तो आप किसी भी प्रयोग से यह नहीं पता लगा सकते कि आप **विरामावस्था में हैं या एकसमान गति की अवस्था में हैं।** क्योंकि अगर मान लें कि ऐसा कोई प्रयोग किया जा सकता है तो इसका यह मतलब होगा कि भौतिकी के नियम किसी न किसी रूप में आपके वेग पर निर्भर करते हैं और भौतिकी के उन नियमों से अलग हैं जो कि तब लागू हो रहे थे, जब आप विरामावस्था में थे। यह बात साफ़ तौर पर आपेक्षिकता के नियम का विरोध करती है।

आपको यह अच्छी तरह समझ लेना चाहिए कि आपेक्षिकता का नियम यह दावा नहीं करता कि सभी जड़त्वीय तंत्र सभी लिहाज़ से एक जैसे हैं; यानी कि इनमें हर भौतिक राशि का मापन करने पर एक ही मान मिले, यह बिल्कुल ज़रूरी नहीं। इस बात को और बेहतर तरीक़े से समझने के लिए दो अंतरिक्ष यानों की कल्पना कीजिए जो किसी

जड़त्वीय तंत्र S के सापेक्ष अलग-अलग अचर वेग से चल रहे हैं। आपेक्षिकता का नियम हमें बताता है कि जहाँ तक भौतिकी के नियमों का यानी भौतिक राशियों के बीच के संबंधों का सवाल है, हम इन दो तंत्रों में कोई भेद नहीं कर सकते। लेकिन अगर इन अंतरिक्ष यानों में बैठे अंतरिक्ष यात्री इनमें लगी खिड़की से बाहर देखेंगे तो यह आसानी से जान जाएंगे कि S के सापेक्ष ये दोनों यान अलग-अलग वेगों से चल रहे हैं। तो क्या यह बात आपेक्षिकता के नियम का विरोध करती है? बिल्कुल नहीं, क्योंकि भौतिकी के नियम S के सापेक्ष अंतरिक्ष यानों के वेग का संबंध नहीं देते बल्कि उनके त्वरण का संबंध देते हैं। इसके अलावा, आपेक्षिकता के नियम को इस तरह व्यक्त करने में अंतर्निहित वास्तविक प्रतिबंध यह है कि ये अंतरिक्ष यान एक-दूसरे से पूरी तौर पर विलगित (isolated) हैं। इनके अंदर बैठे हुए प्रेक्षक इनके बाहर के संसार को नहीं देख सकते। और साथ ही यह याद रखें कि यह नियम जड़त्वीय तंत्रों के लिए दिया गया है।

विशिष्ट आपेक्षिकता का उदय

हमारी सलाह है कि आप इस भाग में की गई चर्चा पर गंभीरतापूर्वक सोचें। इसके लिए आपको इन संकल्पनाओं को एक से ज़्यादा बार पढ़ना पड़ सकता है। शायद अब आप एक बोध प्रश्न करना चाहेंगे, यह जानने के लिए कि आपने आपेक्षिकता के नियम को भली-भांति समझा है कि नहीं।

बोध प्रश्न 4

10 मिनट लगाएं

(क) माना कि S' तंत्र के एक प्रेक्षक को प्रयोग द्वारा समीकरण (1.9 ख) का प्रमाण मिलता है। तो क्या इससे अपने आप साबित हो जाता है कि समीकरण (1.9 ख) भौतिकी का नियम है?

(ख) माना कि आप एक जड़त्वीय तंत्र में एक कण की गति का प्रेक्षण कर रहे हैं। आप पाते हैं कि उस कण के त्वरण का x घटक निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है।

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 [(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2]$$

जहाँ k_1 और k_2 अचर हैं और (X, Y, Z) आपके तंत्र में स्थित एक दूसरे कण के निर्देशांक हैं। यदि इस समीकरण को भौतिकी के एक नियम के रूप में मान्यता देनी हो तो किसी और जड़त्वीय तंत्र में स्थित एक प्रेक्षक को प्रयोग द्वारा किस प्रकार का संबंध सत्यापित करना होगा?

हमने इस बात के ऐतिहासिक महत्व के कारण इसे यहां बताया है। जब आइंस्टीन से पूछा गया कि उन्होंने विशिष्ट आपेक्षिकता पर कितने दिन काम किया, तब उन्होंने बताया कि उन्होंने इस पर 16 वर्ष की उम्र से काम शुरू किया और वे दस साल तक उस पर लगे रहे। इस दौरान उनके कई प्रयास असफल रहे जब तक कि उन्हें यह नहीं समझ आया कि 'समस्या के केंद्र पर समय की अवधारणा' थी– खासकर, यह मान्यता कि समय सार्वत्रिक राशि है जो हर प्रेक्षक के लिए समान है। इस भाग में हम संक्षेप में इसी आयाम की चर्चा करेंगे।

आइए अब आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के दूसरे अभिगृहीत के बारे में पढ़ें।

1.4.2 प्रकाश की चाल की अचरता का नियम

वस्तुतः प्रकाश की चाल के अचर होने का यह दूसरा अभिगृहीत, आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत में बहुत महत्वपूर्ण स्थान रखता है। ऐसा इसलिए है कि इसी के कारण निरपेक्ष दिक्-काल की उन क्लासिकी अवधारणाओं को पूरी तरह बदलना पड़ा जो कि तब तक मानी जाती थीं। यहाँ हम संक्षेप में इस अभिगृहीत का महत्व समझाएंगे। खास तौर पर हम समय की अवधारणा पर इसके प्रभाव के बारे में बात करेंगे।

विशिष्ट आपेक्षिकता में काल की प्रकृति

आप जानते हैं कि न्यूटनी यांत्रिकी की एक मूलभूत अवधारणा यह है कि सभी जड़त्वीय तंत्रों में काल का एक ही पैमाना लागू होता है (याद करें कि गैलीलीय रूपांतरण में दो जड़त्वीय तंत्रों में समय का संबंध था : $t' = t$)। अगर काल का यह पैमाना सार्वत्रिक है तो इसका इस्तेमाल करके हमें (जड़त्वीय तंत्र का ज़िक्र किए बिना ही) ऐसे कथनों को

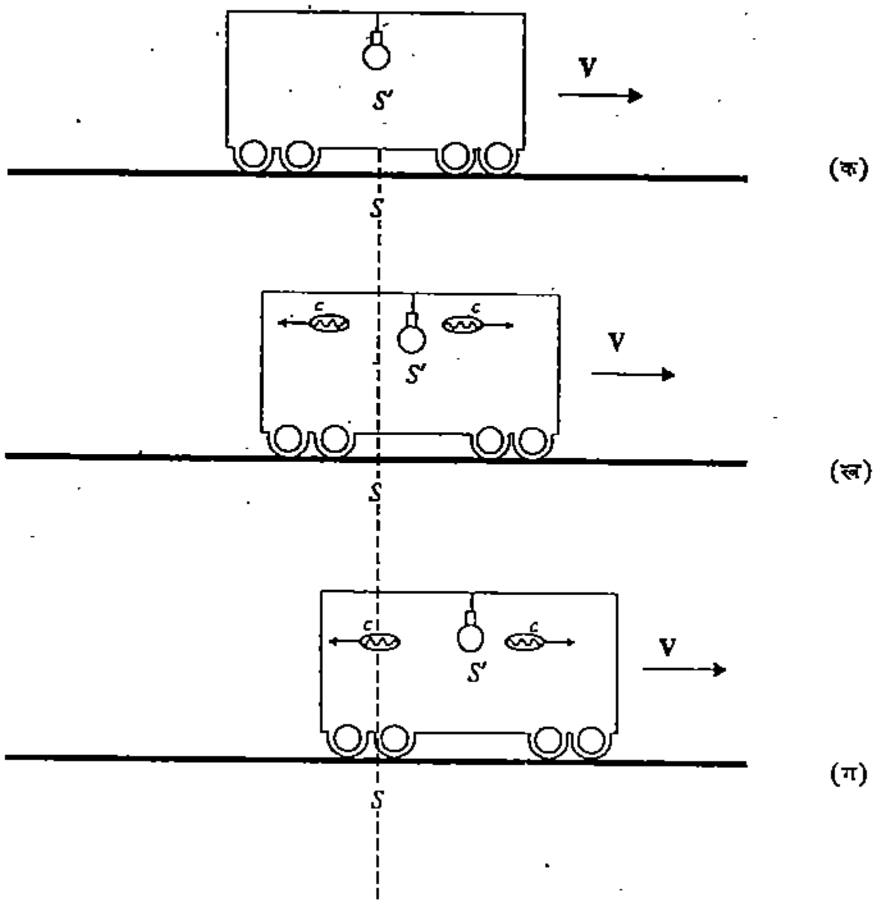
कुछ अर्थ दे सकना चाहिए : घटनाएं A और B एक ही क्षण पर घटीं। आइए हम आइंस्टीन का दिया हुआ एक उदाहरण लें: जब हम कहते हैं कि प्लेटफ़ॉर्म पर एक रेलगाड़ी सात बजे आती है तो इसका क्या मतलब है? इस बात का यह मतलब है कि घड़ी की सुई का सात के अंक पर पहुँचना और रेलगाड़ी का प्लेटफ़ॉर्म पर आना दो घटनाएँ हैं जो एक साथ, एक ही क्षण पर घटती हैं।

इस प्रकार, जब हम यह कहते हैं कि फलां घटनाएं किसी एक ख़ास समय पर घटीं तो दरअसल हम यह तय कर रहे होते हैं कि वे एक साथ घटी या नहीं। इसलिए किन्हीं दो घटनाओं के बारे में (उदाहरण के लिए, रेलगाड़ी का स्टेशन पर आना और घड़ी की सुई का सात पर पहुँचना) अगर सभी प्रेक्षक सहमत हों कि वे समकालिक (simultaneous) हैं, (यानी एक साथ एक ही क्षण पर घटी हैं) भले ही वे प्रेक्षक किसी भी बिंदु पर स्थित हों या किसी भी वेग से गतिमान हों, तो हम यक़ीनी तौर पर कह सकेंगे कि निरपेक्ष न्यूटनी काल पैमाने का वास्तव में अस्तित्व है। अगर आपको यह बात समझने में मुश्किल लगे तो इसे दो-तीन बार पढ़कर अच्छी तरह समझ कर ही आगे बढ़ें।

और अगर अलग-अलग जड़त्वीय प्रेक्षक दो घटनाओं के एक-साथ घटने (यानी समकालिक होने) के बारे में सहमत नहीं होते तो फिर हमारे पास एक निरपेक्ष काल पैमाने की बात करने का कोई तार्किक आधार नहीं रह जाएगा। यानी अगर एक जड़त्वीय प्रेक्षक यह कहे कि दो घटनाएं एक ही क्षण पर घटीं और उन्हीं घटनाओं के लिए दूसरा जड़त्वीय प्रेक्षक कहे कि वे दोनों एक ही क्षण पर नहीं घटीं तो हम निरपेक्ष काल पैमाने की बात नहीं कर पाएंगे। और ठीक ऐसा ही होता है जब हम प्रकाश की चाल के अचर होने के नियम को स्वीकार करते हैं। आइए इस बात को हम एक काल्पनिक प्रयोग की मदद से और बेहतर तरीक़े से समझें।

हम एक रेलगाड़ी के डिब्बे का उदाहरण लेते हैं जो पृथ्वी पर विरामावस्था में स्थित एक प्रेक्षक S के सापेक्ष दायीं ओर अचर वेग $\mathbf{V}$ से गतिमान है जिसका मान बहुत अधिक है (देखें चित्र 1.5)। इस डिब्बे के बीचोंबीच एक तेज़ गति से चलने वाला फ़्लैश बल्ब लगाया गया है। जब यह बल्ब फ्लैश करता है तो यह अपने दायीं और बायीं ओर प्रकाश स्पंद उत्सर्जित करता है। डिब्बे के दोनों सिरों पर फोटो सैल रखे गए हैं ताकि डिब्बे में बैठा प्रेक्षक S' यह पता लगा सके कि प्रकाश के स्पंद उन सिरों पर कब पहुंचते हैं। अब माना कि किसी अभूतपूर्व तकनीक द्वारा पृथ्वी पर खड़ा प्रेक्षक S भी इन दोनों स्पंदों की गति का प्रेक्षण और मापन कर सकता है। मान लीजिए कि S और S' के मूल बिंदुओं की स्थितियाँ बल्ब की स्थिति से उस क्षण पर संपाती होती हैं, जब वह फ़्लैश करता है (चित्र 1.5 क)।

अब यह फ़्लैश बल्ब डिब्बे में स्थित प्रेक्षक S' के सापेक्ष विरामावस्था में है। चूँकि यह डिब्बे के ठीक बीचोंबीच स्थित है इसलिए जब यह फ्लैश करता है तो S' के सापेक्ष प्रकाश के दो स्पंद डिब्बे के दोनों सिरों तक पहुँचने के लिए बराबर समय में बराबर दूरी तय करते हैं। इसलिए S' यह प्रेक्षण करता है कि डिब्बे के दोनों सिरों पर ये दोनों प्रकाश स्पंद एक ही क्षण पर पहुँचते हैं। क्या पृथ्वी पर स्थिर खड़ा प्रेक्षक S भी इसी नतीजे पर पहुँचता है? इसके जवाब के लिए देखें चित्र 1.5 (ख) और (ग)। प्रकाश के ये स्पंद S' के सापेक्ष, अपने दायीं और बायीं ओर बराबर समय में बराबर दूरी तय करते हैं। लेकिन S के तंत्र में रेल का डिब्बा दायीं ओर चल रहा है। इसलिए S के तंत्र में, जिस बिंदु पर S बल्ब को फ़्लैश करते हुए देखता है, उस बिंदु और डिब्बे के बायें सिरे के बीच की दूरी, उसी बिंदु और डिब्बे के दाएं सिरे के बीच दूरी की तुलना में कम होती है। इसके नतीजतन S यह मापता है कि डिब्बे के बायें सिरे पर प्रकाश का स्पंद, डिब्बे के दायें सिरे पर पहुँचने वाले प्रकाश के स्पंद की अपेक्षा, पहले पहुँचता है। इस तरह, S के निर्देश तंत्र में, ये दोनों प्रकाश के स्पंद डिब्बे के सिरों पर एक-साथ, एक ही क्षण पर नहीं पहुँचते।



चित्र 1.5: चलती रेलगाड़ी के डिब्बे में स्थित जड़त्वीय प्रेक्षक S' द्वारा की गई माप से बिल्कुल अलग, पृथ्वी पर स्थित अचल प्रेक्षक मापता है कि प्रकाश स्पंद डिब्बे के सिरों तक एक ही क्षण पर नहीं पहुँचते। ये चित्र जड़त्वीय प्रेक्षक S के सापेक्ष हैं।

अब अगर न्यूटनी यांत्रिकी सही होती तो S के तंत्र में ये दोनों स्पंद एक-साथ दोनों सिरों पर पहुँचते: यह बात S के तंत्र में प्रकाश की मापी गई भिन्न चालों के ज़रिए समझायी जा सकती थी। प्रेक्षक S बायीं ओर चलने वाले स्पंद की चाल $(c - V)$ मापता क्योंकि वह स्पंद रेलगाड़ी की गति के विपरीत दिशा में गतिमान है। दायीं ओर चलने वाला स्पंद ज़्यादा दूरी चलेगा लेकिन उसकी चाल भी ज़्यादा होगी जोकि $(c + V)$ के बराबर है। इस तरह S दोनों ही समयांतरालों का एक ही मान मापेगा और इस निष्कर्ष पर पहुँचेगा कि दोनों ही स्पंद डिब्बे के सिरों पर एक ही क्षण पहुँचते हैं।

लेकिन, प्रकाश की चाल तो अचर है। इसलिए S के तंत्र में ये दोनों घटनाएं (कि प्रकाश के दोनों स्पंद डिब्बे के अलग-अलग सिरों तक पहुँचते हैं) एक ही क्षण पर नहीं घटतीं।

यह बात निरपेक्ष काल की क्लासिकी अवधारणा से मूलभूत रूप से भिन्न हैं, क्योंकि इसके अनुसार अलग-अलग प्रेक्षक इस बात पर सहमत नहीं होते कि एक ही क्षण का क्या मतलब है। हाँ, यहाँ यह ज़रूर याद रखिए कि इस परिणाम को उन घटनाओं के लिए निकाला गया है जो अलग-अलग स्थितियों पर घट रही हैं। उदाहरण के लिए, डिब्बे के दो सिरे। अगली इकाई में हम इस बात पर फिर से चर्चा करेंगे और तब उन घटनाओं को भी लेंगे जो आकाश के एक ही बिंदु पर एक क्षण पर घटती हैं।

संक्षेप में, हम इस नतीजे पर पहुँच सकते हैं कि विशिष्ट आपेक्षिकता का दूसरा अभिगृहीत निरपेक्ष काल की धारणा का विरोध करता है:

> आकाश के भिन्न बिंदुओं पर घटने वाली वे घटनाएं जोकि किसी जड़त्वीय तंत्र में समकालिक हैं (यानी एक ही क्षण पर घट रही हैं), ज़रूरी नहीं कि किसी दूसरे जड़त्वीय तंत्र में समकालिक हों।

इस निष्कर्ष को हम समकालिकता की आपेक्षिकता (relativity of simultaneity) कहते हैं। यही न्यूटनी आपेक्षिकता और विशिष्ट आपेक्षिकता का मूलभूत अंतर है। न्यूटनी आपेक्षिकता में S और S' के प्रेक्षक हमेशा इस बात के बारे में सहमत होंगे कि जो घटना S के सापेक्ष एक क्षण पर घटती है वही घटना S' के सापेक्ष उसी क्षण पर घटती है। लेकिन आपने देखा कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत में ऐसा नहीं है। और यही वह मूल अवधारणा है जिससे कि विशिष्ट आपेक्षिकता के अन्य परिणाम प्राप्त किए जा सकते हैं, जैसे कि दैर्घ्य संकोच (length contraction), काल वृद्धि (time dilation) आदि। इस संक्षिप्त चर्चा में हमने आपको अगली इकाई में आने वाली बातों की एक झलक दी है। इस भाग का अंत हम आपके लिए एक बोध प्रश्न देकर कह रहे हैं।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

(क) प्रकाश की चाल 3.0×10^8 m s^{-1} है। आप एक अंतरिक्ष यान में स्थित प्रकाश के एक स्रोत की ओर 2×10^8 m s^{-1} की अचर चाल से चलते हैं। आप दोनों ही की चाल, एक विरामावस्था में स्थित जड़त्वीय-तंत्र के सापेक्ष नापी जाती है। आपके सापेक्ष प्रकाश की चाल क्या है?

(ख) एक प्रेक्षक एक तारे की ओर चाल V से चलता है और दूसरा उतनी ही चाल से उससे दूर जाता है। ये दोनों प्रेक्षक, निर्वात में तारे के प्रकाश की चाल, आवृत्ति n और तरंग दैर्घ्य λ का मापन करते हैं। अब आप यह बताएं कि इन प्रेक्षकों के अनुसार किन राशियों का एक ही मान होगा और किन राशियों का मान अलग-अलग होगा?

(ग) मान लीजिए कि चित्र 1.5 में रेलगाड़ी का डिब्बा इस तरह सिकुड़ जाए कि उसके दोनों सिरों के बीच की दूरी का मान लगभग शून्य हो जाए। क्या आप एक सरल तर्क देते हुए यह बात समझा सकते हैं कि कोई दो घटनाएं जो एक ही स्थान पर घट रही हों, सभी जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए एक ही क्षण पर भी घटती हैं?

आइए अब हम इस इकाई में दी गई सामग्री का सारांश प्रस्तुत करें।

1.5 सारांश

- कोई भी घटना स्थान के किसी बिंदु और समय के किसी क्षण पर घटती है। किसी जड़त्वीय निर्देश तंत्र S से एक दूसरे जड़त्वीय तंत्र S' में जोकि S के सापेक्ष वेग $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$ से चल रहा है, संबंध देने वाले गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण इस प्रकार हैं

$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

यहाँ (x, y, z) घटना के S तंत्र में निर्देशांक हैं और t, S में मापा गया वह क्षण है जिसपर वह घटना घटती है। उसी घटना के (x', y', z') निर्देशांक और t' वह समय है जिन्हें S' में मापा गया है। S', S के सापेक्ष इस तरह गतिमान है कि $x - x'$ अक्ष उभयनिष्ठ हैं और $y - y'$ और $z - z'$ अक्ष समांतर हैं।

- गैलीलीय या क्लासिकी आपेक्षिकता नियम के अनुसार यांत्रिकी के नियम सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक ही स्वरूप रखते हैं। यदि वे एक जड़त्वीय तंत्र में सत्य हैं तो वे और सभी जड़त्वीय तंत्रों में सत्य होंगे।

- गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरणों से हमें पता चलता है कि प्रकाश का वेग अलग-अलग निर्देश तंत्रों में अलग-अलग होना चाहिए। इसके कारण इन रूपांतरणों के अधीन मैक्सवेल के समीकरणों का अलग-अलग निर्देश तंत्रों में एक ही स्वरूप नहीं रहता। इस तरह गैलीलीय आपेक्षिकता नियम विद्युतचुम्बकत्व के नियमों पर लागू नहीं होता।

- प्रयोगों से, ख़ासतौर पर माइकलसन-मोर्ले प्रयोग से पता चलता है कि प्रकाश की चाल एक सार्वत्रिक अचर है और यह प्रेक्षक, संचरण माध्यम और स्रोत की एकसमान आपेक्षिक गति पर निर्भर नहीं करती। प्रयोगों द्वारा विद्युतचुम्बकत्व के नियम भी सत्यापित होते हैं। उन कणों पर जो प्रकाश की चाल की नज़दीकी चालों से चल रहे हैं, किए गए प्रयोगों से यह पता चलता है कि ऐसी स्थितियों पर न्यूटनी यांत्रिकी के नियम लागू नहीं होते।

- आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत में, आइंस्टीन क्लासिकी आपेक्षिकता नियम को बरकरार रखते हुए उसका इस तरह व्यापकीकरण करते हैं कि उसे भौतिकी के सभी नियमों पर लागू किया जा सके। इस नियम का एक आशय यह भी है कि सभी एकसमान रूप से गतिमान निकायों में प्रकाश की चाल का मान एक ही होगा।

- विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीत इस प्रकार हैं:

अभिगृहीत 1 – आपेक्षिकता का नियम

सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में भौतिकी के नियम समान होते हैं; उनका एक ही स्वरूप होता है।

अभिगृहीत 2 – प्रकाश की चाल की अचरता का नियम

सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में, (निर्वात में) प्रकाश की चाल का एक ही अचर मान रहता है।

1.6 अंत में कुछ प्रश्न

30 मिनट लगाए

1. एक प्रत्यास्थ संघट्टन में रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षित रहते हैं। गैलीलीय रूपांतरणों का प्रयोग करके सिद्ध करें कि यदि कोई संघट्टन एक जड़त्वीय तंत्र में प्रत्यास्थ है तो वह अन्य सभी जड़त्वीय तंत्रों में प्रत्यास्थ होगा।

2. (क) माइकलसन-मोर्ले प्रयोग क्या हमें यह बताता है कि ईथर की परिकल्पना अनावश्यक है, या वह यह साबित करता है कि ऐसी किसी चीज़ का अस्तित्व है ही नहीं?

   (ख) एक जड़त्वीय तंत्र S में मैक्सवेल का एक समीकरण निम्न स्वरूप का है

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

   आपेक्षिकता के नियम के अनुसार, एक अन्य जड़त्वीय निर्देश तंत्र S' में इसका स्वरूप क्या होगा?

3. क्लासिकी आपेक्षिकता में दी गई समय की धारणा, आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत में दी गई समय की धारणा से किस तरह भिन्न है?

1.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) अजड़त्वीय, क्योंकि कार की गति त्वरित है।
   (ख) जड़त्वीय
   (ग) अजड़त्वीय, क्योंकि इलेक्ट्रॉन का त्वरण हो रहा है।
   (घ) जड़त्वीय
   (च) जड़त्वीय

2. (क) नहीं। अलग-अलग प्रेक्षक भौतिक राशियों के अलग-अलग मान माप सकते हैं लेकिन उनके बीच का संबंध वही रहता है।
   (ख) हाँ, क्योंकि इन नियमों का मूल न्यूटनी यांत्रिकी में है।

3. श्रृंखला नियम का प्रयोग करके

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

गैलीलीय रूपांतरण समीकरण (1.1) से

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial y'}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z'}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial t'}{\partial x} = 0$$

इस तरह, $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}$ और $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}$

आप यह भी दिखा सकते हैं कि $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}$ और $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2}$

अब $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$

समीकरण (1.1) से $\frac{\partial x'}{\partial t} = -u,\ \frac{\partial y'}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial z'}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial t'}{\partial t} = 1.$

इस तरह $\frac{\partial\phi}{\partial t} = -u\frac{\partial\phi}{\partial x'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}$ और $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} - 2u\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$

इस तरह S' तंत्र में $\partial^2\phi/\partial t^2$ के व्यंजक में दो अतिरिक्त पद हैं। स्पष्ट है कि S' तंत्र में तरंग समीकरण का वही स्वरूप नहीं रहता जोकि S तंत्र में है।

4. (क) नहीं, समीकरण (1.9 ख) को आपेक्षिकता नियम का भी पालन करना चाहिए। यानी यह समीकरण सभी जड़त्वीय तंत्रों में समान स्वरूप की होनी चाहिए। तभी यह नियम कहलाई जाएगी।
   (ख) किसी अन्य जड़त्वीय तंत्र S' में यह संबंध निम्न रूप का होगा:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2} = k_1'\frac{\partial x'}{\partial t'} + k_2'\left[(x'-X')^2 + (y'-Y')^2 + (z'-Z')^2\right]$$

जहाँ k_1' और k_2' अचर संख्याएं हैं, $(X' Y' Z')$, S' तंत्र में दूसरे कण के निर्देशांक हैं और $(x' y' z' t')$, S' तंत्र में इस कण के दिक्-काल निर्देशांक हैं।

5. (क) प्रकाश की चाल सार्वत्रिक अचर है इसलिए इसका मान वही रहेगा: $3 \times 10^8\ ms^{-1}$।

(ख) प्रकाश की चाल वही रहती है; वे प्रेक्षक उसकी आवृत्ति व तरंग-दैर्ध्य के अलग-अलग मान मापते हैं।

(ग) डिब्बे की लंबाई के ही कारण तंत्र S में घटनाओं की समकालिकता बरकरार नहीं रहती क्योंकि इसी के कारण प्रेक्षक S के लिए बायीं ओर की दूरी कम होती है। अब अगर डिब्बा इस तरह सिकुड़ जाए कि उसकी लंबाई शून्य हो जाए, तो दोनों प्रकाश स्पंद सभी प्रेक्षकों के लिए उसके सिरों पर एक ही समय पर पहुँचेंगे। इस तरह, एक ही स्थिति पर घट रही दो घटनाएं सभी जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए एक ही समय पर घटती हैं।

अंत में कुछ प्रश्न

1. मान लीजिए कि तंत्र S में वेग $\mathbf{v}_1$ से चल रहे द्रव्यमान m वाले एक कण का वेग $\mathbf{V}_1$ से चल रहे द्रव्यमान M वाले कण से संघट्टन होता है। मान लीजिए कि तंत्र S में संघट्टन के बाद उनके वेग क्रमशः $\mathbf{v}_2$ और $\mathbf{V}_2$ हैं। चूँकि प्रत्यास्थ संघट्टन में रैखिक संवेग और गतिज ऊर्जा संरक्षित रहते हैं, इसलिए हम लिख सकते हैं:

$$m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{V}_1 = m\mathbf{v}_2 + M\mathbf{V}_2 \qquad (\text{क})$$

और

$$\frac{1}{2}\, mv_1^2 + \frac{1}{2}\, MV_1^2 = \frac{1}{2}\, mv_2^2 + \frac{1}{2} MV_2^2 \qquad (\text{ख})$$

अब माना कि S' तंत्र, S के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}$ से चलता है। तब संघट्टन से पहले और उसके बाद गैलीलीय रूपांतरण के अनुसार S' तंत्र में m और M के वेग हैं:

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{V}_1' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{V}_2' = \mathbf{V}_2 - \mathbf{v} \qquad (\text{ग})$$

(ग) से $\mathbf{v}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_2$ को (क) और (ख) में रखने पर हमें मिलता है:

$$m\,(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}) + M\,(\mathbf{V}_1' + \mathbf{v}) = m\,(\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}) + M\,(\mathbf{V}_2' + \mathbf{v})$$

या

$$m\mathbf{v}_1' + M\mathbf{V}_1' = m\mathbf{v}_2' + M\mathbf{V}_2' \qquad (\text{घ})$$

इस तरह S' तंत्र में रैखिक संवेग संरक्षित रहता है। अब आइए हम गतिज ऊर्जा के संरक्षण की जाँच करें:

$$m\,|\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}|^2 + M\,|\mathbf{V}_1' + \mathbf{v}|^2 = m\,|\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}|^2 + M\,|\mathbf{V}_2' + \mathbf{v}|^2$$

या $$m(v_1'^2 + v^2 + 2\mathbf{v}_1'.\mathbf{v}) + M(V_1'^2 + v^2 + 2\mathbf{V}_1'.\mathbf{v}) = m(v_2'^2 + v^2 + 2\mathbf{v}_2'.\mathbf{v}) + M(V_2'^2 + v^2 + 2\mathbf{V}_2'.\mathbf{v})$$

या $$mv_1'^2 + 2m\mathbf{v}_1'.\mathbf{v} + MV_1'^2 + 2M\mathbf{V}_1'.\mathbf{v} = mv_2'^2 + 2m\mathbf{v}_2'.\mathbf{v} + MV_2'^2 + 2M\mathbf{V}_2'.\mathbf{v}$$

या $$mv_1'^2 + MV_1'^2 + 2\,(m\mathbf{v}_1' + M\mathbf{V}_1').\mathbf{v} = mv_2'^2 + MV_2'^2 + 2\,(m\mathbf{v}_2' + M\mathbf{V}_2').\mathbf{v}$$

(घ) का प्रयोग करके हम पाते हैं कि

$$mv_1'^2 + MV_1'^2 = mv_2'^2 + MV_2'^2$$

या $$\frac{1}{2}(mv_1'^2 + MV_1'^2) = \frac{1}{2}(mv_2'^2 + MV_2'^2)$$

इस तरह तंत्र S' में गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है।

2. क) माइकलसन-मोर्ले प्रयोग हमें केवल यह बताता है कि ईथर की धारणा अनावश्यक है।

ख) इस समीकरण का S' तंत्र में यह स्वरूप होगा:

$$\oint_C \mathbf{E}'.\, d\mathbf{l}' = -\frac{\partial \Phi_B'}{\partial t'}$$

3. क्लासिकी आपेक्षिकता में विभिन्न निर्देश तंत्रों के प्रेक्षक इस बारे में हमेशा सहमत होंगे कि कोई घटना किस क्षण पर घटी। उन सभी के लिए समय के उस क्षण का मान एक ही होगा। अगर कोई दो घटनाएं एक जड़त्वीय प्रेक्षक के अनुसार एक-साथ घटती हैं तो क्लासिकी आपेक्षिकता में अन्य जड़त्वीय प्रेक्षकों के अनुसार भी वे घटनाएं एक-साथ घटती हैं।

आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के अनुसार ऐसा नहीं है। विशिष्ट आपेक्षिकता के अनुसार, यह ज़रूरी नहीं कि आपेक्षिक गति कर रहे दो जड़त्वीय प्रेक्षक किसी घटना के घटने के क्षण का एक ही मान नापें। यदि दो घटनाएं आकाश में दो भिन्न स्थितियों पर घटती हैं तो इन प्रेक्षकों के अनुसार वे घटनाएं अलग-अलग क्षणों पर घटेंगी, एक-साथ नहीं।

इकाई 2 आपेक्षिकीय शुद्धगतिकी

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आपने संक्षेप में भौतिकी में हुए उस विकास के बारे में पढ़ा जिसके कारण विशिष्ट आपेक्षिकता का उदय हुआ। आपने देखा कि गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण और विद्युतचुंबकत्व के नियमों में एक आपसी अंतर्विरोध है। ख़ास तौर से, गैलीलीय वेग रूपांतरण के मुताबिक प्रकाश की चाल का मान अलग-अलग जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में अलग-अलग होता है। लेकिन अब तक किए गए सभी प्रयोगों से यह साबित हो चुका है कि निर्वात में प्रकाश की चाल एक सार्वत्रिक अचर है। इस अंतर्विरोध को दूर करने के लिए आइंस्टीन ने जो विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत दिया उसके अभिगृहीतों के बारे में भी आपने इकाई 1 में पढ़ा। इसी के साथ-साथ आपने यह भी जाना कि इस विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के संगत हमें एक नये रूपांतरण की ज़रूरत क्यों पड़ती है।

"I sometimes ask myself why I was the one to develop the theory of relativity. The reason, I think, is that a normal adult never stops to think about problems of space and time. These are things... thought of as a child. But I began to wonder about space and time only when I had grown up. Naturally, I could go deeper into the problem than a child."

-Albert Einstein, 1944-45

इस इकाई में सबसे पहले हम विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों का इस्तेमाल करके इस नये निर्देशांक रूपांतरण का पता लगायेंगे जो कि लॉरेंज़ रूपांतरण (Lorentz transformation) कहलाता है। साथ ही साथ हम कणों की शुद्धगतिकी (kinematics) के लिए इन अभिगृहीतों से निकलने वाले परिणामों को भी समझेंगे। इकाई 1 के भाग 1.4.2 में हमने संक्षेप में यह चर्चा की कि क्लासिकी विचारों पर आधारित समय की हमारी समझ को आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत कैसे बदल डालता है। इस इकाई के भाग 2.3 में हम ज़्यादा विस्तार से यह बतायेंगे कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत पर आधारित समझ के तहत किस प्रकार निरपेक्ष दिक्-काल (absolute space and time) की अवधारणाएं पूरी तरह बदल जाती हैं। ख़ासतौर से हम समकालिकता की आपेक्षिकता (relativity of simultaneity) को फिर से समझेंगे। आप जानेंगे कि यह अवधारणा किस तरह से इस न्यूटनी मान्यता पर एक सवाल खड़ा करती है कि सभी जड़त्वीय प्रेक्षकों द्वारा मापी गई दो बिंदुओं के बीच की दूरी और समयांतराल का एक ही मान होता है। यह बात आपको तब और भी ज़्यादा साफ़ तौर पर समझ आयेगी जब आप दैर्घ्य संकोच (length contraction) और काल वृद्धि (time dilation) की परिघटनाओं के बारे में पढ़ेंगे।

भाग 2.4 में आप समझेंगे कि लॉरेंज़ निर्देशांक रूपांतरण के अधीन एक जड़त्वीय तंत्र से दूसरे जड़त्वीय तंत्र में जाने पर किसी वस्तु के वेग का किस तरह रूपांतरण होता है। अंत में, भाग 2.5 में हमने विशिष्ट आपेक्षिकता को प्रकाशिकी पर लागू करके आपेक्षिकीय डॉप्लर प्रभाव की चर्चा की है।

अगली इकाई में आप आपेक्षिकीय गतिकी के बारे में पढ़ेंगे। आप जानेंगे कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत और लॉरेंज़ रूपांतरण के साथ न्यूटनी यांत्रिकी का तालमेल बैठाने के लिए उसमें क्या-क्या बदलाव किए गए।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों का इस्तेमाल कर सकेंगे,
- दैर्घ्य संकोच और काल वृद्धि की परिघटनाओं को समझा सकेंगे,
- एक जड़त्वीय तंत्र से दूसरे जड़त्वीय तंत्र में किसी वस्तु के वेग का रूपांतरण कर सकेंगे,
- आपेक्षिकीय वेगों का योग कर सकेंगे,
- आपेक्षिकीय डॉप्लर विस्थापन (Doppler shift) की गणना कर सकेंगे और
- विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत पर आधारित सवाल हल कर सकेंगे।

अध्ययन दर्शिका

इस इकाई में समझाई गई अवधारणाएं आपके लिए बिल्कुल नई हैं। इकाई को पढ़ते हुए आप पायेंगे कि भाग 2.3 सबसे लंबा है और इसे समझने में आपको सबसे ज्यादा मेहनत लगेगी। इसलिए इस भाग को आप बहुत ध्यान से पढ़ें। इस इकाई को पढ़ने के लिए लगने वाले समय का बहुत बड़ा हिस्सा आपको भाग 2.3 समझने में लगाना पड़ेगा। इसलिए भाग 2.2 को आप जल्दी से पढ़ सकते हैं और भाग 2.3 पर ज़्यादा समय लगा सकते हैं। भाग 2.4 और 2.5 को समझने में कोई बहुत ज़्यादा मुश्किल नहीं आनी चाहिए। फिर भी आप उन्हें जल्दबाज़ी में न पढ़ें। हमारे हिसाब से आपको यह इकाई पढ़ने में 9 से 10 घंटे तक लगेंगे।

2.2 लॉरेंज़ रूपांतरण

इकाई 1 के भाग 1.4.2 से याद कीजिए कि हमें एक दूसरे के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}\ (= v\,\hat{\mathbf{i}})$ से चल रहे दो जड़त्वीय तंत्रों S और S' में किसी दी हुई घटना के लिए दिक् (space) और काल (time) निर्देशांकों के लिए एक नया रूपांतरण मालूम करना है। और यह नया रूपांतरण विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों के संगत होना चाहिए।

पहले की ही तरह हम दो जड़त्वीय निर्देश तंत्र लेते हैं जो एक दूसरे के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}$ से चल रहे हैं। हम मान लेते हैं कि जड़त्वीय तंत्र S विराम या प्रयोगशाला तंत्र है और तंत्र S', S के सापेक्ष धनात्मक x दिशा में वेग $\mathbf{v}$ से चल रहा है। माना कि ये दोनों तंत्र आयताकार तंत्र (rectangular frame) हैं और उनके तीनों अक्ष सदैव एक दूसरे के समांतर रहते हैं। इसके साथ साथ हम S में समय के मूल बिंदु $t = 0$ और S' में $t' = 0$ की इस तरह परिभाषा देंगे: दोनों तंत्रों के समय के मूल बिंदु $t = 0$ और $t' = 0$ वे क्षण हैं जब S और S' के मूल बिंदु संपाती होते हैं।

इससे पहले कि हम इस नये निर्देशांक रूपांतरण का पता लगायें, हमें यह तय कर लेना चाहिए कि जड़त्वीय तंत्र S में किसी घटना के निर्देशांकों को हम किस तरह से निर्धारित

करेंगे। इस काम के लिए हम मान लेते हैं कि तंत्र के हरेक प्रेक्षक के पास एक मानक (standard) घड़ी है और एक लंबाई का मानक, जैसे कि एक मीटर पैमाना है। तब यह प्रेक्षक, S में घटित किसी घटना के लिए कार्तीय दक्षिण-हस्त आयताकार दिक् निर्देशांक (x, y, z) निर्दिष्ट कर सकता है और अगर प्रेक्षक को इस घटना की तंत्र के मूल बिंदु से दूरी की जानकारी हो और साथ ही साथ इससे उत्सर्जित-प्रकाश-संकेत के अपने तक पहुंचने का क्षण मालूम हो तो वह इस घटना का समय निर्देशांक t भी निर्धारित कर सकता है। इस तरह निर्धारित निर्देशांक (x, y, z, t) मानक निर्देशांक (standard coordinates) कहलाते हैं। अब आइये हम यह नया निर्देशांक रूपांतरण मालूम करें।

आइए एक प्रकाश तरंग की गति का उदाहरण लें जो इन तंत्रों के मूल बिंदु पर स्थित एक बिंदु स्रोत से क्षण $t = t' = 0$ पर चलना शुरू करती है। आप जानते हैं कि तंत्र S में प्रकाश स्रोत विरामावस्था में है, और इसलिए इस से निकली तरंग का तरंगाग्र (wavefront, समान कला का पृष्ठ) गोलाकार होगा। अब तंत्र S' में स्थित एक प्रेक्षक के लिए इस तरंगाग्र का क्या आकार होगा? विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों के अनुसार यह तरंगाग्र तंत्र S' से देखे जाने पर भी गोलाकार ही होना चाहिए। क्योंकि अगर S' में तरंगाग्र का आकार बदलता है तो हम यह जान सकेंगे कि स्रोत S' के सापेक्ष गतिमान है। लेकिन इससे विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के पहले अभिगृहीत का उल्लंघन होगा जिसके अनुसार अगर S और S' विलगित (isolated) हैं तो हम किसी भी प्रयोग से यह नहीं जान सकते कि इनमें से कौन सा तंत्र (S या S') गतिमान है। इसके मुताबिक S और S' में प्रेक्षित तरंगाग्र के आकार से हमें यह पता नहीं लग पाना चाहिए कि स्रोत विरामावस्था में है या एकसमान गति कर रहा है। दूसरे शब्दों में, S और S' से देखे जाने पर तरंगाग्र का आकार बिल्कुल एक जैसा होना चाहिए। तंत्र S क्षण $t = 0$ पर मूल बिंदु पर रखे स्रोत से उत्सर्जित गोलाकार तरंगाग्र की समीकरण है

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (2.1\text{ क})$$

इसलिए S' में तरंगाग्र की यह समीकरण होनी चाहिए

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (2.1\text{ ख})$$

जहां विशिष्ट आपेक्षिकता के दूसरे अभिगृहीत के मुताबिक प्रकाश की चाल S और S' दोनों में एकसमान है।

अब सवाल उठता है कि क्या गैलीलीय रूपांतरण समीकरणों (2.1 क और ख) दोनों को एक साथ संतुष्ट करता है? आप खुद ही इसका जवाब ढूंढ सकते हैं।

बोध प्रश्न 1 — 2 मिनट लगाएं

क्या गैलीलीय रूपांतरण

$$x' = x - vt \;,\; y' = y \;,\; z' = z \;,\; t' = t$$

समीकरण (2.1 क) और (2.1 ख) को एक साथ संतुष्ट करता है?

बोध प्रश्न 1 हल करके आपने पता लगाया कि गैलीलीय रूपांतरण समीकरणों (2.1 क और 2.1 ख) को एक साथ संतुष्ट नहीं करता। इसलिए हमें कोई और निर्देशांक रूपांतरण खोजना पड़ेगा जो विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के संगत हो। यहां अपने काम को आसान बनाने के लिए हम कुछ प्रतिबंध लगायेंगे। सबसे पहला प्रतिबंध तो यह है कि यह नया निर्देशांक रूपांतरण विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों के संगत होना चाहिए। यानी यह रूपांतरण ऐसा होना चाहिए कि वह दोनों समीकरणों (2.1 क और ख) को एक साथ संतुष्ट करे।

दूसरे हम यह मान लेते हैं कि दिक् और काल समांग (homogeneous) हैं यानी दिक् और काल में स्थित सभी बिंदु एक दूसरे के तुल्य (equivalent) हैं। इस बात का मतलब समझने के लिए माना कि हम एक निर्देशांक तंत्र में किसी दी हुई घटना की लंबाई या समयांतराल मापते हैं। तब हमारे मापन के परिणाम इस बात पर निर्भर नहीं करने चाहिए कि वह घटना दिक्काल के किस बिंदु पर यानी कहां और कब घटी। चाहे वह घटना दिक् और काल के किसी भी बिंदु पर घटी हो, मापी गई लंबाई और समयांतराल का मान एक ही होना चाहिए। (यह बात मान लेने से हमारा काम काफ़ी आसान हो जाता है। क्योंकि इससे हमें एक रैखिक रूपांतरण मिलता है।) उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि x', x के वर्ग पर निर्भर करता है यानि कि $x' = ax^2$। तब किसी छड़ की लंबाई S और S' तंत्र में इस तरह संबंधित होगी:

$$x_2' - x_1' = a\,(x_2 - x_1)^2$$

अब अगर $x_1 = 1$ और $x_2 = 2$ तब $x_2' - x_1' = 3a$। लेकिन, अगर $x_1 = 4$ और $x_2 = 5$ तब $x_2' = x_1' = 9a$। इस तरह, अगर हम दिक् निर्देशांकों के लिए द्विघाती (quadratic) या उससे उच्च कोटि के रूपांतरण लें तो S' में मापी गई छड़ की लंबाई इस बात पर निर्भर करेगी कि वह S में किस बिंदु पर स्थित है। यह परिणाम हमारी उस मान्यता का विरोध करता है कि दिक् समांग है। अब माना कि S और S' के निर्देशांकों के बीच निम्न संबंध हैं

$$x' = a_1 x + a_2 t \qquad (2.2\ \text{क})$$

$$y' = y \qquad (2.2\ \text{ख})$$

$$z' = z \qquad (2.2\ \text{ग})$$

$$t' = b_1 x + b_2 t \qquad (2.2\ \text{घ})$$

अब एक बिंदु लीजिए जिसके लिए $x' = 0$। तंत्र S में यह चाल v से धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश चल रहा है।

इसलिए S में इसका निर्देशांक है $x = vt$। इस तरह,

$$x' = 0 \text{ के लिए}, \quad \frac{dx}{dt} = v \qquad (2.3\ \text{क})$$

इसी तरह, एक बिंदु जिसके लिए $x = 0$, S' से देखने पर चाल v से ऋणात्मक x-अक्ष के अनुदिश चलता दिखाई देता है। इसलिए S' में उसका निर्देशांक है $x' = -vt'$। इस तरह,

$$x = 0 \text{ के लिए}, \quad \frac{dx'}{dt'} = -v \qquad (2.3\ \text{ख})$$

$x' = 0$ के लिए, समीकरण (2.2 क) से मिलता है

$$a_1 x + a_2 t = 0, \text{ जहां } \frac{dx}{dt} = -\frac{a_2}{a_1} = v \qquad (2.4\ \text{क})$$

$x = 0$ के लिए, समीकरण (2.2 क) और (2.2 घ) हो जाते हैं

$$x' = a_2 t \quad \text{और} \quad t' = b_2 t$$

या

$$x' = \frac{a_2}{b_2}\, t'$$

जहां से

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_2}{b_2} = -v \qquad (2.4\ \text{ख})$$

समीकरण (2.4 क) और (2.4 ख) में से हमें मिलता है

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

या $$a_1 = b_2 \qquad (2.5)$$

आइये अब समीकरणों (2.2) और (2.3) में दिये गये निर्देशांक रूपांतरण को समीकरण (2.1 ख) में रखें। इससे हमें मिलता है

$$(a_1 x + a_2 t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (b_1 x + a_1 t)^2$$

या $$a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 xt + a_2^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 (b_1^2 x^2 + a_1^2 t^2 + 2a_1 b_1 xt)$$

यह परिणाम समीकरण (2.1 क) के संगत होने चाहिए। अब इनकी तुलना करने पर हमें मिलता है

xt का गुणांक शून्य है $\Rightarrow$ $2a_1 a_2 = 2c^2 a_1 b_1$

x^2 का गुणांक 1 है $\Rightarrow$ $a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1$

t^2 का गुणांक $-c^2$ है $\Rightarrow$ $a_2^2 - c^2 a_1^2 = -c^2$

अब हम कुछ आसान बीजगणित का इस्तेमाल करके रूपांतरण समीकरणों को निकाल सकते हैं। आप ख़ुद ही क्यों नहीं इसकी कोशिश करते?

बोध प्रश्न 2

5 मिनट लगाएं

c और v के पदों में गुणांकों a_1, a_2 और b_1 की गणना करें और समीकरण (2.2 क) से (2.2 घ) को फिर से लिखें।

बोध प्रश्न 2 को हल करने पर आपने लॉरेंज़ रूपांतरण (Lorentz transformation) प्राप्त किया है।

लॉरेंज़ रूपांतरण

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (2.6\text{ क})$$

$$y' = y \qquad (2.6\text{ ख})$$

$$z' = z \qquad (2.6\text{ ग})$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)\,x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (2.6\text{ घ})$$

लॉरेंज़ रूपांतरण x और t में रैखिक है। इसमें एक और रोचक गुण है जिसको आप ख़ुद खोजना पसंद करेंगे। इसके लिए आपको समीकरणों (2.6 क से घ) का सरलीकरण करना चाहिए, जबकि $v/c << 1$। इसे आप नीचे दिये गये बोध प्रश्न में अभ्यास के तौर पर करें।

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 3

नीचे दिए गए खाली स्थानों को भरें। जब लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों में हम $v << c$ लेते हैं तो हमें मिलता है

$x' =$ ....

$y' =$ ....

$z' =$ ....

$t' =$ ....

इसका तात्पर्य है कि प्रकाश की चाल की तुलना में बहुत कम चाल से चल रहे कणों के लिए लॉरेंज़ रूपांतरण...............रूपांतरण में समानीत हो जाता है।

आम तौर पर लॉरेंज़ रूपांतरण में $\beta = v/c$ और $\gamma = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$ लिख कर उन्हें और अधिक संक्षिप्त रूप में लिखा जाता है। यहां ध्यान दें कि

(क) $\gamma \geq 1$ चूंकि v परिमित है

(ख) $\gamma \to 1$ जब $v \to 0$

(ग) $\gamma \to \infty$ जब $v \to c$

इससे संक्षेप में लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों (2.6) का यह रूप हो जाता है।

लॉरेंज़ रूपांतरण

$$x' = \gamma\,(x - vt) = \gamma\,(x - \beta ct) \qquad (2.7\text{ क})$$

$$y' = y \qquad (2.7\text{ ख})$$

$$z' = z \qquad (2.7\text{ ग})$$

$$t' = \gamma\,(t - vx/c^2) = \gamma\,(t - \beta x/c) \qquad (2.7\text{ घ})$$

आपको इन रूपांतरण समीकरणों को अच्छी तरह से याद कर लेना चाहिए क्योंकि इन्हें आपेक्षिकता पर अपनी चर्चा में हम बार-बार इस्तेमाल करेंगे। आप समीकरण (2.6) और समीकरण (2.7) से तुरन्त यह देख सकते हैं कि v का मान कभी भी c से ज़्यादा नहीं हो सकता क्योंकि $v > c$ के लिए दिक् और काल निर्देशांक काल्पनिक हो जाते हैं जो कि भौतिक तौर पर असंभव है। इससे हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं: **हम प्रकाश की चाल से अधिक मान वाली चाल का मापन नहीं कर सकते: c इस भौतिक ब्रह्माण्ड की सीमांत चाल (limiting speed) है।** हम इस इकाई के भाग 2.4 में इस बात की फिर से चर्चा करेंगे।

लॉरेंज़ रूपांतरण का व्युत्क्रम रूपांतरण हम समीकरण (2.6) या (2.7) में निम्न अदला-बदली करके मालूम कर सकते हैं:

$$x \leftrightarrow x'$$

$$y \leftrightarrow y'$$

$$z \leftrightarrow z'$$

$$t \leftrightarrow t'$$

$$v \leftrightarrow -v$$

बोध प्रश्न 4 करके आप खुद ही नीचे दिया व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण हासिल कर सकते हैं।

व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण	
$x = \gamma\,(x' + \beta c t')$	(2.8 क)
$y = y'$	(2.8 ख)
$z = z'$	(2.8 ग)
$t = \gamma\,(t' + \beta x'/c)$	(2.8 घ)

बोध प्रश्न 4

10 मिनट लगाएं

समीकरणों (2.8 क से घ) को सत्यापित कीजिए।

इस तरह, हमने एक नया रूपांतरण, लॉरेंज़ रूपांतरण और उसका व्युत्क्रम प्राप्त किया है जो कि विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों के संगत है।

आइये अब हम विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों और लॉरेंज़ रूपांतरण के कुछ निहायत ही रोचक अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ें।

2.3 विशिष्ट आपेक्षिकता के परिणाम

आपने इकाई 1 के भाग 1.4.2 में पढ़ा है कि समय की प्रकृति (nature of time) को लेकर न्यूटनी दृष्टिकोण और विशिष्ट आपेक्षिकता के दृष्टिकोण में बहुत बड़ा अंतर है। आप जानते हैं कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के मुताबिक, अगर एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में दो घटनाएं एक ही क्षण पर घटती हैं तो यह ज़रूरी नहीं कि इस निर्देश तंत्र के सापेक्ष गतिमान किसी और जड़त्वीय निर्देश तंत्र में भी ये घटनाएं एक ही साथ घटें। हमने वहां समकालिकता की इस आपेक्षिकता (relativity of simultaneity) को दर्शाने के लिए एक वैचारिक प्रयोग का इस्तेमाल किया था। इस भाग में हम विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के इस अभिलक्षण को समझने के लिए लॉरेंज़ रूपांतरण का इस्तेमाल करेंगे। आप जानेंगे कि किस तरह समकालिकता की आपेक्षिकता के कारण लंबाई और समयांतराल का मान भी अलग-अलग जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए अलग-अलग हो सकता है। आपेक्षिकीय शब्दावली में हम इन्हें दैर्घ्य संकोच (length contraction) और काल वृद्धि (time dilation) के नाम से जानते हैं। तो आइये सबसे पहले हम समकालिकता (simultaneity) की अवधारणा और विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत में इसकी आपेक्षिकता के बारे में पढ़ें।

2.3.1 समकालिकता की आपेक्षिकता

निर्देश तंत्र S में दो अलग-अलग बिंदुओं पर घट रही दो समकालिक घटनाओं को लें (यानी कि वे एक ही क्षण पर घट रही हैं)। माना कि S में इन दो घटनाओं के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1, t_1) और (x_2, y_2, z_2, t_2) हैं। इस स्थिति में $x_1 \neq x_2$ है और $t_1 = t_2$ है। लॉरेंज़ रूपांतरण का प्रयोग करके हम यह दिखा सकते हैं कि आम तौर पर

वे घटनाएं जो S में समकालिक हैं, एक दूसरे निर्देश तंत्र S' में जो S के सापेक्ष एकसमान चाल v से चल रहा है, समकालिक नहीं हैं। माना कि इन दो घटनाओं के तंत्र S' में निर्देशांक क्रमशः (x_1', y_1', z_1', t_1') और (x_2', y_2', z_2', t_2') हैं।
व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों (2.8) से हम लिख सकते हैं कि

$$t_1 = \gamma\,(t_1' + \beta x_1'/c), \qquad t_2 = \gamma\,(t_2' + \beta x_2'/c) \tag{2.9}$$

चूंकि ये घटनाएं S में समकालिक हैं, इसलिए $t_1 = t_2$। अतः समीकरण (2.9) में हमें यह परिणाम मिलता है।

$$(t_1' + \beta x_1'/c) = (t_2' + \beta x_2'/c)$$

या

$$t_1' = t_2' + \frac{\beta}{c}\,(x_2' - x_1') \qquad (2.10\ \text{क})$$

समीकरण (2.7) से हम $(x_2' - x_1')$ को x_2 और x_1 के पदों में लिख सकते हैं। अतः

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - \beta c t_1) \quad \text{और} \quad x_2' = \gamma\,(x_2 - \beta c t_2)$$

इसलिए

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= \gamma\,(x_2 - x_1) - \gamma\,\beta c(t_2 - t_1) \\ &= \gamma\,(x_2 - x_1)\ (\because t_2 = t_1) \end{aligned}$$

इस तरह

$$t_1' = t_2' + \frac{\beta}{c}\,\gamma\,(x_2 - x_1) \qquad (2.10\ \text{ख})$$

चूंकि $x_2 \neq x_1$ है, इसलिए समीकरण (2.10 ख) से हमें मिलता है कि $t_1' \neq t_2'$। इससे हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि एक तंत्र में भिन्न स्थितियों पर घट रही समकालिक घटनाएं उसके सापेक्ष एकसमान गति कर रहे तंत्र में समकालिक नहीं होतीं।

लेकिन अगर $x_2 = x_1$ और $t_2 = t_1$ हो तो समीकरण (2.10 ख) से हम पाते हैं कि $t_1' = t_2'$। इसलिए अगर दो घटनाएं एक जड़त्वीय तंत्र में एक ही स्थिति पर, एक ही क्षण पर घटती हैं, तो वे दूसरे सभी जड़त्वीय तंत्रों में एक ही स्थिति पर घटती हैं और समकालिक होती हैं (यानि एक ही क्षण पर घटती हैं) क्योंकि $t_1' = t_2'$ और $x_1' = x_2'$।

संक्षेप में, S और S' में प्रेक्षक आकाश के एक ही बिंदु पर घट रही घटनाओं की समकालिकता के बारे में सहमत होंगे। लेकिन वे आकाश के अलग-अलग बिंदुओं पर घट रही घटनाओं की समकालिकता के बारे में सहमत नहीं होंगे: अगर आकाश में दो अलग बिंदुओं पर घट रही दो घटनाएं जड़त्वीय तंत्र S में समकालिक हैं तो वे S के सापेक्ष एकसमान गति कर रहे किसी दूसरे जड़त्वीय तंत्र में समकालिक नहीं होंगी।

इसी तरह हम दिखा सकते हैं कि S में एक ही बिंदु पर लेकिन अलग-अलग समयों पर घट रही घटनाएं, S' में अलग-अलग बिंदुओं पर घटती हुई दिखाई देंगी। इस तरह, अगर तंत्र S में $x_1 = x_2$ और $t_1 \neq t_2$ तब S' में $x_1' \neq x_2'$ होगा। इसे हमने नीचे दिये गये बोध प्रश्न में आपके लिए एक अभ्यास के तौर पर दिया है।

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

(क) सिद्ध करें कि S में एक ही बिंदु पर लेकिन अलग-अलग क्षणों पर घट रही घटनाएं S' में एक ही बिंदु पर नहीं घटेंगी, जब तक कि $\beta \neq 0$ है।

(ख) मान लीजिए कि S और S' में बिंदु $x = 0$ पर दो घटनाएं समकालिक हैं। सिद्ध करें कि आकाश के दूसरे सभी बिंदुओं पर (जिनके लिए $x \neq 0$) घट रही घटनाएं समकालिक नहीं होतीं।

अब तक की चर्चा में हमने आपको क्लासिकी आपेक्षिकता और विशिष्ट आपेक्षिकता के आधारभूत फ़र्क के बारे में समझाया है। क्लासिकी आपेक्षिकता में S और S' तंत्र के प्रेक्षक हमेशा हरेक बिंदु पर घट रही घटना की समकालिकता के बारे में सहमत होते हैं। आप देख सकते है कि $v/c << 1$ या $\gamma \to 1$ के लिए प्रत्येक बिंदु पर $t' = t$ होता है। लेकिन विशिष्ट आपेक्षिकता में ऐसा नहीं है। माना कि तंत्र S में एक प्रेक्षक किन्हीं दो घटनाओं को दो अलग-अलग स्थितियों पर एक ही क्षण पर घटते हुए प्रेक्षित करता है ($x_2 \neq x_1, t_2 = t_1$)। उन्हीं घटनाओं को तंत्र S के सापेक्ष गतिमान जड़त्वीय तंत्र S' का प्रेक्षक दो अलग-अलग क्षणों पर घटते हुए प्रेक्षित करेगा यानी $t_2' \neq t_1'$। इसी तरह, जब S में प्रेक्षक किन्हीं दो घटनाओं को एक स्थिति पर लेकिन दो अलग-अलग क्षणों पर घटते हुए प्रेक्षित करता है ($x_2 = x_1, t_2 \neq t_1$) तो S' का प्रेक्षक इन दोनों को दो अलग-अलग स्थितियों पर होते हुए प्रेक्षित करता है ($x'_2 \neq x'_1$)। आपको दिक्-काल के सब बिंदुओं पर समकालिकता की इस आपेक्षिकता को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए। इसी के फलस्वरूप ही दैर्घ्य संकोच (length contraction) और काल वृद्धि (time dilation) जैसी परिघटनाएं होती हैं। यानी एकसमान आपेक्षिक गति कर रहे प्रेक्षक जब दूरी और समयांतराल का मापन करते हैं तो उन्हें अलग-अलग मान मिलते हैं। आइये अब हम इन परिघटनाओं का अध्ययन करें।

2.3.2 दैर्घ्य संकोच

आपने अभी-अभी पढ़ा कि यह ज़रूरी नहीं कि एक जड़त्वीय तंत्र में दो समकालिक घटनाएं किसी दूसरे जड़त्वीय तंत्र में समकालिक हों। आपने लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों से यह भी नतीजा निकाला है कि S और S' के दो प्रेक्षक जो आकाश के एक बिंदु पर घट रही घटना की समकालिकता के बारे में सहमत होते हैं, वे भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर घट रही घटनाओं की समकालिकता के बारे में सहमत नहीं होते। इस बात के फलस्वरूप एकसमान गति कर रहे दो जड़त्वीय तंत्रों में एक ही लंबाई के मापन के बारे में एक बहुत ही रोचक नतीजा निकलता है।

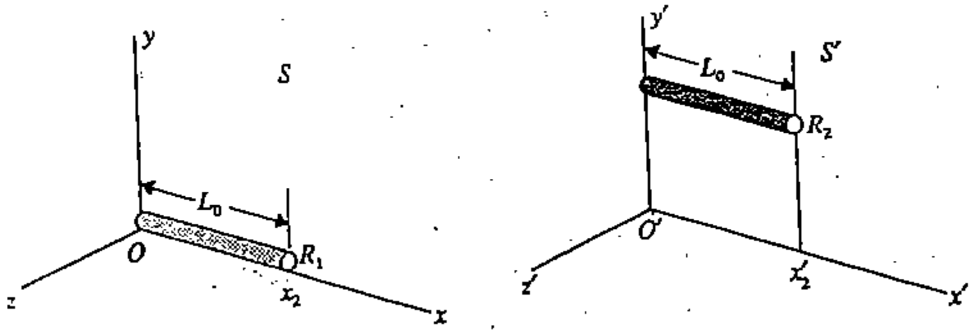
समस्या कुछ इस तरह से है: मान लीजिए कि एक जड़त्वीय तंत्र में विरामावस्था में स्थित एक वस्तु की लंबाई L_0 मापी जाती है। तब क्या इस वस्तु के सापेक्ष गतिमान एक जड़त्वीय प्रेक्षक भी इस वस्तु की यही लम्बाई, यानी L_0 मापेगा? इस बात का जवाब पाने के लिए एक छड़ R_1 (देखें चित्र 2.1 क) लें जो निर्देश तंत्र S में x-अक्ष के अनुदिश विरामावस्था में रखी है। चूंकि छड़ S तंत्र में विरामावस्था में है इसलिए इसके सिरों के स्थिति निर्देशांक, माना कि x_2 और x_1 समय पर निर्भर नहीं करते। S में इसकी लंबाई है:

$$L_0 = x_2 - x_1 \qquad (2.11 \text{ क})$$

जिस तंत्र में छड़ विरामावस्था में होती है उसके सापेक्ष मापी गई उसकी लंबाई L_0 को हम उसकी विराम लंबाई (rest length) या उचित लंबाई (proper length) कहते हैं। इसी तरह, एक और छड़ R_2 लें जो तंत्र S' में x' अक्ष के अनुदिश उसके सापेक्ष विरामावस्था में स्थित है। माना उसकी लंबाई है

$$L_0 = x_2' - x_1' \qquad (2.11 \text{ ख})$$

चूंकि यह छड़ S' के सापेक्ष विरामावस्था में है, अत: L_0, S' में छड़ की विराम लंबाई या उचित लंबाई है।



(क) (ख)

चित्र 2.1: (क) विराम तंत्र S में एक दृढ़ (rigid) छड़ की उचित लंबाई L_0 है; (ख) विराम तंत्र S' में ऐसी ही एक दृढ़ छड़ R_2 की उचित लंबाई L_0 है। ध्यान दें कि चित्र में $x_1 = 0$ और $x_1' = 0$ है।

चर्चा के इस बिन्दु पर हम आपको आगाह करना चाहेंगे कि आप इस तरह का तर्क देकर भ्रम में पड़ने से बचें: "विराम तंत्र में, किसी क्षण $t = 0$ पर छड़ के सिरों के निर्देशांक x_1 और x_2 हैं। गतिमान तंत्र में छड़ की लंबाई का पता लगाने के लिए हम [illegible] समीकरण $x' = \gamma(x - vt)$ का इस्तेमाल करके पाते है कि $L = \gamma L_0$। यानी गतिमान छड़ की लंबाई ज़्यादा होगी।" यह त्रुटिपूर्ण परिणाम इस बात को नज़रअंदाज़ करने से आता है कि गतिमान तंत्र में छड़ के सिरों की स्थितियों को एक ही क्षण पर मापा जाना है, यानी $t_1' = t_2'$। यह मापन विराम तंत्र में समकालिक नहीं होगा यानी $t_1 \neq t_2$। यह बात आप भाग 2.2.1 में पढ़ चुके हैं। गणितीय तौर पर यह बात इस तरह कही जा सकती है:

$$\begin{aligned} L &= x_2' - x_1' \\ &= \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \\ &= \gamma[x_2 - x_1] - \gamma[v(t_2 - t_1)] \end{aligned}$$

अब अगर आप ग़लती से मान बैठते हैं कि $t_1 = t_2$ तब आप इस ग़लत नतीजे पर पहुंचते हैं कि $L = \gamma L_0$। वास्तव में लंबाई का मापन S' में हो रहा है। अतः $t_1' = t_2'$ और $t_1 \neq t_2$।

अब हम एक गतिमान निर्देश तंत्र में इन छड़ों की लंबाई को मापना चाहते हैं। ऐसा करने के लिए आइये हम मान लें कि S' एकसमान वेग $v\hat{i}$ से S के सापेक्ष गति कर रहा है। तब हमारी समस्या घटकर सिर्फ़ इतनी रह जाती है कि हम छड़ R_1 की लंबाई (जो कि S में विरामावस्था में है) S' के सापेक्ष मापें। इसके लिए हमें S' में उन स्थितियों x_1' और x_2' का मापन करना होगा, जो कि एक ही क्षण t' पर इस छड़ के सिरों के संपाती होती हैं। यानी x_1' और x_2' को एक ही क्षण t' पर मापना होगा। दूसरे शब्दों में हम छड़ R_1 की गतिमान तंत्र में लंबाई L को इस तरह से परिभाषित कर रहे हैं: यह S' में उन स्थितियों x_1' और x_2' के बीच की दूरी है जो कि (S' में) एक ही क्षण पर छड़ के सिरों के संपाती होती हैं।

चूंकि हम S' में दिक् और काल का मापन कर रहे हैं इसलिए हम व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण का इस्तेमाल करेंगे। वास्तव में हम $\Delta t' = 0$ के लिए x और x' की तुलना ही तो कर रहे हैं। यहां याद रखें कि हम किन रूपांतरण समीकरणों (2.7 या 2.8) को लागू करेंगे, यह जानने के लिए **इस बात को निर्धारित करना बहुत महत्वपूर्ण है कि किस तंत्र में लंबाई के सिरों का मापन समकालिक है।** यहां पर क्योंकि यह मापन S' में समकालिक है (यानि $\Delta t' = 0$), इसलिए हम व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण से लिख सकते हैं कि

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt_1')$$

$$x_2 = \gamma(x_2' + vt_2')$$

$$\therefore\ x_2 - x_1 = L_0 = \gamma(x_2' - x_1') + \gamma v(t_2' - t_1')$$

अब चूंकि S' में हमें x_1' और x_2' एक ही क्षण पर मापना है तो हमें $t_2' = t_1'$ रखना होगा। इस तरह हमें मिलता है

$$L_0 = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L$$

या

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

चूंकि $\gamma > 1$, इसलिए $L < L_0$ है। दूसरे शब्दों में, गतिमान तंत्र S' में छड़ की लंबाई का मापा गया मान विरामावस्था में स्थित तंत्र में मापी गई उसकी उचित लंबाई की तुलना में कम होता है (चित्र 2.2)।

विकल्प के तौर पर हम छड़ R_2 की लंबाई जो कि S' में विरामावस्था में है तंत्र S में माप सकते हैं। अब तंत्र S' में विरामावस्था में स्थित छड़ R_2 के सापेक्ष, तंत्र S वेग $-v\hat{i}$

से चलता है। S में R_2 की लंबाई, S में उन स्थितियों x_1 और x_2 के बीच की दूरी है जो छड़ R_2 के सिरों से एक ही क्षण पर संपाती होती हैं। ध्यान दें कि अब हम x' और x की तुलना कर रहे हैं जबकि $\Delta t = 0$। लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरण (2.7 क) से हमें मिलता है

$$x'_1 = \gamma\,(x_1 - vt_1)$$

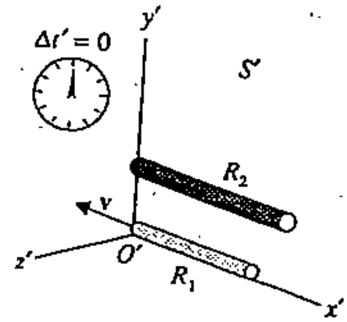
और
$$x'_2 = \gamma\,(x_2 - vt_2)$$

जिससे कि
$$x'_2 - x'_1 = L_0 = \gamma\,(x_2 - x_1) - \gamma\, v\,(t_2 - t_1)$$

यहाँ $t_2 = t_1$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$L_0 = \gamma\,(x_2 - x_1) = \gamma L$$

या
$$L = L_0\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} \tag{2.12}$$



चित्र 2.2: छड़ R_1 की, जो S के सापेक्ष विरामावस्था में है और S' के सापेक्ष चाल v से गतिमान है, तंत्र S' में मापी गई लंबाई है $L = L_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$। ध्यान दें कि चित्र में $x_1 = x'_1 = 0$। इस तरह तंत्र S' में स्थित विरामावस्था में स्थित छड़ R_2 के सापेक्ष R_1 की लंबाई की माप कम होगी।

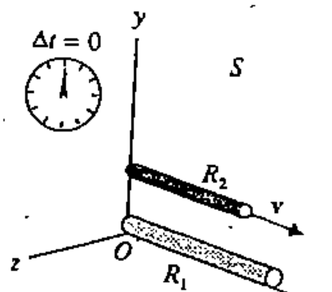
एक बार फिर हम पाते हैं कि एक गतिमान तंत्र में किसी वस्तु की लंबाई का मापा गया मान विरामावस्था में स्थित तंत्र में मापी गई उसकी उचित लंबाई के मुकाबले कम होता है (चित्र 2.3)। इस तरह किसी वस्तु की लंबाई या घटनाओं के बीच की दूरी एक आपेक्षिक राशि है– इसका मान उस निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है जिसमें कि उसका मापन किया जाता है।

इस परिघटना को, किसी प्रेक्षक के सापेक्ष अपनी लंबाई के समांतर चल रही एक छड़ का लॉरेंज़-फिट्ज़जेराल्ड संकोच (Lorentz-Fitzgerald contraction) भी कहते हैं। अब आप जानना चाहेंगे कि ऐसा क्यों होता है?

क्या आपने ध्यान दिया कि ऊपर चर्चित दोनों ही स्थितियों में हमने इस बात पर ज़ोर दिया है कि अपने निर्देश तंत्र में प्रेक्षक छड़ के दोनों सिरों की स्थितियों को एक ही क्षण पर मापता है? मिसाल के तौर पर, S' में प्रेक्षक, S में विरामावस्था में स्थित छड़ की लंबाई को इस तरह से मापेगा कि x'_2 और x'_1, S' में एक ही क्षण ($t'_2 = t'_1 = t'$) पर मापे जायें। लेकिन S' में समय t' पर x'_2 और x'_1 को एक साथ मापना, S में x_1 और x_2 को एक ही क्षण पर मापने के तुल्य नहीं है, यानी S में $t_2 \neq t_1$ है। यहाँ t_2 और t_1 तंत्र S में मापे गये वे क्षण हैं जब $t'_2 = t'_1 = t'$, S' में मापे गये थे। लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरण (2.7 घ) से हमें S' में एक ही क्षण पर दोनों सिरों के लिए किये गये मापन के लिए, S में एक समयांतराल मिलता है जिसकी गणना हम इस तरह कर सकते हैं:

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right)$$

और
$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$



चित्र 2.3: छड़ R_1 की जिसकी S के सापेक्ष चाल v है, तंत्र S में लंबाई की माप है $L = L_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$। ध्यान दें कि चित्र में $x_1 = x'_1 = 0$।

S' में $t'_2 = t'_1$ के लिए हमें मिलता है

$$\gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$

या
$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\,(x_2 - x_1)$$

चूंकि $x_2 \neq x_1$ इसलिए हमें मिलता है कि $t_2 \neq t_1$।

तो आइये अब हम इस बात का सार समझ कर इस चर्चा को यहीं समाप्त करें। स्थिति कुछ यों है: यहां दो घटनाएं घट रही हैं– एक दृढ़ छड़ के दो सिरों से संपाती स्थितियों का मापन। ये दो घटनाएं S' में अलग-अलग बिंदुओं पर घट रही हैं ($x'_2 \neq x'_1$)

और S' में समकालिक हैं ($t'_2 = t'_1$) लेकिन वे S में समकालिक नहीं हैं, जिसके सापेक्ष S' चाल v से गतिमान है। इसका नतीजा यह होता है कि S' में छड़ की लंबाई का मान L_0/γ होता है, यानी यह S में मापी गई छड़ की उचित लंबाई की तुलना में कम होता है। इस तरह समकालिकता की आपेक्षिकता का नतीजा यह होता है कि एक गतिमान जड़त्वीय निर्देश तंत्र में मापी गई लंबाई का मान एक अन्य जड़त्वीय तंत्र में मापी गई उचित लंबाई के मान की तुलना में कम होता है।

यह सब पढ़ कर शायद आपके मन में यह सवाल आया हो कि क्या वास्तव में 'छड़ सिकुड़' जाती है? निश्चिन्त रहिये। छड़ में कोई भी भौतिक परिवर्तन नहीं आता है। वास्तव में यह आपेक्षिक गति कर रहे तंत्रों में मापन की प्रक्रिया है जिसके कारण हमें मापी गई लंबाई के अलग-अलग मान मिलते हैं।

अब आप पूछ सकते हैं कि अगर आपेक्षिक गति की दिशा के लंबवत् दिशा में लंबाई का मापन किया जाये तो भी क्या यही परिणाम मिलेगा? मिसाल के तौर पर, S' में छड़ R_1 की लंबाई क्या होगी, अगर वह S में y-अक्ष या z-अक्ष के अनुदिश रखी हो? आप समीकरणों (2.7 ख और ग) से तुरन्त देख सकते हैं कि

$$y' = y \quad \text{और} \quad z' = z$$

इसका मतलब यह हुआ कि इस स्थिति में छड़ की तंत्र S और S' में मापी गई लंबाई एक ही है। अतः अगर छड़ अपनी लंबाई के लंबवत् गतिमान है तो उसकी मापी गई लंबाई प्रेक्षक की गति पर निर्भर नहीं करती।

आम तौर पर आपेक्षिकता में उस तंत्र को, जिसमें प्रेक्षित निकाय (यहाँ पर एक छड़) विरामावस्था में होता है उचित तंत्र कहते हैं। इस तरह S एक उचित तंत्र है। जिस तंत्र में छड़ विरामावस्था में है, उसमें उसकी लंबाई उचित लंबाई या विराम लंबाई कहलाती है। इस तरह तंत्र S में L_0 उचित लंबाई है।

आइये अब हम इस परिणाम को एक व्यापक रूप में प्रस्तुत करें।

दैर्घ्य संकोच

माना कि एक विरामावस्था में स्थित तंत्र में दो बिंदुओं के बीच निश्चित दूरी L_0 है। तब उस तंत्र के दोनों बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश गतिमान एक प्रेक्षक उस दूरी L का मान L_0/γ मापेगा जो कि उचित दूरी L_0 के मान से कम होगा :

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

दैर्घ्य संकोच का यह प्रभाव तब बहुत अधिक स्पष्ट दिखाई देता है जबकि किसी वस्तु की चाल प्रकाश की चाल के मान के बहुत नज़दीक होती है। उदाहरण के लिए, $v = 0.9c$ के लिए अनुपात L/L_0 का मान घटकर 0.44 रह जाता है, यानि कि मापी गई लंबाई उसकी उचित लंबाई की आधी से भी कम होती है।

आप शायद सोच रहे हैं कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत से निकले इस परिणाम की प्रायोगिक तौर पर जांच की गई है या नहीं। इसका जवाब है: हाँ, ऐसा किया गया है। तो आइये अब इस बात की जानकारी हासिल करें।

दैर्घ्य संकोच के लिए प्रायोगिक प्रमाण

दैर्घ्य संकोच के लिए सीधा-सीधा प्रमाण पृथ्वी की सतह के नज़दीक μ-मीसॉन (म्यूऑन, μ-meson) के संसूचन से मिलता है। जब पृथ्वी की सतह से 10 km की ऊँचाई पर वातावरण की ऊपरी सतह के गैसीय कणों से कॉस्मिक किरणें अंतःक्रिया करती हैं तो बहुत बड़ी संख्या में म्यूऑन उत्पन्न होते हैं। इन म्यूऑनों का क्षय बहुत तेज़ी से होता है; उनका औसत जीवनकाल केवल 2.2×10^{-6} s है। इनकी चाल लगभग $0.998c$ है जो कि बहुत अधिक है। तो अपने जीवन काल में ये म्यूऑन लगभग $(2.2 \times 10^{-6}\,\text{s}) \times (3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}) \times 0.998 = 658$ m की दूरी तय करते हैं। लेकिन

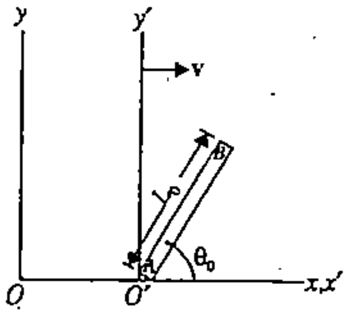
इनमें से कुछ म्यूऑन पृथ्वी की सतह पर लगभग 10 km दूरी चलने के बाद पाये जाते हैं। इस बात को कैसे समझाया जा सकता है? इस पहेली को सुलझाने के लिए हम संबंध $L = L_0/\gamma$ का प्रयोग करते हैं, जहाँ L म्यूऑन द्वारा अपने तंत्र में चली गई दूरी है और L_0 पृथ्वी के निर्देश तंत्र (जिसमें कि हम मापन कर रहे हैं) म्यूऑन द्वारा चली गई उचित दूरी है। इसका मान है

$$L_0 = \gamma L = [1 - (0.998)^2]^{-1/2} \times 658 \text{ m} = 10.4 \text{ km}$$

इसलिए इस बात से कि अपने अल्प जीवन काल के बावजूद म्यूऑन इतनी ऊँचाई से पृथ्वी की सतह तक पहुंच जाते हैं, हमें दैर्घ्य संकोच के लिए प्रायोगिक प्रमाण मिलते हैं। अब हम एक उदाहरण देकर इस चर्चा का अंत करना चाहेंगे।

उदाहरण 1: एक गतिमान छड़ का अभिविन्यास

उचित लंबाई L_0 की एक छड़ अपने विराम तंत्र S' के $x'y'$ तल में स्थित है और x'-अक्ष से कोण θ_0 बनाती है। इस छड़ के तंत्र S में लंबाई और अभिविन्यास क्या हैं, जिसके सापेक्ष वह दाईं ओर वेग $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ से चलती है?



चित्र 2.4: एक गतिमान छड़ का अभिविन्यास।

हल

मान लीजिए कि छड़ के सिरों के तंत्र S' में निर्देशांक (x', y') हैं। अगर छड़ का एक सिरा S' के मूल बिंदु पर स्थित है (चित्र 2.4) तो हम लिख सकते हैं कि

$$x'_1 = 0 \qquad y'_1 = 0$$

$$x'_2 = L_0 \cos\theta_0 \qquad y'_2 = L_0 \sin\theta_0$$

अब हमें तंत्र S में जिसके सापेक्ष छड़ गतिमान है, क्षण t पर छड़ के सिरों के निर्देशांक मालूम करने हैं। लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों (2.7 क और ख) से हम लिख सकते हैं कि

$$x'_1 = 0 = \gamma (x_1 - vt), \qquad y'_1 = 0 = y_1$$

$$x'_2 = L_0 \cos\theta_0 = \gamma (x_2 - vt), \qquad y'_2 = L_0 \sin\theta_0 = y_2$$

इसलिए

$$x'_2 - x'_1 = L_0 \cos\theta_0 = \gamma (x_2 - x_1)$$

या
$$x_2 - x_1 = \frac{L_0 \cos\theta_0}{\gamma}$$

इसी तरह, हम पाते हैं कि

$$y_2 - y_1 = L_0 \sin\theta_0$$

S में मापी गई छड़ की लंबाई है

$$L = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

$$= L_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\right]^{1/2}$$

$$= L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_0\right)^{1/2}$$

x-अक्ष के साथ छड़ कोण θ बनाती है जिसका मान है

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \tan^{-1}(\gamma \tan\theta_0)$$

इस तरह $\theta \geq \theta_0$ है चूंकि $\gamma \geq 1$ है।

यानी गतिमान छड़ सिकुड़ी हुई और घूमी हुई नज़र आती है।

ये सब बातें पढ़ने के बाद आप ज़रूर ही श्रीमान टॉमकिन्स के उस रोमांचकारी अनुभव को समझ सके होंगे जिसका ज़िक्र हमने इस पाठ्यक्रम के परिचय में किया है। अब शायद आप एक बोध प्रश्न करना चाहेंगे, ताकि यह जान सकें कि आपने इन बातों को अच्छी तरह से समझा कि नहीं।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

(क) किसी अंतरिक्ष यान में रखे एक पैमाने को अपनी गति की दिशा के समांतर स्थिति से घुमा कर गति की दिशा के लंबवत् स्थिति में पहुँचाया जाता है। यान बहुत तेज़ चाल से चल रहा है। क्या इस अंतरिक्ष यान में स्थित एक प्रेक्षक के लिए पैमाने की लंबाई का मान बदलेगा? अपने उत्तर को समझाएं। पृथ्वी पर स्थित प्रेक्षक, जिसके सापेक्ष अंतरिक्ष यान गतिमान है, इस पैमाने की लंबाई में क्या परि[illegible] [illegible]पेगा?

(ख) उचित लंबाई 1 m वाली छड़ के सापेक्ष गतिमान निर्देश तंत्र में उसकी लंबाई 50 cm मापी जाती है। गतिमान निर्देश तंत्र की चाल क्या है?

आइये अब समय के मापन पर आपेक्षिक गति के प्रभाव की चर्चा करें।

2.3.3 काल वृद्धि

आइये हम एक तंत्र S' में समयांतराल के मापन को लें जिसमें समय मापन की युक्ति (जैसे कि घड़ी) विरामावस्था में है। इस समयांतराल को हम उचित समयांतराल कहते हैं और इसे τ से व्यक्त करते हैं। हम कह सकते हैं कि उचित समयांतराल दो घटनाओं के बीच में वह समयांतराल है जो घड़ी के विराम तंत्र में एक ही स्थिति पर घट रही हैं। तब अनुचित समयांतराल वह समयांतराल होगा जो दो अलग-अलग घड़ियों द्वारा दो अलग-अलग स्थितियों पर मापा जाता है। इस तरह S' में उचित समयांतराल है

$$\tau = t'_2 - t'_1 \tag{2.13}$$

जहाँ t'_2 और t'_1 समय के वे क्षण हैं जिन पर S' में एक ही स्थिति पर दो घटनाएं घटती हैं। अब हम एक परिस्थिति लेते हैं जबकि S' में एक ही बिंदु पर दो घटनाएं घटती हैं यानी $x'_2 = x'_1 = x'$। अब सवाल यह उठता है कि इन दो घटनाओं के बीच उस तंत्र S में विरामावस्था में स्थित घड़ी द्वारा क्या समयांतराल मापा जाता है जिसके सापेक्ष तंत्र S' वेग $\mathbf{v}\ (= v\hat{\imath})$ से गतिमान है? व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरण (2.8 घ) का इस्तेमाल करके हमें मिलता है

$$t_1 = \gamma\,(t'_1 + vx'_1/c^2) \qquad \text{(2.14 क)}$$

$$t_2 = \gamma\,(t'_2 + vx'_2/c^2) \qquad \text{(2.14 ख)}$$

यहां हमने व्युत्क्रम रूपांतरण का इस्तेमाल किया है क्योंकि ये दोनों घटनाएं S' तंत्र में एक ही स्थिति पर घट रही हैं। भाग 2.2.1 से याद कीजिए कि यह ज़रूरी नहीं है कि

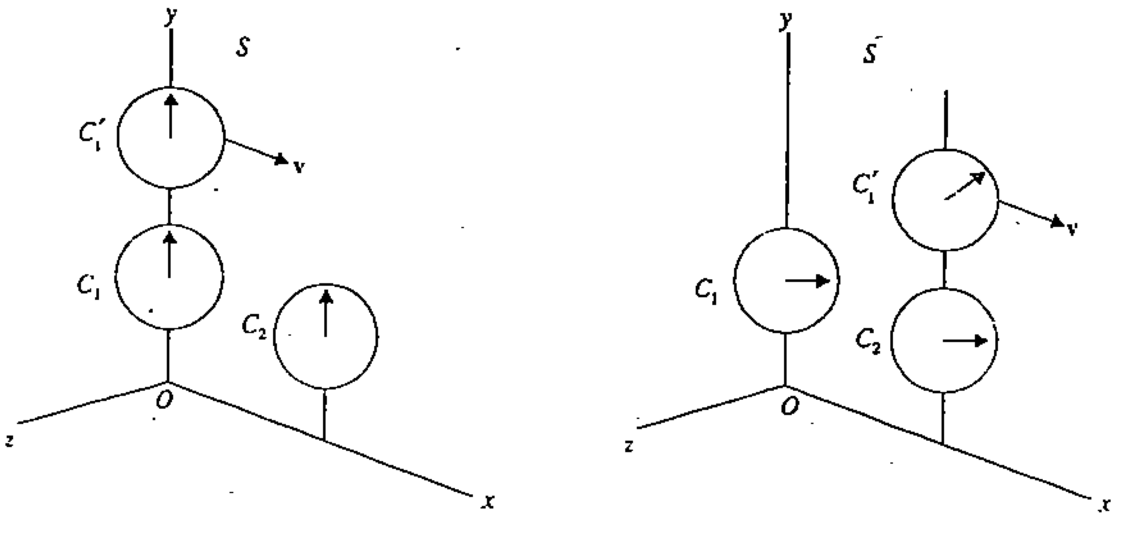
S' में एक ही स्थिति पर घट रही घटनाएं, तंत्र S में भी एक ही स्थिति पर घटें, यानी $x_2 \neq x_1$। अतः S में हमें दो अलग-अलग स्थितियों (x_1 और x_2) पर दो घड़ियां रखनी पड़ेंगी जिससे कि हम उन दोनों घटनाओं के बीच समयांतराल $(t_2 - t_1)$ माप सकें। इस तरह $(t_2 - t_1)$ एक अनुचित समयांतराल है। समीकरणों (2.14 क और 2.14 ख) से इसका मान है

$$t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1') + \frac{\gamma v}{c^2}\,(x_2' - x_1')$$

$$= \gamma\,(t_2' - t_1') \qquad (\because x_2' = x_1')$$

इस तरह
$$t_2 - t_1 = \gamma\,\tau = \frac{\tau}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \tag{2.15}$$

अगर v शून्य नहीं है, तो $\gamma > 1$ होगा और S में रखी घड़ियों द्वारा मापा गया समयांतराल S' की घड़ियों द्वारा उन्हीं घटनाओं के लिये मापे गये समयांतराल से ज़्यादा होगा। उदाहरण के लिए, अगर S', S के सापेक्ष चाल $c/2$ से चल रहा हो तो S' की घड़ी में मापे गए 10 s, S की घड़ी द्वारा 11.5 s मापे जाएंगे। (चूंकि यहां $\gamma = 1.15$ है)। अब चूंकि x' स्वेच्छ है इसलिए यह परिणाम S' की सभी घड़ियों पर लागू होता है। इस परिघटना को हम काल वृद्धि (time dilation) कहते हैं। इसका अर्थ यह भी है कि S में किसी प्रेक्षक के लिए गतिमान S' की घड़ी $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ के गुणज से धीमी चलती हुई दिखाई देती है (देखें चित्र 2.5 ख)। यानी लंबाई (या दूरी) की तरह समयांतराल (या समयावधि) भी एक आपेक्षिक राशि है। कोई घड़ी किस दर से चलती है (या क्या समयांतराल मापती है) यह इस बात पर निर्भर करता है कि समय का मापन किस तंत्र में किया गया है।



(क) (ख)

चित्र 2.5: (क) तंत्र S में घड़ियां C_1 और C_2 निश्चित स्थितियों पर रखी हैं। घड़ी C_1', जो S' में विरामावस्था में है, S के सापेक्ष x-अक्ष के अनुदिश वेग v से गतिमान है। माना कि जब $t = 0$ तो $t' = 0$; (ख) लॉरेंज़ रूपांतरण से हमें मिलता है कि समयांतराल $\Delta t = \gamma\,\Delta t'$। यहां Δt अनुचित समयांतराल है और यह S की घड़ियों C_1 और C_2 द्वारा मापा जाता है। यह उन दो घटनाओं के बीच का समयांतराल है जो S' में एक ही स्थिति पर घट रही हैं। S' वह तंत्र है जो गतिमान घड़ी के साथ जुड़ा हुआ है। लेकिन ये दोनों घटनाएं S में अलग-अलग स्थितियों पर घटती हैं। S' में मापे गए उस उचित समयांतराल $\Delta t'$ को S में मापने में ज़्यादा समय लगता है। अतः S में रखी घड़ियों C_1 और C_2 के मुकाबले गतिमान घड़ी गुणक $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ से धीमी चलती हुई दिखाई देती है।

आपेक्षिकता के बारे में पढ़ते हुए अक्सर आपका सामना इस तरह के कथनों से होगा: 'गतिमान घड़ियां धीमी चलती हैं।' आपके लिए इस बात का सही सही मतलब अच्छी तरह समझना निहायत ही ज़रूरी है।

एक घड़ी सबसे तेज़ तब चलती है जब वह उचित समयांतराल मापती है, यानी कि वह एक ही तंत्र (माना कि S') में एक निश्चित स्थिति पर घट रही घटनाओं के बीच का समयांतराल मापती है। यानी कि वह घड़ी तंत्र S' के सापेक्ष विरामावस्था में है। जब वह किसी जड़त्वीय तंत्र (माना कि S) के सापेक्ष एकसमान वेग v से चलती है तो S में विरामावस्था में स्थित घड़ियां, S' में गतिमान घड़ी द्वारा मापे गये समयांतराल की तुलना में इन दोनों घटनाओं के बीच एक ज़्यादा लम्बा (अनुचित) समयांतराल मापती हैं। इस तरह S के सापेक्ष गतिमान घड़ी, S में विरामावस्था में स्थित घड़ियों के मुकाबले एक गुणक $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ से धीमी चलती हुई दिखाई देती है।

अब आप यह तर्क दे सकते हैं कि गति आपेक्षिक होती है और S' में स्थित एक प्रेक्षक के लिए S की घड़ी गतिमान है। यानी S' में विरामावस्था में स्थित घड़ियों द्वारा मापी गयी S की घड़ी के चलने की दर भी धीमी नज़र आनी चाहिए। यह बात बिल्कुल सही है बशर्ते कि घटनाओं के बीच उचित समयांतराल S में एक ही स्थिति पर मापा जाये यानी $x_2 = x_1$। तब हम लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरण (2.7 घ) का इस्तेमाल करके पाते हैं

$$t'_1 = \gamma\,(t_1 - vx_1/c^2)$$

$$t'_2 = \gamma\,(t_2 - vx_2/c^2)$$

जिससे कि $\quad t'_2 - t'_1 = \gamma\,(t_2 - t_1) \qquad (\because x_2 = x_1)$

या $$t'_2 - t'_1 = \gamma\,\tau = \frac{\tau}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (2.16)$$

जहां τ, S में उचित समयांतराल है। यहां ध्यान देने वाली महत्वपूर्ण बात यह है कि एक ही स्थिति पर घट रही दो घटनाओं के बीच समयांतराल मापने वाली घड़ी सबसे छोटा समयांतराल मापती है। इस स्थिति में, यह S में स्थित घड़ी है। यही तात्पर्य है हमारी बात का जब हम कहते हैं कि किसी प्रेक्षक के सापेक्ष विरामावस्था में स्थित घड़ी सबसे तेज़ चलती है। S' के प्रेक्षक के लिए S की घड़ी चाल v से चल रही है। इसलिए S में मापे गये समयांतराल Δt का मान S' की घड़ी द्वारा मापे जाने पर $\gamma\Delta t$ होगा।

आइए अब तक जो कुछ भी इस भाग में सीखा है उसको संक्षेप में दोहराएं।

काल वृद्धि

- दो निर्देशांक तंत्र एकसमान आपेक्षिक गति कर रहे हैं। इनमें से प्रत्येक तंत्र में घड़ियां रखी हैं जो उसके सापेक्ष विरामावस्था में स्थित हैं।
- मान लीजिए कि S' में एक निश्चित स्थिति पर दो घटनाएं घटती हैं जिनके बीच में उचित समयांतराल $\Delta t'$ है जिसे S' में विरामावस्था में स्थित एक घड़ी द्वारा मापा गया है। तब S में स्थित घड़ियों द्वारा मापा गया इन घटनाओं के बीच का अनुचित समयांतराल Δt, $\Delta t'$ से लम्बा होगा। यहां S', S के सापेक्ष एकसमान चाल से गतिमान है। इस समयांतराल का मान होगा $\Delta t = \gamma\Delta t'$। इस तरह, S में विरामावस्था में रखी घड़ियों के सापेक्ष, S' की गतिमान घड़ियां धीमी चलेंगी।

- वैकल्पिक तौर पर माना कि दो घटनाएं S में एक निश्चित स्थिति पर घट रही हैं और उनके बीच उचित समयांतराल Δt है, जिसे S में विरामावस्था में रखी घड़ियों द्वारा मापा गया है। तब S' की घड़ियों द्वारा, जिनके सापेक्ष S गतिमान है, मापा गया इन घटनाओं के बीच का समयांतराल $\Delta t'$ होगा। और इसका मान होगा $\Delta t' = \gamma \Delta t$ यानी कि यह Δt से लंबा होगा। S' में विरामावस्था में स्थित घड़ियों के मुकाबले, S में गतिमान घड़ियां धीमी चलेंगी।

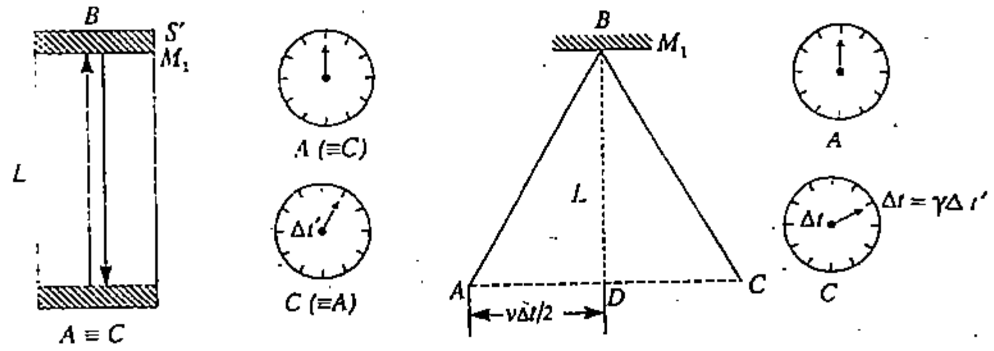
यहां पर हम आपको एक बात के बारे में सावधान करना चाहेंगे। काल वृद्धि की संकल्पना को एक सहज तरीके से समझना शायद आसान बात नहीं है और आपको इस धारणा को समझने में काफ़ी वक्त लग सकता है। आप इन अवधारणाओं को और काल वृद्धि की इस परिघटना को एक बार फिर बेहतर ढंग से समझ सकें, इसके लिए हम एक उदाहरण यहां दे रहे हैं।

उदाहरण 2: समयांतराल मापनों की तुलना

कल्पना कीजिए कि एक यात्री एक रेलगाड़ी में बैठा है जो एकसमान वेग $v\,(= v\hat{i})$ से पृथ्वी के सापेक्ष गतिमान है। यह यात्री एक ख़ास तरह की घड़ी द्वारा समय नापता है। इस घड़ी में एक बेलनाकार निर्वात नलिका के दोनों सिरों पर लगे दर्पणों के बीच एक प्रकाश स्पंद का परावर्तन होता है। यह घड़ी यात्री के निर्देश तंत्र S' के सापेक्ष विरामावस्था में है (चित्र 2.6 क)। जब भी प्रकाश का स्पंद दर्पण M_1 से टकराता है तो एक "क्लिक" की आवाज़ द्वारा यह क्षण घड़ी में दर्ज होता है। यात्री के तंत्र S' में दो उत्तरोत्तर क्लिक की आवाज़ों के बीच में समयांतराल एक उचित समयांतराल है (चित्र 2.6 ख) क्योंकि वह S' तंत्र में विरामावस्था में स्थित घड़ी द्वारा एक ही स्थिति पर मापा गया है।

अब मान लीजिए कि एक और प्रेक्षक (S), जो कि पृथ्वी पर स्थित है, S' तंत्र की एक घड़ी द्वारा दो उत्तरोत्तर "क्लिक" की आवाज़ों के बीच में मापे गये उचित समयांतराल को अपनी घड़ियों से मापता है। तो अब यह सवाल उठता है: S का प्रेक्षक S' की घड़ियों द्वारा मापे गए उचित समयांतराल का क्या मान मापेगा? S के प्रेक्षक के लिए, रेलगाड़ी, यात्री और घड़ी तीनों ही इस समयांतराल में दायीं ओर चल रहे हैं (चित्र 2.6 ग)। इसलिए S में समयांतराल अलग-अलग स्थितियों पर विरामावस्था में स्थित दो घड़ियों द्वारा मापा जायेगा। एक घड़ी पहली क्लिक (A) का क्षण दर्ज करेगी और दूसरी घड़ी दूसरे क्लिक (C) का क्षण दर्ज करेगी। इस तरह से, S का प्रेक्षक एक गतिमान घड़ी की माप की, दो विरामावस्था में स्थित घड़ियों द्वारा किये गये मापनों से तुलना करता है (चित्र 2.6 ख, ग, घ)।

चूंकि S के सापेक्ष रेलगाड़ी दायीं ओर चल रही है, इसलिए S' में रखी हुई घड़ी की स्थिति S के सापेक्ष बदलती रहती है। अतः S से प्रेक्षित प्रकाश स्पंद का पथ लंबा होता है (देखें चित्र 2.6 ग)। इसलिए पृथ्वी पर स्थित प्रेक्षक के लिए प्रकाश, रेलगाड़ी में बैठे यात्री की अपेक्षा ज़्यादा दूरी तय करता है। क्योंकि प्रकाश की चाल दोनों तंत्रों में एक ही है, इसलिए S का प्रेक्षक, S' के यात्री के मुकाबले इन दोनों क्लिकों के बीच में लंबा समयांतराल मापता है (देखें चित्र 2.6 ग और घ)। तब S का प्रेक्षक यह नतीजा निकालता है कि यात्री की घड़ी धीमी चल रही है। गणितीय रूप से हम इस परिणाम को इस तरह निकाल सकते हैं।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 2.6: (क) रेलगाड़ी से जुड़े गतिमान तंत्र S' में विरामावस्था में स्थित एक घड़ी में प्रकाश का पथ जो कि S' के यात्री द्वारा देखा जाता है। जब भी प्रकाश स्पंद दर्पण M_1 से टकराता है तो एक क्लिक दर्ज होता है। S' में पहली क्लिक के संगत बिंदु (A) और दूसरी क्लिक के संगत बिंदु C एक ही स्थिति पर हैं; (ख) दो उत्तरोत्तर क्लिक के बीच उचित समयांतराल ($\Delta t'$) जो यात्री द्वारा अपनी घड़ी में दर्ज किया गया है जो कि S के सापेक्ष गतिमान है; (ग) S' में प्रकाश स्पंद का पथ जो S के प्रेक्षक को दिखता है। S के लिए A और C अलग-अलग बिन्दुओं पर स्थित हैं क्योंकि रेलगाड़ी दायीं ओर चाल v से चल रही है; (घ) विरामावस्था में स्थित दो घड़ियों द्वारा मापा गया अनुचित समयांतराल जो कि बिंदु A और C पर स्थित हैं। यह समयांतराल Δt तंत्र S में मापा गया है और लंबा है क्योंकि $\Delta t = \gamma \Delta t'$।

चित्र 2.6 ग देखें। S' की घड़ी द्वारा दो उत्तरोत्तर क्लिक की आवाज़ों के बीच में मापा गया समयांतराल है

$$\Delta t' = \frac{2L}{c} \tag{2.17}$$

जहां L नली की लंबाई है। S में उत्तरोत्तर क्लिक की आवाज़ों के बीच में मापा गया समयांतराल है

$$\Delta t = \frac{AB + BC}{c} = \frac{2\,AB}{c} \tag{2.18}$$

लेकिन पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB = [L^2 + (AC/2)^2]^{1/2}$$

यहां $AC = v\Delta t$ क्योंकि रेलगाड़ी इस दूरी को चाल v से समय Δt में तय करती है। इसलिए समीकरण (2.18) से

$$\Delta t = \frac{2}{c}\left[L^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

यह Δt में द्विघाती समीकरण है। इसे Δt के लिए हल करने पर हमें दो मूल मिलते हैं:

$$\Delta t = \pm\, \frac{2\,L/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

जिसमें से कि हम ऋणात्मक मूल को छोड़ देते हैं। इस तरह

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t'$$

यह ठीक समीकरण (2.15) जैसा ही परिणाम है।

अब आइये हम कुछ वास्तविक समयांतरालों की गणना करें। मान लीजिए S' तंत्र S के सापेक्ष चाल $0.75c$ से चल रहा है। तब $\gamma = 1.5$ और $\Delta t = 1.5\,\Delta t'$। इस तरह, S के प्रेक्षक के लिए, जिस दौरान में S' की घड़ी क्लिक की दो आवाज़ें दर्ज करेगी (यानी $\Delta t' = 2$ इकाई), S की घड़ी क्लिक की तीन आवाज़ें दर्ज करेगी (यानि $\Delta t = 3$ इकाई)। इसका मतलब यह हुआ कि गतिमान घड़ी एक स्थाई घड़ी के मुकाबले धीमी चलती है।

इसके विपरीत, S' के लिए, S में चल रही एक घड़ी धीमी मालूम होगी बशर्ते कि S की घड़ी उचित समयांतराल माप रही हो। इस संदर्भ में हम आपको फिर से सावधान करना चाहेंगे कि इस तरह के कथन को कि गतिमान घड़ियां धीमी चलती हैं ग़लत तरीक़े से समझने की बहुत संभावना है। इस कथन के सही मायने यही हैं कि एक जड़त्वीय तंत्र S के सापेक्ष अचर वेग से चल रही घड़ी धीमी चलती है जबकि उसका समय S में स्थित घड़ियों से मापा जाये। याद रखें कि इन सभी स्थितियों में हम समय के मापन की बात कर रहे हैं और जब हम प्रेक्षक शब्द का प्रयोग करते हैं तो इससे आप यह न समझें कि प्रेक्षक वह है जो देखता है। आपेक्षिकता सिद्धांत में प्रेक्षक वह है जो भौतिक राशियों का मापन करता है। आइए अब हम कुछ ऐसे प्रयोगों की बात करें जो काल वृद्धि का प्रमाण देते हैं।

काल वृद्धि के लिए प्रायोगिक प्रमाण

दैर्घ्य संकोच की तरह काल वृद्धि का पहले पहल प्रायोगिक प्रमाण भी म्यूऑन पर किये गये प्रेक्षणों से मिला जो कि 1941 में बी. रॉसी (B. Rossi) और डी.बी. हॉल (D.B. Hall) ने किये। म्यूऑन का औसत जीवन काल $2.2\ \mu s$ है। यह इतना कम है कि भले ही म्यूऑन प्रकाश की चाल से वातावरण की ऊपरी सतह (जहां कि वे उत्पन्न होते हैं) से चलें, फिर भी उन्हें पृथ्वी की सतह तक (जो कि वहां से लगभग 10 km दूरी पर है) नहीं पहुंच पाना चाहिए। ऐसा इसलिए है कि उनके द्वारा उनके अपने तंत्र में तय की गई दूरी सिर्फ़ $(2.2 \times 10^{-6}\ s) \times (3 \times 10^{8}\ ms^{-1}) = 660\ m$ होगी। लेकिन फिर भी इन्हें पृथ्वी पर स्थित प्रयोगशालाओं में संसूचित किया जाता है। इस बात को हम सिर्फ़ इस तथ्य के सहारे समझ सकते हैं कि हमारे निर्देश तंत्र में म्यूऑन के जीवन काल में γ गुना वृद्धि हो जाती है, यानि यह $\gamma\,(2.2 \times 10^{-6}\ s)$ है। इस तरह अगर $v = 0.998c$ तो $\gamma = 16$ और हमारे तंत्र में म्यूऑन का जीवन काल बढ़कर $35\ \mu s$ हो जाता है जिससे कि वे इतनी लंबी दूरी $(660\ m \times 16 = 10560\ m = 10.56\ km)$ तय कर सकते हैं। यह परिणाम म्यूऑन के तंत्र में दैर्घ्य संकोच के भी संगत है। 10.5 km की दूरी संकुचित होकर म्यूऑन के तंत्र में 660 m रह जाती है। वस्तुतः ($\gamma = 12$ के लिए) म्यूऑनों पर किये गये तुल्य प्रयोगों में जो कि 1968 में यूरोप में CERN प्रयोगशाला में किये गये, ऐसे म्यूऑन देखे गये जिनके औसत जीवन काल में समीकरण (2.15) के मुताबिक काल वृद्धि हुई थी और इन परिणामों की यथार्थता 1 प्रतिशत तक थी। पृथ्वी के चारों ओर वायुयानों में ले जाई गई परमाण्विक घड़ियों में भी काल वृद्धि देखी गई जिससे एक बार फिर यह साबित हुआ कि काल वृद्धि एक वास्तविक घटना है।

उच्च-ऊर्जा नाभिकीय भौतिकीविदों के लिए, जो उच्च ऊर्जा त्वरित्रों में तेज़ी से क्षय होने वाले कणों पर शोध करते हैं, काल वृद्धि प्रभाव बहुत महत्वपूर्ण है। उदाहरण के लिए, पायॉन और केऑन जैसे मूल कणों का म्यूऑन के मुकाबले 100 गुना तेज़ी से स्वतः क्षय होता है। अगर प्रकृति में काल वृद्धि की परिघटना नहीं होती, तो ऐसे कण, त्वरित्रों में अपने स्रोत से कुछ फीट की दूरी तय करने से पहले ही क्षय होकर ग़ायब हो जाते, भले ही प्रकाश की चाल से ही क्यों न चल रहे होते। लेकिन काल वृद्धि के कारण उनके औसत जीवन काल का मान काफ़ी बढ़ जाता है और उनका क्षय धीमा पड़ जाता है। इस तरह त्वरित्रों में, अपने स्रोत से सैकड़ों फीट की दूरी पर भी उन्हें प्रेक्षित किया जा सकता है। इस कारण उनका इस्तेमाल अन्य प्रयोगों के लिए भी किया जा सकता है। तो इस तरह काल वृद्धि की परिघटना उन भौतिकीविदों के लिए निहायत

वेग $\mathbf{v}'$ के घटक हैं,

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - Vdx/c^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - V}{1 - \dfrac{V}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

या

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x \beta/c}, \quad \beta = \frac{V}{c} \tag{2.19 क}$$

इस परिणाम की तुलना आप गैलीलीय रूपांतरण से मिले परिणाम से करें जिसके मुताबिक $v'_x = v_x - V$। अब हम v' के y और z घटकों के बारे में क्या कह सकते हैं? चूंकि $y = y'$ और $z = z'$, इसलिए

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\,(dt - Vdx/c^2)} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \dfrac{V}{c^2}\dfrac{dx}{dt}\right)}$$

या

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\,(1 - v_x V/c^2)} \tag{2.19 ख}$$

और

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\,(1 - v_x V/c^2)} \tag{2.19 ग}$$

आप समीकरण (2.8) का प्रयोग करके व्युत्क्रम रूपांतरण निकाल सकते हैं या फिर समीकरणों (2.19 क से 2.19 ग) को हल करके v_x, v_y, v_z के मान निकाल सकते हैं। इसके लिए क्या आप नीचे दिया गया बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे?

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 8

आपेक्षिकीय वेग योग संबंध को सिद्ध करें :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{(1 + v'_x V/c^2)} \tag{2.20 क}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\,(1 + v'_x V/c^2)} \tag{2.20 ख}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\,(1 + v'_x V/c^2)} \tag{2.20 ग}$$

ध्यान दें कि $V << c$ के लिए ये समीकरणें गैलीलीय रूपांतरण में समानीत हो जाती हैं। समीकरण (2.19 क से ग) से हमें वेगों का आपेक्षिकीय रूपांतरण संबंध मिलता है। समीकरण (2.20 क से ग) द्वारा दिये गये व्युत्क्रम रूपांतरण संबंध को आपेक्षिकीय वेग योग फार्मूला कहा जाता है। इन समीकरणों को हम इस तरह समझ सकते हैं [illegible] वेगों $\mathbf{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$ और $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ का परिणामी देती हैं जो कि $\mathbf{v}\,(v_x, v_y, v_z)$ है।

अब हम रूपांतरण समीकरणों (2.19) और (2.20) को Enterprise और Endeavour अंतरिक्ष यानों के उदाहरण पर लागू कर सकते हैं। पृथ्वी के सापेक्ष Endeavour की चाल $0.9c$ है और Enterprise की चाल $-0.9c$ है। इसलिए पृथ्वी से जुड़े [illegible] के सापेक्ष ये दोनों अंतरिक्ष यान एक दूसरे की विपरीत दिशा में चाल [illegible]

हैं। अब माना कि तंत्र S' अंतरिक्ष यान Endeavour से जुड़ा है यानी $V = -0.9c$। तब Enterprise की तंत्र S' के सापेक्ष चाल (समीकरण 2.19 क) से मिलेगी:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - (0.9c)(-0.9c)/c^2}$$

$$= \frac{1.8c}{1.81} = 0.99c$$

यानि Enterprise, Endeavour के सापेक्ष चाल $0.99c$ से चलता है। इस तरह के सवालों को हल करने का तरीक़ा यह है कि हम गतिमान तंत्र S' को गतिमान वस्तुओं में से किसी एक के साथ जोड़ें। तो ऊपर के उदाहरण में, विकल्प के तौर पर हम तंत्र को Enterprise यान के साथ भी जोड़ सकते थे। तब Enterprise के सापेक्ष Endeavour की चाल $-0.99c$ होती यानी कि उसकी दिशा विपरीत होती।

अब मान लीजिए कि गतिमान कण फ़ोटॉन है और S में $v_x = c$। समीकरण (2.19 क) से हम देख सकते हैं कि

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - c\,V/c^2} = c$$

इस तरह तंत्र S' में भी फ़ोटॉन का वेग c है। दरअसल लॉरेंज़ रूपांतरण लिखा ही इस तरह गया है कि वह इस परिणाम के संगत हो। क्या यह बात तसल्ली बख़्श नहीं है कि हमें दोनों ही निर्देश तंत्रों में फ़ोटॉन की चाल का मान c मिलता है? अगर $v_y = c$ और $v_x = 0$ हो, तो

$$v'_x = -V \text{ और } v'_y = c\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

जिससे कि

$$(v'^2_x + v'^2_y)^{1/2} = c$$

अब माना कि एक फ़ोटॉन S' में चाल $+c$ से चल रहा है, और S', S के सापेक्ष चाल $+c$ से चल रहा है। तब वेगों के आपेक्षिकीय रूपांतरण से हमें यह परिणाम मिलेगा कि S से देखने पर फ़ोटॉन चाल c से चल रहा है न कि $2c$ से। आप यह जांच कर सकते हैं कि यह परिणाम (2.19 क) से ही निकलता है। यह तथ्य कि प्रकृति में एक ऐसी सीमांत चाल है जिससे अधिक किसी वस्तु की चाल नहीं हो सकती, वस्तुतः वेग रूपांतरण समीकरणों का ही परिणाम है और इन समीकरणों को हमने लॉरेंज़ रूपांतरण से प्राप्त किया है। इसका मतलब यह है कि हम निर्देश तंत्र बदल कर भी प्रकाश की चाल से अधिक चाल पर नहीं चल सकते। और इस बात पर भी ध्यान दें कि ऐसा कोई तंत्र नहीं है जिसमें कि फ़ोटॉन (जो कि प्रकाश का क्वांटम है) विरामावस्था में होता हो।

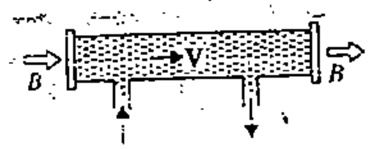
अब आइये हम वेगों के आपेक्षिकीय योग का एक उदाहरण लें। इस उदाहरण में हम यह पता लगायेंगे कि किसी माध्यम, जैसे कि पानी, की गति का प्रकाश की चाल पर क्या असर होता है।

उदाहरण 3 : गतिमान माध्यम में प्रकाश की चाल

किसी माध्यम में प्रकाश की चाल c से कम होती है। इसका मान होता है

$$v = \frac{c}{n}$$

जहां n माध्यम का अपवर्तनांक (index of refraction) है: निर्वात के लिए $n = 1$ होता है



चित्र 2.8: गतिमान माध्यम में संचरण कर रहा प्रकाश, उस माध्यम द्वारा खींचा जाता है। यह एक आपेक्षिकीय प्रभाव है जिसकी व्याख्या हम आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत द्वारा कर सकते हैं। B प्रकाश किरण पुंज है।

और पदार्थ में $n > 1$; पानी के लिए $n = 1.3$ । अब हमें गतिमान माध्यम में (जैसे कि पानी से भरी एक नली में) प्रकाश की चाल निकालनी है (चित्र 2.8)। अगर नली में पानी विरामावस्था में है, तो एक विरामावस्था में स्थित जड़त्वीय तंत्र S के सापेक्ष पानी में प्रकाश की चाल है $v = c/n$। अब सवाल है कि तंत्र S में प्रकाश की चाल क्या होगी जबकि पानी चाल V से बह रहा हो?

माना कि तंत्र S' बह रहे पानी के साथ जुड़ा है। S' से देखे जाने पर पानी में प्रकाश की चाल $v' = c/n$ है। तंत्र S से देखे जाने पर, हमें बहते हुए पानी में प्रकाश की चाल समीकरण (2.20 क) से मिलती है:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} = \frac{c/n + V}{1 + V/nc} = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + nV/c}{1 + V/nc}\right)$$

अब अगर हम दायीं ओर के पद का प्रसार करें और $(V/c)^2$ और उससे उच्च कोटि के पदों को छोड़ दें तो हमें मिलता है

$$v = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{nV}{c}\right) \times \left(1 - \frac{V}{nc} + \ldots\right)$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 + \frac{nV}{c} - \frac{V}{nc}\right)$$

$$= \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

इस तरह तंत्र S से देखे जाने पर ऐसा लगता है मानों कि बहता हुआ तरल प्रकाश को अपने साथ खींच रहा हो, लेकिन पूरी तरह से नहीं। तरल के वेग का सिर्फ़ $\left(1-\frac{V}{nc}\right)$वां हिस्सा ही, तरल में प्रकाश की चाल c/n में जुड़ता है। इस प्रभाव को सबसे पहले 1851 में फ़िज़ो (Fizeau) ने प्रयोग करके देखा था। लेकिन इसकी सही-सही समझ सिर्फ़ विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत की सहायता से ही दी जा सकी।

अब आप समीकरण (2.19) और (2.20) को लागू करना चाहेंगे।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 9

(क) पृथ्वी के सापेक्ष A की चाल $0.9c$ है। अगर एक अंतरिक्ष यान B को A के सापेक्ष चाल $0.5c$ से गुज़रना है, तो उसकी पृथ्वी के सापेक्ष क्या चाल होनी चाहिए?

(ख) एक रॉकेट पृथ्वी के सापेक्ष किसी दिशा में चाल $0.9c$ से चल रहा है। उसे $0.4c$ के परिमाण का अतिरिक्त वेग दिया जाता है। उसका अंतिम वेग क्या होगा?

और अंत में हम प्रकाशिकी में विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के एक अनुप्रयोग को ले रहे हैं। आप ध्वनि और प्रकाश के लिए डॉप्लर प्रभाव को तो जानते ही हैं। वस्तुतः स्रोत या प्रेक्षक की गति के कारण ध्वनि या प्रकाश की आवृत्ति परिवर्तन एक जाना पहचाना अनुभव है। अपने से दूर जा रही गाड़ी के हॉर्न की आवाज़ आपको कम होती हुई सुनाई पड़ती है और अपनी ओर आती हुई रेलगाड़ी की सीटी की आवाज़ लगातार तेज़

होती हुई सुनाई देती है। इसी तरह, पृथ्वी से दूर जा रही मंदाकिनियों से आने वाले प्रकाश के स्पेक्ट्रम में लाल छोर की ओर आवृत्ति विस्थापन की परिघटना भी प्रकाशिकी में डॉप्लर प्रभाव का उदाहरण है।

आप यह तो जानते हैं कि ध्वनि में डॉप्लर प्रभाव इन स्थितियों में अलग-अलग परिणाम देता है: जबकि (i) स्रोत विरामावस्था में है और प्रेक्षक गतिमान है और (ii) स्रोत गतिमान है और प्रेक्षक विरामावस्था में है (इसकी विस्तृत जानकारी के लिए देखें हमारे भौतिकी के PHE-02 (दोलन और तरंगें) पाठ्यक्रम की इकाई 7)। अब अगर हम अंतरिक्ष में संचरण कर रही प्रकाश तरंगों पर यह परिणाम लागू करें, जैसा कि प्रकाशिकी में क्लासिकी डॉप्लर प्रभाव में किया जाता है, तो हमें यह पता लग जायेगा कि स्रोत और प्रेक्षक से जुड़े दो जड़त्वीय तंत्रों में से कौन सा तंत्र विरामावस्था में है। लेकिन यह बात विशिष्ट आपेक्षिकता नियम का उल्लघंन करेगी। इस कठिनाई को सुलझाने के लिए हमें प्रकाशिकी में क्लासिकी डॉप्लर प्रभाव में आपेक्षिकीय संशोधन करना होगा। इस इकाई के अगले भाग में हम यही करेंगे।

2.5 आपेक्षिकीय डॉप्लर प्रभाव

एक प्रकाश का स्रोत T लें जो अपने विराम तंत्र S में आवर्तकाल τ से प्रकाश स्पंद उत्सर्जित करता है। मान लीजिए कि प्रकाश के दो उत्तरोत्तर स्पंद क्षण $t = 0$ और $t = \tau$ पर स्रोत द्वारा उत्सर्जित होते हैं। माना कि यह स्रोत निर्देश तंत्र S में $x = 0$ पर विरामावस्था में स्थित है। इन स्पंदों को निर्देश तंत्र S' में ग्रहण किया जाता है जो कि S के सापेक्ष वेग $u\hat{i}$ से गतिमान है।

माना कि प्रारंभिक स्पंद S' में $x' = 0$ पर क्षण $t' = 0$ पर पहुंचता है: S' तंत्र के उस बिंदु $(x' = X')$ का मान जो क्षण $t = \tau$ पर $x = 0$ के संपाती होता है, लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरण (2.7 क) से मिलता है:

$$X' = \frac{x - ut}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = \frac{-u\tau}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \tag{2.21}$$

जहां $x = 0$ और $t = \tau$। S' में इसके संगत समय समीकरण (2.7 घ) से दिया जाता है

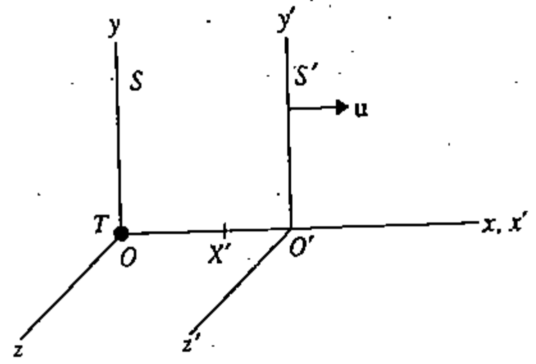
$$t' = \frac{t - ux/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = \frac{\tau}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \tag{2.22}$$

इस तरह S में $x = 0$ और $t = \tau$ पर उत्सर्जित दूसरा स्पंद, S' में X' और t' पर ग्रहण किया जाता है। X' और t' के मान समीकरण (2.21) और (2.22) से दिए जाते हैं। तंत्र S' में दूसरे स्पंद को, बिंदु $x' = -u\tau/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ से मूल बिंदु $x' = 0$ तक चाल c से चलकर पहुंचने में लगा समय है:

$$\Delta t' = \frac{\tau u/c}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \tag{2.23}$$

इस तरह दूसरा स्पंद S' के मूल बिंदु पर क्षण $t' + \Delta t'$ पर पहुंचता है। चूंकि प्रारंभिक स्पंद S' के मूल बिंदु पर $t' = 0$ पर पहुंचता है, इसलिए S' में $x' = 0$ पर दोनों स्पंदों के पहुंचने के बीच बीता हुआ समयांतराल है:

$$t' + \Delta t' = \frac{\tau(1 + u/c)}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = \tau\left[\frac{1 + u/c}{1 - u/c}\right]^{1/2} \tag{2.24}$$



चित्र 2.9: S में $x = 0$ पर रखा हुआ एक ट्रांसमीटर T आवर्तकाल τ से प्रकाश के स्पंद उत्सर्जित करता है। प्रकाश के उत्तरोत्तर स्पंद S' में प्राप्त किये जाते हैं। प्रारंभिक स्पंद $x' = 0$ और $t' = 0$ पर पहुंचता है; $x' = X' = -u\tau/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ वह बिंदु है जिस पर S' में क्षण $t' = \dfrac{\tau}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$ पर दूसरा स्पंद पहुंचता है।

क्या यहां आपको यह बात समझ में आई कि यह वस्तुतः एक काल वृद्धि प्रभाव है जो ट्रांसमीटर और रिसीवर की आपेक्षिक गति के कारण होता है? तंत्र S' में दोनों स्पंदों के बीच मापा गया समयांतराल एक अनुचित समयांतराल है। तंत्र S में प्रकाश का स्रोत एक घड़ी की तरह काम करता है जो एक ही बिंदु $x = 0$ पर दोनों स्पंदों के बीच उचित समयांतराल मापता है। S' में स्थित एक प्रेक्षक के लिए यह एक गतिमान घड़ी की तरह है जो S' में विरामावस्था में स्थित घड़ियों की तुलना में धीमी चलती है। इसलिए S' में एक प्रेक्षक दोनों स्पंदों के बीच एक लम्बा समयांतराल मापता है जो कि S के प्रेक्षक द्वारा मापे गये समयांतराल की तुलना में अधिक है। इस समयांतराल का व्यंजक समीकरण (2.24) में दिया है।

तंत्र S' में ग्रहण किये गये दोनों उत्तरोत्तर स्पंदों के बीच के समय को म इस तरह भी समझ सकते हैं: यह S के ट्रांसमीटर से उत्सर्जित प्रकाश तरंग का आवर्त काल है जिसे तंत्र S' में मापा गया है। तरंग की आवृत्ति उसके आवर्तकाल का व्युत्क्रम होती है, इसलिए

$$\nu' = \frac{1}{t' + \Delta t'} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1 - u/c}{1 + u/c}\right)^{1/2}$$

या

$$\nu' = \nu\left(\frac{1 - u/c}{1 + u/c}\right)^{1/2} = \nu\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

यहां ν', S' में प्राप्त प्रकाश तरंग की आवृत्ति है और $\nu\ (= 1/\tau)$, S से उत्सर्जित प्रकाश तरंग की आवृत्ति है। अगर रिसीवर स्रोत से दूर जा रहा है, तो u धनात्मक होगा और ν', ν से कम होगा। यहां आपको यह ध्यान देना चाहिए कि अगर स्रोत रिसीवर से दूर जा रहा होता तो भी हमें यही परिणाम मिलता। यह ध्वनि में डॉप्लर प्रभाव के परिणाम से बिल्कुल ही भिन्न है जहां इन दोनों स्थितियों में हमें आवृत्ति के अलग-अलग मान मिलते हैं। अगर रिसीवर स्रोत की तरफ आ रहा हो तो हम u को ऋणात्मक लेते हैं और ν', ν से बड़ा होता है। इस बार अगर स्रोत रिसीवर की ओर आ रहा हो तो भी

परिणाम वही रहेगा। इस परिणाम को हम तरंग दैर्घ्य के लिए भी लिख सकते हैं। चूंकि $\lambda = c/v$ और $\lambda' = c/v'$ इसलिए

$$\lambda' = \lambda\left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c}\right)^{1/2} = \lambda\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{1/2} \tag{2.26}$$

समीकरणें (2.25) और (2.26) निर्वात में प्रकाश तरंग के लिए आपेक्षिकीय अनुदैर्घ्य डॉप्लर प्रभाव का वर्णन करती हैं। वे उस प्रभाव को व्यक्त करती हैं जबकि स्रोत और प्रेक्षक की आपेक्षिक गति एक ही अक्ष के अनुदिश हो रही है।

अब हम इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका सारांश यहाँ प्रस्तुत कर रहे हैं।

2.6 सारांश

- विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों के संगत नया निर्देशांक रूपांतरण लॉरेंज़ रूपांतरण कहलाता है। यह एक जड़त्वीय तंत्र S में घटी हुई घटना के निर्देशांकों (x, y, z, t) का संबंध दूसरे जड़त्वीय तंत्र S' में उसी घटना के निर्देशांकों (x', y', z', t') से स्थापित करता है जबकि S', S के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}\ (= v\hat{\mathbf{i}})$ से चल रहा है:

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \gamma\,(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \gamma\,(t - \beta x/c)$$

जहां $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, $\beta = v/c$। व्युत्क्रम लॉरेंज़ रूपांतरण है

$$x = \frac{x' + vt'}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \gamma\,(x' + \beta ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \gamma\,(t' + \beta x'/c)$$

- विशिष्ट आपेक्षिकता के अभिगृहीतों और लॉरेंज़ रूपांतरण से हमें समकालिकता की आपेक्षिकता और लंबाई तथा समयांतराल मापन की आपेक्षिकता प्राप्त होती है।

- समकालिकता (simultaneity) आपेक्षिक है। यह ज़रूरी नहीं कि दो घटनाएं जो किसी जड़त्वीय निर्देश तंत्र में, दो अलग-अलग स्थितियों पर, एक ही क्षण पर घटती हैं, किसी दूसरे जड़त्वीय तंत्र में समकालिक हों। इसी तरह, यह ज़रूरी नहीं कि दो घटनाएं जो एक जड़त्वीय तंत्र में एक ही स्थिति पर लेकिन दो अलग-अलग क्षणों पर घटती हैं, दूसरे जड़त्वीय तंत्रों में एक ही स्थिति पर घटें।

- दैर्घ्य संकोचः किसी वस्तु की लंबाई उस निर्देश तंत्र पर निर्भर करती है जिसमें उसका मापन होता है। अगर उस निर्देश तंत्र में उसकी उचित लंबाई L_0 है

जिसके सापेक्ष वस्तु विरामावस्था में है, तो उस निर्देश तंत्र में जिसके सापेक्ष वह वस्तु गतिमान है, उसकी लंबाई होगी

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

- काल वृद्धि: किन्हीं दो घटनाओं के बीच का समयांतराल एक आपेक्षिकीय राशि है जिसका मान उस निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है जिसमें उसका मापन होता है। एक घड़ी जो किसी जड़त्वीय निर्देश तंत्र S के सापेक्ष एकसमान रूप से गतिमान है, उस तंत्र S में विरामावस्था में रखी घड़ियों की तुलना में $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ गुना धीमी चलती है। S की घड़ियां, गतिमान घड़ी के जड़त्वीय तंत्र S' में एक ही स्थिति पर घट रही घटनाओं के लिए एक लंबा समयांतराल (Δt) मापती हैं, जो कि गतिमान घड़ी द्वारा मापे गये उचित समयांतराल $\Delta t'$ का γ गुना है:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

- आपेक्षिक गति कर रहे दो तंत्रों S और S' में वेग का लॉरेंज़ रूपांतरण होता है

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma\,(1 - v_x V/c^2)}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma\,(1 - v_x V/c^2)}$$

जहाँ (v_x, v_y, v_z) S में वेग घटक हैं, (v_x', v_y', v_z'), S' में वेग घटक हैं और S', S के सापेक्ष वेग $\mathbf{v} = V\hat{\mathbf{i}}$ से चल रहा है।

- व्युत्क्रम आपेक्षिकीय वेग रूपांतरण जिन्हें आपेक्षिकीय वेग योग फार्मूलों के नाम से भी जाना जाता है, इस प्रकार हैं:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{(1 + v_x' V/c^2)}$$

$$v_y = \frac{v_y'}{\gamma\,(1 + v_x' V/c^2)}$$

$$v_z = \frac{v_z'}{\gamma\,(1 + v_x' V/c^2)}$$

- प्रकाशिकी में डॉप्लर प्रभाव पर विशिष्ट आपेक्षिकता को लागू करने पर हमें उसमें एक संशोधन करना पड़ता है। आपेक्षिकीय डॉप्लर प्रभाव, तंत्र S में (जिसमें स्रोत विरामावस्था में है) एक प्रकाश तरंग की आवृत्ति ν, और S के सापेक्ष वेग $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ से गतिमान तंत्र S' में स्थित प्रेक्षक द्वारा मापी गयी आवृत्ति ν' में संबंध स्थापित करता है:

$$\nu' = \nu \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$ (स्रोत और प्रेक्षक एक दूसरे से दूर हो रहे हों)

और $$\nu' = \nu \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2}$$ (स्रोत और प्रेक्षक एक दूसरे के पास आ रहे हों)

2.7 अंत में कुछ प्रश्न

45 मिनट लगाए

1. तंत्र S' में एक प्रेक्षक के अनुसार दो घटनाओं E_1 और E_2 के निम्नलिखित निर्देशांक हैं:

$$E_1: \ x_1 = 1.2 \times 10^9 \text{ m}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad t_1 = 7\text{s}$$
$$E_2: \ x_2 = 3.0 \times 10^9 \text{ m}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0, \quad t_2 = 11\text{s}$$

S के सापेक्ष चाल $4c/5$ से गतिमान S' के प्रेक्षक द्वारा मापे गये E_1 और E_2 के निर्देशांकों की गणना करें। अब माना कि E_1 किसी विस्फोटक के बटन को दबाने की घटना है और E_2 उससे होने वाले विस्फोट की। क्या आपकी गणना से यह नतीजा निकलता है कि तंत्र S' में यह विस्फोट बटन दबाने से पहले ही हो जायेगा? आप इस विरोधाभास को कैसे हल करेंगे?

2. क) सिद्ध करें कि तंत्र S में समकालिक दो घटनाएं जो आकाश में दूरी Δx पर घट रही हैं, S' में दिक् और काल दोनों ही में अलग-अलग बिंदुओं पर घटेंगी और उनका संबंध यह होगा

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \ , \ \Delta t' = -\frac{\beta}{c} \gamma \Delta x$$

जहां S', S के सापेक्ष चाल v से x दिशा में चल रहा है।

ख) सिद्ध करे कि अगर L_0^3 एक घन का विराम आयतन है तो उसकी एक कोर के समांतर दिशा में वेग v से चल रहे तंत्र में मापा गया घन का आयतन होगा $L_0^3 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$।

ग) एक Ω^--कण का जो हमारे सापेक्ष इतनी चाल से चल रहा है कि उसके लिए $\gamma = 9.0$, हमारे द्वारा मापा गया औसत जीवन काल 7.4×10^{-10}s है। इस कण का उचित औसत जीवन काल क्या है?

3. हम दो मंदाकिनियों को एक दूसरे की विपरीत दिशाओं में चाल $0.3c$ द्वारा जाते हुए प्रेक्षित करते हैं। इन मन्दाकिनियों में से किसी एक मन्दाकिनी में बैठे प्रेक्षक दूसरी मन्दाकिनी की चाल का क्या मान मापेंगे?

4. एक प्रोटॉन किरणपुंज का त्वरण किया जाता है जिससे कि उनका वेग 2×10^8 cms^{-1} हो जाता है। उसके बाद वे एक क्षेत्र में अचर वेग से चलते हैं जहां से उनका हाइड्रोजन परमाणु में उदासीनीकरण कर दिया जाता है। इस प्रक्रिया में प्रकाश उत्सर्जित होता है जिसे एक स्पेक्ट्रोमीटर द्वारा प्रेक्षित किया जाता है। प्रकाश स्पेक्ट्रम में तरंग दैर्घ्य का डॉप्लर विस्थापन क्या होगा? दिया है कि जब परमाणु विरामावस्था में है तो उत्सर्जित प्रकाश का तरंग दैर्घ्य $\lambda = 4861.33$ Å है।

5. सिद्ध करें कि अगर $v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2$ और $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ तो हम लिख सकते हैं कि

$$c^2 - v^2 = \frac{c^2 (c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{(c^2 + v_x' V)^2}$$

जहां प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं। इस संबंध से हमें तंत्र S में एक कण की चाल v और S' तंत्र में कण की चाल v' के बीच एक संबंध मिलता है।

2.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण (2.1 ख) में गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण रखने पर

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

या $$x^2 - 2vtx + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

जो कि समीकरण (2.1 क) के समान नहीं है। इसलिए गैलीलीय निर्देशांक रूपांतरण एक ही साथ दोनों समीकरणों (2.1 क और 2.1 ख) को संतुष्ट नहीं करता।

2.
$$2\, a_1\, a_2 = 2\, c^2 a_1\, b_1 \qquad (1)$$

$$a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1 \qquad (2)$$

$$a_2^2 - a_1^2 c^2 = - c^2 \qquad (3)$$

हमें इन तीनों समीकरणों (1 से 3) की मदद से a_1, a_2 और b_1 का मान निकालना है। इसके लिए हम समीकरण (2.4 क) का इस्तेमाल करेंगे जिससे $a_2/a_1 = - v$। इस तरह समीकरण (3) से हमें मिलता है

$$a_1^2 v^2 - a_1^2 c^2 = - c^2, \qquad \text{यानी, } a_1^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

या $$a_1 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$a_2 = - \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad \text{(3) से}$$

और (1) से मिलता है

$$b_1 = \frac{a_2}{c^2} = - \frac{v}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

इस तरह समीकरण (2.2 क से घ) हो जाते हैं

$$x' = \frac{x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - \frac{vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = - \frac{vx}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{t}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

चूंकि $b_2 = a_1$.

3. चूंकि $v/c << 1$, इसलिए हम 1 की तुलना में v^2/c^2 को नगण्य मान कर छोड़ सकते हैं। तब

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \cong x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

अंतिम समीकरण में माना कि मूल बिंदु O' का गति समीकरण है $x = vt$। तब

$$t' = \frac{t - v^2t/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \doteq t\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

जब $v/c << 1$ होता है तो इस समीकरण से हमें मिलता है

$$t' = t$$

इस तरह प्रकाश की चाल से बहुत कम चाल वाली वस्तुओं के लिए लॉरेंज़ रूपांतरण गैलीलीय रूपांतरण में समानीत हो जाता है।

4. समीकरण (2.7 घ) से γt को (2.7 क) में रखने पर हमें मिलता है

$$x' = \gamma x - \beta c \left(t' + \frac{\gamma \beta x}{c}\right)$$
$$= \gamma x (1 - \beta^2) - \beta c t'$$
$$= \frac{x}{\gamma} - \beta c t'$$

या $$x = \gamma (x' + \beta c t')$$

जो समीकरण (2.8 क) है।

समीकरण (2.7 क) से γx को समीकरण (2.7 घ) में रखने पर हमें मिलता है

$$t' = \gamma t - \frac{\beta}{c} (x' + \gamma \beta c t)$$
$$= \gamma t (1 - \beta^2) - \frac{\beta}{c} x'$$
$$= \frac{t}{\gamma} - \frac{\beta}{c} x'$$

या $$t = \gamma (t' + \beta x'/c)$$

जो समीकरण (2.8 घ) है।

5. क) समीकरण (2.7 क) से

$$x_2' - x_1' = \gamma (x_2 - x_1) - \beta c (t_2 - t_1)$$

चूंकि $x_2 = x_1$, लेकिन $t_2 \neq t_1$ इसलिए

$$x_2' - x_1' = \beta c (t_1 - t_2) \neq 0 \text{ जब तक } \beta \neq 0।$$

इसलिए $x_2' \neq x_1'$। अतः ज़रूरी नहीं कि S में एक ही स्थिति पर घटने वाली घटनाएं जो अलग-अलग क्षणों पर घटती हैं, S' में एक ही स्थिति पर घटें।

ख) $x = 0$ पर $t = 0$ का अर्थ निकलता है कि समीकरण (2.7 घ) से $t' = 0$। लेकिन अन्य सभी बिंदुओं पर (जिनके लिए $x \neq 0$), समीकरण (2.7 घ) से मिलता है

$$t' = \gamma (t - vx/c^2)$$

अतः अगर $x \neq 0$ तो $t' \neq t$। इस तरह, $x = 0$ के अतिरिक्त आकाश के अन्य सभी बिंदुओं पर घटने वाली घटनाएं S और S' में एक ही क्षण पर नहीं घटती हैं। इसी तरह, समीकरण (2.7 क) से

$$x' = \gamma (x - vt) \neq x \text{ सिवाय } x = 0 \text{ और } t = 0 \text{ पर।}$$

यानी कि आकाश में $x = 0$ के अलावा अन्य सभी बिंदुओं पर घटने वाली घटनाएं S और S' में समकालिक नहीं हैं।

6. क) नहीं। चूंकि पैमाना अंतरिक्ष यान के तंत्र में विरामावस्था में है, इसलिए अंतरिक्ष यान में स्थित प्रेक्षक के लिए उसकी लंबाई का मान नहीं बदलेगा। उदाहरण 1 से आप देख सकते हैं कि पृथ्वी पर स्थित एक प्रेक्षक के लिए यह पैमाना चल भी रहा है और घूम भी रहा है। जब पैमाना गति की दिशा के समांतर है तो उसकी लंबाई का मान सबसे कम होगा। जैसे-जैसे यह घूम कर गति की दिशा के लंबवत् दिशा की ओर प्रवृत्त होता है (यानि कि जैसे-जैसे $\theta_0 \rightarrow 90°$) तो उसकी लंबाई का मान बढ़ता हुआ मापा जायेगा। अंततः जब पैमाना गति की दिशा के लंबवत् होगा तो उसकी लंबाई का मान अंतरिक्ष यान और पृथ्वी दोनों ही पर एक होगा।

ख) यहाँ $L = 50$ cm $= 0.5$ m और $L_0 = 1.0$ m

इस तरह

$$\gamma = \frac{L_0}{L} = \frac{1.0 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} = 2$$

या
$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 2$$

इसलिए
$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2.6 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

7. क) ऐसा इसलिए है क्योंकि अपने रोज़ाना के अनुभवों में जिन चालों से हमारा वास्ता पड़ता है उनके मान c की तुलना में बहुत कम हैं और γ का मान लगभग 1 के बराबर होता है। इस तरह $t' = t$ और हमें अपने रोज़मर्रा के जीवन में काल वृद्धि का प्रभाव नहीं दिखाई देता।

ख) विरामावस्था में स्थित न्यूट्रॉन का उचित औसत जीवन काल है 900 s। हमारे सापेक्ष गतिमान न्यूट्रॉन का जीवन काल है 2700 s। इस तरह

$$2700 \text{ s} = \gamma\, 900 \text{ s}$$

या $\gamma = 3$

जिससे हमें मिलता है $v = 2.8 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$।

ग) आवेशित पायॉन का उचित औसत जीवन काल 2.6×10^{-8} s है। यहां $v = 0.98\,c$ जिससे

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 5$$

गतिमान पायॉन का औसत जीवन काल है:

उचित औसत जीवन काल $\times \gamma = 5 \times 2.6 \times 10^{-8}$ s

$= 1.3 \times 10^{-7}$ s

पायॉन के साथ गतिमान प्रेक्षक के लिए पायॉन विरामावस्था में होगा और उसका औसत जीवन काल होगा 2.6×10^{-8} s।

घ) $v = 0.9c$ की चाल से चल रहे अंतरिक्ष यात्री को पृथ्वी पर स्थित एक प्रेक्षक के मुताबिक अपनी यात्रा को तय करने के लिए लगेंगे

$$\Delta t = \frac{4.2}{0.9} \text{ वर्ष } = 4.7 \text{ वर्ष}$$

क्योंकि अंतरिक्ष यात्री की घड़ी उसके सापेक्ष विरामावस्था में है, इसलिए वह उचित समयांतराल $\Delta t'$ को मापती है और यहां Δt अनुचित समयांतराल है। उनका संबंध इस तरह से है

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

जिससे
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \text{ वर्ष}$$
$$= \frac{4.7}{\gamma} \text{ वर्ष}$$

$v = 0.9\,c$ के लिए,

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = 2.3$$

$$\therefore \quad \Delta t' = \frac{4.7}{2.3} = 2 \text{ वर्ष}$$

इस तरह अंतरिक्ष यात्री के तंत्र में मापा गया समयांतराल दो वर्ष है।

8. समीकरण (2.8) से

$$x = \gamma (x' + Vt') \quad , \quad t = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)$$

जिससे

$$dx = \gamma (dx' + Vdt'), \quad dt = \gamma \left(dt' + \frac{Vdx'}{c^2}\right)$$

इसलिए

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{(dx' + Vdt')}{dt' + \frac{Vdx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2}$$

जो समीकरण (2.20 क) है।

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{Vdx'}{c^2}\right)} = \frac{v_y'}{\gamma (1 + Vv_x'/c^2)} \qquad (2.20 \text{ ख})$$

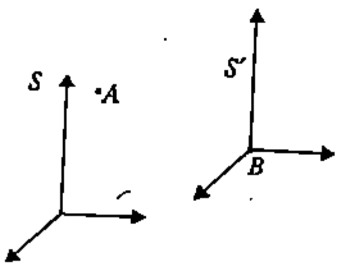
इसी तरह,

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v_z'}{\gamma (1 + Vv_x'/c^2)} \qquad (2.20 \text{ ग})$$

9.) यहां हम आपेक्षिक वेग रूपांतरण समीकरणें लागू करेंगे। माना कि S पृथ्वी से जुड़ा एक तंत्र है और S' अंतरिक्ष यान B से जुड़ा तंत्र है (चित्र 2.10)। स तरह $v_x = 0.9c$, पृथ्वी के सापेक्ष यान A की आपेक्षिक चाल है। यानी

A के सापेक्ष B की चाल $0.5c$ है और हमें S के सापेक्ष B की चाल यानी V का मान निकालना है। चूंकि A के सापेक्ष, S' की आपेक्षिक चाल $0.5c$ है, इसलिए S' में A की चाल $v_x' = -0.5c$ है। इसलिए समीकरण (2.19 क) से हमें मिलता है

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - 0.9\,c\,V/c^2}$$



चित्र 2.10

या $$-0.5c = \frac{0.9c - V}{1 - 0.9\,V/c}$$

या $$-0.5c + 0.45V = 0.9c - V$$

या $$1.45V = 1.4c$$

$$V = \frac{1.4}{1.45}\,c = 0.97c$$

अतः पृथ्वी के सापेक्ष B की आपेक्षिक चाल है $0.97c$।

(ख) यहां हम वेग योग संबंध समीकरण (2.20) का इस्तेमाल करेंगे। यहां पृथ्वी (S) के सापेक्ष राकेट (S') की चाल है $V = 0.9c$। इसे अपने से जुड़े तंत्र S' में एक अतिरिक्त वेग $v_x' = 0.4c$ दिया जाता है। अतः पृथ्वी के सापेक्ष उसका अंतिम वेग है

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2} = \frac{0.4c + 0.9c}{1 + 0.4 \times 0.9}$$

$$= \frac{1.3}{1.36}\,c = 0.90c$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. S' तंत्र में E_1 और E_2 के दिक्काल निर्देशांक समीकरण (2.7 क से घ) के इस्तेमाल से मिलते हैं। यहां

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{16}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{3}$$

E_1 के लिए:

$$x_1' = \frac{5}{3} \times [1.2 \times 10^9\ \text{m} - 4c/5 \times 7\text{s}]$$

$$= 2.0 \times 10^9\ \text{m} - 2.8 \times 10^9\ \text{m}$$

या $$x_1' = -8 \times 10^8\ \text{m}$$

$$y_1' = y_1 = 0$$

$$z_1' = z_1 = 0$$

$$t_1' = \frac{5}{3}\left[7\text{s} - \frac{1.2 \times 10^9\ \text{m} \times 4c}{5c^2}\right]$$

$$= \frac{35}{3}\ \text{s} - \frac{16}{3}\ \text{s}$$

या $t'_1 = 6.3\,s$

E_2 के लिए: $x'_2 = \frac{5}{3} \times \left[3.0 \times 10^9\,m - \frac{4c}{5} \times 11\,s\right]$

$= 5.0 \times 10^9\,m - 4.4 \times 10^9\,m$

या $x'_2 = 6 \times 10^8\,m$

$$y'_2 = y_2 = 0$$

$$z'_2 = z_2 = 0$$

$$t'_2 = \frac{5}{3}\left[11\,s - \frac{3.0 \times 10^9\,m \times 4}{5 \times 3 \times 10^8\,ms^{-1}}\right] = 5\,s$$

इस गणना से पता चलता है कि तंत्र S में E_1, E_2 से पहले घटती है पर तंत्र S' में E_1, E_2 के बाद घटती है, यानी घटनाओं का क्रम उलट जाता है। अब हमें पता लगाना है कि ऐसी स्थिति में E_1 और E_2 का एक दूसरे से संबंध हो सकता है या नहीं? यानी क्या इनके बीच एक कारक-प्रभाव (cause-effect) संबंध संभव है? क्या E_1, E_2 के कारण घट सकती है या E_2, E_1 के कारण घट सकती है? S में E_1 और E_2 के बीच क्या दूरी है? यह है $(x_2 - x_1) = 1.8 \times 10^9\,m$। उनके बीच का समयांतराल है 4s। 4s में प्रकाश द्वारा चली गई दूरी है $1.2 \times 10^9\,m$ जो इन दोनों घटनाओं के बीच की दूरी से कम है। इसी तरह S' में दूरी $(x'_2 - x'_1) = 1.4 \times 10^9 m$ और यह दूरी $c\,(t'_1 - t'_2) = 4.0 \times 10^8\,m$ से ज़्यादा है। इस तरह

$$(x_2 - x_1) > c\,(t_2 - t_1)$$

और $$(x'_2 - x'_1) > c\,(t'_1 - t'_2)$$

चूंकि प्रकाश की चाल से ज़्यादा चाल पर कोई भी वस्तु या संकेत नहीं चल सकता, इसलिए इन दोनों घटनाओं को किसी भी प्रकार के संकेत द्वारा एक दूसरे से संबंधित नहीं किया जा सकता। इस तरह S' में E_1, E_2 के लिए कारक नहीं बन सकती। क्योंकि ये घटनाएं एक दूसरे से स्वतंत्र हैं तो उनका क्रम उलट जाने पर भी उन पर कोई असर नहीं पड़ता और इस बात से कोई विरोधाभास नहीं पैदा होता। इस तरह ये दोनों घटनाएं क्रमश: बटन को दबाने और उससे विस्फोट होने की घटनाओं का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकतीं।

2. क) यह दिया हुआ है कि S में $x_2 \neq x_1$ और $t_2 = t_1$। यहां हम लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणों (2.7 क से घ) का प्रयोग करेंगे क्योंकि ये घटनाएं S में समकालिक हैं। इस तरह हमें मिलता है

$$x'_1 = \gamma\,(x_1 - vt_1)$$

$$x'_2 = \gamma\,(x_2 - vt_2)$$

जिससे $x'_2 - x'_1 = \gamma\,(x_2 - x_1) - \gamma\,v\,(t_2 - t_1)$

या $\Delta x' = \gamma\,\Delta x$, चूंकि $t_2 = t_1$

इसी तरह $t'_1 = \gamma\,(t_1 - \beta x_1/c)$

$$t'_2 = \gamma\,(t_2 - \beta x_2/c)$$

जिससे $\quad t_2' - t_1' = \gamma\,(t_2 - t_1) - \frac{\gamma\beta}{c}\,(x_2 - x_1)$

या $\quad \Delta t' = -\frac{\gamma\beta}{c}\,\Delta x\,,\quad$ चूंकि $\;t_2 = t_1$ ।

ख) चूंकि गतिमान तंत्र घन के एक कोर (माना x-कोर) के अनुदिश चलता है तो केवल उसी सिरे लंबाई में संकुचन होता है और इसका मान है

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

बाकी दोनों कोरों की लंबाई वही रहती है क्योंकि ये दोनों लंबाइयाँ गति की दिशा के लंबवत् दिशा में हैं। इसलिए S' में मापा गया घन का आयतन होगा

$$\frac{L_0}{\gamma} \times L_0 \times L_0 = L_0^3\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

ग) अपने तंत्र में Ω^--कण का उचित औसत जीवन काल $\Delta t'$ संबंध $\Delta t = \gamma\Delta t'$ से मिलता है। यह दिया है कि $\Delta t = 7.4 \times 10^{-10}$s और $\gamma = 9.0$ । अतः

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 8.2 \times 10^{-11}\,\text{s}$$

3. माना कि S पृथ्वी से जुड़ा तंत्र है जहां पर हम स्थित हैं। मंदाकिनी 1 का वेग है

$$v_x = +\,0.3c\,,\qquad v_y = 0\,,\qquad v_z = 0$$

अब माना कि तंत्र S' मंदाकिनी 2 से जुड़ा है जो मंदाकिनी 1 की दिशा के विपरीत दिशा में चल रही है। तब S के सापेक्ष उसके वेग घटक हैं क्रमशः $V_x = -\,0.3c$, $V_y = 0$, $V_z = 0$, इसलिए S' से (यानि मंदाकिनी 2) से देखे जाने पर मंदाकिनी 1 की चाल होगी:

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = \frac{0.3c - (-0.3c)}{1 + (0.3)^2} = \frac{0.6c}{1.09}$$

$$= 1.65 \times 10^8\ \text{m s}^{-1}$$

4. प्रकाश की विराम तरंग दैर्घ्य है $\lambda = 4861.33$ Å (1 Å = 10^{-10} m) । इस प्रकार विस्थापित तरंग दैर्घ्य का मान समीकरण (2.26) से मिलता है। यहां हम u को ऋणात्मक लेंगे, क्योंकि प्रोटॉन उस क्षेत्र की ओर गतिमान हैं जहां उनका हाइड्रोजन परमाणु में उदासीनीकरण कर दिया जाता है।

इस प्रकार

$$\lambda' = \lambda\,\left(\frac{1 - u/c}{1 + u/c}\right)^{1/2}$$

यहाँ $\quad u = 2 \times 10^8\ \text{cm s}^{-1} = 2 \times 10^6\ \text{m s}^{-1}$

$$\therefore \quad \lambda' = 4861.33\left(\frac{1 - 2/300}{1 + 2/300}\right)^{1/2} \text{Å}$$

$$= 4861.33\left(\frac{298}{302}\right)^{1/2} \text{Å}$$

या $\quad \lambda' = 4829.03$ Å

5. समीकरण (2.20 क से ग) का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$= \frac{(v_x' + V)^2}{(1 + v_x' V/c^2)^2} + \frac{v_y'^2 (1 - V^2/c^2)}{(1 + v_x' V/c^2)^2}$$

$$= \frac{v_x'^2 + V^2 + 2v_x' V + v_y'^2 - v_y'^2 V^2/c^2}{(1 + v_x' V/c^2)^2}$$

$$= \frac{(v'^2 + V^2 + 2v_x' V - v_y'^2 V^2/c^2)}{(c^2 + v_x' V)^2} \cdot c^4 \qquad (\text{चूंकि } v^2 = v_x'^2 + v_y'^2)$$

अत:

$$(c^2 - v^2) = \frac{c^2 (c^2 + v_x' V)^2 - c^4 (v'^2 + V^2 + 2v_x' V - v_y'^2 V^2/c^2)}{(c^2 + v_x' V)^2}$$

$$= \frac{c^6 + c^2 v_x'^2 V^2 + 2v_x' V c^4 - c^4 v'^2 - c^4 V^2 - 2v_x' V c^4 + c^2 v_y'^2 V^2}{(c^2 + v_x' V)^2}$$

$$= \frac{c^6 + c^2 v'^2 V^2 - c^4 v'^2 - c^4 V^2}{(c^2 + v_x' V)^2}$$

$$= \frac{c^2 (c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{(c^2 + v_x' V)^2}$$

इकाई 3 आपेक्षिकीय गतिकी

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आपने पढ़ा कि आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के साथ न्यूटनी यांत्रिकी का तालमेल नहीं बैठता। आपने जाना कि कण त्वरित्रों द्वारा किये गये प्रयोगों से यह भी साबित हो चुका था कि तकरीबन प्रकाश की चाल से चलने वाले इलेक्ट्रॉनों की गति पर न्यूटन के नियम लागू नहीं होते। इकाई 2 में आपने नए रूपांतरण समीकरणों यानी लॉरेंज़ रूपांतरण की जानकारी हासिल की और देखा कि लंबाई और समय के मापन में उनकी क्या भूमिका है। आइये अब हम गतिकी की परिघटनाओं को लें और न्यूटनी यांत्रिकी को इस तरह से बदलें कि आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के साथ उसका तालमेल बैठाया जा सके।

अपने अध्ययन की शुरुआत हम एकल कण की गतिकी से करेंगे। सबसे पहले भाग 3.2 में हम रैखिक संवेग और जड़त्वीय द्रव्यमान की संकल्पनाओं की एक बार फिर से जांच करेंगे। तब आपको यह पता लगेगा कि हमें इन आधारभूत राशियों को फिर से इस तरह परिभाषित करना पड़ता है जिससे कि वे विशिष्ट आपेक्षिकता के ढांचे में फ़िट बैठ सकें। रैखिक संवेग और आपेक्षिक द्रव्यमान की नई परिभाषा देने के बाद हम न्यूटन के बल नियम को फिर से लिखेंगे और उसे लगभग प्रकाश की चाल से चल रहे कणों की गति पर लागू करेंगे।

"One thing I have learned in a long life: that all our science, measured against reality, is primitive and childlike—and yet it is the most precious thing we have"

—Albert Einstein

यांत्रिकी में हम बल की परिभाषा इस प्रकार देते हैं कि वह समय के साथ रैखिक संवेग के परिवर्तन की दर है: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$। याद कीजिए कि आपने पी.एच.ई.-01 पाठ्यक्रम में संरक्षी बल क्षेत्र की परिभाषा देने का एक और तरीक़ा पढ़ा है कि एक संरक्षी बल क्षेत्र स्थितिज ऊर्जा के स्थानिक मान में परिवर्तन की दर के बराबर होता है ($\mathbf{F} = -\nabla U$)। इसलिए अगर हम यांत्रिकी के बल नियम को फिर से लिखते हैं तो हमें ऊर्जा की संकल्पना को भी एक बार फिर से जांचना पड़ेगा। ऐसा करने पर हमें वह प्रसिद्ध संबंध

मिलेगा, जिससे द्रव्यमान और ऊर्जा की तुल्यता स्थापित होती है। यह एक ऐसा सिद्धांत है जिसने शायद अकेले दम हमारी दुनिया को इतने बड़े पैमाने पर बदल दिया है जितना कि आज तक किसी भी और सिद्धांत ने नहीं। भाग 3.3 में आप इसकी महत्ता को समझ सकेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- आपेक्षिकीय रैखिक संवेग का व्यंजक निकाल सकेंगे,
- सरल स्थितियों पर आपेक्षिकीय बल नियम लागू कर सकेंगे,
- रैखिक संवेग और ऊर्जा के संरक्षण के आपेक्षिकीय नियमों को समझ कर लागू कर सकेंगे।
- एक आपेक्षिकीय कण के द्रव्यमान, चाल, रैखिक संवेग और ऊर्जा की गणना कर सकेंगे।

3.2 एकल कण की गतिकी

इस भाग में हमारा मुख्य उद्देश्य यह है कि हम न्यूटन के गति के नियमों को इस तरह लिखें कि उनका आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के साथ तालमेल बैठाया जा सके। आप जानते ही हैं कि न्यूटन के द्वितीय नियम के मुताबिक बल की परिभाषा है: "बल रैखिक संवेग के परिवर्तन की दर है।" यह तो आप जानते हैं कि रैखिक संवेग द्रव्यमान और वेग का गुणनफल होता है। अब याद कीजिए कि न्यूटनी यांत्रिकी की एक आधारभूत मान्यता है कि किसी भी कण का द्रव्यमान, किसी प्रेक्षक के सापेक्ष उसकी गति पर निर्भर नहीं करता। इस तरह, अगर किसी कण पर बराबर के बल लग रहे हों तो उसका त्वरण दोनों बलों के लिए बराबर होगा, भले ही कण का तात्क्षणिक वेग कुछ भी हो। यानी अगर हम किसी कण पर अनिश्चित काल के लिए बल लगाएं तो उसका वेग लगातार एक अचर दर से बढ़ता चला जायेगा। *लेकिन यह परिणाम इकाई 2 के भाग 2.4 के उस परिणाम का विरोध करता है जिसके मुताबिक कोई भी भौतिक कण निर्वात में प्रकाश की चाल से अधिक चाल से नहीं चल सकता।* तो क्या हम इससे यह सहज नतीजा निकाल सकते हैं: किसी कण का द्रव्यमान उसके वेग के साथ इस तरह बढ़ना चाहिए कि जब उसकी चाल प्रकाश की चाल c की ओर प्रवृत्त हो तो उसका द्रव्यमान अनंत की ओर प्रवृत्त हो। तब द्रव्यमान की इस बदली हुई परिभाषा से हमें रैखिक संवेग की एक अलग ही परिभाषा मिलेगी। न्यूटन के नियमों से अलग हटने के लिए हम यहीं से शुरुआत करते हैं।

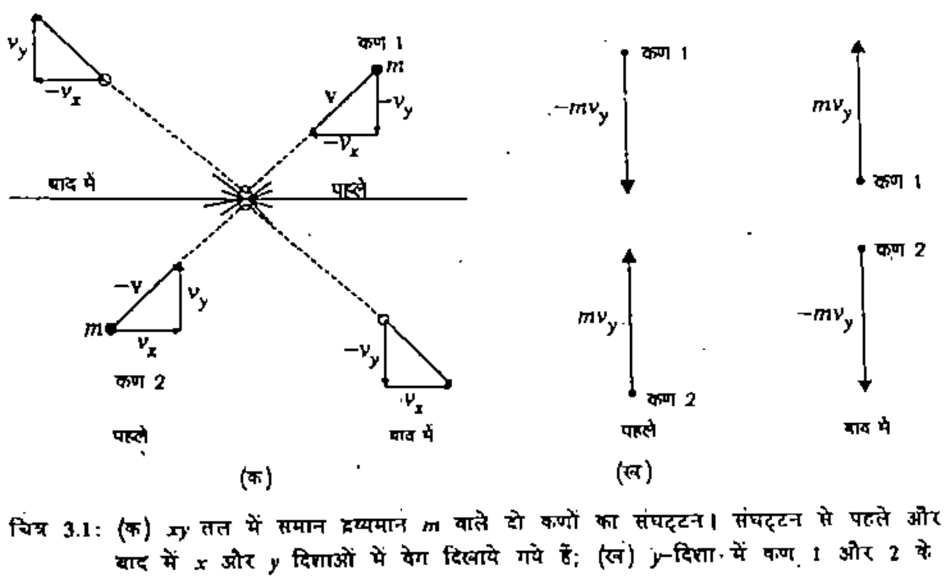
क्लासिकी यांत्रिकी के नियमों के साथ एक और दिक्कत यह है कि इनके मुताबिक सभी क्षणों पर "क्रिया और प्रतिक्रिया" बल समान और विपरीत दिशा में होने चाहिए। जब तक यह एक दूसरे के संपर्क में आने वाले बलों (contact forces) पर यानी उन बलों पर लागू होता है जो एक ही बिंदु पर लग रहे हैं, तब तक तो हम आपेक्षिकता के मुताबिक भी यह कह सकते हैं कि ये दोनों बल एक ही क्षण पर लागू होंगे। लेकिन इकाई 2 से याद कीजिए कि विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत के मुताबिक अलग-अलग बिंदुओं पर लग रहे बलों के लिए एक ही क्षण का मान, अलग-अलग जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए अलग-अलग होता है। इस तरह हम प्रेक्षक के निर्देश तंत्र से स्वतंत्र होकर क्रिया और प्रतिक्रिया बलों को कोई अर्थ नहीं दे सकते।

इस तरह न्यूटनी यांत्रिकी को बदलने की प्रक्रिया में हमें इस धारणा को छोड़ना होगा कि आकाश के अलग-अलग बिंदुओं पर लागू बल हरेक प्रेक्षक के लिए एक ही क्षण पर लग रहे होते हैं। लेकिन हम संघट्टन की परिघटनाओं के लिए इस धारणा को बरकरार रख सकते हैं क्योंकि वहां संपर्क वाले बल लग रहे होते हैं। या फिर क्षेत्र (field) से जुड़ी परिघटनाओं के लिए भी इस धारणा को बना रहने दे सकते हैं। (उदाहरण के लिए, एक विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र के आवेशों पर लग रहे बल)। आइये अब संघट्टन का ठोस उदाहरण लें और बेहतर ढंग से समझें कि हमें रैखिक संवेग की फिर से परिभाषा देने की ज़रूरत क्यों पड़ती है।

3.2.1 रैखिक संवेग की परिभाषा एक बार फिर क्यों?

न्यूटन के द्वितीय नियम से हम जानते हैं कि अगर किसी निकाय पर नेट बाह्य बल शून्य हो तो उसका रैखिक संवेग संरक्षित रहता है। रैखिक संवेग के संरक्षण के इस नियम को हम विशिष्ट आपेक्षिकता में भी बरकरार रखना चाहेंगे। इसका कारण सीधा सा यह है कि दरअसल ये संरक्षण नियम दिक्काल के सममिति गुणों (symmetry properties) का परिणाम हैं; और दिक्काल के ये सममिति गुण वास्तव में आकाश (space) की समांगता (homogeneity) और समदैशिकता (isotropy) के कारण होते हैं। अब याद कीजिए कि भाग 2.2 में लॉरेंज़ रूपांतरण समीकरणें निकालते हुए हमने यह माना था कि आकाश समांग और समदैशिक है। इसलिए यह तर्कसंगत है कि हम यह भी मानें कि रैखिक संवेग संरक्षण नियम विशिष्ट आपेक्षिकता के अनुसार बदली हुई न्यूटनी यांत्रिकी पर भी लागू होगा।

अब अगला सवाल यह है कि क्या हम रैखिक संवेग के लिए क्लासिकी व्यंजक ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) को इस्तेमाल कर सकते हैं? आइये एक संघट्टन प्रक्रिया में रैखिक संवेग संरक्षण को लागू करें और देखें कि इसकी क्लासिकी परिभाषा लॉरेंज़ रूपांतरण के अधीन इस नियम को निश्चर बनाये रखती है या नहीं।



चित्र 3.1: (क) xy तल में समान द्रव्यमान m वाले दो कणों का संघट्टन। संघट्टन से पहले और बाद में x और y दिशाओं में वेग दिखाये गये हैं; (ख) y-दिशा में कण 1 और 2 के गैर-आपेक्षिकीय (non-relativistic) संवेग।

आइये समान द्रव्यमान m वाले दो बिंदु कणों का संघट्टन लें (देखिए चित्र 3.1 क)। यहां हम एक ऐसा निर्देश तंत्र S' चुनते हैं जिसमें ये कण समान और विपरीत-दिश वेगों से

एक दूसरे की ओर गतिमान हैं। इस निर्देश तंत्र में संहति केन्द्र विरामावस्था में होता है। अब इस निकाय के लिए रैखिक संवेग संरक्षण का नियम इस तरह लिखा जा सकता है:

$$m_1 \mathbf{v}_{1B} + m_2 \mathbf{v}_{2B} = m_1 \mathbf{v}_{1A} + m_2 \mathbf{v}_{2A}$$

जहाँ m_1 और m_2 कणों के द्रव्यमान हैं; $\mathbf{v}_{1B}, \mathbf{v}_{2B}$ और $\mathbf{v}_{1A}, \mathbf{v}_{2A}$ क्रमश: संघट्टन से पहले और बाद में उनके वेग हैं। इस निकाय विशेष के लिए $m_1 = m_2$, $\mathbf{v}_{1B} = -\mathbf{v}_{2B} = \mathbf{v}$ जिसमें हमें मिलता है $\mathbf{v}_{1A} = -\mathbf{v}_{2A}$। यानी कि संघट्टन से पहले और बाद में निकाय का रैखिक संवेग शून्य है। इस तरह आप देख सकते हैं कि इस स्थिति के लिए रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।

प्रत्येक कण के वेग और इस तरह उसके संवेग का x घटक संघट्टन से पहले और उसके बाद वही रहता है (चित्र 3.1 क)। कण 1 और 2 के वेग घटक (चित्र 3.1 ख) इस तरह दिए जाते हैं:

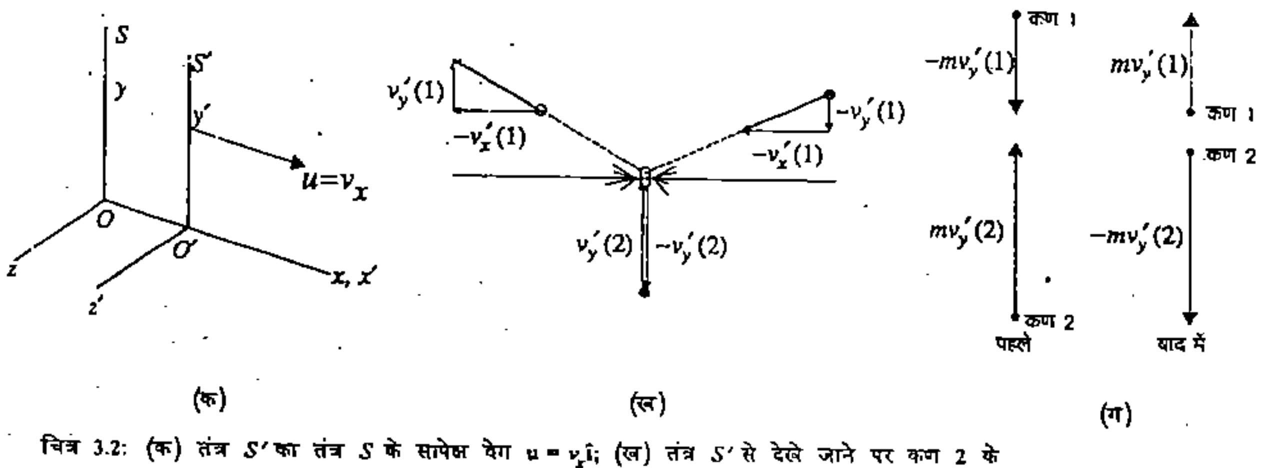
कण	संघट्टन से पहले	संघट्टन के बाद
1	$-v_y$	v_y
2	v_y	$-v_y$

कण 1 के y-संवेग घटक में परिवर्तन $= mv_y - (-mv_y) = 2\,mv_y$

कण 2 के y-संवेग घटक में परिवर्तन $= -mv_y - mv_y = -2\,mv_y$

इस तरह S में रैखिक संवेग के y घटक में कुल परिवर्तन शून्य है।

यानी S तंत्र में हमें रैखिक संवेग की न्यूटनी परिभाषा ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) को लेकर कोई दिक्कत पेश नहीं आती।



चित्र 3.2: (क) तंत्र S' का तंत्र S के सापेक्ष वेग $\mathbf{u} = v_x\hat{\mathbf{i}}$; (ख) तंत्र S' से देखे जाने पर कण 2 के वेग का x घटक शून्य है और $v_y'(1) = v_y'(2)$; (ग) तंत्र S' में y' दिशा में गैर-आपेक्षिकीय संवेग के मान, संघट्टन से पहले और उसके बाद, समान नहीं हैं।

आइये अब एक और निर्देश तंत्र S' लें जो S के सापेक्ष वेग $\mathbf{u} = u\hat{i} = v_x\hat{i}$ से गतिमान है (चित्र 3.2 क)। यहां ध्यान दीजिए कि v_x, तंत्र S' में कण 2 के वेग का x घटक है और $-v_x$ उसी तंत्र में कण 1 के वेग का x घटक है। आपेक्षिकीय वेग रूपांतरण समीकरणों (2.19 क) से (2.19 ग) का प्रयोग करके हम तंत्र S' में वेग घटकों को तंत्र S के वेग घटकों के पदों में इस तरह निकाल सकते हैं।

कण 1 के लिए:

$$-v_x'(1) = \frac{-v_x - u}{1 + v_x u/c^2} = -\frac{2v_x}{1 + v_x^2/c^2}$$

$$-v_y'(1) = \frac{v_y}{1 + v_x u/c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2}\right)\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

कण 2 के लिए:

$$v_x'(2) = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2} = 0$$

$$v_y'(2) = \frac{v_y}{1 - v_x u/c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{v_y}{(1 - v_x^2/c^2)^{1/2}}$$

इस तरह कण 2 का x वेग घटक शून्य है (चित्र 3.2 ख) और $v_y'(1)$ और $v_y'(2)$ के परिमाण समान नहीं हैं:

$$v_y'(1) \neq v_y'(2)$$

हालांकि तंत्र S में वे बराबर थे।

इस प्रकार y' दिशा में ग़ैर-आपेक्षिकीय संवेग में संघट्टन से पहले और बाद में परिवर्तन ($-2mv_y'(2)$ और $2mv_y'(1)$) बराबर और विपरीत-दिश नहीं हैं (देखिए चित्र 3.2 ग) इस सबसे हम क्या नतीजा निकाल सकते हैं? हम यह कह सकते हैं कि अगर हम रैखिक संवेग की परिभाषा $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ द्वारा देते हैं तो सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में रैखिक संवेग संरक्षित नहीं रहता।

तो क्या अब हम यह कहें कि संवेग संरक्षण नियम का लॉरेंज़ रूपांतरण से तालमेल नहीं बैठता? या फिर हम संवेग की परिभाषा फिर से इस तरह से दें कि संवेग संरक्षण का नियम उन सभी निर्देश तंत्रों में बरकरार रहे जो एक दूसरे के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान हैं। याद कीजिए कि इस भाग की शुरुआत में हमने *रैखिक संवेग संरक्षण के नियम को बरकरार रखना तय किया था। यानी हमें अब रैखिक संवेग की एक ऐसी परिभाषा ढूंढनी चाहिए जो लॉरेंज़-निश्चर (Lorentz invariant) हो, यानी जो लॉरेंज़ रूपांतरण के अधीन बदले नहीं।* वास्तव में इस प्रक्रिया में हम द्रव्यमान को भी फिर से परिभाषित कर रहे होंगे। लेकिन इससे पहले कि हम ऐसा करें क्या आप कुछ देर ठहर कर एक अभ्यास नहीं करना चाहेंगे?

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

वेग $\mathbf{v}_{1B}$ और $\mathbf{v}_{2B}$ से चल रहे द्रव्यमान m_{1B} और m_{2B} वाले कणों का संघट्टन होता है। मान लीजिए कि संघट्टन के बाद उनके द्रव्यमान और वेग क्रमशः m_{1A}, m_{2A} और $\mathbf{v}_{1A}, \mathbf{v}_{2A}$ हैं।

क) इन कणों के संघट्टन के लिए रैखिक संवेग संरक्षण का नियम लिखें।

ख) कुछ ख़ास स्थितियों में जब $\mathbf{v}'$ $\mathbf{u}$ के समांतर होता है तो सदिश रूप में वेग रूपांतरण नियम को इस तरह लिखा जाता है:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u}}{1 + v'u/c^2}$$

जहां $\mathbf{v}$, तंत्र S में कण का वेग है, $\mathbf{v}'$ तंत्र S' में कण का वेग है और S', S के सापेक्ष वेग $\mathbf{u}$ से गतिमान है। तंत्र S' में रैखिक संवेग संरक्षण का नियम लिखें। इस रूपांतरण का प्रयोग करके और इस बात का ध्यान रखते हुए कि दोनों तंत्रों के कणों का द्रव्यमान वही रहता है, यह पता लगाइये कि तंत्र S' में रैखिक संवेग संरक्षण का नियम बरकरार रहता है कि नहीं।

आपने बोध प्रश्न 1 (ख) में यह पता लगाया है कि न्यूटनी यांत्रिकी में परिभाषित रैखिक संवेग उन सभी तंत्रों में संरक्षित नहीं रहता जो एक दूसरे के सापेक्ष अचर वेग से गतिमान हैं। यानी अब हमें संवेग की ऐसी परिभाषा ढूंढनी है जो लॉरेंज़-निश्चर हो। इस प्रक्रिया में हमें द्रव्यमान की भी एक नई परिभाषा मिलेगी जिसके मुताबिक द्रव्यमान वेग पर निर्भर करेगा।

3.2.2 आपेक्षिकीय रैखिक संवेग

आइये हम एक ऐसा निकाय लें जिसमें N कण P_i $(i = 1,2, \ldots N)$ हैं जो एक दूसरे से अन्योन्य-क्रिया करते हैं। अब माना कि m_i, iवें कण का द्रव्यमान है। फ़िलहाल हमें इन कणों के बीच की पारस्परिक क्रिया के बारे में किसी विस्तृत जानकारी की ज़रूरत नहीं है। माना कि जड़त्वीय तंत्र S में iवें कण का वेग $\mathbf{v}_i$ है और जड़त्वीय तंत्र S' में उसका वेग $\mathbf{v}'_i$ है। तंत्र S' का तंत्र S के सापेक्ष वेग $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$ है। इन कणों की गति पर एकमात्र प्रतिबंध यह है कि तंत्र S में निकायों का कुल द्रव्यमान और कुल रैखिक संवेग संरक्षित रहता है, यानी

$$\sum_i m_i = \text{अचर} \tag{3.1 क}$$

और
$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{अचर} \tag{3.1 ख}$$

अब हमें वे प्रतिबंध निकालने हैं जिनसे कि तंत्र S' में निकायों का कुल द्रव्यमान और कुल रैखिक संवेग संरक्षित रहे, यानी

$$\sum_i m'_i = \text{अचर} \tag{3.2 क}$$

$$\sum_i m'_i \mathbf{v}'_i = \text{अचर} \tag{3.2 ख}$$

जहां m'_i, S' तंत्र में i वें कण का द्रव्यमान है।

अब हम यह साबित करेंगे कि समीकरण (3.1) और (3.2) में तभी तालमेल बैठ सकता है जबकि द्रव्यमान को फिर से परिभाषित किया जाये। इसके लिए हमें थोड़े से बीजगणित का सहारा लेना पड़ेगा जिसे आपको याद रखने की ज़रूरत नहीं है। यहां हम इन संबंधों का इस्तेमाल करेंगे:

$$\gamma_i = \frac{1}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}}, \; \gamma'_i = \frac{1}{(1 - v_i'^2/c^2)^{1/2}}, \; \gamma = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \tag{3.3}$$

आसानी के लिए हम यह मान लेंगे कि ये सब कण x-अक्ष के अनुदिश एक-विम गति कर रहे हैं। क्योंकि $\mathbf{v}_i$ और $\mathbf{v}'_i$ x-दिशा में हैं, इसलिए वेग रूपांतरण नियमों (समीकरण 2.19 और 2.20) के अनुसार हमें मिलता है:

$$v'_i = \frac{v_i - u}{1 - v_i u/c^2} \tag{3.4 क}$$

और

$$v_i = \frac{v'_i + u}{1 + v'_i u/c^2} \tag{3.4 ख}$$

अब हम $\gamma'_i v'_i$ और $\gamma_i v_i$ में एक संबंध निकालेंगे। समीकरण (3.4 क) को इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं:

$$\gamma'_i v'_i = \frac{v_i - u}{1 - v_i u/c^2} \cdot \frac{1}{(1 - v_i'^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{v_i - u}{[(1 - v_i'^2/c^2)(1 - v_i u/c^2)^2]^{1/2}} \tag{3.5}$$

समीकरण (3.4 क) से हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि

$$(1 - v_i'^2/c^2)\left(1 - \frac{v_i u}{c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \tag{3.6}$$

इस समीकरण को आप एक अभ्यास के रूप में सिद्ध करें।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

समीकरण (3.6) को सिद्ध करें।

समीकरण (3.5) में समीकरण (3.6) को रखने के पर हमें मिलता है

$$\gamma_i' v_i' = \frac{v_i - u}{[(1 - v_i^2/c^2)(1 - u^2/c^2)]^{1/2}}$$

या

$$\gamma_i' v_i' = \gamma_i \gamma (v_i - u) \tag{3.7}$$

अब चूंकि γ और u अचर हैं, इसलिए हम समीकरणों (3.1 क) और (3.1 ख) को बिना बदले हुए इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$\sum_i m_i \gamma u = \text{अचर}$$

$$\sum_i m_i v_i \gamma = \text{अचर}$$

एक समीकरण को दूसरी समीकरण से घटाने पर हमें मिलता है:

$$\sum_i m_i \gamma (v_i - u) = \text{अचर} \tag{3.8}$$

लेकिन समीकरण (3.7) से $(v_i - u) = \dfrac{\gamma_i' v_i'}{\gamma_i \gamma}$।

इसलिए समीकरण (3.8) से मिलता है:

$$\sum_i m_i' \frac{\gamma_i' v_i'}{\gamma_i} = \text{अचर} \tag{3.9}$$

समीकरण (3.2 ख) की समीकरण (3.9) से तुलना करने पर हमें मिलता है:

$$m_i' = \frac{m_i \gamma_i'}{\gamma_i} \tag{3.10}$$

इस तरह, अगर तंत्र S' में द्रव्यमान और रैखिक संवेग को संरक्षित करना हो तो द्रव्यमान m_i को समीकरण (3.10) को संतुष्ट करना होगा। समीकरण (3.10) से क्या नतीजा निकाला जा सकता है? सबसे पहले तो द्रव्यमान m_i का मान S तंत्र में किये गये किसी भी मापन (जैसे कि कणों के वेग $\mathbf{v}_i$ या तंत्रों के आपेक्षिक वेग $\mathbf{u}$) पर निर्भर नहीं होना चाहिए, ताकि समीकरण (3.2 क) और समीकरण (3.2 ख) को स्पष्ट अर्थ दिया जा सके। इसी तरह द्रव्यमान m_i का मान S' तंत्र में किये गये किसी भी मापन जैसे $\mathbf{v}_i'$ और $\mathbf{u}$ पर निर्भर नहीं होना चाहिए। यानी

$$\frac{m_i'}{\gamma_i'} = \frac{m_i}{\gamma_i} = \text{निरपेक्ष अचर}$$

$$= m_{i0} \text{ (माना)} \tag{3.11}$$

अब हम समीकरण (3.11) के परिणाम को व्यापक रूप से इस तरह पेश कर सकते हैं: द्रव्यमान m के किसी भी कण के लिए और किसी भी जड़त्वीय तंत्र के लिए, अगर $\mathbf{v}$ तंत्र के सापेक्ष कण का वेग हो तो

$$m = m_0 \gamma$$

$$= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (3.12\ \text{क})$$

विरामावस्था में स्थित कण के लिए $v = 0$ और

$$m = m_0 \qquad (3.12\ \text{ख})$$

इस तरह समीकरण (3.12 ख) में m_0 या समीकरण (3.11) में m_{i0} कण का **विराम द्रव्यमान** (rest mass) है। इसे कण का उचित द्रव्यमान (proper mass) भी कहा जाता है क्योंकि यह कण के उस समय पर प्रेक्षित द्रव्यमान का मान है जबकि कण विरामावस्था में है। समीकरण (3.12 क) और (3.12 ख) हमें बताते हैं कि किसी कण का द्रव्यमान उसके वेग पर निर्भर करता है और वेग बढ़ने के साथ-साथ बढ़ता है। इस तरह आपेक्षिकीय रैखिक संवेग की परिभाषा यह हो जाती है

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (3.13\ \text{क})$$

और रैखिक संवेग के घटक हैं:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (3.13\ \text{ख})$$

यहां ध्यान दें कि प्रत्येक संवेग घटक के हर में कुल वेग का परिमाण v मौजूद है।

इस तरह द्रव्यमान और रैखिक संवेग की एक बार फिर से परिभाषा देकर हम जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में रैखिक संवेग संरक्षण नियम का स्वरूप बरकरार रख सके हैं और साथ ही साथ यह भी निश्चित कर पाये हैं कि यह नियम लॉरेंज़ निश्चर है यानी लॉरेंज़ रूपांतरण के अधीन इसका स्वरूप नहीं बदलता। फ़र्क सिर्फ़ इतना है कि प्रत्येक कण का द्रव्यमान संरक्षित रहने के बजाय यहां निकाय का कुल द्रव्यमान संरक्षित रहता है (समीकरण 3.1 क और 3.2 ख)। इस आपेक्षिकीय संवेग संरक्षण नियम को प्रयोगों द्वारा सही साबित किया जा चुका है।

आपेक्षिकीय द्रव्यमान और रैखिक संवेग की इन परिभाषाओं को हासिल करने के लिए हमने एक-विम गति का ही उदाहरण लिया है। यही परिणाम हमें त्रिविम गति के लिए भी मिलता है, जिसमें हमें त्रिविम वेग रूपांतरण नियमों का इस्तेमाल करना पड़ता है। लेकिन ये बातें इस पाठ्यक्रम की सीमा से बाहर हैं। अब आप शायद एक बोध प्रश्न करना चाहें।

बोध प्रश्न 3

15 मिनट लगाएं

(क) द्रव्यमान और रैखिक संवेग की नई परिभाषाओं का इस्तेमाल करके सिद्ध करें कि बोध प्रश्न 1 में वर्णित संघट्टन प्रक्रिया के लिए तंत्र S' में रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।

(ख) एक ऋणात्मक आवेश-युक्त कण के, जिसके संवेग का परिमाण $1.92 \times 10^{-21}\ \text{kg m s}^{-1}$ है और जो चाल $0.99c$ चल रहा है, विराम द्रव्यमान की गणना करें।

अब हम आपेक्षिकीय यांत्रिकी में किसी कण के लिए गति का समीकरण लिख सकते हैं।

3.2.3 आपेक्षिकीय बल नियम

याद कीजिए कि न्यूटन के गति के दूसरे नियम के अनुसार किसी वस्तु के संवेग परिवर्तन की दर उस पर लग रहे नेट बल के बराबर होती है और उस बल के अनुदिश होती है। हां, यह बात ज़रूर है कि यह संबंध इकाइयों के उपयुक्त चुनाव के लिए ही सही है। आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के संगत इस नियम का व्यापक रूप इस तरह लिखा जा सकता है

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) \qquad (3.14\ क)$$

या

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} \qquad (3.14\ ख)$$

समीकरण (3.12 क) से m का मान रखने पर हम इसे इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{d}{dt}\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (3.14\ ग)$$

लेकिन ग़ैर-आपेक्षिकीय और आपेक्षिकीय स्थिति में एक आधारभूत अंतर है। ग़ैर-आपेक्षिकीय स्थिति के लिए किसी वस्तु पर लग रहे बल को उसके द्रव्यमान और त्वरण के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, लेकिन समीकरण (3.14 ख) में दिया गया आपेक्षिकीय बल नियम दिखाता है कि यहां यह बिल्कुल ज़रूरी नहीं है कि किसी वस्तु पर लग रहा बल और उसका त्वरण एक दूसरे के समांतर हों।

आप देख सकते हैं कि समीकरण (3.14 ख) निम्न व्यंजक के तुल्य नहीं हैं:

$$\mathbf{F} = \left[\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right]\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\,\mathbf{a}$$

समीकरण (3.14 क) में दिए गए आपेक्षिकीय बल नियम द्वारा हमें स्वाभाविक रूप से आपेक्षिकीय संवेग संरक्षण नियम मिलता है:

यदि $\mathbf{F}$ शून्य है तो $\mathbf{p} = m_0\,\mathbf{v}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ अचर होगा।

इसलिए, बाह्य बलों के शून्य होने पर आपेक्षिकीय रैखिक संवेग संरक्षित रहता है। अब माना कि समीकरण (3.14 क) से परिभाषित $\mathbf{F}$ शून्य नहीं है और किसी वस्तु या कणों के निकाय पर कुछ समय के लिए लगता है। तब यह उस वस्तु या निकाय का आपेक्षिकीय संवेग $\Delta\mathbf{P}$ से बदल देता है जो कि निकाय को दिए गए कुल आवेग के बराबर है:

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{J} = \int \mathbf{F}\,dt \qquad (3.15)$$

$v/c << 1$ की सीमा में, समीकरण (3.14 क) यह रूप ले लेता है

$$\mathbf{F} = m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

जो कि जाना पहचाना न्यूटन का दूसरा गति नियम है। इस तरह एक व्यापक परिक्षेत्र में जिसमें कि किसी वस्तु की चाल प्रकाश की चाल के मुकाबले बहुत कम होती है यानी जब $v << c$ और $\gamma \simeq 1$ तब न्यूटनी यांत्रिकी और आपेक्षिकीय यांत्रिकी के परिणाम एक जैसे ही होते हैं। जब एक गतिमान कण के लिए γ का मान 1 से कुछ ज्यादा होता है तो न्यूटनी यांत्रिकी में थोड़ी सी त्रुटि आ जाती है। लेकिन जब γ का मान 10^{11} जितना होता है, जैसा कि कॉस्मिक किरणों में पाये गये प्रोटॉनों के लिए, तब न्यूटनी यांत्रिकी

पूरी तरह ग़लत होती है। लेकिन जहां तक धीमी चाल वाले निकायों का सवाल है न्यूटनी यांत्रिकी अभी भी वैध और उपयोगी है।

आइये अब हम समीकरण (3.14 क) और (3.14 ख) को एकल कण की आपेक्षिकीय गति पर लागू करें।

उदाहरण 1: चुंबकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति

एक आवेशित कण आपेक्षिकीय चाल से एकसमान चुंबकीय क्षेत्र के लंबवत् गतिमान है। इस कण की कक्षा की त्रिज्या की गणना करें।

हल

कण के लिए आपेक्षिकीय गति समीकरण है

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v}$$

जहां $m = m_0\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ कण का द्रव्यमान है और $\mathbf{v}$ इसका वेग। यहां $\mathbf{F}$ चुंबकीय क्षेत्र द्वारा कण पर लगाया गया बल है और इसका मान है

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

चूंकि $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, इसलिए $\mathbf{F} = qvB\,\hat{\mathbf{n}}$ जहां $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{v}$ और $\mathbf{B}$ दोनों के लंबवत् है।

पाठ्यक्रम पी.एच.ई.-01 की इकाई 3 से याद करें कि [illegible] लंबवत् लग रहा बल $\mathbf{F}$ कोई कार्य नहीं करता। इसलिए इस बल $\mathbf{F}$ के कारण कण की चाल नहीं बदलती! सिर्फ़ उसके वेग की दिशा बदलती है। अतः कण का द्रव्यमान अचर रहता है। यानी $\frac{dm}{dt} = 0$ और इस तरह गति का समीकरण हो जाता है

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma\, m_0\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$\mathbf{F}$ के स्थान पर चुंबकीय बल रखने पर हमें मिलता है

$$qvB\,\hat{\mathbf{n}} = \gamma\, m_0\,\mathbf{a}$$

चूंकि कण एक वृत्ताकार पथ में चलता है इसलिए उसका त्वरण $\mathbf{a}$ दरअसल अभिकेन्द्री त्वरण है और हम लिख सकते हैं कि

$$qvB = \frac{mv}{r}$$

जहां से कण की कक्षा की त्रिज्या r है

$$r = \frac{\gamma\, m_0\, v}{qB} = \frac{mv}{qB}$$

यानी त्रिज्या के व्यंजक का वही रूप है जो कि क्लासिकी भौतिकी में है; फ़र्क़ सिर्फ़ इतना है कि यह उससे γ गुना बड़ा है। साथ ही साथ कण का द्रव्यमान उसकी चाल के साथ-साथ बढ़ता है। त्रिज्या के मान में इस γ गुना वृद्धि से हम यह समझ सकते हैं कि आज के तमाम उच्च-ऊर्जा कण त्वरित्र इतने विशालकाय क्यों होते हैं।

अब एक बोध प्रश्न करके आप इन संकल्पनाओं को और बेहतर ढंग से समझें।

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 4

प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान 1.67×10^{-27} kg है। उसे गति की दिशा में 1.0×10^{15} m s^{-2} परिमाण का त्वरण देने के लिए आवश्यक बल के परिमाण की गणना करें जबकि $v = 0.90c$।

अब हम चर्चा में एक महत्वपूर्ण मोड़ पर आगे बढ़ने जा रहे हैं। वह है आपेक्षिकीय ऊर्जा की व्याख्या। आइंस्टीन के इस एक कदम के कारण उनके आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के क्रांतिकारी प्रभाव का दायरा बहुत अधिक बढ़ गया। आपेक्षिकीय ऊर्जा की धारणा विकसित करते हुए आइंस्टीन ने अपना जगत-प्रसिद्ध फार्मूला $E = mc^2$ दिया जो कि द्रव्यमान और ऊर्जा की तुल्यता को दिखाता है। आइये अब हम समझें कि यह धारणा कैसे विकसित की गई।

3.3 आपेक्षिकीय ऊर्जा

इस भाग में हम आपेक्षिकीय बल नियम का इस्तेमाल करके आपेक्षिकीय ऊर्जा का व्यंजक निकालेंगे। पी.एच.ई.-01 की इकाई 3 से गतिज ऊर्जा की परिभाषा याद करें जो नेट बाह्य बल के अधीन कण की चाल का मान किसी मान v_A से v_B तक बढ़ाने के लिए किये गये कार्य के बराबर होती है:

$$T_B - T_A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \qquad (3.17)$$

जहां

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right]$$

इस तरह

$$T_B - T_A = \int_A^B \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_A^B \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] \cdot d\mathbf{l}$$

अब हम यह लिख सकते हैं कि $d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}\, dt = \mathbf{v}\, dt$ जिससे कि

$$T_B - T_A = \int_A^B \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] \cdot \mathbf{v}\, dt$$

$$= \int_A^B \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] dt$$

$$= \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\left[\frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right]$$

चूंकि किसी फलन $f(t)$ के लिए $df = \frac{df}{dt}\, dt$

अब हम निम्न संबंध का प्रयोग करके इस समाकल को फिर से लिख सकते हैं:

$$d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + d\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$$

इस तरह

$$T_B - T_A = \int_A^B [d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v}]$$

$$= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \Big|_A^B - \int_A^B \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \Big|_A^B - \int_A^B \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

अब

$$d\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{2} + \frac{d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

इस संबंध का प्रयोग करके हमें मिलता है

$$T_B - T_A = \frac{m_0 v^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \Big|_A^B - \int_A^B \frac{m_0 v \, dv}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \Big|_A^B + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} \Big|_A^B$$

जहां दूसरे समाकल को $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t$ का प्रतिस्थापन करके हल किया गया है। अब हम मान लेते हैं कि बिन्दु A पर कण विरामावस्था में है ताकि $v_A = 0$ और B कोई भी स्वेच्छ बिंदु है जिस पर $v_B = v$ । तब विरामावस्था से शुरू करके चल रहे एक कण की आपेक्षिकीय गतिज ऊर्जा होगी:

$$T = \frac{m_0 v^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} - m_0 c^2$$

$$= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - m_0 c^2$$

$$= \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - m_0 c^2$$

या

$$T = m c^2 - m_0 c^2 \qquad (3.18 \text{ क})$$

आप देख सकते हैं कि $v/c << 1$ की सीमा में यह व्यंजक गतिज ऊर्जा के क्लासिकी व्यंजक $(T = \frac{1}{2} m_0 v^2)$ की ओर प्रवृत्त होता है। इस बात को आप ही क्यों नहीं जल्दी से सिद्ध कर डालते हैं?

बोध प्रश्न 5

5 मिनट लगाएं

दिखाइये कि सीमा $v << c$ में आपेक्षिकीय गतिज ऊर्जा का व्यंजक क्लासिकी गतिज ऊर्जा के व्यंजक की ओर प्रवृत्त होता है।

अब हम समीकरण (3.10 क) का आइंस्टीन द्वारा दिया गया विवेचन प्रस्तुत कर रहे हैं।

3.3.1 द्रव्यमान और ऊर्जा की तुल्यता

समीकरण (3.18 क) द्वारा दी गई किसी कण की गतिज ऊर्जा, कण को विरामावस्था से चाल v तक लाने में किये गये कार्य के बराबर होती है। मान लें कि हम समीकरण (3.18 क) को इस तरह लिखते हैं

$$mc^2 = T + m_0 c^2 \qquad (3.18\text{ ख})$$

= कण की चाल को बदलने के लिए इस पर किया गया कार्य $+ m_0 c^2$

आइंस्टीन ने समीकरण (3.18 ख) के लिए एक नया ही विवेचन दिया जिसके अनुसार

mc^2 कण की कुल ऊर्जा E है।

समीकरण (3.18 ख) के दाहिने पक्ष में पहला पद नेट बाह्य बल द्वारा कण पर किये गये कार्य के बराबर है। और दूसरा पद, m_0c^2, कण की "विराम" ऊर्जा है जो कण में उसके द्रव्यमान के कारण निहित होती है। इस तरह,

$$E = mc^2 \qquad (3.19)$$

अब आइये हम समझें कि समीकरण (3.19) का क्या अर्थ है।

समीकरण (3.19) हमें यह बताता है कि द्रव्यमान और ऊर्जा एक दूसरे के तुल्य हैं। द्रव्यमान और ऊर्जा एक ही भौतिक राशि के दो अलग-अलग नाम हैं: जिसे हम **द्रव्यमान-ऊर्जा (mass-energy)** कह सकते हैं। किसी भी चीज़ में, जिसका द्रव्यमान m है ऊर्जा E (= mc^2) होगी। और किसी भी चीज़ का, जिसकी ऊर्जा E है, द्रव्यमान m (= E/c^2) के बराबर होगा। अगर किसी वस्तु में ऊर्जा ΔE जोड़ी जाती है या उससे उतनी ऊर्जा निकाल ली जाती है तो उसके द्रव्यमान के मान में Δm का परिवर्तन होगा, भले ही वह किसी भी रूप की ऊर्जा क्यों न हो:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad (3.20)$$

यहां ΔE यांत्रिक कार्य, ऊष्मा, प्रकाश या अन्य किसी भी रूप की ऊर्जा हो सकती है। इस तरह आइंस्टीन द्वारा दिया गया ऊर्जा संरक्षण नियम, ऊर्जा के संरक्षण के क्लासिकी नियम के मुकाबले कहीं ज़्यादा व्यापक है।

द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता का शायद सबसे अधिक महत्वपूर्ण परिणाम यह है कि किसी भी निकाय के कुल द्रव्यमान के संरक्षण का नियम वस्तुतः उस निकाय की कुल ऊर्जा के संरक्षण का ही नियम है। आपेक्षिकता सिद्धांत में ये दोनों क्लासिकी नियम एक हो जाते हैं और इनसे मिलकर द्रव्यमान-ऊर्जा के संरक्षण का आपेक्षिकीय नियम बनता है जो कि समीकरण (3.19) द्वारा दिया गया है।

द्रव्यमान और ऊर्जा की तुल्यता देने वाले इस सिद्धांत ने अकेले इन ब्रह्माण्ड के बारे में हमारी समझ पर गहन रूप से असर डाला है। शायद इसके सबसे ज़्यादा नाटकीय और स्पष्ट उदाहरण हैं नाभिकीय विखंडन और नाभिकीय संगलन की प्रक्रियाएं। जहां एक ओर ये प्रक्रियाएं हमारे लिए असीमित ऊर्जा दिलाने की संभावना रखती हैं, वहीं दूसरी ओर इनके कारण हम पर विनाश के गहरे बादल भी मंडरा रहे हैं।

हिरोशिमा और नागासाकी के विनाश के लिए ज़िम्मेदार एटम बमों में पदार्थ के कुछ ग्राम ही नष्ट हुए थे। इस तरह देखा जाये तो विशिष्ट आपेक्षिकता सिर्फ़ वैज्ञानिकों के अधिकार क्षेत्र में ही नहीं आती: यह हम सबकी ज़िंदगी से जुड़ी है और एक मायने में हम सबकी भाग्य-नियन्ता हो सकती है।

समीकरण (3.19) और (3.20) के लिए सबसे पहले प्रायोगिक प्रमाण मिला, परमाण्वीय नाभिक की द्रव्यमान क्षति से। यह राशि, (उसको बनाने वाले घटक न्यूक्लिऑनों के द्रव्यमानों के योग की तुलना में) नाभिक के द्रव्यमान में कमी के बराबर है।

यही द्रव्यमान क्षति नाभिकीय बंधन ऊर्जा के बराबर है। किसी हल्के नाभिक को अपने घटक न्यूक्लिऑनों में विखंडित करने के लिए उसे इतनी ही ऊर्जा देनी पड़ेगी। इसके विलोमतः जब घटक नाभिकों से हल्के नाभिक बनते हैं तो इतने ही परिमाण की ऊर्जा उत्सर्जित होनी चाहिए। इस विचार को अगर हम नाभिकीय अभिक्रिया पर लागू करें, तो उस अभिक्रिया में कुल उत्सर्जित या अवशोषित ऊर्जा, अभिक्रिया करने वाले न्यूक्लिऑनों और उत्पादों की कुल द्रव्यमान क्षति के तुल्य होगी। द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता की जांच के लिए

सबसे पहला सीधा प्रयोग निम्न नाभिकीय अभिक्रिया के लिए किया गया था:

$$_3Li^7 + {}_1H^1 \longrightarrow 2\ {}_2He^4$$

इसमें निम्न परिमाण के द्रव्यमान की क्षति हुई थी:

$$(7.0166 + 1.0076)\ \text{amu} - 2 \times (4.0028)\ \text{amu} = 0.0186\ \text{amu}$$

जिसके तुल्य ऊर्जा अंतर था 27.7×10^{-6} erg। जब इस अभिक्रिया के उत्पाद α-कणों की कुल गतिज ऊर्जा और आपतित प्रोटॉनों की गतिज ऊर्जा का अंतर मापा गया तो उसका मान था $(27.6 \pm 0.05) \times 10^{-6}$ erg। यह प्रायोगिक परिणाम सैद्धांतिक परिणाम से अभूतपूर्व रूप से मेल खाता है। आज तक किए गए बहुत से प्रयोगों ने समीकरण (3.19) को पूरी तरह प्रमाणित कर दिया है।

अब हम समीकरण (3.13 क) और (3.19) का इस्तेमाल करके एक मुक्त कण की कुल ऊर्जा को उसके संवेग के पदों में लिखेंगे और उससे द्रव्यमान रहित कणों के बारे में एक रोचक परिणाम निकालेंगे।

3.3.2 मुक्त कण के आपेक्षिकीय ऊर्जा और रैखिक संवेग

क्लासिकी तौर पर एक मुक्त कण की ऊर्जा और संवेग में यह संबंध होता है

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

आपेक्षिकीय मुक्त कण के लिए हम समीकरण (3.13 क) और (3.19) से एक संगत परिणाम पर पहुंच सकते हैं। समीकरण (3.13 क) का वर्ग करने पर हमें मिलता है

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2}$$

जहां से सरल बीजगणित से

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

अतः

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}$$

अब समीकरण (3.19) से

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}$$

या

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \qquad (3.21)$$

समीकरण (3.21) आपेक्षिकीय ऊर्जा-संवेग संबंध है। इस संबंध का एक परिणाम यह है कि इससे 'द्रव्यमान-रहित' कणों के होने की, यानी उन कणों के होने की जिनमें ऊर्जा और संवेग तो होता है लेकिन जिनका विराम द्रव्यमान शून्य होता है, संभावना मिलती है। आइये इसे संक्षेप में समझें।

द्रव्यमान-रहित कण

अगर हम समीकरण (3.21) में $m_0 = 0$ लें तो हमें मिलता है

$$E = pc \qquad (3.22)$$

इसमें हम धनात्मक मूल इसलिए लेते हैं क्योंकि हम यह मानते हैं कि जिन कणों की ऊर्जा संवेग के बढ़ने के साथ-साथ कम होती है वे अस्थाई होते हैं। अब अगर द्रव्यमान-रहित कणों के संवेग का शून्य से हट कर मान होना हो तो

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

का सीमा $m_0 \to 0$ में एक निश्चित मान होना चाहिए जो कि शून्य से हट कर हो। यह तभी संभव है जब, जैसे-जैसे $m_0 \to 0$ हो, वैसे-वैसे $v \to c$। इस तरह द्रव्यमान-रहित कणों की चाल प्रकाश की चाल के बराबर होगी। प्रकाश की चाल से चलने वाले कणों का एक जाना माना उदाहरण है, फ़ोटॉन। इस तरह हम यह नतीजा निकालते हैं कि फ़ोटॉन का विराम द्रव्यमान शून्य होता है और उनकी ऊर्जा समीकरण (3.22) से दी जाती है। इसलिए फ़ोटान जैसे एक द्रव्यमान-रहित कण का संवेग होता है

$$p = \frac{E}{c} \tag{3.23}$$

विलोमतः, उन कणों का जो प्रकाश की चाल से चलते हैं (जैसे कि फ़ोटॉन), विराम द्रव्यमान शून्य होता है।

इस चर्चा का अंत हम आपके लिए एक बोध प्रश्न देकर कर रहे हैं।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

(क) मुक्त प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान 938 MeV/c^2 होता है। एक प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा 200 MeV है। इस प्रोटॉन की (MeV में) कुल ऊर्जा, आपेक्षिकीय द्रव्यमान, संवेग और चाल की गणना करें। यह दिया है कि 1 MeV = 1.6×10^{-13} J।

(ख) ऊर्जा E_γ की एक गामा किरण, प्रयोगशाला में विरामावस्था में स्थित एक प्रोटॉन से टकराती है। प्रयोगशाला तंत्र में गामा किरण का संवेग क्या है? सिद्ध करें कि प्रयोगशाला तंत्र में संहति केंद्र की चाल V होती है

$$V = \frac{E_\gamma c}{E_\gamma + M_p c^2}$$

यहां M_p प्रोटॉन का विराम द्रव्यमान है।

अब जो कुछ भी आपने इस इकाई में पढ़ा है उसका सार हम यहां दे रहे हैं।

3.4 सारांश

- विराम द्रव्यमान m_0 के एक कण का, जो वेग $\mathbf{v}$ से चल रहा है, आपेक्षिकीय रैखिक संवेग होता है:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

जहां m उस कण का आपेक्षिकीय द्रव्यमान है:

$$m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

- आपेक्षिकीय बल नियम का निम्न स्वरूप होता है

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

जहां $\mathbf{p}$ आपेक्षिकीय रैखिक संवेग है।

- यदि किसी वस्तु या कणों के निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तो निकाय का रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।
- जब एक बल **F** निकाय पर किसी दिये गये समय के लिए लगता है तो वह निकाय के संवेग में $\Delta \mathbf{P}$ के बराबर परिवर्तन करता है जो उसके आवेग के बराबर होता है

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt$$

- किसी कण की आपेक्षिकीय कुल ऊर्जा उसकी आपेक्षिकीय गतिज ऊर्जा और विराम ऊर्जा के योग के बराबर होती है।

$$E = T + m_0 c^2$$

जहां आपेक्षिकीय गतिज ऊर्जा होती है

$$T = mc^2 - m_0 c^2$$

इससे हमें द्रव्यमान और ऊर्जा के बीच तुल्यता मिलती है जिसे हम इस तरह लिखते हैं:

$$E = mc^2$$

- एक आपेक्षिकीय मुक्त कण की ऊर्जा और संवेग में निम्न संबंध होता है:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

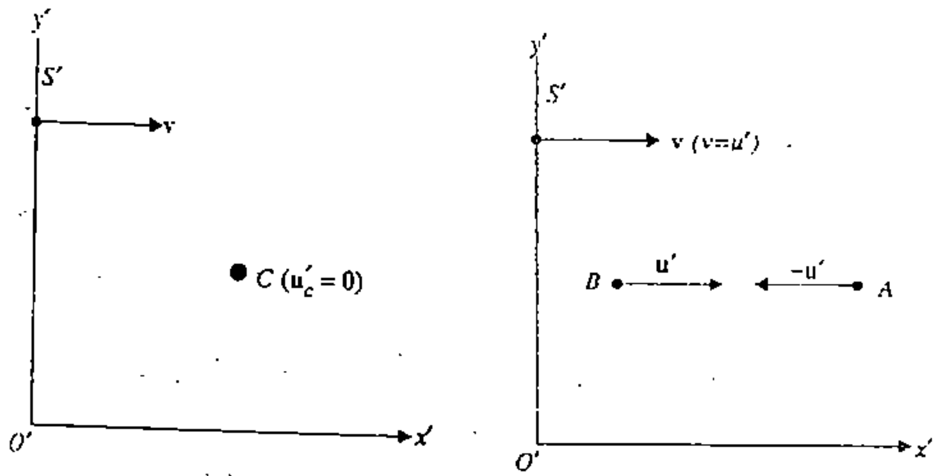
शून्य विराम द्रव्यमान वाले कण, जैसे कि फ़ोटॉन, के लिए आपेक्षिकीय ऊर्जा-संवेग संबंध हो जाता है

$$E = pc$$

3.5 अंत में कुछ प्रश्न

45 मिनट लगाएं

1. एक अप्रत्यास्थ संघट्टन में दो ठीक एक जैसे बिंदु कण A और B जिनमें से हरेक का विराम द्रव्यमान m_0 है, टकराते हैं और जुड़ जाते हैं, जिससे कि एक पिंड C बनता है जिसका विराम द्रव्यमान M_0 है। प्रत्येक कण की एक जड़त्वीय प्रेक्षक द्वारा मापी गई गतिज ऊर्जा K है। तंत्र S' में संघट्टन के पहले और बाद की स्थिति नीचे चित्र 3.3 में दिखाई गई है।



चित्र 3.3: समान विराम द्रव्यमान के दो कणों का अप्रत्यास्थ संघट्टन: (क) संघट्टन से पहले; (ख) संघट्टन के बाद।

अब दूसरा निर्देश तंत्र S लें, जिसके सापेक्ष S' वेग v ($v = u'$) से चल रहा है।

(क) इसी संघट्टन प्रक्रिया को S की दृष्टि से चित्र खींच कर दिखायें। संघट्टन से पहले और बाद की स्थितियों में S तंत्र में संवेग संरक्षण नियम लागू करें और सिद्ध करें कि पिंड C का विराम द्रव्यमान है

$$M_0 = \frac{2\,m_0}{(1 - u'^2/c^2)^{1/2}}$$

(ख) S' तंत्र में संघट्टन से पहले की कुल गतिज ऊर्जा संघट्टन के बाद गायब हो जाती है। सिद्ध करें कि यह निकाय की ऊर्जा में वृद्धि के बराबर है जो कि C के विराम द्रव्यमान में वृद्धि के तुल्य है।

(ग) सिद्ध करें कि दोनों ही तंत्रों S और S' में इस अप्रत्यास्थ संघट्टन के लिए कुल ऊर्जा और आपेक्षिकीय द्रव्यमान संरक्षित रहता है।

2. संबंध $E = mc^2 = (T + m_0c^2)$ का प्रयोग करके समीकरण (3.14 ख) द्वारा दिये गये आपेक्षिकीय बल नियम को इस तरह लिखें

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{F}\,.\,\mathbf{v})}{c^2}$$

इससे नीचे दी गई स्थितियों के लिए बल नियम प्राप्त करें:

(i) जब $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ के समांतर है और (ii) जब $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ के लंबवत् है।

3. विराम द्रव्यमान 5 kg के एक कण की आरंभिक चाल $2 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ है। इस पर आपेक्षिकीय संवेग की दिशा में परिमाण 10^6 N का एक आपेक्षिकीय बल 10^6 s के लिए लगता है।

(क) प्रारंभिक आपेक्षिकीय संवेग के परिमाण,

(ख) अंतिम आपेक्षिकीय संवेग के परिमाण, और

(ग) कण की अंतिम चाल

की गणना कीजिए।

4. एक प्रोटॉन के लिए प्रयोगशाला में $\beta = 0.999$ है। इसकी ऊर्जा और संवेग की एक जड़त्वीय तंत्र में गणना करें जो कि प्रोटॉन की गति की दिशा में चल रहा है और जिसके लिए प्रयोगशाला के सापेक्ष $\beta = 0.99$ है।
दिया है प्रोटॉन विराम ऊर्जा = 938 MeV जहां 1 MeV = 1.6×10^{-13} J.

5. (क) वेग योग संबंध और इकाई 2 के अंत के प्रश्नों में से प्रश्न 5 के परिणाम का प्रयोग करके संवेग और ऊर्जा के लिए निम्नलिखित आपेक्षिकीय रूपांतरण समीकरण प्राप्त करें।

$$\begin{aligned} p_x' &= \gamma\,(p_x - \beta\,E/c) & \qquad p_x &= \gamma\,(p_x' + \beta\,E'/c) \\ p_y' &= p_y & p_y &= p_y' \\ p_z' &= p_z & p_z &= p_z' \\ E' &= \gamma\,(E - \beta\,c\,p_x) & E &= \gamma\,(E' + \beta\,c\,p_x') \end{aligned}$$

जहाँ प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

(ख) इन परिणामों से सिद्ध कीजिए कि राशि $(E^2 - c^2 p^2)$ लॉरेंज़ निश्चर है।

3.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) कणों के संघट्टन के लिए रैखिक संवेग संरक्षण नियम है

$$\mathbf{p}_{1B} + \mathbf{p}_{2B} = \mathbf{p}_{1A} + \mathbf{p}_{2A}$$

या

$$m_{1B}\,\mathbf{v}_{1B} + m_{2B}\,\mathbf{v}_{2B} = m_{1A}\,\mathbf{v}_{1A} + m_{2A}\,\mathbf{v}_{2A} \qquad (\because \mathbf{p} = m\mathbf{v}) \tag{1}$$

(ख) S' में संवेग संरक्षण नियम है

$$\mathbf{p}'_{1B} + \mathbf{p}'_{2B} = \mathbf{p}'_{1A} + \mathbf{p}'_{2A}$$

या

$$m'_{1B}\,\mathbf{v}'_{1B} + m'_{2B}\,\mathbf{v}'_{2B} = m'_{1A}\,\mathbf{v}'_{1A} + m'_{2A}\,\mathbf{v}'_{2A} \tag{2}$$

जहां m'_{1B}, m'_{2B} वेगों $\mathbf{v}'_{1B}$ और $\mathbf{v}'_{2B}$ से संघट्टन के पहले चल रहे हैं और m'_{1A}, m'_{2A} वेगों $\mathbf{v}'_{1A}, \mathbf{v}'_{2A}$ से संघट्टन के बाद चल रहे हैं। यह दिया है कि $m_{1B} = m'_{1B}$, $m_{2B} = m'_{2B}$, $m_{1A} = m'_{1A}$, $m_{2A} = m'_{2A}$। [illegible] नियम

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u}}{1 + v'u/c^2}$$

का प्रयोग करके हम समीकरण (1) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$m_{1B}\left[\frac{\mathbf{v}'_{1B} + \mathbf{u}}{1 + v'_{1B}\,u/c^2}\right] + m_{2B}\left[\frac{\mathbf{v}'_{2B} + \mathbf{u}}{1 + v'_{2B}\,u/c^2}\right] = m_{1A}\left[\frac{\mathbf{v}'_{1A} + \mathbf{u}}{1 + v'_{1A}\,u/c^2}\right] +$$
$$m_{2A}\left[\frac{\mathbf{v}'_{2A} + \mathbf{u}}{1 + v'_{2A}\,u/c^2}\right] \tag{3}$$

साफ़ है कि यह समीकरण (2) की तरह नहीं लिखी जा सकती और तब S' में संवेग संरक्षण का नियम लागू नहीं होता।

2. हमें दिखाना है कि

$$(1 - v_i'^2/c^2)\left(1 - \frac{v_i u}{c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

समीकरण (3.4 क) से

$$1 - \frac{v_i'^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v_i - u}{1 - v_i u/c^2}\right)^2$$

$$= \frac{c^2\,(1 - v_i u/c^2)^2 - (v_i - u)^2}{c^2(1 - v_i u/c^2)^2}$$

$$(1 - v_i'^2/c^2)\left(1 - \frac{v_i u}{c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v_i u}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(v_i - u)^2$$

$$= 1 + \frac{v_i^2 u^2}{c^4} - \frac{2v_i u}{c^2} - \frac{v_i^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{2v_i u}{c^2}$$

$$= 1 - \frac{v_i^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{v_i^2 u^2}{c^4}$$

$$= 1 - \frac{v_i^2}{c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \frac{u^2}{c^2}$$

$$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)$$

3. (क) हम बोध प्रश्न 1 (ख) के उत्तर में दिये गये समीकरण (3) से शुरू करते हैं जो कि इस तरह है:

$$m_{1B}\left[\frac{\mathbf{v}'_{1B} + \mathbf{u}}{1 + v'_{1B}\, u/c^2}\right] + m_{2B}\left[\frac{\mathbf{v}'_{2B} + \mathbf{u}}{1 + v'_{2B}\, u/c^2}\right] = m_{1A}\left[\frac{\mathbf{v}'_{1A} + \mathbf{u}}{1 + v'_{1A}\, u/c^2}\right] + m_{2A}\left[\frac{\mathbf{v}'_{2A} + \mathbf{u}}{1 + v'_{2A}\, u/c^2}\right] \qquad (1)$$

समीकरण (3.4 ख) का इस्तेमाल करके हम बोध प्रश्न (2) की तरह यह सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\left(1 + \frac{v'_i u}{c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{v'^2_i}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \qquad (2)$$

इस समस्या पर समीकरण (2) लागू करके हम लिखते हैं कि

$$\left(1 + \frac{v'_{1A} u}{c^2}\right)^2 = \frac{(1 - v'^2_{1A}/c^2)}{(1 - v^2_{1A}/c^2)} \quad (1 - u^2/c^2)$$

अत:

$$\frac{m_{1A}}{1 + v'_{1A}\, u/c^2} = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \left(\frac{1 - v^2_{1A}/c^2}{1 - v'^2_{1A}/c^2}\right) m_{1A}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - u^2/c^2}\right)^{1/2} \frac{m_{1A}\gamma'_{1A}}{\gamma_{1A}}$$

$$= \frac{m'_{1A}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$ समीकरण (3.10) प्रयोग करके

इसी तरह

$$\frac{m_{2A}}{(1 + v'_{2A}\, u/c^2)} = \frac{m'_{2A}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$

$$\frac{m_{1B}}{(1 + v'_{1B}\, u/c^2)} = \frac{m'_{1B}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$

$$\frac{m_{2B}}{(1 + v'_{2B}\, u/c^2)} = \frac{m'_{2B}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$

इस तरह समीकरण (1) हो जाता है

$$\frac{m'_{1B}(\mathbf{v}'_{1B} + \mathbf{u})}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m'_{2B}(\mathbf{v}'_{2B} + \mathbf{u})}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = \frac{m'_{1A}(\mathbf{v}'_{1A} + \mathbf{u})}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m'_{2A}(\mathbf{v}'_{2A} + \mathbf{u})}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$

या

$$\frac{m'_{1B}\mathbf{v}'_{1B}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m'_{2B}\mathbf{v}'_{2B}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{(m'_{1B} + m'_{2B})\mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{m'_{1A}\mathbf{v}'_{1A}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m'_{2A}\mathbf{v}'_{2A}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} + \frac{(m'_{1A} + m'_{2A})\mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \qquad (3)$$

चूंकि संरक्षण प्रक्रिया में निकाय का कुल द्रव्यमान संरक्षित रहता है इसलिए

$$m'_{1A} + m'_{2A} = m'_{1B} + m'_{2B}$$

और समीकरण (3.13 क) का समीकरण (4) के साथ प्रयोग करके हम समीकरण (3) को इस तरह लिख सकते हैं

$$\mathbf{p}'_{1B} + \mathbf{p}'_{2B} = \mathbf{p}'_{1A} + \mathbf{p}'_{2A}$$

इस प्रकार तंत्र S' में रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।

ख) समीकरण (3.13 क) से

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

या परिमाण

$$p = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \text{ जहां } v = 0.99c \text{ और } p = 1.92 \times 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}$$

इस तरह

$$m_0 = \frac{1.92 \times 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}}{0.99 \times 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} [1 - (0.99)^2]^{1/2}$$

$$= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg.}$$

4. यह दिया है कि त्वरण प्रोटॉन के वेग के समांतर है। अब

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt}$$

जहां

$$\frac{dm}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = m_0 \frac{v}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

इस तरह

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{v^2}{c^2} \hat{\mathbf{v}} \frac{dv}{dt}$$

$$= m\mathbf{a} + \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{v^2}{c^2} \mathbf{a} \quad [\text{ चूंकि } \mathbf{a} \parallel \mathbf{v}, \mathbf{a} = \hat{\mathbf{v}}\frac{dv}{dt}]$$

$$= m\left[1 + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}\right]\mathbf{a} \quad [\text{ चूंकि } m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}]$$

$$= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{a} = \gamma^3 m_0 \mathbf{a}$$

यह दिया है कि $m_0 = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $a = 1.0 \times 10^{15}$ m s^{-2}

चूंकि $v = 0.9c$, $\gamma = 2.3$

इस तरह $F = \gamma^3 m_0 a = 2.03 \times 10^{-11}$ N

5. क्लासिकी सीमा $v/c << 1$ में हम यह सन्निकटन करते हैं

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2$$

तब

$$T = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - m_0 c^2 \simeq m_0 c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right] = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

6. (क) प्रोटॉन के लिए

$$m_0c^2 = 938 \text{ MeV}$$

और $T = 200$ MeV

$\therefore$ कुल ऊर्जा $E = T + m_0 c^2 = (200 + 938) \text{ MeV} = 1138 \text{ MeV}$

विराम द्रव्यमान $m_0 = \dfrac{938 \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{s}^{-2}}$

$$= 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

आपेक्षिकीय द्रव्यमान $m = \dfrac{E}{c^2}$

$$= \frac{1138 \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{s}^{-2}}$$

$$= 2.02 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

प्रोटॉन का संवेग समीकरण (3.21) से मिलता है

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$m^2c^4 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$$

$$p^2 = m^2c^2 - m_0^2 c^2$$

या $p^2 = m \,.\, (mc^2) - m_0 (m_0c^2)$

$$= (2.02 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1138 - 938 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$= (2.02 \times 1138 - 1.67 \times 938) \times 1.6 \times 10^{-40} \text{ J kg}$$

$$= (2298 - 1566) \times 1.6 \times 10^{-40} \text{ J Kg}$$

$$= 1171 \times 10^{-40} \text{ J kg}$$

या $p = 3.4 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}$

प्रोटॉन की चाल

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0c^2} = \frac{1171 \times 10^{-40} \times 9 \times 10^{16}}{1171 \times 10^{-40} + 2506 \times 10^{-40}} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2}$$

या

$$v^2 = \frac{10539 \times 10^{16}}{3677} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$= 2.87 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

या $v = 1.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

(ख) प्रयोगशाला तंत्र में गामा-किरण संवेग है,

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$$

प्रयोगशाला तंत्र में संहति केंद्र का वेग होता है

$$\mathbf{V} = \frac{M_p \mathbf{v}_p + M_\gamma \mathbf{v}_\gamma}{M_p + M_\gamma}$$

चूंकि प्रोटॉन विरामावस्था में है, अतः $\mathbf{v}_p = 0$

$$\therefore \quad V = \frac{M_\gamma v_\gamma}{M_p + M_\gamma}$$

या $$V = \frac{M_\gamma v_\gamma}{M_p + M_\gamma}$$

अब $M_\gamma v_\gamma = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ । क्योंकि गामा किरणें प्रकाश की चाल से चलती हैं

$$v_\gamma = c \text{ और } M_\gamma = \frac{E_\gamma}{c^2}$$

अतः

$$V = \frac{E_\gamma/c}{M_p + E_\gamma/c^2} = \frac{E_\gamma c}{M_p c^2 + E_\gamma}$$

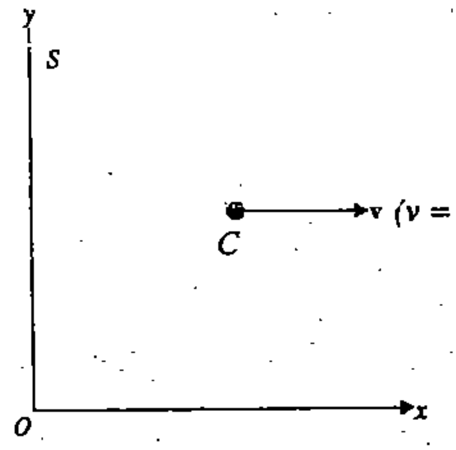
अंत में कुछ प्रश्न

1. वेग योग फार्मूला समीकरण (2.2 क से ख) का प्रयोग करके हम S तंत्र में A और B के वेग इस तरह लिख सकते हैं

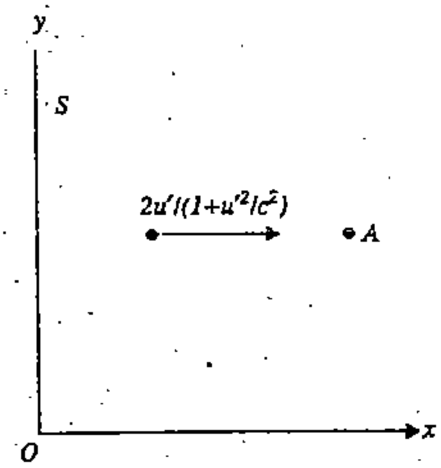
$$u_A = \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} = 0$$

$$u_B = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{u' + u'}{1 + u'^2/c^2} = \frac{2u'}{1 + u'^2/c^2}$$

चूंकि C, S' में विरामावस्था में है, S में वह S' के वेग $\mathbf{v}$ $(v = u')$ से ही गतिमान होगा। अतः चित्र द्वारा इस संघट्टन प्रक्रिया को हम इस तरह दिखा सकते हैं:



(क)



(ख)

S तंत्र में B का आपेक्षिकीय द्रव्यमान है

$$m_B = \frac{m_0}{(1 - u_B^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{m_0}{\left[1 - \frac{4u'^2/c^2}{(1 + u'^2/c^2)^2}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{m_0(1 + u'^2/c^2)}{(1 - u'^2/c^2)}$$

अब आइये हम तंत्र S में रैखिक संवेग के x-घटक पर रैखिक संवेग संरक्षण नियम लागू करें:

$$\mathbf{p}_{before} = \mathbf{p}_{after}$$

$$m_B u_B + m_A u_A = M_C v$$

या

$$\frac{m_0(1+u'^2/c^2)}{(1-u'^2/c^2)} \frac{2u'}{(1+u'^2/c^2)} + 0 = \frac{M_0 u'}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

चूंकि $$M_C = \frac{M_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

जहां M_0, C का विराम द्रव्यमान है और $v = u'$। इस तरह

$$M_0 = \frac{2m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

(ख) S' तंत्र में संघट्टन से पहले गतिज ऊर्जा समीकरण (3.18 क) द्वारा दी जाती है

$$K'_A = m'_A c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} - 1\right]$$

$$K'_B = m'_B c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} - 1\right]$$

कुल गतिज ऊर्जा $= K'_A + K'_B = 2m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} - 1\right]$ (1)

अब C का विराम द्रव्यमान A और B के विराम द्रव्यमानों के योग से अधिक है और यह अंतर है

$$\Delta m = M_0 - 2m_0 = 2m_0 \left[\frac{1}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} - 1\right]$$

इस द्रव्यमान की वृद्धि के तुल्य ऊर्जा में वृद्धि $= \Delta m c^2$

$$= 2m_0 c^2 \left[\frac{1}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right]$$

जो समीकरण (1) में दी गई गतिज ऊर्जा के बराबर है। इसलिए ग़ायब हुई गतिज ऊर्जा निकाय के विराम द्रव्यमान में वृद्धि के रूप में प्रकट होती है और निकाय की कुल द्रव्यमान-ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(ग) S तंत्र लें।

कुल ऊर्जा (समीकरण 3.18 ख) है

(1) संघट्टन से पहले:

$$E_A + E_B = m_0c^2 + (m_0c^2 + K_B) \text{ चूंकि } K_A = 0$$

$$= 2m_0c^2 + m_0c^2\left[\frac{1}{(1-u_B^2/c^2)^{1/2}} - 1\right] \quad [\because K_B = m_Bc^2 - m_0c^2]$$

$$= 2m_0c^2 + m_0c^2\left[\frac{1+u'^2/c^2}{1-u'^2/c^2} - 1\right]$$

$$= 2m_0c^2 + m_0c^2\left[\frac{2u'^2/c^2}{1-u'^2/c^2}\right]$$

$$= \frac{2m_0c^2}{1 - u'^2/c^2}$$

(2) संघट्टन के बाद: $M_C c^2 = \frac{M_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} = \frac{2m_0c^2}{(1-u'^2/c^2)}$

जहां हमने M_0 का मान रख दिया है।

इस तरह S तंत्र में कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।

अब S' तंत्र लें। (1) का प्रयोग करके कुल ऊर्जा है:

(1) संघट्टन से पहले:

$$m_0c^2 + K_A' + m_0c^2 + K_B' = 2m_0c^2 + 2m_0c^2\left[\frac{1}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} - 1\right]$$

$$= \frac{2m_0c^2}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

(2) संघट्टन के बाद: $M_0c^2 = \frac{2m_0c^2}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$

इस तरह S' तंत्र में भी कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(ग) आपेक्षिकीय द्रव्यमान का संरक्षण

S तंत्र

(1) संघट्टन से पहले:

$$m_A + m_B = m_0 + \frac{m_0}{(1-u_B^2/c^2)^{1/2}} = m_0 + \frac{m_0(1+u'^2/c^2)}{(1-u'^2/c^2)}$$

$$= \frac{2m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

(2) संघट्टन के बाद: $M_C = \frac{M_0}{(1-u'^2/c^2)} = \frac{2m_0}{(1-u'^2/c^2)}$

S' तंत्र

(1) संघट्टन के पहले:

$$m_A' + m_B' = \frac{m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}} = \frac{2m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$$

(2) संघट्टन के बाद: $M_0 = \frac{2m_0}{(1-u'^2/c^2)^{1/2}}$

इस तरह दोनों ही S और S' तंत्रों में आपेक्षिकीय द्रव्यमान संरक्षित रहता है।

2. आपेक्षिकीय बल नियम है

$$\mathbf{F} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\,\frac{dm}{dt}$$

अब $m = E/c^2$ जिससे कि

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\,\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\,\frac{d}{dt}(T + m_0c^2) = \frac{1}{c^2}\,\frac{dT}{dt}$$

लेकिन $\quad \frac{dT}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$

इस तरह $\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

इसके साथ बल नियम हो जाता है

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})}{c^2}$$

(1) जब $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ के समांतर होता है

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \hat{\mathbf{v}} \frac{Fv^2}{c^2} \text{ where } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \text{ and } \mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{v}}$$

या $$\mathbf{F}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m\mathbf{a} \qquad [\because \mathbf{v} \parallel \mathbf{F}]$$

या $$\mathbf{F} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{a}$$

इस तरह हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि $\mathbf{F}$ और $\mathbf{a}$ दोनों ही $\mathbf{v}$ के समांतर हैं।

राशि $\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$ को "अनुदैर्घ्य द्रव्यमान" कहा जाता है।

(2) जब $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ के लंबवत् है तो $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ और

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$= \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \mathbf{a}$$

राशि $\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ "अनुप्रस्थ द्रव्यमान" भी कहलाती है।

3. (क) प्रारंभिक आपेक्षिकीय संवेग का परिमाण है

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{(1 - v_i^2/c^2)^{1/2}} = \frac{5 \text{ kg} \times 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{(1 - 4/9)^{1/2}} = 1.34 \times 10^9 \text{ kg m s}^{-1}$$

(ख) आपेक्षिकीय संवेग के परिमाण में परिवर्तन होता है

$\Delta \mathbf{P} = \int \mathbf{F}\, dt = \mathbf{F} \int dt$ चूंकि बल अचर है

$\therefore \Delta P = F\,\Delta t = 10^6 \text{ N} \times 10^3 \text{ s} = 10^9 \text{ kg m s}^{-1}$

अतः अंतिम आपेक्षिकीय संवेग का परिमाण है

$$p_f = (1.34 \times 10^9 + 10^9) \text{ kg m s}^{-1}$$
$$= 2.34 \times 10^9 \text{ kg m s}^{-1}$$

(ग) अंतिम चाल इस संबंध से निकाली जा सकती है

$$p_f = \frac{m_0 v_f}{(1 - v_f^2/c^2)^{1/2}}$$

या $$p_f^2 = \frac{m_0^2 v_f^2}{(1 - v_f^2/c^2)}$$

या $$p_f^2 \left(1 - \frac{v_f^2}{c^2}\right) = m_0^2 v_f^2$$

या $$v_f^2 \left(m_0^2 + \frac{p_f^2}{c^2}\right) = p_f^2$$

$$v_f = \frac{p_f}{(m_0^2 + p_f^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{2.34 \times 10^9 \text{ kg m s}^{-1}}{(25 \text{ kg}^2 + 60.8 \text{ kg}^2)^{1/2}}$$

$$= 2.53 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

4. हम पहले S' तंत्र में प्रोटॉन का वेग v'' परिकलित करेंगे। वेग रूपांतरण संबंध का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं

$$v'' = \frac{v - v'}{1 - vv'/c^2}$$

या $$\frac{v''}{c} = \frac{\frac{v}{c} - \frac{v'}{c}}{1 - vv'/c^2}$$

या $$\beta'' = \frac{\beta - \beta'}{1 - \beta\beta'}$$

या $$= \frac{0.999 - 0.990}{1 - (0.999)(0.990)} = \frac{0.009}{0.011} = 0.82$$

अतः $$E = \frac{m_0c^2}{(1 - \beta''^2)^{1/2}} = \frac{938 \text{ MeV}}{(1 - (0.82)^2)^{1/2}} = \frac{938}{0.572} = 1640 \text{ MeV}$$

$$p^2c^2 = E^2 - m_0^2 c^4$$

या $$p = \frac{1}{c}(E^2 - m_0c^4)^{1/2}$$

$$= \frac{1.6 \times 10^{-13}}{3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}} \times [(1640)^2 - (938)^2]^{1/2} \text{ J}$$

$$= \frac{1.6 \times 10^{-13} \times 1345}{3 \times 10^8} \text{ kg ms}^{-1}$$

$$= 7.17 \times 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}$$

5. (क) तंत्र S में, ऊर्जा और संवेग समीकरण हैं:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}},$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

तंत्र S' में, परिभाषा के अनुसार संगत राशियां हैं:

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}}, \quad p'_y = \frac{m_0 v'_y}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}}, \quad p'_z = \frac{m_0 v'_z}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}},$$

$$E' = \frac{m_0 c^2}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}}$$

वेग योग समीकरणों (2.20 क से ग) और इकाई 2 के अंत के प्रश्न 5 के परिणाम से हम लिख सकते हैं

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \tag{1 क}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma (1 + v'_x \, V/c^2)}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} \tag{1 ख}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma (1 + v'_x \, V/c^2)} \tag{1 ग}$$

$$(c^2 - v^2) = \frac{c^2 (c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{(c^2 + v'_x \, V)^2}$$

$$= \frac{(c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{c^2 \, (1 + v'_x \, V/c^2)^2}$$

अब हम यदि पूरी समीकरण को c^2 से भाग देकर उसका विलोम करके वर्गमूल लें तो हमें मिलता है

$$\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{1 + v'_x \, V/c^2}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}} \tag{2}$$

अब

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{m_0 (v'_x + V)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2} \, (1 + v'_x \, V/c^2)}$$

$$= \frac{m_0 (v'_x + V)}{(1 + v'_x V/c^2)} \cdot \frac{(1 + v'_x V/c^2)}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{m_0 \, (v'_x + V)}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

या

$$p_x = \frac{p'_x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 \, (Vc^2/c^2)}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

या

$$p_x = \frac{p'_x + E'V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = \gamma \, (p'_x + \beta \, E'/c)$$

$$p_y = \frac{m_0 v_y}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{m_0 v'_y \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2} \, (1 + v'_x \, V/c^2)}$$

$$= \frac{m_0 v'_y}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}} \qquad \text{समीकरण (2) से}$$

या

$$p_y = p'_y$$

$$p_z = \frac{m_0 v_z}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{m_0 v'_z \, (1 - V^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2} (1 + v'_x V/c^2)^{1/2}} = \frac{m_0 v'_z}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2}} = p'_z$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = m_0 c^2 \left[\frac{1 + v'_x V/c^2}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{m_0 c^2}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}} + \frac{m_0 v'_x V}{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \, (1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{E'}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} + \frac{V\, p'_x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$$

या $$E = \frac{E' + V\, p'_x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = \gamma\,(E' + \beta\, c\, p'_x) \qquad (3)$$

इनके विलोम संबंध, इन समीकरणों में $p_x \leftrightarrow p'_x$, $p_y \leftrightarrow p'_y$, $p_z \leftrightarrow p'_z$, $E \leftrightarrow E'$, और V के स्थान पर $-V$ रखने पर मिलते हैं। हम ये परिणाम नीचे की तालिका में दे रहे हैं।

संवेग और ऊर्जा के लिए आपेक्षिकीय रूपांतरण

$p'_x = \dfrac{p_x - EV/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$	$p_x = \dfrac{p'_x + E'V/c^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$
$p'_y = p_y$	$p_y = p'_y$
$p'_z = p_z$	$p_z = p'_z$
$E' = \dfrac{E - Vp_x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$	$E = \dfrac{E' + Vp'_x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}$

(ख) यह सिद्ध करने के लिए कि $E^2 - c^2 p^2$ लॉरेंज़ निश्चर है, हमें सिद्ध करना होगा कि जड़त्वीय तंत्र में इसका मान बदलता नहीं, यानी कि,

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E^2 - c^2 p^2$$

अब $$E^2 - c^2 p^2 = E^2 - c^2 p_x^2 - c^2 p_y^2 - c^2 p_z^2$$

(3) के परिणाम का प्रयोग करने पर हमें मिलता है:

$$E^2 - c^2 p^2 = \gamma^2 (E' + \beta c\, p'_x)^2 - c^2 \gamma^2 (p'_x + \beta E'/c)^2 - c^2 (p'^2_y + p'^2_z)$$

$$= \gamma^2 (E'^2 + \beta^2 c^2 p'^2_x - 2E'\beta c\, p'_x)$$

$$- c^2 \gamma^2 \left(p'^2_x + \frac{\beta^2 E'^2}{c^2} + \frac{2\beta}{c} p_x E'\right) - c^2 (p'^2_y + p'^2_z)$$

$$= \gamma^2 \, [E'^2 (1 - \beta^2) - p'^2_x c^2 (1 - \beta^2)] - c^2 p'^2_y - c^2 p'^2_z$$

$$= \gamma^2 \left[\frac{E'^2}{\gamma^2} - \frac{p'^2_x c^2}{\gamma^2}\right] - c^2 p'^2_y - c^2 p'^2_z$$

$$= E'^2 - p'^2_x c^2 - c^2 p'^2_y - c^2 p'^2_z$$

$$= E'^2 - c^2 (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z)$$

$$= E'^2 - c^2 p'^2$$

इस तरह राशि $E^2 - p^2 c^2$ लॉरेंज़ निश्चर है। और यह और कुछ नहीं [illegible] ऊर्जा का वर्ग है।

उपसंहार

आपको आइंस्टीन के आपेक्षिकता सिद्धांत से अपना यह साक्षात्कार कैसा लगा? क्या इसने आपके मन-मस्तिष्क को झिंझोड़ा? क्या आपको ऐसा लगा कि यह आपकी समझ की कठिन परीक्षा लेता है? और आपको विवश करता है कि आप इस भौतिक संसार के बारे में पूरी तरह से नए तरीक़े से सोचें? हमें उम्मीद है कि इस सिद्धांत का अध्ययन करने से आपकी भौतिक संसार की समझ और भी समृद्ध हुई होगी; शायद अब आप अपनी पुरानी मान्यताओं को छोड़ सकेंगे और अपनी तार्किक क्षमताओं पर ज़्यादा भरोसा करेंगे। क्या आपको यह खंड पढ़ने में आनन्द आया? हमारे लिए, इस खंड में आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत की बारीकियों और उसके व्यावहारिक उपयोगों को आप तक पहुंचाने का प्रयास बहुत ही संतोषजनक रहा है। आशा है कि आपको भी इसे पढ़ते हुए उतना ही संतोष मिला होगा।

आइंस्टीन का विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत आधुनिक भौतिकी की महानतम उपलब्धियों में से एक है। इसका बौद्धिक आकर्षण इसमें निहित तार्किक संगतता में है। अगर हम इसके दोनों अभिगृहीतों को मान लें तो बाकी सब परिणाम उससे अपने आप निकलते चले आते हैं चाहे वह दिक्काल की बदली हुई समझ हो, या उनके परिणाम स्वरूप भौतिकी के नियमों के परिवर्तित स्वरूप हों।

विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत का व्यावहारिक महत्व भी है। आपेक्षिकता नियम और लॉरेंज़ रूपांतरण, दोनों हमारे लिए मिलकर एक ऐसा ढाँचा तैयार करते हैं जिसकी सहायता से हम बिना प्रयोग किये भी किसी भौतिक सिद्धांत का परीक्षण कर सकते हैं। आज के सभी सिद्धांतों और आगे आने वाले सभी भौतिक सिद्धांतों को तभी स्वीकार किया जा सकता है जबकि वे इस ढांचे में फ़िट बैठें। विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत की यह विशेषता उसे भौतिकीविदों के हाथों में शायद सबसे महत्वपूर्ण औज़ार का दर्ज़ा देती है।

और इस सबके पीछे जो व्यक्तित्व है उसके बारे में क्या कहा जाये? हम सभी एक वैज्ञानिक के रूप में आइंस्टीन के इस महान योगदान को तो जानते हैं। इसमें कोई संदेह नहीं कि वे आज तक के महानतम वैज्ञानिक विचारकों में से एक हैं लेकिन उनके व्यक्तित्व की बहुत सी विशेषताएं उनकी वैज्ञानिक देन से कहीं बढ़कर हैं।

संपूर्ण मानवता को उन पर गर्व है, न केवल उनके वैज्ञानिक आविष्कारों के लिए, बल्कि उनके व्यक्तिगत गुणों के लिए भी। उनका साहस, विनम्रता, लगन और ज़िन्दादिली, और इन सबसे ऊपर अंतर्राष्ट्रीय शांति और सहयोग को उनकी महान देन हम सभी के लिए चिरकाल तक प्रेरणा का स्रोत रहेंगे। आप उनके जीवनकाल और उनकी उपलब्धियों का विवरण पढ़ना चाहेंगे। यहां हमने उनके जीवन वृत्तांत को संक्षेप में उनके जीवन में घटित महत्वपूर्ण घटनाओं के माध्यम से देने की कोशिश की है।

1879 मार्च 14, उल्म, जर्मनी में एल्बर्ट आइंस्टीन का जन्म।

1884 आइंस्टीन को एक जेबी कम्पास दिया जाता है। यह अपने जीवन में उनका वैज्ञानिक आविष्कारों से पहला साक्षात्कार है।

1891 बारह वर्ष की आयु में आइंस्टीन को ज्यामिति की किताब दी जाती है। यह "प्रकृति के रहस्यों" पर उत्सुकता और उत्साह का उनका दूसरा अनुभव है।

1895 आइंस्टीन स्विट्ज़रलैंड के ज़्यूरिक स्थित तकनीकी संस्थान (Institute of Technology) की प्रवेश परीक्षा देते हैं और उसमें अनुत्तीर्ण रहते हैं। वे पढ़ने के लिए स्विट्ज़रलैंड में आरौ नामक शहर में जाते हैं।

1896 17 साल की आयु में आइंस्टीन अपनी जर्मनी की नागरिकता छोड़ देते हैं। वे ज़्यूरिक स्थित स्विट्ज़रलैंड के तकनीकी संस्थान की परीक्षा पास कर लेते हैं और अपना अध्ययन शुरू करते हैं।

1900 आइंस्टीन तकनीकी संस्थान से पास होकर नौकरी ढूँढना आरंभ करते हैं। उनका पहला वैज्ञानिक शोध पत्र छपता है।

1905 आइंस्टीन अपनी पी.एच.डी. उपाधि पूरी करते हैं और बहुत से वैज्ञानिक शोध पत्र छापते हैं। उसमें से दो विशिष्ट आपेक्षिकता पर हैं। उन्हीं में से एक में यह प्रसिद्ध समीकरण $E = mc^2$ है।

1906 वे क्वांटम यांत्रिकी पर सबसे पहला शोध पत्र लिखते हैं। अगले लगभग 20 सालों तक वे लगातार नये और मौलिक वैज्ञानिक विचार प्रस्तुत करते हैं जो अनेकानेक वैज्ञानिक पत्रिकाओं में छपते हैं।

1909 आइंस्टीन पेटेन्ट ऑफिस से त्याग पत्र देते हैं और उन्हें ज़्यूरिक विश्वविद्यालय में असिस्टेन्ट प्रोफेसर की नियुक्ति मिलती है।

1911 आइंस्टीन प्राग विश्वविद्यालय, चेकोस्लोविकया में प्रोफेसर नियुक्त होते हैं। वे भविष्यवाणी करते हैं कि सूर्य ग्रहण के दौरान यह देखा जायेगा कि प्रकाश का पथ मुड़ा हुआ है।

1912 33 वर्ष की आयु में आइंस्टीन ज़्यूरिक के तकनीकी संस्थान में वापस लौटते हैं जहाँ उन्हें प्रोफेसर की नियुक्ति दी जाती है। मार्सेल ग्रॉसमैन के साथ मिलकर वे सामान्य आपेक्षिकता सिद्धांत (Theory of General Relativity) पर काम करते हैं।

1915 आइंस्टीन "यूरोप के नाम एक घोषणा पत्र" पर हस्ताक्षर करते हैं और यूरोप की लीग बनने का आह्वान करते हैं ताकि शांति कायम हो सके।

1919 खगोलीय प्रेक्षणों द्वारा आइंस्टीन की भविष्यवाणी सही साबित होती है कि कैसे प्रकाश आकाश में मुड़ा हुआ दिखाई देगा और यक-बे-यक वे विश्व प्रसिद्ध हो जाते हैं।

1922 आइंस्टीन अंतर्राष्ट्रीय सहयोग पर लीग ऑफ नेशन्स समिति के सदस्य बनाये जाते हैं। उन्हें 1921 का भौतिकी का नोबेल पुरस्कार भी दिया जाता है।

1925 आइंस्टीन अब अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर व्याख्यान देते हैं और शोध पत्र छापते हैं। महात्मा गांधी और अन्य लोगों के साथ मिलकर वे एक घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर करते हैं जिसमें सेनाओं में सैनिकों को भर्ती करने पर पाबन्दी की मांग की जाती है।

1929 आइंस्टीन को भौतिकी के सर्वोच्च पुरस्कारों में से एक, प्लांक मेडल दिया जाता है।

1930 वे विश्व भर में निरस्त्रीकरण की मांग करने वाले एक घोषणा पत्र पर हस्ताक्षर करते हैं।

1932 आइंस्टीन को संयुक्त राज्य अमेरिका में प्रिन्स्टन में इन्स्टीट्यूट फॉर एडवांस्ड स्टडी में प्रोफेसर की नियुक्ति मिलती है। वे सदा के लिए जर्मनी छोड़ देते हैं।

1940 आइंस्टीन संयुक्त राज्य अमेरिका के नागरिक बनते हैं लेकिन साथ ही साथ स्विट्जरलैंड की नागरिकता बनाये रखते हैं।

1946 आइंस्टीन संयुक्त राष्ट्र पर ज़ोर देते हैं कि वह एक विश्व सरकार बनाये ताकि भविष्य में होने वाले युद्धों पर रोक लगाई जा सके।

1952 उन्हें इसराइल का राष्ट्रपति पद देने की पेशकश होती है लेकिन वे इन्कार कर देते हैं।

1955 बहुत बीमार होने के बावजूद, आइंस्टीन परमाण्वीय शस्त्रों पर रोक के लिए प्रचार करते हैं, और वैज्ञानिक शोध पत्र भी लिखते रहते हैं।

18 अप्रैल को 76 वर्ष की आयु में एल्बर्ट आइंस्टीन का देहावसान हो गया।

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-08
आधुनिक भौतिकी

खंड

2

क्वांटम यांत्रिकी : एक परिचय

क्वांटम यांत्रिकी : एक परिचय

खंड 1 में आपने, 1905 में आइंस्टीन द्वारा दिए गए आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत के बारे में पढ़ा। आपने जाना कि यह किस तरह क्लासिकी भौतिकी का व्यापकीकरण करता है ताकि उच्च वेगों पर भी क्लासिकी संकल्पनाएँ लागू की जा सकें। आपने यह भी पढ़ा कि इस प्रक्रिया में दिक्-काल के बारे में हमारी चिरकालीन अवधारणाएँ किस कदर बदल जाती हैं। आपने देखा कि आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत में प्रकाश के वेग c की एक मूलभूत भूमिका है। यह किसी भी कण के वेग की अधिकतम सीमा है। दरअसल न्यूटनी यांत्रिकी, आपेक्षिकीय यांत्रिकी का सन्निकटन (approximation) है। यह उन कणों पर लागू होती है जिनके वेग c के मुकाबले बहुत कम होते हैं। लेकिन यहां आपको इस बात पर ज़रूर गौर करना चाहिए कि आइंस्टीन का आपेक्षिकता सिद्धांत, पदार्थ और विकिरण के बीच के उस स्पष्ट अंतर को **नहीं** बदलता, जो कि क्लासिकी भौतिकी के मूल में है। इस बात की गहराई को आप इकाई 4 पढ़ने के बाद बेहतर समझ सकेंगे। इसीलिए क्वांटम भौतिकी से पहले विकसित हुई भौतिकी, चाहे वह आपेक्षिकीय हो या ग़ैर-आपेक्षिकीय, अब क्लासिकी भौतिकी ही कहलाती है।

19वीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध और 20वीं शताब्दी के पहले 25 वर्षों में तमाम ऐसे प्रयोग और प्रेक्षण किए गए जिनसे परमाण्वीय कणों (इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों, न्यूट्रॉनों, फोटॉनों आदि) के व्यवहार के बारे में बहुत-सी जानकारी मिली। इन प्रयोगों के परिणामों की व्याख्या करने के लिए कुछ नई संकल्पनाओं की ज़रूरत पड़ी, जो क्लासिकी भौतिकी की संकल्पनाओं से एकदम अलग हट कर थीं। शुरू में तो जैसे-जैसे ज़रूरत पड़ी, वैसे-वैसे प्रायोगिक परिणामों को समझने के लिए इन नई संकल्पनाओं को पेश किया गया। लेकिन 1925 और 1927 के बीच श्रोडिन्गर, हाइज़ेनबर्ग और बॉर्न ने मिलकर सूक्ष्मदर्शी स्तर पर पदार्थ के व्यवहार का एक तर्कसंगत विवरण प्रस्तुत किया जिसके कारण एक नए सिद्धांत का जन्म हुआ। इसे आज हम **क्वांटम यांत्रिकी** (quantum mechanics) के नाम से जानते हैं।

क्वांटम यांत्रिकी क्या है? इस सदी के एक विलक्षण भौतिकीविद् रिचर्ड फाइनमैन के शब्दों में, "क्वांटम यांत्रिकी पदार्थ के व्यवहार का, और विशेषकर परमाण्वीय स्तर पर घट रही घटनाओं का, विस्तृत विवरण है।" वास्तव में, क्वांटम यांत्रिकी सूक्ष्मदर्शी कणों से संबद्ध प्रेक्षणों की व्याख्या करने का एक बिल्कुल ही नया तरीका है। यह सूक्ष्म कणों के व्यवहार का पूर्वानुमान, एक बिल्कुल ही नई संकल्पना के आधार पर करता है। यह नई संकल्पना है एक अनिवार्य असांतत्य (essential discontinuity) की जिसे **क्वांटम** (quantum) कहा जाता है। इस तरह, क्लासिकी भौतिकी से मिले दृष्टिकोण की तुलना में क्वांटम यांत्रिकी हमें भौतिक संसार के बारे में एक मूलतः नया दृष्टिकोण देती है।

क्वांटम यांत्रिकी का विकास दो महत्वपूर्ण लेकिन एक-दूसरे से बिल्कुल अलग लीकों पर हुआ। पहली लीक इस समझ पर आधारित थी कि परमाण्वीय कणों के बीच ऊर्जा का विनिमय (exchange) संतत नहीं होता, बल्कि **विविक्त** (discrete) होता है। यह विनिमय, ऊर्जा के एक खास मान या उसके गुणजों के लिए ही संभव है, जिसे क्वांटम कहा जाता है। इस लीक पर पहला कदम मैक्स प्लांक ने रखा, जब उन्होंने कृष्णिका विकिरण स्पेक्ट्रम की व्याख्या करते हुए क्वांटम की संकल्पना का इस्तेमाल किया। और फिर नील्स बोर ने हाइड्रोजन परमाणु का सिद्धांत देकर इसे आगे बढ़ाया। अन्ततः इसकी परिणति हुई वर्नर हाइज़ेनबर्ग के काम में जब उन्होंने क्वांटम यांत्रिकी का **मैट्रिक्स यांत्रिकी** (matrix mechanics) वृत्तान्त प्रस्तुत किया।

क्वांटम यांत्रिकी के विकास की दूसरी लीक की शुरुआत आइंस्टीन द्वारा प्रकाश-विद्युत् प्रभाव (photoelectric effect) की व्याख्या से हुई, जिसमें प्रकाश के लिए कण-तरंग द्वैतवाद (wave-particle duality) की खोज भी शामिल है। लुई दे ब्रॉग्ली (Louis de Broglie) ने कण-तरंग द्वैतवाद का व्यापकीकरण करके उसे पदार्थ पर भी लागू किया। इर्विन श्रोडिन्गर ने द्रव्य तरंगों की तरंग समीकरण की खोज की और मैक्स बॉर्न ने इन दे ब्रॉग्ली-श्रोडिन्गर तरंगों की प्रायिकतात्मक तरंगों के रूप में व्याख्या

की। यह क्वांटम यांत्रिकी का **तरंग यांत्रिकी** (wave mechanics) वृत्तान्त था। अन्ततः पॉल डिराक ने साबित किया कि ये दोनों ही वृत्तान्त (मैट्रिक्स यांत्रिकी और तरंग यांत्रिकी) पूरी तरह एक-दूसरे के तुल्य हैं।

क्वांटम यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाएं (कण-तरंग द्वैतवाद, अनिश्चितता सिद्धांत, भौतिक राशियों का क्वान्टमीकरण आदि) सीधे तौर पर एक सार्वत्रिक अचर के अस्तित्व से जुड़ी हैं, जिसे **प्लांक नियतांक** h कहते हैं। आपेक्षिकता में प्रकाश के वेग c की ही तरह क्वांटम यांत्रिकी में प्लांक नियतांक की भी एक केन्द्रीय भूमिका है। चूंकि प्लांक नियतांक का मान बहुत कम होता है, इसलिए क्वांटम यांत्रिकी की संकल्पनाएं अनिवार्यतः परमाण्वीय और नाभिकीय परिघटनाओं पर लागू होती हैं। वस्तुतः अगर श्रीमान टॉमकिन्स की तरह आप अपने सपनों में एक ऐसे संसार की यात्रा पर जाएं, जहां प्लांक नियतांक का मान बहुत ज़्यादा हो तो आपको एक से एक अद्भुत अनुभव होंगे। उदाहरण के लिए, अगर आप उस संसार में स्थित एक क्वांटम जंगल में किसी शेर के शिकार पर जाएं, तो आप पाएंगे कि वह शेर अंतरिक्ष में फैला हुआ है और शायद आपको खाली हाथ लौटना पड़े। ऐसे अन्य अनुभवों के लिए हमारा सुझाव है कि आप जॉर्ज गैमोव की पुस्तक "मिस्टर टॉमकिन्स इन पेपरबैक" पढ़ें।

इस खंड में हम आपका परिचय क्वांटम यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाओं से कराएंगे। इकाई 4 में इस चर्चा की शुरुआत में हम दो प्रयोगों (कृष्णिका विकिरण और प्रकाश-विद्युत् प्रभाव) के प्रमुख परिणामों के बारे में बताएंगे। इसी के साथ-साथ हम प्लांक परिकल्पना, प्रकाश-विद्युत् प्रभाव की आइंस्टीन द्वारा की गई व्याख्या और बोर के हाइड्रोजन परमाणु के सिद्धांत की भी चर्चा करेंगे, जिनके कारण क्वांटम भौतिकी का उदय हुआ। फिर हम क्वांटम यांत्रिकी के विकास के लिए दे ब्रॉग्ली-श्रोडिन्गर द्वारा प्रशस्त पथ पर चलेंगे क्योंकि इसमें इस्तेमाल की जाने वाली गणितीय संकल्पनाओं को आप अच्छी तरह से जानते हैं। हम इकाई 4 में ही **कण-तरंग द्वैतवाद** की संकल्पना प्रस्तुत करेंगे। इकाई 5 में हम **द्रव्य तरंगों** और **अनिश्चितता सिद्धांत** के बारे में बताएंगे। द्रव्य तरंगों की तरंग समीकरण को, जिसे **श्रोडिन्गर समीकरण** कहते हैं, हमने इकाई 6 में प्रस्तुत किया है। अन्ततः इकाई 7 में हम क्वांटम यांत्रिकी के मैट्रिक्स यांत्रिकी वृत्तान्त की मूलभूत संकल्पनाओं को प्रस्तुत करेंगे। लेकिन इसके लिए हम विस्तार से मैट्रिक्स बीजगणित में नहीं जाएंगे। वहां हम केवल तरंग-यांत्रिकी और मैट्रिक्स यांत्रिकी के एकीकृत वृत्तान्त के बारे में संक्षेप में बताएंगे जिसे डिराक ने प्रस्तुत किया। समय के लिहाज़ से ये सभी इकाइयाँ लगभग बराबर ही हैं और आपको इनमें से हरेक को पढ़ने में पाँच से छः घंटे लग सकते हैं।

क्वांटम यांत्रिकी को सीखने के दो पहलू हैं। इनमें से पहला और शायद सबसे महत्वपूर्ण पहलू है - जैसाकि रिचर्ड फाइनमैन कहते थे - गणना करना सीखना। लेकिन गणना करने का क्वांटम यांत्रिकीय तरीका क्लासिकी तरीकों से एकदम अलग है; आप पाएंगे कि इन गणनाओं में आपको सोचने के बिल्कुल ही नए तरीके अपनाने पड़ते हैं। इसके लिए आपको क्वांटम यांत्रिकीय तरीके से सोचना भी सीखना पड़ेगा। ऐसा कर सकने के लिए आपको निश्चय ही क्वांटम यांत्रिकी का अर्थ समझने का प्रयास करना पड़ेगा। लेकिन यह प्रयास आपके लिए बहुत ही उपयोगी रहेगा और कभी-कभी अगर आप क्वांटम यांत्रिकी का अर्थ समझने की प्रक्रिया में हैरान होते हैं या आपके चिरकालीन विचारों को धक्का पहुंचता है, तो इस बात से आप परेशान न हों। आप नील्स बोर के इस कथन से कुछ सांत्वना हासिल कर सकते हैं - "पहले पहल जो लोग क्वांटम यांत्रिकी से रूबरू होते हैं, अगर उन्हें धक्का नहीं लगता तो बहुत मुमकिन है कि वे उसे समझे ही न हों।"

हम उम्मीद करते हैं कि आपको इस खंड को पढ़ने में आनन्द आएगा और हम आपकी सफलता की कामना करते हैं।

इकाई 4 कण-तरंग द्वैतवाद

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

अभी तक आप भौतिकी में "प्रारंभिक यांत्रिकी" से लेकर "वैद्युत और चुम्बकीय परिघटनाएं" तक बहुत से पाठ्यक्रम ले चुके हैं जो कि सब के सब क्लासिकी भौतिकी के अंतर्गत आते हैं। लेकिन अगर आप भौतिकी को गहराई से समझना चाहते हैं, तो सिर्फ़ इतना ही पढ़ना काफ़ी नहीं है। आप पूछ सकते हैं, क्यों? इसका जवाब है कि सिर्फ़ क्लासिकी भौतिकी की मदद से बहुत सारी प्राकृतिक या प्रेक्षित परिघटनाओं की व्याख्या नहीं की जा सकती। इसीलिए हमें एक नई भौतिकी की ज़रूरत महसूस होती है।

इस इकाई में हम सबसे पहले भाग 4.2 में संक्षेप में कुछ ऐसी परिघटनाओं और प्रायोगिक परिणामों के बारे में बताएंगे, जिनकी क्लासिकी व्याख्या नहीं की जा सकी। फिर हम आपको प्लांक द्वारा दिए गए **क्वांटम अभिगृहीत** (quantum postulate) से परिचित कराएंगे। प्लांक ने यह अभिगृहीत, कृष्णिका विकिरण (black-body radiation) के परिणामों को समझाने के लिए दिया था। आइंस्टीन और बोर ने इस अभिगृहीत का विस्तार करके क्रमशः **प्रकाश-विद्युत् प्रभाव** (photoelectric effect) और **परमाणुओं के रेखा स्पेक्ट्रम** (line spectrum) की व्याख्या की। यहाँ पर दी गई इन घटनाओं का क्रम हमने कुछ इस तरह चुना है जिससे आप यह समझ पाएं कि क्वांटम भौतिकी का उदय कैसे हुआ।

इसके बाद भाग 4.3 में हम एक ऐसी संकल्पना की चर्चा करेंगे, जो क्वांटम यांत्रिकी की आधारभूत संकल्पनाओं में से एक है। यह है - **कण-तरंग द्वैतवाद** (wave-particle duality)। अगली इकाई में हम इससे प्रेरित दो और महत्वपूर्ण संकल्पनाओं - **द्रव्य तरंगों** और **हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत** पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

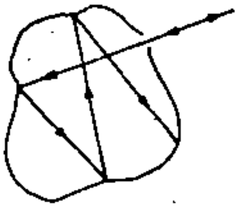
- क्वांटम भौतिकी के उदय के विषय में चर्चा कर सकेंगे,
- गतिमान कण के लिए दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य की गणना कर सकेंगे, और
- कण-तरंग द्वैतवाद की संकल्पना को समझा सकेंगे।

4.2 क्वांटम भौतिकी का उदय

यह तो आप जानते हैं कि एक कृष्णिका (black body) अपने ऊपर पड़ने वाले सभी विकिरणों का

अवशोषण कर लेती है (क्योंकि यह प्रकाश का परावर्तन नहीं करती और काली दिखती है, इसलिए इसे कृष्णिका नाम दिया गया है)।

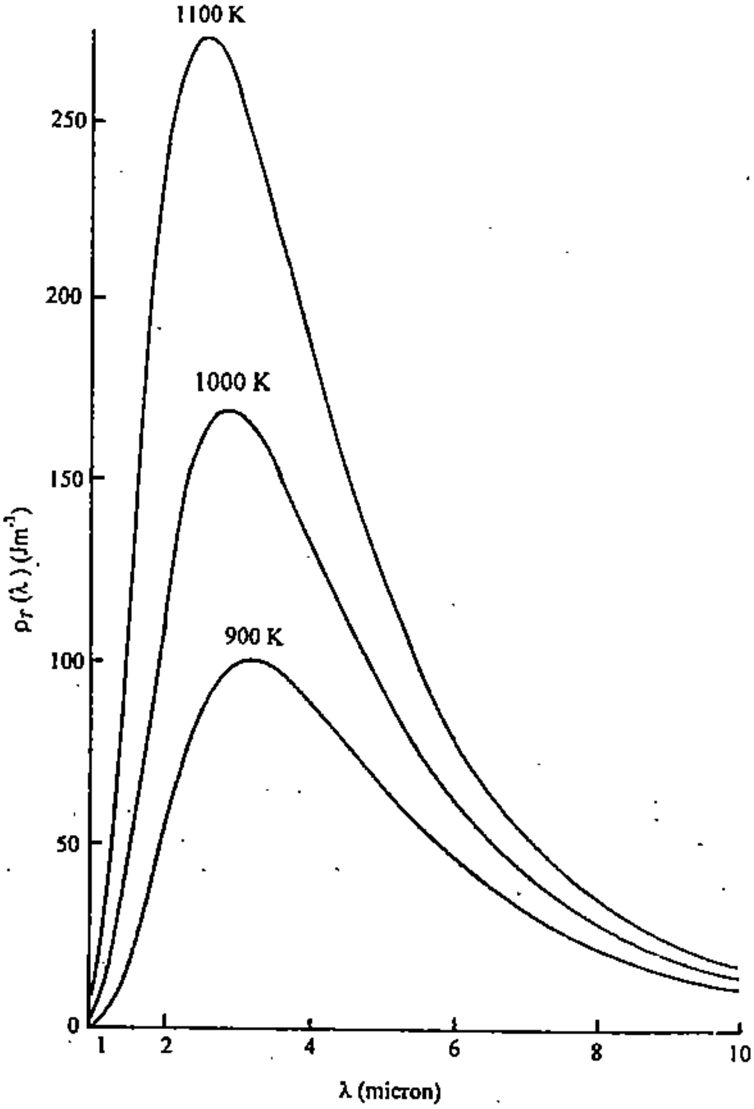
अक्सर प्रयोगों में, एक खोखली वस्तु जिसके अंदर की दीवारों को काला कर दिया जाता है और जिसमें एक छोटा-सा छेद होता है (जैसाकि चित्र 4.1 में दिखाया गया है), कृष्णिका की तरह काम करती है। इस वस्तु में समाहित विकिरण और छेद से **उत्सर्जित** विकिरण एक **कृष्णिका स्पेक्ट्रम** को जन्म देते हैं। उन्नीसवीं सदी के अंतिम दौर में भिन्न तापमानों पर एक कृष्णिका में समाहित प्रति इकाई आयतन ऊर्जा, $\rho_T(\lambda)$ का मापन करने के लिए कुछ प्रयोग किए गए। चित्र 4.2 में भिन्न तापमानों पर $\rho_T(\lambda)$ का λ के फलन के रूप में विचरण दिखाने वाले कुछ प्रतिनिधि वक्रों का चित्र (कृष्णिका स्पेक्ट्रम) दिया गया है। ऊष्मागतिकी समेत क्लासिकी भौतिकी के जाने-माने नियमों की मदद से बहुत से भौतिकीविदों ने इन वक्रों की व्याख्या करने की कोशिश की, लेकिन वे पूरी तरह सफल न हो सके। जैसाकि आपने ऊष्मागतिकी और सांख्यिकीय यांत्रिकी नामक पाठ्यक्रम (पी.एच.ई.-06) के खंड 4 में पढ़ा है, सबसे पहले प्लांक ने कृष्णिका विकिरण वक्र की सैद्धांतिक व्याख्या की। आप जानते हैं कि सन् 1900 तक, कृष्णिका विकिरण के ऊर्जा स्पेक्ट्रम में ज़्यादातर मापन तरंग दैर्घ्यों के छोटे मानों के लिए किए गए थे और तब वीन (Wein) द्वारा दिए गए फ़ार्मूले से इनकी संतोषजनक व्याख्या की जा सकी थी :



चित्र 4.1 : एक कृष्णिका।

$$\rho_T(\lambda)\, d\lambda = a\lambda^{-5} \exp\left(\frac{-b}{\lambda kT}\right) d\lambda \tag{4.1}$$

जहाँ a और b समायोज्य (adjustable) प्राचल हैं।



चित्र 4.2 : कृष्णिका विकिरण।

प्लांक ने आनुभविक तौर पर पाया कि अगर $\exp\left(-\frac{b}{\lambda kT}\right)$ को $\left(\exp\left(\frac{b}{\lambda kT}-1\right)\right)^{-1}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो a और b के ऐसे मान मिल सकते थे, जिनसे λ के सभी मानों के लिए सैद्धांतिक समीकरण (4.1) और प्रायोगिक परिणामों का बहुत अच्छा मेल बैठ सकता था। लेकिन उन्हें इस प्रतिस्थापन की सैद्धांतिक व्याख्या करना बहुत मुश्किल लगा। अंततः जब उन्हें और कोई रास्ता नहीं सूझा तब 18 दिसम्बर, 1900 को प्लांक ने विवश होकर कहा कि सही कृष्णिका विकिरण फार्मूले की व्युत्पत्ति एक ही तरीके से की जा सकती थी कि यह अभिगृहीत दिया जाए कि **पदार्थ (यानी दीवार) और विकिरण (यानी गुहा, cavity) के बीच ऊर्जा का विनिमय (exchange) संतत रूप से नहीं होता बल्कि इनके बीच ऊर्जा के कुछ परिमित आकार के बंडलों का ही विनिमय होता है।**

इस अभिगृहीत की अहमियत समझने के लिए आइए, हम एक आसान उदाहरण लें। मान लीजिए कि दो लोगों के बीच में दो लीटर दूध को बांटना है। आप इस दूध को कितने तरीकों से बांट सकते है? आप जानते हैं कि दूध एक तरल पदार्थ है, जिसे कितने भी (अनंत) हिस्सों में बांटा जा सकता है। इसलिए आप इन दो लोगों के बीच इसे अनन्त तरीकों से बांट सकते हैं। अब माना कि आपको यह कहा जाए कि आप दूध सिर्फ एक लीटर की इकाई में बांट सकते हैं। तब दूध बांटने के तरीके घटकर सिर्फ तीन रह जाते हैं (क्योंकि दोनों ही लोगों को या तो 0 या 1 या 2 लीटर दूध दिया जा सकता है)। आपने देखा कि यह प्रतिबंध लगाने से स्थिति में कितना परिवर्तन हो गया। अब अगर इस इकाई को आधा लीटर कर दिया जाए तो बांटने के ये तरीके बढ़कर पाँच हो जाएंगे।

क्लासिकी भौतिकी में ऊर्जा के बारे में भी यही संकल्पना है कि इसे अनन्त तरीकों से अनन्त हिस्सों में बांटा जा सकता है। इसलिए दीवारों और गुहा के बीच ऊर्जा का विनिमय अनन्त तरीकों से हो सकता है। लेकिन अपने अभिगृहीत के ज़रिए प्लांक ने इन तरीकों की संख्या सीमित कर दी। उनके मॉडल में यह विनिमय U_0 की इकाई में ही संभव है। इस तरह उन्होंने ऊर्जा के विभाजन में (जिसे कि तब तक अनन्ततः विभाजनीय समझा जाता था) एक **विविक्तता** (discreteness) की परिकल्पना दी; यानी अगर ऊर्जा $U(\lambda)$ का विनिमय होना है, तो $U(\lambda)/U_0$ पूर्णांक होना चाहिए। अगर ऐसा न हो, तो प्लांक का सुझाव था कि यह $U(\lambda)/U_0$ के सबसे नज़दीक का पूर्णांक होना चाहिए।

प्लांक ने आगे यह भी अभिगृहीत दिया कि ऊर्जा की इकाई या **क्वांटम** U_0 उसकी आवृत्ति के समानुपाती है यानी

$$U_0 = h\nu \qquad (4.2)$$

समानुपातिकता स्थिरांक h को प्लांक के सम्मान में **प्लांक नियतांक** कहा जाता है। इसका मान है 6.62618×10^{-34} Js. प्लांक को कृष्णिका विकिरण की व्याख्या के लिए 1918 में भौतिकी का नोबेल पुरस्कार मिला। (यहाँ आप ध्यान दें कि ν का मान जितना ज़्यादा होगा उतना ही ऊर्जा के क्वांटम U_0 का मान ज़्यादा होगा और परिणामतः उन तरीकों की संख्या कम होती जाएगी जिनसे ऊर्जा U का विनिमय हो सकता है।) प्लांक की इस नई संकल्पना से एक नई भौतिकी का जन्म हुआ जिसे हम क्वांटम भौतिकी के नाम से जानते हैं। इसलिए यह मानना सही होगा कि 18 दिसंबर, 1900 क्वांटम भौतिकी का जन्म दिवस है। अन्ततः यही क्वांटम भौतिकी, क्वांटम यांत्रिकी के रूप में विकसित हुई।

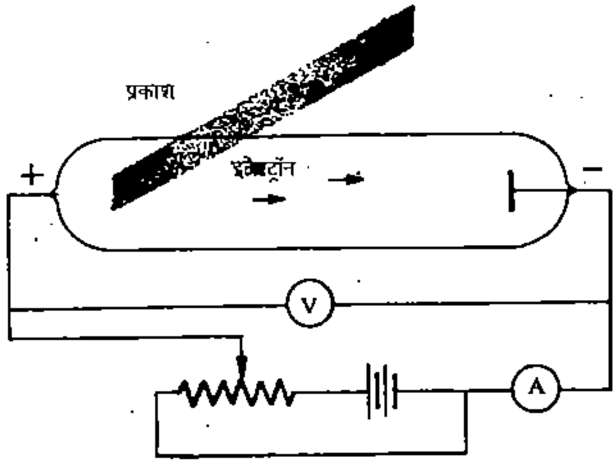
आइंस्टीन ने प्लांक की इस क्वांटम परिकल्पना का विस्तार करके प्रकाश-विद्युत् प्रभाव (photo-electric effect) की एक बेहतरीन समझ पेश की।

प्रकाश-विद्युत् प्रभाव :

सन् 1887 में हर्ट्ज (Hertz) ने विद्युत्चुम्बकीय तरंगों के साथ काम करते हुए यह खोज की कि जब स्फुलिंग अंतराल (spark gap) में स्थित हवा पर परा-बैंगनी किरणें डाली जाती थीं, तो हवा बेहतर सुचालक बन जाती थी। इस घटना की आगे जांच-पड़ताल करते हुए उन्होंने पाया कि जब ज़िंक पर परा-बैंगनी किरणें डाली जाती थीं, तो वह धनात्मक आवेश-युक्त हो जाता था, यानी उसमें से ऋणात्मक

आवेश निकल जाते थे। सन् 1900 में लियोनार्ड (Leonard) ने दिखाया कि ज़िंक से उत्सर्जित ये कण इलेक्ट्रॉन ही थे। ऐसे बहुत से प्रयोगों में यह पता चला कि जब किसी धातु की सतह पर पर्याप्त उच्च आवृत्ति वाला प्रकाश आपतित होता है, तब उससे इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित होते हैं। इस परिघटना को **प्रकाश-विद्युत् प्रभाव** (photo-electric effect) कहते हैं।

चित्र 4.3 में इनमें से कुछ प्रयोगों में इस्तेमाल किए गए उपकरण का आरेख दिया गया है। इसमें एक नली होती है, जिसमें निर्वात स्थापित करके दो इलेक्ट्रोड रखे जाते हैं। ये इलेक्ट्रोड एक बाह्य परिपथ से जुड़े होते हैं, जैसाकि चित्र में दिखाया गया है। एनोड धातु की उस प्लेट से बना होता है, जिसकी सतह पर प्रकाश डाला जाता है। सतह पर प्रकाश डालने पर उत्सर्जित हुए प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों (photo-electrons) में से कुछ में इतनी ऊर्जा होती है कि वे कैथोड के ऋणात्मक होने के बावजूद उस तक पहुँच जाते हैं। और इस तरह परिपथ में धारा बहती है, जिसे एमीटर द्वारा मापा जाता है।

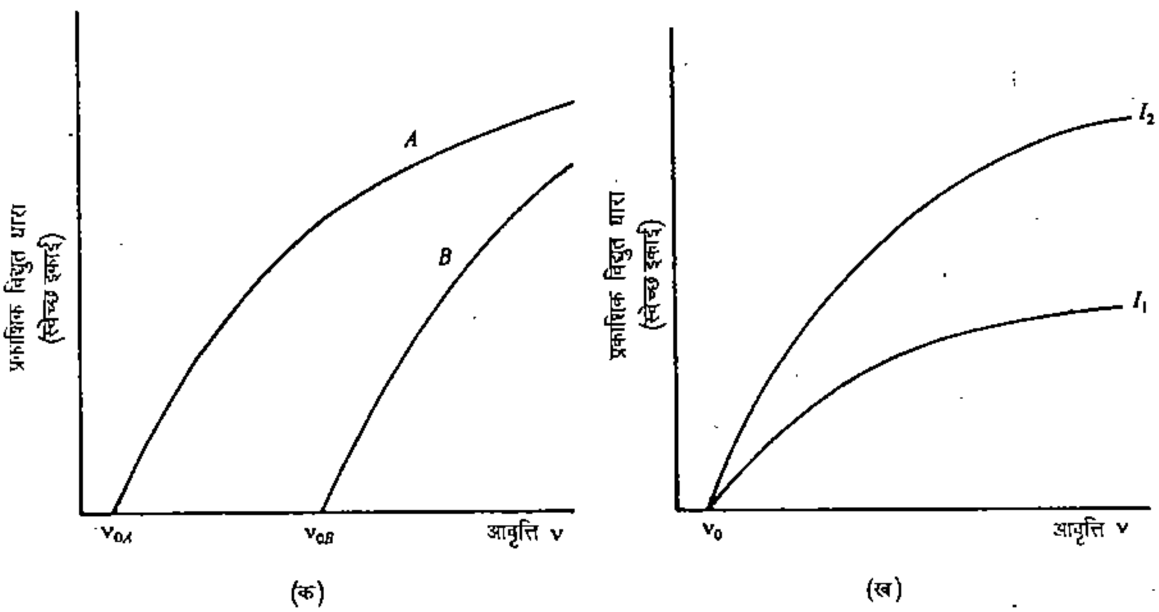


चित्र 4.3 : प्रकाश-विद्युत् प्रभाव के लिए उपकरण का आरेख।

जैसे-जैसे कलेक्टर वोल्टता V (जो इलेक्ट्रॉनों का त्वरण कम करती है) बढ़ाई जाती है, वैसे-वैसे कम से कम इलेक्ट्रॉन कैथोड तक पहुंच पाते हैं और धारा कम होती जाती है। अंततः जब V का मान V_0 के (जो कि कुछ वोल्ट होता है) बराबर होता है, तो कोई भी इलेक्ट्रॉन कैथोड तक नहीं पहुंच पाता और तब परिपथ में धारा शून्य हो जाती है। चित्र 4.4 क और ख में इस प्रभाव के संगत वे प्रायोगिक वक्र दिखाए गए हैं, जिनमें प्रकाश की तीव्रता और कलेक्टर वोल्टता V के मान नियत रखे गए हैं।

आप प्रकाश की द्वैत प्रकृति के बारे में जानते ही हैं जिसकी चर्चा पी.एच.ई.-09 (प्रकाशिकी) पाठ्यक्रम की इकाई 1 में की गई है।

यहाँ ध्यान दें कि प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन तभी होता है, जब आपतित विकिरण की आवृत्ति किसी देहली आवृत्ति (threshold frequency) ν_0 से अधिक हो। $\nu < \nu_0$ के लिए यह पाया गया कि इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन नहीं होता, भले ही विकिरण की तीव्रता कितनी भी क्यों न बढ़ा दी जाए। ν_0 का मान उस सतह के, जिस पर प्रकाश डाला गया है, पदार्थ पर निर्भर करता है। यह भी देखा गया कि एक दी हुई आवृत्ति ν ($>\nu_0$) के लिए, उत्सर्जित प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की गतिज ऊर्जा का मान शून्य और एक निश्चित अधिकतम मान E_{max} के बीच में होता है। किसी दी हुई धातु के लिए, E_{max}, $(\nu-\nu_0)$ के समानुपाती होता है और आपतित प्रकाश की तीव्रता पर निर्भर नहीं करता। साथ ही, जब पदार्थ पर विद्युत्चुम्बकीय तरंगें गिरती हैं, तो प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन उसी क्षण पर ही (यानी 10^{-9}s के भीतर) शुरू हो जाता है, चाहे आपतित प्रकाश की तीव्रता कितनी भी कम या ज़्यादा क्यों न हो। प्रकाश-विद्युत् प्रभाव के ये सारे लक्षण क्लासिकी विद्युत्चुम्बकत्व सिद्धांत की मदद से, प्रकाश की तरंग प्रकृति के आधार पर, नहीं समझाए जा सके।



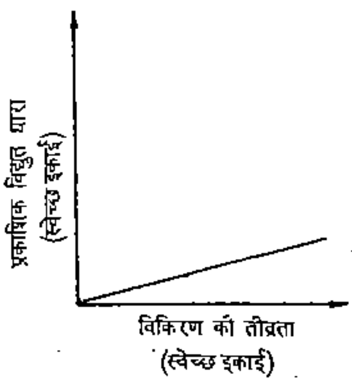
चित्र 4.4 (क) दो पदार्थों A और B के लिए आवृत्ति ν के फलन के रूप में प्रकाशिक विद्युत् धारा का विचरण। यहाँ प्रकाश की तीव्रता और कलेक्टर वोल्टता अचर रखे गए हैं; (ख) एक ही पदार्थ के लिए प्रकाश की दो तीव्रताओं पर आवृत्ति के फलन के रूप में प्रकाशिक विद्युत् धारा का विचरण। तीव्रताओं I_1 और I_2 में यह संबंध है : $I_2 > I_1$।

सन् 1905 में, आइंस्टीन ने प्रकाश-विद्युत् प्रभाव की बहुत ही आसान लेकिन एकदम नई व्याख्या प्रस्तुत की। आइंस्टीन ने ऊर्जा के क्वांटम के बारे में प्लांक की परिकल्पना का विस्तार करके **विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की ऊर्जा के क्वांटम** की परिकल्पना पेश की। उन्होंने प्रकाश-विद्युत् प्रभाव की यह व्याख्या दी कि वह एक फोटॉन (यानी विद्युतचुम्बकीय क्षेत्र की ऊर्जा के एक क्वांटम) और एक बद्ध इलेक्ट्रॉन के बीच संघट्टन की घटना है। इस संघट्टन में प्रोटॉन का पूरी तरह अवशोषण हो जाता है और बद्ध इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा में $h\nu$ की वृद्धि हो जाती है। चूंकि यह इलेक्ट्रॉन धातु के अंदर बद्ध है, इसलिए उनकी प्रारंभिक ऊर्जा E ऋणात्मक है और E का अधिकतम मान $-W$ है, जहां W धातु का कार्य-फलन (work function) है। इसलिए धातु से पलायन करने के लिए इलेक्ट्रॉन के पास कम से कम W के बराबर ऊर्जा होनी चाहिए। इस तरह प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम गतिज ऊर्जा होगी :

$$E_{max} = \frac{1}{2} mv_{max}^2 = h\nu - W \qquad (4.3\text{क})$$

अगर हम $W = h\nu_0$ लें तो समीकरण (4.3क) को इस तरह लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2} mv_{max}^2 = h(\nu - \nu_0) \qquad (4.3\text{ख})$$



चित्र 4.5 : अचर कलेक्टर वोल्टता पर आवृत्ति $\nu(>\nu_0)$ के विकिरण की तीव्रता पर प्रकाशिक विद्युतधारा की निर्भरता।

समीकरण (4.3क और ख) से हमें ये परिणाम मिलते हैं :

1. चूंकि v_{max} को धनात्मक ही रहना है, इसलिए $\nu < \nu_0$ के लिए उत्सर्जन नहीं हो सकता।
2. E_{max}, $(\nu - \nu_0)$ के समानुपाती है।
3. आवृत्ति ν वाले विकिरण की तीव्रता में वृद्धि के कारण फोटॉनों की संख्या में वृद्धि होती है। चूंकि हर फ़ोटॉन की ऊर्जा $h\nu$ के बराबर है, इसलिए प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा में तो कोई वृद्धि नहीं होती। हाँ, उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की संख्या और इसलिए प्रकाशिक-विद्युत् धारा बढ़ जाती है (देखिए चित्र 4.5)।
4. चूंकि यह प्रभाव इलेक्ट्रॉनों और फ़ोटॉनों के बीच यांत्रिक संघट्टनों के कारण होता है, इसलिए फ़ोटॉन से इलेक्ट्रॉन को तात्क्षणिक ऊर्जा स्थानांतरण होता है। अत: धातु पर प्रकाश के गिरने और इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के बीच बहुत कम समयांतराल होता है।

5. क्योंकि कार्य-फलन $W (=h\nu_0)$ उत्सर्जक पदार्थ का एक अभिलक्षणिक गुणधर्म है, इसलिए ν_0 आपतित विकिरण की तीव्रता पर निर्भर नहीं करता।

इस तरह आप देख सकते हैं कि कितने प्रभावशाली ढ़ंग से आइंस्टीन के क्वांटम सिद्धांत द्वारा प्रकाश-विद्युत् प्रभाव के हर पहलू की व्याख्या की जा सकी। और इस तरह यह संकल्पना कि प्रकाश का अवशोषण और उत्सर्जन क्वांटम या पैकेट के रूप में होता है, पूरी तरह स्थापित हो गई।

क्वांटम भौतिकी के विकास में अगला महत्वपूर्ण कदम था बोर द्वारा परमाणु के स्थायित्व और हाइड्रोजन परमाणु द्वारा उत्सर्जित रेखा स्पेक्ट्रम की व्याख्या। आपने 12वीं कक्षा में हाइड्रोजन परमाणु का बोर मॉडल ज़रूर पढ़ा होगा। फिर भी यहाँ हम इसके बारे में संक्षेप में बता रहे हैं।

परमाण्वीय मॉडल के लिए बोर के अभिगृहीत

परमाण्वीय मॉडल के लिए क्लासिकी भौतिकी का संकट कुछ-कुछ कृष्णिका विकिरण की समस्या से मिलता-जुलता था। परमाण्वीय नाभिक की खोज के आधार पर अर्नेस्ट रदरफ़र्ड (Ernest Rutherford) ने परमाणु के नाभिकीय मॉडल का प्रस्ताव रखा था। इस मॉडल के मुताबिक, परमाणु में स्थित इलेक्ट्रॉन उसके नाभिक के चारों ओर चक्कर काटते थे। लेकिन अगर यह सच था तो क्लासिकी भौतिकी के अनुसार, वर्तुल कक्षा में त्वरित गति कर रहे इलेक्ट्रॉनों से ऊर्जा का उत्सर्जन होना चाहिए था। और इस तरह हुई ऊर्जा हानि के कारण इलेक्ट्रॉनों को नाभिक की ओर सर्पिल पथ में चलना चाहिए था और अंततः नाभिक में गिर जाना चाहिए था। यानी एक क्लासिकी परमाणु अस्थायी निकला !

सन् 1913 में नील्स बोर ने एक परमाण्वीय मॉडल दिया, जिसमें उन्होंने रदरफ़र्ड के सिद्धांत में कुछ ऐसी क्वांटम परिकल्पनाएं शामिल कीं, जिनसे परमाणु के स्थायित्व की व्याख्या की जा सकी। इसी मॉडल के ज़रिए हाइड्रोजन परमाणु के स्पेक्ट्रम को भी बहुत अधिक सफलतापूर्वक समझाया जा सका। बोर का परमाण्वीय मॉडल निम्नलिखित चार अभिगृहीतों पर आधारित है जिनमें से तीन अभिगृहीत इससे पहले दिए गए मॉडलों से एकदम अलग थे।

1. किसी परमाणु में, इलेक्ट्रॉन, नाभिक के चारों ओर वृत्ताकार कक्षाओं में घूमते हैं। इनके बीच का अभिकेन्द्र बल (centripetal force), इलेक्ट्रॉन और नाभिक के बीच कूलॉम आकर्षण बल द्वारा दिया जाता है।

2. इलेक्ट्रॉन की अनंततः संभव वृत्ताकार कक्षाओं में से सिर्फ़ वे ही कक्षाएं अनुमत (allowed) हैं, जिनके लिए इलेक्ट्रॉन के कक्षीय कोणीय संवेग $|\mathbf{L}|$ का मान $h/2\pi$ के पूर्णांकीय गुणज के बराबर हो।

   यहाँ आप ध्यान दें कि बोर ने ऊर्जा के बजाए (जैसाकि प्लांक ने किया था) कोणीय संवेग का क्वांटमीकरण किया ताकि वे अपने सिद्धांत में क्रिया के क्वांटम (quantum of action) को ला सकें।

3. किसी अनुमत कक्षा में गतिमान इलेक्ट्रॉन, ऊर्जा का विकिरण नहीं करते। नियत ऊर्जा की ये अवस्थाएं **स्थायी अवस्थाएं** (stationary states) कहलाती हैं।

   लेकिन ध्यान दें कि इन स्थायी अवस्थाओं में स्थित इलेक्ट्रॉन विरामावस्था में नहीं होते।

4. परमाणु से ऊर्जा का उत्सर्जन (या अवशोषण) तभी होता है, जब उसका इलेक्ट्रॉन, ऊर्जा E_i की एक अनुमत कक्षा से ऊर्जा E_f की दूसरी अनुमत कक्षा में संक्रमण करता है। उत्सर्जित या अवशोषित विकिरण की आवृत्ति इस आइंस्टीन आवृत्ति संबंध से दी जाती है।

$$h\nu = E_i - E_f \qquad \text{(उत्सर्जन } E_i > E_f\text{)}$$

$$= E_f - E_i \qquad \text{(अवशोषण } E_i < E_f\text{)}$$

यहाँ आप इस बात को ज़रूर समझें कि ऊपर दिए गए चार अभिगृहीतों में, क्लासिकी और ग़ैर-क्लासिकी भौतिकी का मिला-जुला इस्तेमाल किया गया है। उदाहरण के लिए, पहला अभिगृहीत क्लासिकी भौतिकी

के मुताबिक है, जबकि चौथे में क्वांटम अवधारणाओं का इस्तेमाल किया गया है। कोणीय संवेग के क्वांटमीकरण का और स्थायी अवस्थाओं का अभिगृहीत भी क्लासिकी नहीं है।

पहले अभिगृहीत से nवीं अनुमत कक्षा के लिए यह परिणाम मिलता है :

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \qquad (4.4)$$

जहाँ m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है, Ze नाभिक का आवेश है और इलेक्ट्रॉन, त्रिज्या r_n की nवीं अनुमत कक्षा में चाल v_n से गतिमान है। दूसरे अभिगृहीत से मिलता है :

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n = \frac{nh}{2\pi}\ \hat{\mathbf{L}}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.. \qquad (4.5)$$

और

$$L_n = mv_n r_n \quad (\text{चूंकि वृत्ताकार कक्षा के लिए } \mathbf{v}_n \perp \mathbf{r}_n)$$

जहाँ $\hat{\mathbf{L}}$ कक्षा के तल के लम्बवत् एकक सादिश है। इस तरह हमें मिलता है

$$mv_n r_n = n\hbar, \quad \text{जहाँ} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \ n = 1, 2, \ldots...$$

या

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0}\ \frac{1}{nh} \qquad (4.6)$$

और

$$r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{Ze^2 m\pi} \qquad (4.7)$$

इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा T_n और स्थितिज ऊर्जा U_n का योग है। इसलिए nवीं स्थायी कक्षा के लिए

$$E_n = \frac{1}{2}\ mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} \qquad (4.8\text{क})$$

समीकरणों (4.6) और (4.7) से v_n और r_n के मान रखने पर हम लिख सकते हैं :

$$E_n = -\frac{Z^2e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\ \frac{1}{n^2} \qquad (4.8\text{ख})$$

या

$$E_n = -\frac{R_\infty Z^2}{n^2} \qquad (4.8\text{ग})$$

जहाँ

$$R_\infty = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \qquad (4.8\text{घ})$$

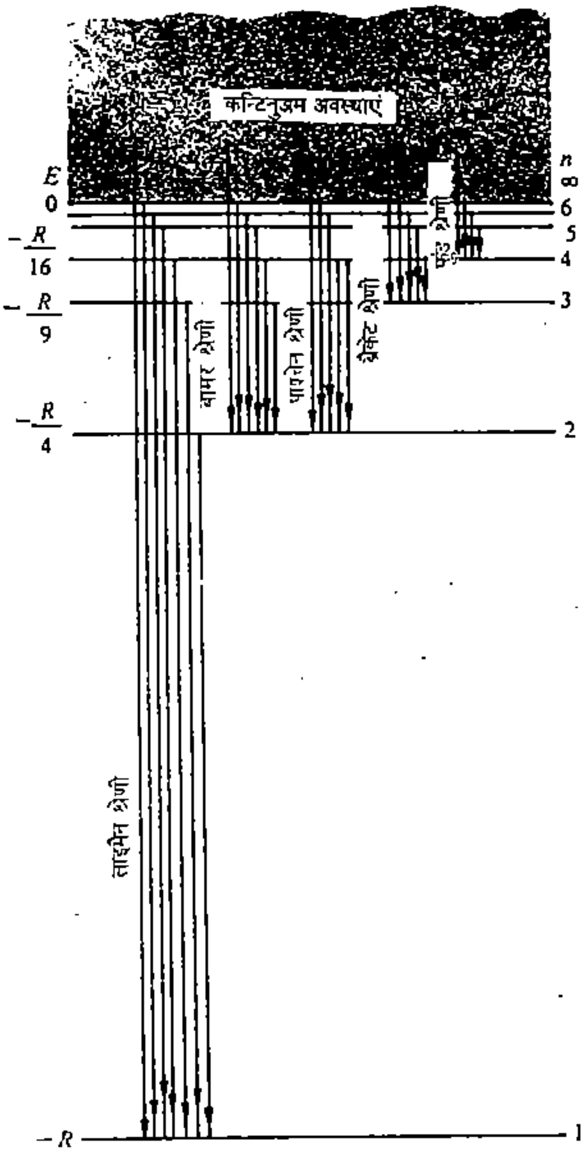
इस तरह $E_n \propto n^{-2}$। R पर अनुलग्न (suffix) ∞ इसलिए लगाया गया है क्योंकि यह माना गया है कि प्रोटॉन का द्रव्यमान अनन्त है। m, e, ε_0 और h के मानक मान समीकरण (4.8घ) में रखने पर हमें मिलता है

$$R_\infty = 2.18 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.6\ \text{eV}$$

बोर के चौथे अभिगृहीत के मुताबिक जब इलेक्ट्रॉन n वीं अवस्था से m वीं अवस्था में संक्रमण करता है, तब उत्सर्जित (या अवशोषित) विकिरण की आवृत्ति ν_{mn} इस संबंध से दी जाती है :

$$\nu_{mn} = \frac{R_\infty Z^2}{h}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.9)$$

हाइड्रोजन परमाणु के लिए इस संबंध से गणना करके मिली आवृत्तियों और उसके प्रेक्षित आवृत्ति स्पेक्ट्रम के बीच काफ़ी अच्छी संगति (agreement) दिखती है (देखिए चित्र 4.6)। बोर के परमाण्वीय सिद्धांत के छपने के फौरन बाद ही, फ्रैंक (Franck) और हर्ट्ज़ ने कुछ प्रयोग किए जिनमें विविक्त ऊर्जा अवस्थाओं के अस्तित्व का प्रमाण मिला।



चित्र 4.6 : बोर मॉडल के मुताबिक हाइड्रोजन परमाणु के ऊर्जा-स्तर। इनमें कुछ संक्रमण भी दिखाए गए हैं जिनसे लाइमैन श्रेणी (Lyman series), बामर श्रेणी (Balmer series), पैश्चेन श्रेणी (Paschen series), ब्रैकेट श्रेणी (Brackett series) और फुंड श्रेणी (Pfund series) बनती हैं। सभी ऋणात्मक अवस्थाएं बद्ध अवस्थाओं की द्योतक हैं जबकि धनात्मक ऊर्जा अवस्थाएं संतत अवस्थाएं हैं।

ये सभी अवधारणाएं कितनी ही नई क्यों न रही हों, आप देख सकते हैं कि इनमें फिर भी एक कोशिश यह थी कि क्लासिकी भौतिकी से संपर्क बना रहे। आप जानते हैं कि उच्च ताप या कम आवृत्तियों पर प्लांक द्वारा दिया गया कृष्णिका विकिरण फार्मूला क्लासिकी रैले जीन (Rayleigh-Jean) फार्मूले में समानीत हो जाता है। इन्हीं सब बातों से प्रेरित होकर बोर ने, 1923 में **संगति नियम** (correspondence principle) दिया।

बोर का संगति नियम

इस सिद्धांत में अंतर्निहित अवधारणा इस प्रकार है : **उन परिस्थितियों पर, जिनमें क्लासिकी भौतिकी वैध है, क्वांटम भौतिकी के नियमों को लागू करने पर हमें वही परिणाम मिलने चाहिए जो क्लासिकी भौतिकी से मिलते हैं।**

संगति नियम के अनुसार :

क) किसी भी भौतिक निकाय के लिए उस सीमा में, जिसमें निकाय की अवस्था निर्दिष्ट करने वाले

क्वांटम अंकों के मान बहुत अधिक हो जाते हैं, क्वांटम यांत्रिकी से वही परिणाम मिलने चाहिए जो कि क्लासिकी भौतिकी से मिलते हैं।

ख) कोई भी वरण नियम (selection rule) सम्बद्ध क्वांटम अंक के सम्पूर्ण परास पर लागू होता है। इसलिए अगर क्लासिकी भौतिकी और क्वांटम भौतिकी में संगति बैठाने के लिए विशाल क्वांटम अंकों के लिए कोई वरण नियम चाहिए होता है तो वह वरण नियम क्वांटम अंकों के छोटे मानों के लिए भी लागू होगा।

अब आइए, अभी तक की गई चर्चा का सार समझें। याद करें कि कृष्णिका स्पेक्ट्रम की व्याख्या करने के लिए प्लांक ने एक ग़ैर-क्लासिकी अभिगृहीत दिया जिसका आइंस्टीन ने विस्तार किया। इस अभिगृहीत के मुताबिक, आवृत्ति ν वाले एक सरल आवर्ती दोलक की ऊर्जा अवस्थाएं विविक्त होती हैं और nवीं विविक्त अवस्था की ऊर्जा $nh\nu$ के बराबर है, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है और h एक सार्वत्रिक नियतांक है, जिसे **प्लांक नियतांक** कहते हैं। आइंस्टीन ने ऊर्जा के इस क्वांटम की कण के रूप में परिकल्पना की। विद्युत्चुम्बकीय तरंग की ऊर्जा के क्वांटम को फ़ोटॉन (photon) के नाम से जाना जाता है। जैसाकि आप जानते हैं कि यह शून्य विराम द्रव्यमान वाला कण है, जो हमेशा प्रकाश की चाल से चलता है और जिसका संवेग $h\nu/c$ होता है। आइंस्टीन ने प्रकाश-विद्युत् प्रभाव की व्याख्या इस तरह की कि यह ऊर्जा $h\nu$ वाले फ़ोटॉन और धातु में कम बन्धन ऊर्जा से बद्ध इलेक्ट्रॉन के संघट्टन की घटना है जिसमें फ़ोटॉन पूरी तरह अवशोषित हो जाता है और अपनी पूरी की पूरी ऊर्जा इलेक्ट्रॉन को दे देता है जो कि धातु से पलायन कर सकता है।

आपने बोर के परमाण्वीय मॉडल के बारे में भी पढ़ा है, जिसके मुताबिक परमाणु में इलेक्ट्रॉन, कुछ अनुमत कक्षाओं में नाभिक के चारों ओर घूमते हैं। इन कक्षाओं में ऊर्जा संरक्षित रहती है और इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग $h/2\pi$ का पूर्णांकीय गुणज होता है। कोई परमाणु विकिरण का उत्सर्जन या अवशोषण तभी करता है जब उसका इलेक्ट्रॉन एक अनुमत क़क्षा से दूसरी कक्षा में संक्रमण करता है। उनके इस सिद्धांत से हाइड्रोजन परमाणु के विविक्त आवृत्ति स्पेक्ट्रम को भलीभांति समझाया जा सका। इस तरह से एक नई भौतिकी का जन्म हुआ जिसे अब **पुराने क्वांटम सिद्धांत** (old quantum theory) के नाम से जाना जाता है।

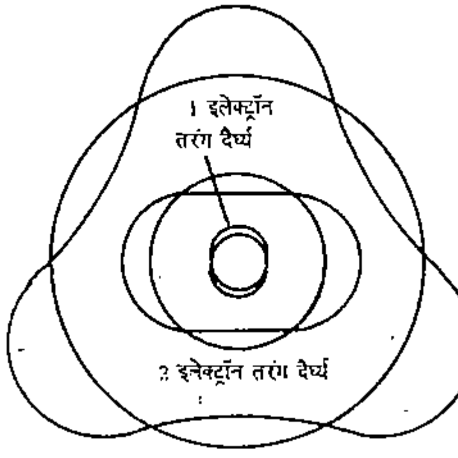
इस सिद्धांत को दे ब्रॉग्ली, हाइज़ेनबर्ग और श्रोडिन्गर ने मिलकर और आगे एक नई यांत्रिकी में विकसित किया और अब यह क्वांटम यांत्रिकी (quantum mechanics) के रूप में जाना जाता है।

आइए, अब हम क्वांटम यांत्रिकी की आधारभूत संकल्पनाओं में से एक, यानी दे ब्रॉग्ली परिकल्पना के बारे में पढ़ें, जिससे **कण-तरंग द्वैतवाद** (wave-particle duality) का जन्म हुआ।

4.3 दे ब्रॉग्ली परिकल्पना

चित्र 4.7 : लुई दे ब्रॉग्ली, 1892–1987, फ्रांसीसी वैज्ञानिक थे। उन्हें द्रव्य के तरंग गुणधर्मों की खोज के लिए 1929 का नोबेल पुरस्कार मिला, जब उनकी परिकल्पना के समर्थन में प्रायोगिक प्रमाण मिले।

लुई दे ब्रॉग्ली (चित्र 4.7) ज़रूर ही संगीत प्रेमी रहे होंगे क्योंकि वे यह समझ पाए कि परमाणुओं में बद्ध इलेक्ट्रॉनों की स्थायी कक्षाओं और गिटार के तारों पर अप्रगामी तरंगों में कुछ समानताएं हैं। उन्होंने सोचा कि परमाण्वीय कक्षाओं की विविक्तता (discreteness) कहीं उनमें कैद इलेक्ट्रॉन तरंगों की विविक्तता के कारण तो नहीं थी? आप जानते हैं कि गिटार के तार पर अप्रगामी तरंगें, हारमोनिक आवृत्तियों का विविक्त पैटर्न बनाती हैं। क्या यह विविक्त बोर कक्षाओं से मिलती जुलती नहीं हैं? दे ब्रॉग्ली ने पूछा : ऐसा तो नहीं कि परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन, बद्ध तरंगें हों और इसलिए वे एक विविक्त अप्रगामी तरंग पैटर्न को जन्म देती हों? उदाहरण के लिए, निम्नतम परमाण्वीय कक्षा वह कक्षा है, जिसमें एक इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य, कक्षा की परिधि में फिट बैठता है और अन्य ऊंची कक्षाओं में दो या ज्यादा इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य फिट बैठते हैं (चित्र 4.8)।



चित्र 4.8 : परमाणु में कैद इलेक्ट्रॉनों की अप्रगामी तरंगे। प्रत्येक उत्तरोत्तर बोर कक्षा में इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य की पूर्णांक संख्याएं फिट होती हैं।

तब तक यह स्थापित हो चुका था कि विद्युत्चुम्बकीय तरंगें, तरंग और कण दोनों ही के गुणधर्म प्रदर्शित करती हैं। लेकिन विद्युत्चुम्बकीय तरंगें और द्रव्य-के कण वे दो महत्वपूर्ण वर्ग हैं, जो पदार्थ की संरचना के लिए मूलभूत आधार प्रदान करते हैं। अगर विद्युत्चुम्बकीय तरंगें कण और तरंग दोनों की तरह व्यवहार कर सकती हैं यानी उनकी द्वैत कण-तरंग प्रकृति हो सकती है तो फिर इलेक्ट्रॉनों की और वास्तव में सभी पदार्थों की द्वैत प्रकृति क्यों नहीं हो सकती?

एक स्नातक विद्यार्थी के रूप में युवा दे ब्रॉग्ली ने 1924 में यह तर्क दिया कि क्योंकि प्रकृति में घट रही सभी भौतिक परिघटनाओं में एक सरलता और सममिति पाई जाती है, इसलिए विद्युत्चुम्बकीय तरंगों की तरह ही सभी पदार्थ के कणों को भी तरंग और कण दोनों ही के गुणों का प्रदर्शन करना चाहिए। उन्होंने आगे यह तर्क भी दिया कि ज्यामितीय प्रकाशिकी में प्रकाश का तरंग विवरण, अधिक व्यापक तरंग विश्लेषण का ही एक सन्निकटन है। इसी तरह कण की गति का यह वर्णन कि वह रैखिक प्रपथों में चलता है, कण के व्यापक वर्णन का एक सन्निकटन है। इस व्यापक वर्णन में उसके तरंग होने का पहलू भी शामिल है। दे ब्रॉग्ली ने आगे यह भी सुझाया कि इन **द्रव्य तरंगों** (matter waves) की तरंग दैर्घ्य और आवृत्ति का निर्धारण, कण के संवेग और ऊर्जा से ठीक उसी तरह किया जाना चाहिए जैसे कि फ़ोटॉनों के लिए किया जाता है। याद कीजिए कि फ़ोटॉन के लिए ऊर्जा-संवेग संबंध यह है :

$$E = pc$$

और समीकरण (4.2) से, $E = h\nu = \hbar\omega$, $(\omega = 2\pi\nu)$। तरंग सिद्धांत से, कोणीय आवृत्ति ω का तरंग संख्या k से संबंध है :

$$\omega = ck$$

जहाँ c तरंग की चाल है।

इन समीकरणों का संयोजन करने पर हमें मिलता है :

$$pc = \hbar\omega$$

$$= \hbar ck$$

या

$$p = \hbar k \tag{4.10}$$

चूंकि $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, इसलिए समीकरण (4.10) को हम इस तरह लिख सकते हैं कि उससे **संवेग p वाले कण से संबद्ध द्रव्य तरंगों की दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य** का यह व्यंजक मिलता है :

$$\boxed{\text{दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य} \quad \lambda = \frac{h}{p}} \tag{4.11}$$

इस तरह गतिमान पदार्थ के कणों से संबद्ध तरंग की तरंग दैर्घ्य, कण के संवेग के विलोमानुपाती होती है और संगत आनुपातिकता अचर प्लांक नियतांक ही होता है। हम समीकरण (4.11) को, संबंध $E = p^2/2m_0$ का इस्तेमाल करके, मुक्त कण के लिए एक और तरह से लिख सकते हैं :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{(2m_0 E)^{1/2}} \tag{4.12}$$

जहाँ m_0 कण का विराम द्रव्यमान है और E उसकी ऊर्जा।

अब तरंग का प्रावस्था वेग (phase velocity) $v_p = \nu\lambda$ होता है। इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$v_p = \frac{E}{h}\,\frac{h}{p} = \frac{E}{p} \tag{4.13क}$$

समीकरण (4.13क) में $E = mc^2$, और $p = mv$ रखने पर हमें मिलता है :

$$v_p = c^2/v \tag{4.13ख}$$

चूंकि $v < c$, इसलिए पदार्थों से संबद्ध तरंगों का प्रावस्था वेग प्रकाश के वेग से ज़्यादा होता है। इस बात से आप परेशान तो नहीं हो गए? चिन्ता न करें, क्योंकि तरंग से संबद्ध कोई भी भौतिक राशि जैसे ऊर्जा, संकेत या सूचना आदि, उसके प्रावस्था वेग से नहीं चलती।

आइए, अब समझें कि समीकरण (4.11) का क्या अर्थ है।

समीकरण (4.11) **कण-तरंग द्वैतवाद** का संपूर्ण कथन है। यह हमें बताती है कि संवेग p वाला एक कण तरंगनुमा गुणधर्म प्रदर्शित कर सकता है और उससे संबद्ध द्रव्य तरंगों की तरंग दैर्घ्य h/p होती है। इसका विलोम भी सत्य है। यानी तरंग दैर्घ्य λ की एक तरंग, कण के गुणधर्म रखती है और तरंग-द्रव्य का संवेग h/λ होता है। लेकिन आप यहाँ विद्युत्चुम्बकीय तरंगों और द्रव्य तरंगों का अंतर अच्छी तरह समझ लें। द्रव्य तरंगों के लिए उनका प्रावस्था वेग प्रकाश के वेग से हमेशा ही अधिक होता है। लेकिन चूंकि कण की ऊर्जा कण के साथ ही संबद्ध है, इसलिए जिस वेग से द्रव्य तरंग द्वारा ऊर्जा का परिवहन होता है, वह कण के वेग के बराबर होता है। दूसरी ओर विद्युत्चुम्बकीय तरंगों का प्रावस्था वेग और वह वेग जिस पर ऊर्जा का परिवहन होता है, दोनों ही प्रकाश के वेग के बराबर होते हैं।

अब तक आपके दिमाग में यह सवाल ज़रूर आ चुका होगा कि अगर द्रव्य में तरंग के गुणधर्म होते हैं, तो हमारे इर्द-गिर्द के पिंड हमें तरंग जैसे क्यों नहीं दिखते?

इसे समझने के लिए नीचे दिया गया आसान-सा बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1 5 मिनट लगाएं

द्रव्यमान 10^{-3} kg की एक गेंद 10^{-2} ms^{-1} के वेग से चलती है। उस गेंद की दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य क्या है?

आपने देखा कि गेंद की तरंग दैर्घ्य का मान इतना कम है कि इसे प्रयोगों द्वारा मापा नहीं जा सकता। तब हम कह सकते हैं कि स्थूल वस्तुओं के साथ द्रव्य तरंगें संबद्ध तो होती हैं, लेकिन उनके तरंग अभिलक्षणों

का प्रेक्षण नहीं किया जा सकता। इसलिए उन्हें सभी स्थितियों में कण की तरह मान कर उनकी गति का वर्णन किया जा सकता है। अब आप नीचे दिया गया अभ्यास करें।

5 मिनट लगाएं **बोध प्रश्न 2**

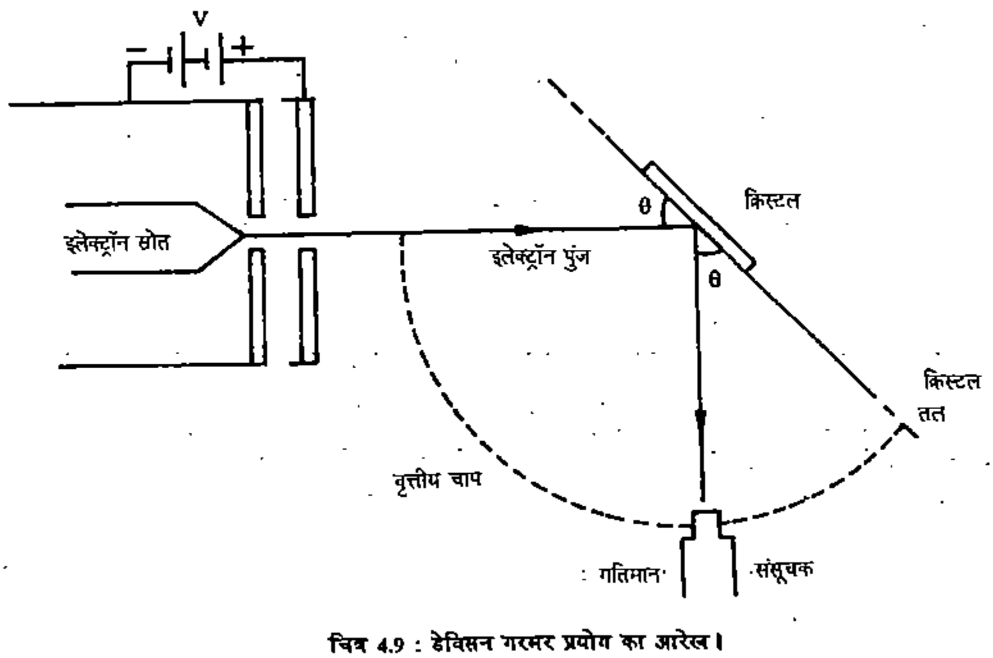
एक 100 eV इलेक्ट्रॉन और एक 1 MeV न्यूट्रॉन के संगत दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य की गणना करें। इसके लिए समीकरण (4.12) का इस्तेमाल करें।

बोध प्रश्न 2 में आपने 100 eV इलेक्ट्रॉन की तरंग दैर्घ्य का मान 1.2×10^{-10} m और एक 1 MeV न्यूट्रॉन की तरंग दैर्घ्य का मान 2.9×10^{-14} m प्राप्त किया। यह साफ़ है कि 100 eV इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंग की तरंग दैर्घ्य X-किरणों के तरंग दैर्घ्य के परास में होती है और उसका मान क्रिस्टल में परमाणुओं के बीच की दूरी के बराबर होता है। इसलिए X-किरणों की तरह ही इलेक्ट्रॉन तरंगों का भी क्रिस्टल द्वारा विवर्तन (diffraction) होना चाहिए। दूसरी ओर 1 MeV ऊर्जा वाले न्यूट्रॉन की तरंग दैर्घ्य का मान बहुत कम है और विवर्तन ग्रेटिंग के कारण उसका विवर्तन नहीं देखा जा सकता। लेकिन कम ऊर्जा वाले न्यूट्रॉनों जैसे - 100 eV वाले न्यूट्रॉनों की तरंग दैर्घ्य X-किरण परास में होगी और तब उनका विवर्तन पैटर्न देखा जा सकता है।

इस तरह हम पाते हैं कि दे ब्रॉग्ली परिकल्पना के कारण स्थूल कणों की गति के लिए न्यूटन द्वारा विकसित क्लासिकी वर्णन में कोई परिवर्तन नहीं होता। लेकिन सूक्ष्मदर्शी वस्तुओं के लिए, द्रव्य तरंगों की तरंग दैर्घ्य के मान इतने होते हैं कि उनका विवर्तन देखा जा सकता है। द्रव्य तरंगों का विवर्तन पहले-पहल 1927 में देखा गया।

4.3.1 द्रव्य तरंगों के अस्तित्व के लिए प्रायोगिक प्रमाण

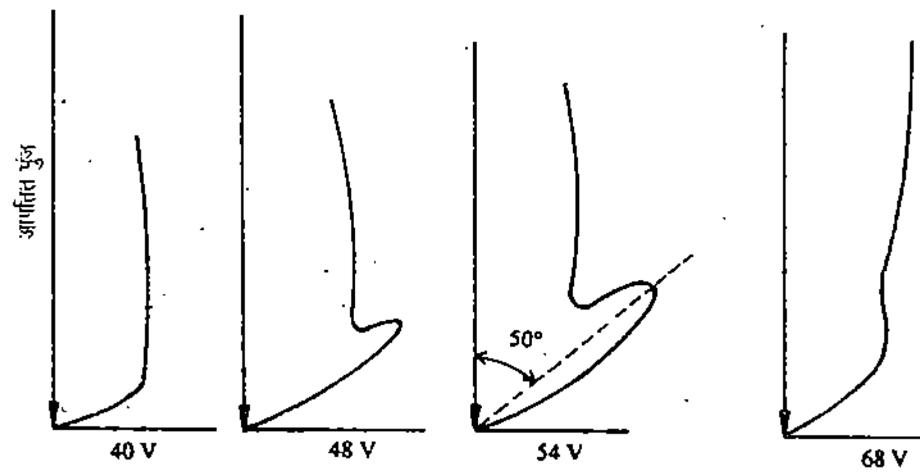
द्रव्य तरंगों का पहला प्रायोगिक प्रमाण दे ब्रॉग्ली परिकल्पना दिए जाने के तीन साल बाद आकस्मिक रूप से मिला। दो अमरीकी भौतिकोविद् - क्लिंटन जे. डेविसन (Clinton J. Davisson) और उनके सहयोगी एल.एच. गरमर (L.H. Germer), क्रिस्टल द्वारा इलेक्ट्रॉनों के प्रकीर्णन पर प्रयोग कर रहे थे। उनके द्वारा इस्तेमाल किया गया उपकरण चित्र 4.9 में दिखाया गया है।



चित्र 4.9 : डेविसन गरमर प्रयोग का आरेख।

एक इलेक्ट्रॉन स्रोत से निकले इलेक्ट्रॉनों का, तंतु के सापेक्ष V वोल्ट पर स्थित एक धनात्मक इलेक्ट्रोड द्वारा, त्वरण किया गया। इलेक्ट्रॉनों का यह त्वरित किरण पुंज निकैल की एक पट्टी पर जिसमें बहुत सारे क्रिस्टल थे, आपतित किया गया और फिर विभिन्न दिशाओं में प्रकीर्णित इलेक्ट्रॉनों की संख्या का मापन किया गया। और तब पाया गया कि प्रकीर्णन कोण के साथ प्रकीर्णित इलेक्ट्रॉनों की तीव्रता का वक्र एक निष्कोण वक्र है।

लेकिन फिर ऐसा हुआ कि प्रयोग करते-करते बीच में एक दुर्घटना के कारण उस निर्वात नली में, जिसमें निकैल की पट्टी रखी थी, हवा घुस गई। इससे निकैल पट्टी की सतह पर ऑक्साइड की फिल्म बन गई। इसके चलते डेविसन और गरमर को इस पट्टी को बहुत अधिक तापमान तक गर्म करना पड़ा ताकि इस ऑक्साइड फिल्म का अपचयन किया जा सके। पट्टी को गर्म करके धीमे-धीमे ठंडा करने का असर यह हुआ कि वह बहुक्रिस्टलीय निकैल का नमूना, एक विशाल एकल (single) क्रिस्टल में बदल गया। इस तरीके से नमूने को गर्म करके ठंडा करने के बाद प्रयोग को फिर से दोहराया गया। लेकिन इस बार मिले प्रायोगिक परिणाम पहले वाले परिणामों से एकदम अलग थे। प्रकीर्णित इलेक्ट्रॉनों की तीव्रता में अब कुछ कोणों पर तीक्ष्ण उच्चिष्ठ (maxima) और निम्निष्ठ (minima) थे। और उनके मान, इलेक्ट्रॉन ऊर्जा पर (यानी त्वरक वोल्टता पर) निर्भर करते थे। वस्तुतः इलेक्ट्रॉन प्रकीर्णन पैटर्न, तरंग विवर्तन पैटर्न जैसा ही था। इस प्रयोग के कुछ प्रतिरूपी परिणाम, चित्र 4.10 में दिखाए गए हैं।



(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र 4.10 : डेविसन-गरमर प्रयोग के कुछ प्रतिरूपी परिणामों के ध्रुवीय आरेख।

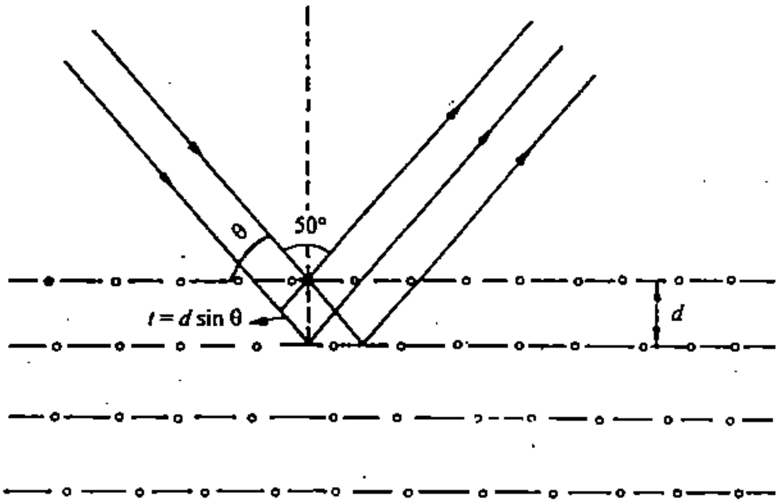
डेविसन और गरमर ने पाया कि अगर यह मान लिया जाए कि निकैल में परमाणुओं के नियमित व्यूह (array) एक विवर्तन ग्रेटिंग की तरह काम करते हैं, तब प्रकीर्णित इलेक्ट्रॉनों के इन कोणीय शिखरों की इस प्रकार व्याख्या की जा सकती है : ये शिखर परमाणुओं द्वारा इलेक्ट्रॉनों के विवर्तन के कारण उत्पन्न होते हैं।

इलेक्ट्रॉनों का विवर्तन

X-किरण प्रकीर्णन के लिए ब्रैग द्वारा किए गए विश्लेषण का इस्तेमाल करके उन्होंने इन इलेक्ट्रॉन तरंगों की तरंग-दैर्घ्य की गणना की। अंततः उन्होंने पाया कि तरंग दैर्घ्य की इस गणना से मिले मान और दे ब्रॉग्ली परिकल्पना के आधार पर मिले मान बराबर थे। इस तरह, प्रयोगों द्वारा दे ब्रॉग्ली परिकल्पना की वैधता स्थापित हुई। आइए, एक छोटी-सी गणना करके इस बात को समझें।

इनमें से एक प्रयोग में इलेक्ट्रॉन किरण पुंज को 54 V के विभव तक त्वरित किया गया। तब यह देखा गया कि आपतित (या प्रकीर्णित) किरण पुंज और क्रिस्टल तलों के किसी एक परिवार के बीच 65° के कोण के लिए तीव्रता अधिकतम होती है। क्रिस्टल तलों के बीच की दूरी जो X-किरण विवर्तन तकनीक से

मापी गई थी, 0.91Å पाई गई। अब आइए, हम इन इलेक्ट्रॉन विवर्तन आंकड़ों से इलेक्ट्रॉन तरंगों की तरंग दैर्घ्य की गणना करें।



चित्र 4.11 : क्रिस्टल तलों द्वारा प्रकीर्णन का ब्रैग विश्लेषण।

चित्र 4.11 से यह स्पष्ट है कि क्रिस्टल के दो संलग्न (adjacent) तलों से प्रकीर्णित तरंगों के बीच कलान्तर है $(2\pi/\lambda) \times 2d \sin\theta$ । संपोषी व्यतिकरण (constructive interference) के लिए हमें मिलता है :

$$(2\pi/\lambda)\ 2d \sin\theta = 2\pi n$$

यानी

$$\lambda = 2d \sin\theta / n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots \tag{4.14}$$

दिए हुए आंकड़ों को समीकरण (4.14) में रखने पर और $n = 1$ लेने पर हमें मिलता है :

$$\lambda = 2(0.91\ \text{Å}) \sin 65° = 1.65\text{Å} \tag{4.15क}$$

अब आइए, λ के इस मान की दे ब्रॉग्ली परिकल्पना द्वारा पूर्वानुमानित मान से तुलना करें। V वोल्ट के विभव से त्वरित इलेक्ट्रॉन की दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य है :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{(2m_0 eV)^{1/2}} = \frac{12.264}{[V(\text{volt})]^{1/2}}\ \text{Å} \tag{4.15ख}$$

समीकरण (4.15ख) की व्युत्पत्ति के लिए हमने समीकरण (4.12) का इस्तेमाल किया है। अत: एक 54 eV इलेक्ट्रॉन की तरंग दैर्घ्य है :

$$\lambda = \frac{12.264}{(54)^{1/2}}\ \text{Å} = 1.67\ \text{Å} \tag{4.15ग}$$

इस तरह हम पाते हैं कि समीकरण (4.15क) और (4.15ग) द्वारा दिए गए इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य के दो मान लगभग बराबर हैं।

डेविसन और गरमर की इस खोज़ के कुछ महीनों के भीतर ही, ब्रिटिश भौतिकीविद् जी.पी. टॉमसन ने भी प्रयोगों में उच्च ऊर्जा इलेक्ट्रॉन किरण-पुंजों का विवर्तन देखा। 1928 में टॉमसन ने सेलुलॉइड की फिल्म की बजाए प्लेटिनम पट्टी का इस्तेमाल करके अपने प्रयोग को दोहराया। इस बहुक्रिस्टलीय धात्विक पन्नी द्वारा उत्पन्न विवर्तन वलय ठीक वैसे ही थे जैसे (इलेक्ट्रॉन जितनी तरंग दैर्घ्य वाली) X-किरणों के लिए

प्रेक्षित किए जाते थे। इस तरह टॉमसन के इस प्रयोग द्वारा दे ब्रॉग्ली परिकल्पना के समर्थन में नए और कायल करने वाले प्रमाण मिले। दे ब्रॉग्ली को 1929 में भौतिकी का नोबेल पुरस्कार दिया गया और यही पुरस्कार डेविसन और टॉमसन को 1937 में दिया गया। यहाँ हम आपको एक रोचक बात बताना चाहेंगे: जहाँ एक ओर सर जे.जे. टॉमसन को 1906 में इलेक्ट्रॉन की खोज के लिए भौतिकी का नोबेल पुरस्कार दिया गया, वहीं दूसरी ओर 1937 में, उनके बेटे जी.जी. टॉमसन को यह पुरस्कार इलेक्ट्रॉनों की तरंग प्रकृति को साबित करने के लिए दिया गया। और अब तो उपयुक्त प्रयोगों की मदद से बहुत से कणों, जैसे कि अल्फा कणों, प्रोटॉनों, न्यूट्रॉनों, आदि का तरंगनुमा व्यवहार प्रेक्षित किया जा चुका है।

अब आप थोड़ा ठहर कर एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3

10 मिनट लगाएं

400 eV के इलेक्ट्रॉनों का एक क्रिस्टल द्वारा विवर्तन होता है और एक द्वितीय कोटि महत्तम का प्रेक्षण किया जाता है जबकि विवर्तित किरण पुंज और अपतित किरण पुंज के बीच का कोण 30° होता है।

1. इलेक्ट्रॉन द्रव्य तरंग की तरंग दैर्घ्य
2. और लेटिस के उन तलों के, जिनके कारण यह महत्तम उत्पन्न होता है, बीच की दूरी की गणना करें।

क्या इलेक्ट्रॉनों के इस तरंग व्यवहार ने आपको कुछ हैरत में डाल दिया है? आपको ये सब बातें अजीबोग़रीब नहीं लगीं? आख़िरकार अभी तक तो हम इलेक्ट्रॉन को एक कण ही मानते रहे हैं और अब अचानक पा रहे हैं कि यह तरंगों के गुणधर्म भी रखता है। इलेक्ट्रॉन की प्रकृति में यह कैसा द्वैतवाद है? क्या आप नहीं जानना चाहेंगे कि यह कण-तरंग द्वैतवाद आख़िर है क्या? आइए, अब हम कण-तरंग द्वैतवाद के अर्थ को और अधिक गहराई से समझें।

4.3.2 कण-तरंग द्वैतवाद

आइए, हम कण और तरंग की मूलभूत संकल्पनाओं पर फ़िर से एक नज़र डालें। कण से हम क्या समझते हैं? हम कण की परिभाषा इस तरह देते हैं : कण वह वस्तु है, जिसकी एक **निश्चित स्थिति, आकार, द्रव्यमान, वेग, संवेग, ऊर्जा** आदि होते हैं। इसकी गति का वर्णन न्यूटन के गति के नियमों द्वारा किया जाता है। अगर इस पर कोई बाह्य बल न लग रहा हो, तो इसे एकसमान गति की अवस्था में या विरामावस्था में रहना चाहिए। इसे किसी बल क्षेत्र के अधीन त्वरित गति करनी चाहिए और एक सुपरिभाषित स्थिति और समय संबंध के साथ विशेष प्रपथ (trajectory) पर चलना चाहिए। संक्षेप में, यही एक कण की तस्वीर है जिसे हमने भौतिकी के अपने अभी तक के अध्ययन में खींचा है। अगर ब्रह्मांड में कोई भी ऐसी वस्तु है, जो कण के इस वर्णन के अनुरूप नहीं है, तो हम उसे कण नहीं मान सकते।

अब हम तरंग से क्या समझते हैं? एक तरंग में ये दो गुणधर्म होते हैं : **अंतरिक्ष में आवर्तिता** (periodicity in space) और **समय में आवर्तिता** (periodicity in time)। हर तरंग के **तरंग दैर्घ्य, आयाम, आवृत्ति** होते हैं और यह एक निश्चित **तरंग वेग** से संचरण करती है। **यह द्रव्य का परिवहन किए बिना ऊर्जा का परिवहन कर सकती है। इसे किसी स्थान पर स्थानीयित** (localize) **नहीं किया जा सकता और यह अंतरिक्ष में फैली रहती है।** यही एक तरंग के साथ जुड़ी हुई कुछ बुनियादी संकल्पनाएं हैं। अगर हमें ब्रह्मांड में कोई भी चीज़ ऐसी मिलती है, जो इन संकल्पनाओं के अनुसार गुण नहीं रखती, तो हम उसे तरंग नहीं मान सकते।

अगर हम इस तरह से एक कण और तरंग की संकल्पना समझें तो हमारा अगला कदम काफ़ी आसान हो जाता है। अगर प्रकृति में किसी ऐसी चीज का अस्तित्व है, जिसमें न तो विशुद्ध कण वाले गुणधर्म हों और न ही विशुद्ध तरंग वाले बल्कि दोनों के गुणधर्म मौजूद हों, तो उसे हम न तो कण कह सकते हैं,

और न ही तरंग। उदाहरण के लिए, अगर इस वस्तु के द्रव्यमान, संवेग, तरंग दैर्ध्य, आयाम, आवृत्ति आदि निश्चित किए जा सकते हों और इसे न तो किसी बिन्दु पर स्थानीयित किया जा सके और न ही इसका अनन्त में विस्तार होता हो, तो उसे हम न तो कण कह सकते हैं और न ही तरंग। एक बेहतर नाम के अभाव में हम उसे **कण-तरंग** (wave-particle) कहते हैं।

इस बात से कि ब्रह्मांड में न तो कण हैं और न ही तरंगें, बल्कि सिर्फ़ कण-तरंगें हैं या कण-तरंग द्वैतवाद है, आपको परेशान नहीं होना चाहिए। अगर प्रकृति का यही स्वरूप है. तो हमें उसे इसी रूप में स्वीकार करना होगा। फिर भी कण और तरंग की परिभाषाएं अभी भी काफ़ी उपयोगी हैं और जैसाकि आपने बोध प्रश्न 1 को हल करके पाया है, बहुत-सी स्थितियों में ये एक अच्छे सन्निकटन की तरह काम करती हैं। संक्षेप में कहें, तो कण-तरंग द्वैतवाद की संकल्पना सभी वस्तुओं पर लागू होती है। लेकिन चूंकि इस संकल्पना में प्लांक नियतांक आता है, जिसका मान बहुत कम है, इसलिए यह कण-तरंग द्वैतवाद सिर्फ़ सूक्ष्मदर्शी कणों के संसार में दिखाई देता है। हमारे अनुभवों के स्थूल संसार में वस्तुएं गति के क्लासिकी नियमों का ही पालन करती हैं।

यहाँ आपको यह भी अच्छी तरह समझना चाहिए कि कण-तरंग द्वैतवाद का अस्तित्व प्लांक नियतांक के परिमित (finite) मान के कारण ही है। क्लासिकी भौतिकी में यह माना जाता है कि $h = 0$, यानी ऊर्जा के क्वांटम का अस्तित्व ही नहीं होता। इसलिए क्लासिकी भौतिकी कण-तरंग द्वैतवाद की व्याख्या नहीं कर पाती। लेकिन अब तो आप जान ही चुके हैं कि ऊर्जा को क्वांटम के रूप में (जिसके अनुसार ऊर्जा के प्रत्येक क्वांटम का मान $h\nu$ या उसका पूर्णांकीय गुणज़ है) लेने के लिए बहुत-सी ठोस वजहें हैं।

और अब हम कण-तरंग द्वैतवाद की संकल्पना पर एक आख़िरी बात कह कर इस चर्चा को ख़त्म करना चाहेंगे : इसे मानना केवल विश्वास का ही सवाल नहीं है — यह प्रायोगिक प्रेक्षणों और उनकी व्याख्या करने वाले एक तर्कसंगत मॉडल को स्वीकार करने का भी सवाल है।

अब हम, इस इकाई में जो कुछ भी कहा गया है, उसका सार प्रस्तुत कर रहे हैं।

4.4 सारांश

- सरल आवर्ती दोलक के लिए कृष्णिका विकिरण की व्याख्या हेतु प्लांक ने **ऊर्जा के क्वांटम** की संकल्पना प्रस्तावित की। **प्लांक के क्वांटम अभिगृहीत** के अनुसार एक तरंग के लिए ऊर्जा E का क्वांटम (quantum) होता है :

$$E = h\nu$$

  जहाँ ν तरंग की आवृत्ति है और h एक सार्वत्रिक अचर है, जिसे **प्लांक नियतांक** कहते हैं।

- इस संकल्पना का विस्तार करके आइंस्टीन ने प्रकाश के लिए **प्रकाश-विद्युत् प्रभाव** की व्याख्या की। आइंस्टीन ने प्रकाश के क्वांटम (फ़ोटॉन) को ऊर्जा $E = h\nu$ वाला एक कण माना।

- बोर ने इस क्वांटम अभिगृहीत और कुछ अन्य अभिगृहीतों का अपने **परमाण्वीय मॉडल** में इस्तेमाल किया और उसके ज़रिए परमाणु के स्थायित्व और हाइड्रोजन परमाणुओं के रैखिक स्पेक्ट्रम की व्याख्या की। इसके साथ ही उन्होंने **संगति नियम** भी दिया जिससे क्लासिकी और क्वांटम भौतिकी के बीच संगति (correspondence) मिलती है।

- दे ब्रॉग्ली ने प्रस्ताव रखा कि जिस तरह विद्युत्चुम्बकीय क्षेत्रों में तरंग और कण दोनों ही के गुणधर्म होते हैं, ठीक उसी तरह द्रव्य के भी तरंगनुमा गुणधर्म होते हैं। इससे **कण-तरंग द्वैतवाद** की संकल्पना आई, जिसके मुताबिक संवेग p वाले एक कण की **दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्ध्य** λ है

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

द्रव्यमान m और ऊर्जा E वाले एक मुक्त कण के लिए

$$\lambda = \frac{h}{(2mE)^{1/2}}$$

4.5 अंत में कुछ प्रश्न

30 मिनट लगाएं

1. दे ब्रॉग्ली संबंध से, बोर परमाणु के लिए बोर के कोणीय संवेग क्वांटमीकरण प्रतिबंध की व्युत्पत्ति दें।

2. 200 GeV (1 GeV = 10^9 eV) के उच्च ऊर्जा प्रोटॉनों का एक हाइड्रोजन लक्ष्य द्वारा कोण θ पर विवर्तन होता है, जिसका मान इस संबंध से मिलता है :

$$p \sin\theta = \frac{1.2}{c} \text{ GeV}$$

यहाँ ध्यान दें कि प्रोटॉन आपेक्षिकीय ऊर्जाओं पर गति पर रहे हैं। प्रोटॉन की त्रिज्या का मान निकालें।

3. इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा में 150 eV की वृद्धि से उसकी दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य में दो के गुणक से परिवर्तन आ जाता है। इलेक्ट्रॉन की प्रारंभिक दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य की गणना करें।

4. उन इलेक्ट्रॉनों की, जिनका 30° के कोण पर एक निकैल क्रिस्टल द्वारा प्रथम कोटि ब्रैग विवर्तन होता है, दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य और गतिज ऊर्जा की गणना करें। निकैल के लिए, d = 2.15Å।

4.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य है

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ Js}}{10^{-3}\text{ kg} \times 10^{-2}\text{ m s}^{-1}} = 6.626 \times 10^{-29}\text{ m}$$

2.
$$\lambda_0 = \frac{h}{(2m_0 E)^{1/2}} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ Js}}{(2 \times 9.109 \times 10^{-31}\text{ kg} \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{ J})^{1/2}}$$

$$= 1.227 \times 10^{-10}\text{ m}$$

$$\lambda_0 = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ Js}}{(2 \times 1.675 \times 10^{-27}\text{ kg} \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{ J})^{1/2}}$$

$$= 2.862 \times 10^{-14}\text{ m}$$

3.
$$\lambda_0 = \frac{h}{(2m_0 E)^{1/2}} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\text{ Js}}{(2 \times 9.109 \times 10^{-31}\text{ kg} \times 400 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{ J})^{1/2}}$$

$$= 0.61 \times 10^{-10}\text{ m} = 0.61\text{ Å}$$

$$n\lambda_e = 2d\sin\theta$$

$$n = 2,\ \theta = 30°, \qquad \lambda_e = 0.61 \times 10^{-10}\text{ m}$$

$$\therefore d = \frac{\lambda_e}{\sin\theta} = 1.22\text{ Å}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. दे ब्रॉग्ली के दिमाग में यह तस्वीर थी कि परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन परिबद्ध (confined) तरंगें हैं और इस कारण से वे एक विविक्त अप्रगामी तरंग पैटर्न बनाती हैं। तब परमाणु में केवल वही कक्षाएं अनुमत होती हैं, जिनमें इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्यों की एक पूर्णांकीय संख्या परिधि में फिट बैठती है (चित्र 4.8 देखें)। उदाहरण के लिए, निम्नतम परमाण्वीय कक्षा की परिधि में एक तरंग दैर्घ्य फिट बैठती है और उत्तेजित कक्षाओं में दो या ज़्यादा इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य फिट बैठती हैं। इस तरह अगर तरंग दैर्घ्य λ वाली दे ब्रॉग्ली तरंगों को त्रिज्या r वाली बोर कक्षा में फिट बैठना है, ताकि स्थायी अवस्था के प्रतिबंध को संतुष्ट किया जा सके, तो यह प्रतिबंध संतुष्ट करना होगा :

$$2\pi r = n\lambda \qquad n = 1, 2, \ldots$$

क्योंकि $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$, इसलिए हमें मिलता है :

$$\frac{2\pi r mv}{h} = n$$

या

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

यही बोर का कोणीय संवेग क्वांटमीकरण है।

2. $1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV}$

माना कि प्रोटॉन की त्रिज्या R है। उस स्लिट (रेखा छिद्र) की, जो प्रोटॉन का प्रकीर्णन करती है, विमा $2R$ है।

इसलिए

$$\lambda = 2 \times 2R\sin\theta$$

या

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{4R}$$

प्रोटॉनों के लिए

$$p = \frac{200\ \text{GeV}}{c} \quad (\because E = pc)$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1.2\ \text{GeV}}{pc} = \frac{1.2}{200} = 0.006$$

दे ब्रॉग्ली संबंध से

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js} \times 3 \times 10^{8}\ \text{ms}^{-1}}{200 \times 10^{9} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$

$$= 6.212 \times 10^{-18}\ \text{m}$$

$$R = \frac{\lambda}{4\sin\theta} = \frac{6.212 \times 10^{-18}\ \text{m}}{4 \times 6 \times 10^{-3}}$$

$$= 2.5 \times 10^{-16}\ \text{m}$$

अतः प्रोटॉन की त्रिज्या की कोटि है 10^{-16} m।

3. चूंकि इलेक्ट्रॉन ऊर्जा बढ़ रही है, इसलिए उसकी तरंग दैर्घ्य घटेगी। अगर λ प्रारंभिक इलेक्ट्रॉन तरंग दैर्घ्य है, E उसकी प्रारंभिक ऊर्जा है और ΔE ऊर्जा में वृद्धि है, तो हम समीकरण (4.12) को इस्तेमाल करके लिख सकते हैं :

$$\lambda = \frac{h}{(2mE)^{1/2}}$$

और

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{h}{[2m(E+\Delta E)]^{1/2}}$$

इसे हल करने पर हमें यह संबंध मिलता है :

$$\lambda^2 = \frac{3h^2}{2m\,\Delta E}$$

या

$$\lambda = h\left(\frac{3}{2m\,\Delta E}\right)^{1/2}$$

h, m के मान और $\Delta E = 150$ eV रखने पर हमें मिलता है

$$\lambda = 6.626\times10^{-34}\text{ Js}\left[\frac{1.5}{9.1\times10^{-31}\text{ kg}\times150\times1.6\times10^{-19}}\right]^{1/2} = 1.73\text{ Å}$$

4. प्रथम कोटि ब्रैग विवर्तन के लिए $n = 1$ और

$$\begin{aligned}\lambda &= 2d\sin\theta\\ &= 2\times2.15\text{ Å}\sin30^\circ\\ &= 2.15\text{ Å}\end{aligned}$$

इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा समीकरण (4.12) से मिलती है :

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

या

$$E = \frac{(6.626\times10^{-34}\text{ Js})^2}{2\times9.1\times10^{-31}\text{ kg}\times(2.15\times10^{-10})^2\text{ m}^2} = 52\times10^{-19}\text{ J} = 32.5\text{ eV}.$$

इकाई 5 द्रव्य तरंगें और अनिश्चितता सिद्धांत

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

इकाई 4 में आपने पढ़ा कि क्वांटम भौतिकी का उदय किस तरह हुआ। आपने देखा कि कुछ प्रयोगों के परिणामों और कुछ प्राकृतिक घटनाओं को क्लासिकी भौतिकी द्वारा नहीं समझाया जा सका। तब उनकी व्याख्या करने के लिए प्लांक ने ऊर्जा के क्वांटम की संकल्पना दी जिसे आइंस्टीन ने विकसित किया और फ़ोटॉन की संकल्पना पेश की। आपने दे ब्रॉग्ली द्वारा प्रस्तुत कण-तरंग द्वैतवाद और द्रव्य तरंगों की संकल्पना के बारे में भी पढ़ा। इस इकाई में हम इन संकल्पनाओं पर आगे चर्चा करेंगे। आप जानते हैं कि एक तरंग अंतरिक्ष में फैली होती है जबकि किसी कण की एक निश्चित स्थिति होती है। इसलिए ज़ाहिर है कि एक वास्तविक कण का सही-सही वर्णन करने के लिए एकल तरंग काफ़ी नहीं होगी। अब सवाल यह उठता है कि हम आकाश में द्रव्य-तरंगों (matter waves) या कण-तरंगों (wave-particles) को कैसे निरूपित करें? इसके लिए हम एक **तरंग पिटक** (wave packet) की संकल्पना देते हैं जिसके बारे में हम भाग 5.2 में बताएंगे।

तरंग पिटक की चर्चा करते हुए हम क्वांटम भौतिकी के एक और मूलभूत सिद्धांत पर पहुंचते हैं, जिसे **हाइज़ेनबर्ग का अनिश्चितता सिद्धांत** (Heisenberg's uncertainly principle) कहते हैं। आप इस इकाई के भाग 5.3 में अनिश्चितता सिद्धांत और उसके कुछ अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे, ख़ासकर सूक्ष्मदर्शी कणों के लिए। हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत का शुरू-शुरू में बहुत विरोध हुआ। विरोध करने वाले भौतिकीविदों में एल्बर्ट आइंस्टीन प्रमुख थे। इस सिद्धांत की वैधता के बारे में भौतिकीविदों की आपसी बहस (ख़ासकर बोर और आइंस्टीन के बीच हुई बहस) क्वांटम यांत्रिकी के इतिहास में एक बहुत रोचक दर्ज़ा रखती है। इस इकाई में हम आपको कुछ आदर्श (वैचारिक) प्रयोगों के बारे में भी बताएंगे जिन्होंने अनिश्चितता सिद्धांत के समर्थन में दलीलें जुटायीं और अंततः इसे क्वांटम यांत्रिकी के एक मूलभूत सिद्धांत के रूप में प्रतिष्ठित किया। अगली इकाई में आप श्रोडिन्गर समीकरण के बारे में पढ़ेंगे जो कि क्वांटम यांत्रिकी की एक और मूलभूत संकल्पना है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- तरंग पिटक की संकल्पना को समझा सकेंगे,
- प्रावस्था वेग और कण के वेग के बीच संबंध निकाल सकेंगे,
- सूक्ष्मदर्शी कणों पर हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत लागू कर सकेंगे, और
- अनिश्चितता सिद्धांत की पुष्टि के लिए गामा-तरंग सूक्ष्मदर्शी, एकल-स्लिट और द्वि-स्लिट व्यतिकरण प्रयोगों की चर्चा कर सकेंगे।

5.2 द्रव्य तरंगें

इकाई 4 के भाग 4.3.2 में हुई चर्चा से आप जानते हैं कि क्लासिकी तौर पर एक कण को एक बिन्दु पर स्थानीयित (localize) किया जा सकता है लेकिन एक तरंग को नहीं। इसलिए कम से कम उन सूक्ष्मदर्शी कणों के लिए जिनके लिए कण-तरंग द्वैतवाद महत्वपूर्ण है, हमें कण का क्लासिकी वर्णन छोड़ देना पड़ेगा और इसकी जगह हमें सूक्ष्मदर्शी कणों के लिए एक नए वर्णन की खोज करनी पड़ेगी जो दे ब्रॉग्ली परिकल्पना के संगत भी हो। कणों से जुड़ी हुई द्रव्य तरंगों का यह नया वर्णन कैसा होना चाहिए? अव्वल तो इसमें हमें यह ध्यान रखना होगा कि स्थानिक तौर पर (spatially) कण के साथ द्रव्य तरंगें इस तरह संबद्ध होनी चाहिए कि केवल कण के नज़दीक के क्षेत्र में उनका परिणामी आयाम शून्य न हो; बाकी सभी बिन्दुओं पर इन द्रव्य तरंगों का आयाम शून्य होना चाहिए।

अब दे ब्रॉग्ली समीकरण (4.11) से

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta p}{p} \tag{5.1}$$

इस समीकरण से पता चलता है कि अगर $\Delta p = 0$, तब $\Delta\lambda = 0$, यानी इसके मुताबिक तो हमें एक निश्चित संवेग के कण को एक निश्चित तरंग दैर्घ्य वाली एकल तरंग से निरूपित करना होगा। लेकिन आप जानते हैं कि एकल तरंग दैर्घ्य और आवृत्ति की तरंग, दिक्-काल में फैली हुई होती है यानी इसे एक बिन्दु पर स्थानीयित नहीं किया जा सकता। इस तरह, यह एकल तरंग किसी कण को निरूपित नहीं कर सकती। तो क्या हम इन दोनों के बीच का कोई रास्ता निकाल सकते हैं? अगर हम संवेग के साथ कुछ अनिश्चितता जोड़ें यानी $\Delta p > 0$ लें, तब $\Delta\lambda$ भी परिमित होता है। आगे आने वाली चर्चा से यह पता लगता है कि अगर तरंग दैर्घ्य में एक परिमित विस्तार मान लिया जाए, तब हम एक सूक्ष्म कण को, तरंगों के समूह द्वारा निरूपित कर सकते हैं।

इसके लिए आइए एक सरल उदाहरण लें। माना कि दो ज्यावक्रीय तरंगों का अध्यारोपण किया जाता है, जिनकी तरंग दैर्घ्यों में ज़रा सा फ़र्क है। आपने दोलन और तरंगें नाम के पी. एच. ई.-02 पाठ्यक्रम में पढ़ा है कि इनकी परिणामी तरंग की प्रकृति इन दोनों तरंगों से काफ़ी अलग होती है। उदाहरण के लिए, माना कि ये दो प्रगामी तरंगें हैं :

$$\psi_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

और

$$\psi_2 = A\sin[(k+dk)x - (\omega + d\omega)t]$$

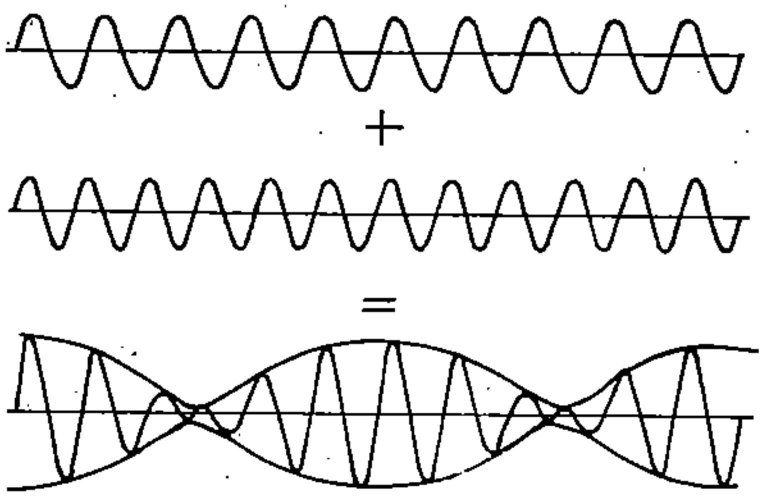
जहाँ A इनका आयाम है, k ($= 2\pi/\lambda$) तरंग संख्या है और ω ($= 2\pi\nu$) इनकी कोणीय आवृत्ति है। इन तरंगों के अध्यारोपण से निम्न परिणामी तरंग मिलती है :

ψ का मान हमें निम्न परिणाम का प्रयोग करके मिलता है :

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ &= 2A\cos\left[\left(\frac{dk}{2}\right)x - \left(\frac{d\omega}{2}\right)t\right]\sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

जहाँ हमने ज्या पद में $\frac{dk}{2}$ और $\frac{d\omega}{2}$ को नहीं रखा है क्योंकि वे k और ω की तुलना में बहुत छोटे हैं। चित्र 5.1 में हमने ψ का ग्राफ़ दिखाया है। आप देख सकते हैं कि ψ का $2A\cos\left(\frac{dk}{2}x - \frac{d\omega}{2}t\right)$ के बराबर एन्वेलप (envelope) है। यह एन्वेलप, $\sin(kx - \omega t)$ द्वारा दी गई ज्यावक्रीय तरंग को मॉडुलित करता है।



चित्र 5.1 : दो प्रगामी तरंगों के अध्यारोपण से मिली परिणामी तरंग का आरेख।

इसी तरह एक केन्द्रीय तरंग दैर्घ्य λ_0 के नज़दीक की तरंग दैर्घ्य वाली बहुत सारी तरंगों का अध्यारोपण करके एक **तरंग पिटक** (wave packet) बनाया जा सकता है। इसे चित्र 5.2 में दिखाया गया है। इन तरंगों के अध्यारोपण से परिणामी आयाम में जो विचरण होता है, वह तरंग पिटक का आकार निर्धारित करता है। तरंग पिटक के किन्हीं दो उत्तरोत्तर उच्चिष्ठों या निम्निष्ठों के बीच बराबर दूरी होती है, जो इसकी केन्द्रीय तरंग दैर्घ्य λ_0 के बराबर होती है। इस तरह तरंग पिटक की तरंग दैर्घ्य λ_0 होती है। लेकिन साथ ही साथ समय के किसी क्षण पर यह आकाश के एक परिमित क्षेत्र में स्थानीयित होता है। साफ़ तौर पर यह तरंग पिटक कण और तरंग दोनों ही के गुण रखता है।

चित्र 5.2 : तरंगपिटक।

इस तरह इस नए विवरण में हम एक सूक्ष्मदर्शी कण को तरंग पिटक द्वारा निरूपित कर सकते हैं। संक्षेप में कहें, तो एक तरंग पिटक की परिभाषा हम इस तरह दे सकते हैं :

> **तरंग पिटक**, अलग-अलग लेकिन नज़दीकी तरंग दैर्घ्यों और आवृत्तियों वाली तरंगों का एक समूह होता है, जिनका एक-दूसरे के साथ इस तरह व्यतिकरण होता है कि इस समूह का आयाम (यानी इसका एन्वेलप) केवल कण के नज़दीकी क्षेत्र में शून्येतर (non-zero) होता है।

तरंग पिटक का तरंग दैर्घ्य (और आवृत्ति) में परिसर (spread) इस बात पर निर्भर करता है कि दिक्-काल में हमें कण को किस हद तक स्थानीयित करना है। यहाँ इस बात का आप ज़रूर ध्यान रखें कि केन्द्रीय तरंग दैर्घ्य λ_0 का मान दे ब्रॉग्ली समीकरण (4.11) से दिया जाता है।

अब आप पूछेंगे कि हम एक तरंग पिटक का वेग कैसे मालूम करते हैं? यह साफ़ है कि अगर हर उस तरंग का, जिसका अध्यारोपण हो रहा है, वेग बराबर हो, तो तरंग पिटक का वेग उन तरंगों के वेग के बराबर होगा। लेकिन दे ब्रॉग्ली तरंगों के लिए तरंग वेग, तरंग दैर्घ्य के साथ बदलता है क्योंकि हरेक तरंग अलग-अलग वेग पर चलती है। इस तरह एक तरंग पिटक का वेग उन तरंगों के वेग से अलग होता है, जिनसे मिलकर वह बना है। आइए, अब ऐसे एक तरंग पिटक के लिए **प्रावस्था वेग** (phase velocity) v_p और **समूह वेग** (group velocity) v_g मालूम करें।

आप जानते हैं कि एक तरंग का प्रावस्था वेग v_p होता है $v_p = \frac{\omega}{k}$। अतः इकाई 4 की समीकरणों (4.2) और (4.11) से, तरंग पिटक का प्रावस्था वेग होगा :

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

इस समीकरण में $E = mc^2$ और $p = mv$ रखने पर हमें मिलता है :

$$\boxed{\textbf{प्रावस्था वेग} \quad v_p = \frac{c^2}{v}} \tag{5.2}$$

क्योंकि $v < c$, इसलिए साफ़ है कि एक कण से संबद्ध तरंग पिटक का प्रावस्था वेग, प्रकाश के वेग से ज़्यादा होगा। इस बात से आप परेशान न हों, क्योंकि तरंग से संबद्ध कोई भी भौतिक राशि जैसे ऊर्जा, सूचना या संकेत उसके प्रावस्था वेग से गति नहीं करते। ये सब तरंगें पिटक के **समूह वेग** से चलती हैं जिसका मान है

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \tag{5.3}$$

अब आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत से

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{5.4क}$$

$$E = mc^2 \tag{5.4ख}$$

और

$$p = mv \tag{5.4ग}$$

इसलिए इन तीन समीकरणों का प्रयोग करने पर हमें मिलता है :

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{p}{m} = v$$

या

$$\boxed{\text{समूह वेग} \quad v_g = v} \tag{5.5}$$

अतः **तरंग पिटक का समूह वेग वस्तुतः कण के वेग के ही बराबर होता है।**

अभी तक आपने यह जाना कि एक कण का निरूपण करने के लिए एकल तरंग काफ़ी नहीं है। इसके लिए हमें तरंगों के एक समूह का अध्यारोपण करना पड़ता है जिससे एक तरंग पिटक बनता है। यह तरंग पिटक कण के वेग के बराबर समूह वेग से चलता है। आपने देखा कि तरंग पिटक के संवेग में एक अनिश्चितता Δp है और उसके तरंग दैर्घ्य में $\Delta\lambda$ के बराबर परिसर (spread) है। इन बातों का क्या अर्थ है? इन दोनों परिणामों का विश्लेषण करने से पहले हम चाहेंगे कि आप एक तरंग पिटक के प्रावस्था वेग और समूह वेग की गणना करें।

बोध प्रश्न 1

5 मिनट लगाएं

एक मुक्त इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा जिसमें उसकी विराम द्रव्यमान ऊर्जा भी शामिल है 1 MeV के बराबर है। इलेक्ट्रॉन की गति से संबद्ध तरंग पिटक के समूह वेग और प्रावस्था वेग की गणना करें।

अभी तक इस भाग में आपने पढ़ा कि एक गतिमान सूक्ष्मदर्शी कण को एक तरंग पिटक से भी निरूपित किया जा सकता है, जो दे ब्रॉग्ली संबंध को संतुष्ट करता है। इस तरंग पिटक को हम तरंगों के अध्यारोपण द्वारा बनाते हैं, जिसके कारण इसके संवेग और तरंग दैर्घ्य में एक अनिश्चितता आ जाती है।

इस तथ्य से कि एक गतिमान कण को एक तरंग पिटक द्वारा निरूपित किया जाना चाहिए न कि एक स्थानीयित वस्तु द्वारा, हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि किसी कण की स्थिति और संवेग के मापन की

परिशुद्धता (या यथार्थता) की एक मूलभूत सीमा है। उदाहरण के लिए, तरंग पिटक की चौड़ाई जितनी अधिक होगी, उतनी ही उसमें तरंगों की संख्या अधिक होगी, और उतना ही हमारे लिए कण की तरंग दैर्ध्य और इस तरह संवेग पता लगा पाना आसान होगा। लेकिन क्योंकि कण इस तरंग पिटक में कहीं भी हो सकता है, इसलिए अगर वह तरंग पिटक ज़्यादा चौड़ा होगा, तो हम कण की स्थिति का बहुत यथार्थता से पता नहीं लगा सकते। दूसरी ओर, अगर तरंग पिटक संकरा हो, तो कण की स्थिति का बेहतर पता लगाया जा सकता है लेकिन अब इसकी तरंग दैर्ध्य या इसके संवेग का निर्धारण मुश्किल हो जाता है। इस तरह कण की स्थिति में अनिश्चितता Δx कम होने पर उसके संवेग में अनिश्चितता Δp बढ़ जाती है और उसके संवेग में अनिश्चितता कम होने पर उसकी स्थिति की अनिश्चितता बढ़ जाती है।

चित्र 5.3 : वर्नर हाइज़ेनबर्ग, 1901–1976, जर्मनी के भौतिकीविद् थे। वे क्वांटम यांत्रिकी की आधारभूत संकल्पनाएं देने वालों में प्रमुख थे। उन्हें 1932 में नोबेल पुरस्कार मिला।

इस तरह हम कह सकते हैं कि कण-तरंग द्वैतवाद का एक सीधा सीधा नतीजा यह है कि कण के संवेग और स्थिति में अनिश्चितताएं आ जाती हैं। अगर उनमें से एक का ठीक-ठीक पता लगाया जा सकता है, तो दूसरे का बिल्कुल भी नहीं। यहाँ हम आपको याद दिलाना चाहेंगे कि क्लासिकी यांत्रिकी के मुताबिक किसी भी क्षण t पर कण की स्थिति और संवेग को एक साथ निर्धारित किया जा सकता है। लेकिन यहाँ पर स्थिति क्लासिकी यांत्रिकी के ठीक उलट है। 1927 में हाइज़ेनबर्ग (चित्र 5.3) ने इसी संकल्पना को अनिश्चितता सिद्धांत के रूप में पेश किया।

5.3 अनिश्चितता सिद्धांत

हाइज़ेनबर्ग ने यह संकल्पना प्रस्तुत की कि किसी क्वांटम कण (quantum object) जैसे कि तरंग पिटक, के लिए स्थिति और संवेग अनिश्चितताओं का गुणनफल प्लांक नियतांक h से बड़ा या उसके बराबर होता है। इस तरह हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार,

$$\boxed{\Delta x\ \Delta p_x \geq \hbar} \qquad (5.6\text{क})$$

जहाँ Δx और Δp_x एक सूक्ष्मदर्शी कण के क्रमशः स्थिति और संवेग के x घटक में अनिश्चितताएं हैं, और $\hbar = h/2\pi$।

इसी तरह के संबंध किसी वस्तु की स्थिति के y और z घटकों और उनके संगत संवेग घटकों पर भी लागू होते हैं। लेकिन यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत, x, y और p_z या y, p_x और p_z आदि के समकालिक और यथार्थ मापन पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाता। ये प्रतिबंध केवल उन चरों पर लागू होते हैं, जिन्हें संयुग्मी (conjugate) चर कहा जाता है यानी x और p_x पर, और y तथा p_y पर और z तथा p_z पर। इस तरह हमें ये संबंध मिलते हैं :

$$\Delta y\, \Delta p_y \geq \hbar \qquad (5.6\text{ख})$$

$$\Delta z\ \Delta p_z \geq \hbar \qquad (5.6\text{ग})$$

और

$$\Delta r\, \Delta p_r \geq \hbar \qquad (5.6\text{घ})$$

हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत का एक व्यापक कथन इस तरह दिया जा सकता है :

अनिश्चितता सिद्धांत

एक सूक्ष्मदर्शी कण के लिए अनंत यथार्थता (या शून्य त्रुटि) के साथ दो विहित संयुग्मी (canonically conjugate) चरों के मान एक साथ नहीं मापे जा सकते। इस संयुग्मी चरों के समकालिक मापन में प्राप्त अनिश्चितताओं का गुणनफल सदैव किसी एक ख़ास निम्नतम मान से अधिक होता है (जो लगभग प्लांक नियतांक के बराबर होता है)।

यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि अनिश्चितता संबंध $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ को तरंग पिटक के विशुद्ध गणितीय गुणधर्म के रूप में प्राप्त किया गया है। इसलिए यह संकल्पना कण-तरंग द्वैतवाद की ही तरह एक मूलभूत संकल्पना है। कण-तरंग द्वैतवाद की तरह ही हालांकि अनिश्चितता सिद्धांत सार्वत्रिक रूप से लागू होता है, लेकिन इसकी महत्ता केवल सूक्ष्मदर्शी निकायों के लिए ही है।

समीकरण (5.6) के मुताबिक एक सूक्ष्मदर्शी निकाय के लिए ऐसी कोई अवस्था नहीं हो सकती, जिसमें x और p_x दोनों के ही निश्चित मान हों। हम कभी भी मनचाही यथार्थता के साथ स्थिति और संवेग का एक साथ मापन नहीं कर सकते। अगर सूक्ष्मदर्शी कण की स्थिति निश्चित की जा सकती हो, तो उसके संवेग में अनन्त अनिश्चितता होगी, यानी हमें उसके संवेग के बारे में कुछ भी पता नहीं होगा। इसी तरह अगर हम कण का संवेग निश्चित कर सकें, तो हमें उसकी स्थिति का बिल्कुल भी पता नहीं होगा। इसलिए, क्वांटम यांत्रिकी में एक सूक्ष्मदर्शी कण की गति का विवरण $x = a \sin \omega t$ जैसे समीकरणों से नहीं दिया जा सकता क्योंकि ऐसी समीकरणें कण की एक निश्चित स्थिति के लिए उसका निश्चित वेग निर्धारित करती हैं। दूसरे शब्दों में, अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार एक प्रपथ (trajectory) की संकल्पना अनुमत नहीं है। इस तरह, क्लासिकी भौतिकी के विपरीत, क्वांटम यांत्रिकी में एक सूक्ष्मदर्शी कण के लिए एक निश्चित प्रपथ जिसमें पथ के प्रत्येक बिन्दु पर कण का वेग निर्धारित किया जा सके, संभव नहीं है। इस बारे में हम फिर से चर्चा करेंगे।

परमाण्वीय प्रक्रियाओं में अनिश्चितता सिद्धांत के एक और रूप का इस्तेमाल होता है। कभी-कभी हम समयान्तराल Δt में एक परमाण्वीय प्रक्रिया में उत्सर्जित ऊर्जा का मापन करना चाहते हैं। तब हमें ऊर्जा और समय के बीच एक अनिश्चितता संबंध चाहिए होता है। इसके लिए हम समीकरण (5.6क) को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{m\Delta x}{p} \; \frac{p\Delta p}{m} \geq \hbar$$

पहला पद $\frac{\Delta x}{v}$ या Δt है और चूंकि $E = \frac{p^2}{2m}$, $\Delta E = \frac{p\,\Delta p}{m}$ इसलिए हमें मिलता है :

$$\boxed{\Delta E \; \Delta t \; \geq \; \hbar} \qquad (5.7क)$$

जहाँ Δt तरंग पिटक की समय स्थानीयितता (time localizability) में अनिश्चितता है और ΔE उसकी ऊर्जा में अनिश्चितता है। तरंग पिटक की प्रकृति पर आधारित एक अधिक यथार्थ गणना से इस परिणाम का यह रूप हो जाता है :

$$\Delta E \; \Delta t \; \geq \; \frac{\hbar}{2} \qquad (5.7ख)$$

कई पाठ्य पुस्तकों में आपको निम्न अनिश्चितता संबंध मिलेगा :

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

आपको यह याद रखना चाहिए कि दायां पक्ष महज़ $\hbar$ की कोटि बताता है। $\Delta x \Delta p_x$ की निम्नतम सीमा बहुत कम ही $\hbar/2$ के बराबर होती है। अधिकतर स्थितियों में समीकरण (5.6क) लागू होती है या फिर निम्न संबंध लागू होता है $\Delta x \; \Delta p_x \geq \hbar$।

समीकरण (5.7क और ख) हमें बताती हैं कि अगर किसी सूक्ष्मदर्शी कण की एक सुपरिभाषित ऊर्जा अवस्था होती है, तो इस अवस्था का जीवन काल बहुत लम्बा होगा - यानी इस अवस्था को स्थायी होना होगा। अगर कोई ऊर्जा अवस्था कम समय तक रहती है जैसे कि परमाणु की उत्तेजन अवस्था, तो उसकी ऊर्जा में अनिश्चितता होगी। प्रयोगों में यह लक्षण स्पेक्ट्रम रेखाओं की चौड़ाई में दिखाई देता है। इस बात को समझने के लिए, मान लीजिए कि एक उत्तेजित परमाणु, जिसका जीवन काल Δt है, एक निचली अवस्था में संक्रमण करता है। तब समीकरण (5.7क) के अनुसार परमाणु द्वारा उत्सर्जित विकिरण की ऊर्जा में $\hbar/\Delta t$ परिमाण की अनिश्चितता होती है यानी उसकी आवृत्ति में भी $\Delta \nu = \Delta E/h$ की अनिश्चतता होती है। इस तरह यह विकिरण एकवर्णी (monochromatic) नहीं होगा क्योंकि इसमें $\nu + \Delta\nu$ और $\nu - \Delta\nu$ के बीच की आवृत्तियां होंगी और परमाण्वीय स्पेक्ट्रम की इस रेखा की **रेखा चौड़ाई** (line width) का, जिसे प्राकृतिक चौड़ाई (natural width) भी कहा जाता है, मान है :

$$\boxed{\Delta\nu \; = \; \frac{1}{2\pi\,\Delta t}} \qquad (5.7ग)$$

आइए, अब हम अनिश्चितता सिद्धांत के एक अनुप्रयोग के बारे में पढ़ें।

उदाहरण 1

0.4 nm क्षेत्र में परिरुद्ध (confined) एक हीलियम परमाणु के संवेग में न्यूनतम अनिश्चितता की गणना करें।

हल

अब हम यह जानते हैं कि यह हीलियम परमाणु 0.40 nm के क्षेत्र में कहीं भी हो सकता है; इसलिए $\Delta x = 0.40$ nm। समीकरण (5.7क) से हमें मिलता है $\Delta p_x \geq \hbar / \Delta x$। बराबरी के चिह्न का इस्तेमाल करके हम Δp_x के न्यूनतम मान की गणना कर सकते हैं :

$$(\Delta p_x)_{min} = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js}}{2\pi \times 0.40 \times 10^{-9}\text{m}} = 2.64 \times 10^{-25}\ \text{kg m s}^{-1}$$

इस उदाहरण से हमें यह भी अच्छी तरह समझ आता है कि अगर हम हीलियम को ठोस अवस्था में लाकर एक क्षेत्र में स्थानीयित करना चाहें तो निम्न तापमानों पर ^{4}He परमाणुओं का क्या होता है। परम शून्य तापमान के निकट बहुत कम तापमानों पर भी ^{4}He परमाणुओं में पर्याप्त संवेग होता है। चूंकि ^{4}He का द्रव्यमान 6.7×10^{-27} kg है, इसलिए संवेग में 2.64×10^{-25} kg m s^{-1} परिसर का मतलब यह है कि ^{4}He परमाणु में किसी क्षण पर कम से कम इतना संवेग ज़रूर होगा, या उसकी चाल का कम से कम इतना परिमाण ज़रूर होगा .

$$v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{2.64 \times 10^{-25}\ \text{kg m s}^{-1}}{6.7 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 394\ \text{m s}^{-1}$$

जो 1400 km h^{-1} से भी ज़्यादा है। यानि भले ही $T \to 0$K तो भी हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत के कारण यह विशाल परम शून्यांकी गति (zero-point motion) बनी रहती है। इस गति से संबद्ध गतिज ऊर्जा इतनी ज़्यादा है कि $T \to 0$K होने पर भी ^{4}He ठोस में नहीं बदलेगी, जब तक कि उस पर 20 atm से भी ज़्यादा का बाह्य दाब न लगाया जाए। यह दाब परमाणुओं को एक-दूसरे के इतने नज़दीक ले आता है कि उनके आकर्षक बन्धन-बल (binding forces) उस ठोस क्रिस्टल को बनाए रखने के लिए पर्याप्त होते हैं।

अब आप एक बोध प्रश्न करना चाहेंगे।

10 मिनट लगाएं **बोध प्रश्न 2**

क) एक परमाणु का औसत जीवनकाल लगभग 10^{-8}s है। उन परमाणुओं द्वारा उत्सर्जित स्पेक्ट्रमी रेखा की प्राकृतिक चौड़ाई ($\Delta\nu$) किस कोटि की है?

ख) एक परमाण्वीय नाभिक की त्रिज्या 5×10^{-15} m है। परमाण्वीय नाभिक में इलेक्ट्रॉन के स्थित होने के लिए उसकी ऊर्जा की क्या निम्नतम सीमा होनी चाहिए?

यहाँ आपको यह बात अच्छी तरह समझ लेनी चाहिए कि अनिश्चितता सिद्धांत द्वारा दी गई इन (सैद्धांतिक) सीमाओं का हमारे मापन यंत्रों की यथार्थता या परिशुद्धता से कुछ लेना-देना नहीं है। बेहतरीन से बेहतरीन यंत्रों पर भी अनिश्चितता सिद्धांत द्वारा दी गई यह सीमा लागू होगी। इस बात को मानने में बहुत से भौतिकीविदों को कठिनाई हुई जिनमें एल्बर्ट आइंस्टीन भी शामिल थे। इसलिए 1930 में ब्रसेल्स में हुई 16वीं साल्वे कांग्रेस (Solvay Congress) में इस सिद्धांत को असफल साबित करने के लिए बहुत से वैचारिक (आदर्श) प्रयोग प्रस्तावित किए गए और उन पर विवाद किया गया लेकिन उन्हें कोई सफलता न मिली। इनमें से कुछ वैचारिक प्रयोगों के विश्लेषण से इस सिद्धांत के भौतिक अर्थ को समझने में बहुत मदद मिलती है। इसलिए अगले भाग में हम इनकी संक्षेप में चर्चा कर रहे हैं।

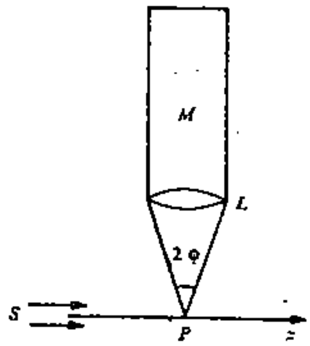
5.3.1 कुछ वैचारिक प्रयोग

यहाँ हम कुछ ऐसे वैचारिक प्रयोगों का वर्णन करेंगे, जिनसे अनिश्चितता सिद्धांत को बेहतर समझने में हमें मदद मिलती है। इन सभी प्रयोगों में यह प्रयास किया गया है कि इस सिद्धांत का वर्जन (violation) करने

वाले तरीकों को खोजा जाए। इसके लिए इन प्रयोगों में यह कोशिश की गई है कि इनके द्वारा एक सूक्ष्मदर्शी कण की स्थिति और संवेग का निर्धारण स्वेच्छ यथार्थता तक किया जा सके।

इलेक्ट्रॉन की स्थिति का मापन : गामा किरण सूक्ष्मदर्शी

सबसे पहले हम हाइज़ेनबर्ग द्वारा चर्चित पहला वैचारिक प्रयोग ले रहे हैं, जिसमें इलेक्ट्रॉन की स्थिति की अधिक से अधिक संभव यथार्थता तक मापन करने की कोशिश की गई है। इस प्रयोग में एक ऐसी व्यवस्था है, जिसमें इलेक्ट्रॉन पर विद्युतचुम्बकीय विकिरण डाला जाता है और फिर उसका प्रतिबिम्ब एक सूक्ष्मदर्शी से देखा जाता है (चित्र 5.4)। ये इलेक्ट्रॉन एक दी हुई दिशा (धनात्मक x-दिशा) में एक सुनिश्चित एकवर्णी कण पुंज के रूप में गति कर रहे हैं। यानी हमें इन इलेक्ट्रॉनों का वेग ठीक-ठीक मालूम है। अब इस किरण पुंज में स्थित किसी इलेक्ट्रॉन की स्थिति का हम कैसे पता लगा सकते हैं? यह उन फ़ोटॉनों का प्रेक्षण करके पता लगाया जा सकता है, जिन्हें वह इलेक्ट्रॉन, सूक्ष्मदर्शी के अंदर प्रकीर्णित करता है। यह साफ़ है कि इलेक्ट्रॉन की स्थिति का जितनी यथार्थता से पता लगाया जा सकता है, वह सूक्ष्मदर्शी की विभेदन क्षमता (resolving power) के बराबर है। इस तरह, यह उस न्यूनतम दूरी के बराबर है, जिस तक सूक्ष्मदर्शी दो वस्तुओं का विभेदन कर सकता है, यानी



चित्र 5.4 : हाइज़ेनबर्ग के गामा किरण सूक्ष्मदर्शी द्वारा इलेक्ट्रॉन की स्थिति का मापन। स्रोत S से निकले फ़ोटॉनों का, P पर स्थित एक इलेक्ट्रॉन द्वारा सूक्ष्मदर्शी M में प्रकीर्णन होता है।

$$\Delta x = \lambda / \sin\phi$$

यहाँ λ इलेक्ट्रॉन के प्रेक्षण के लिए इस्तेमाल किए गए फ़ोटॉन की तरंग दैर्घ्य है और ϕ इलेक्ट्रॉन की स्थिति पर सूक्ष्मदर्शी के द्वारक (aperture) द्वारा अंतरित अर्ध कोण है। यह परिणाम प्रकाशिकी का एक मानक परिणाम है। इस तरह इलेक्ट्रॉन की स्थिति का अधिक से अधिक यथार्थता से मापन करने के लिए हमें कम से कम तरंग दैर्घ्य वाले विकिरण, जैसे कि गामा किरणों, को चुनना चाहिए।

अब इलेक्ट्रॉन का प्रेक्षण किया जा सके, इसके लिए इसे सूक्ष्मदर्शी में कम से कम एक फ़ोटॉन का प्रकीर्णन तो करना ही होगा। प्रकीर्णन प्रक्रिया में फ़ोटॉन, इलेक्ट्रॉन को कुछ संवेग देगा जिससे इलेक्ट्रॉन का प्रतिक्षेपण (recoil) होगा। उदाहरण के लिए, अगर फ़ोटॉन का 90° से प्रकीर्णन होता है तो x-दिशा में प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन को दिया गया संवेग आपतित फ़ोटॉन के संवेग के बराबर होगा यानी h/λ के बराबर होगा। लेकिन इस फ़ोटॉन का 0° और ϕ के बीच किसी भी कोण में प्रकीर्णन हो सकता है। इसलिए प्रकीर्णन के बाद इसके संवेग का x-घटक 0 और $p\sin\phi$ के बीच में कहीं भी हो सकता है, जहाँ p उसका कुल संवेग है। क्योंकि संवेग संरक्षित रहता है, इसलिए x-दिशा में इलेक्ट्रॉन के प्रतिक्षेप संवेग का परिमाण भी इसके बराबर या इससे बड़ी मात्रा से अनिश्चित हो जाता है, यानी

$$\Delta p_x \geq p\sin\phi = \frac{h}{\lambda}\sin\phi$$

इस तरह इन दो अनिश्चितताओं का गुणनफल है

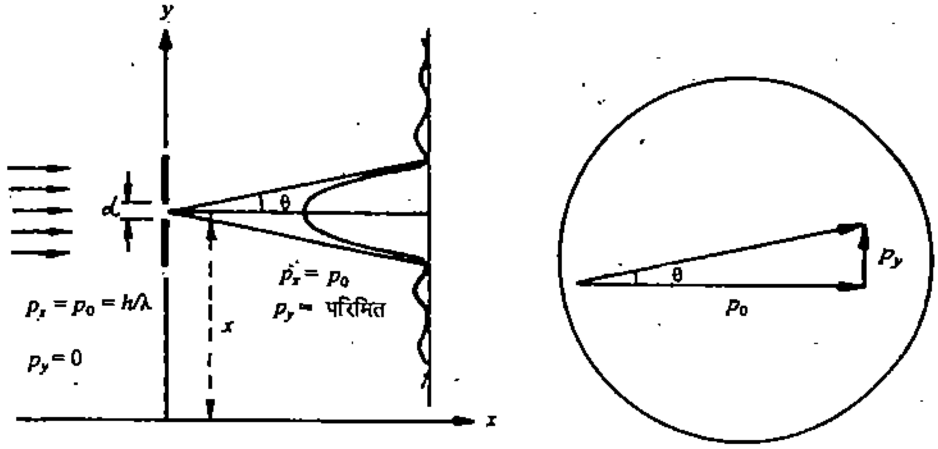
$$\Delta x\,\Delta p_x \geq h$$

यह परिणाम हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता संबंध के संगत है। यह साफ़ है कि λ को छोटा ले लेने से (यानी X-किरणों का प्रयोग करके), Δx को बहुत छोटा बनाया जा सकता है। लेकिन ऐसा करने पर Δp_x के मान में इतनी वृद्धि हो जाएगी कि Δx और Δp_x का गुणनफल हमेशा शून्य से ज्यादा होगा और इसका मान अनिश्चितता संबंध से निर्धारित होगा।

अनिश्चितता संबंध को और गहराई से समझने के लिए, आइए, इन वैचारिक प्रयोगों में सबसे मशहूर एक प्रयोग की चर्चा करें : यह है **एकल-स्लिट विवर्तन** (single slit diffraction) प्रयोग।

एकल-स्लिट विवर्तन प्रयोग

x-दिशा के अनुदिश गतिमान फ़ोटॉनों के एक फ़ोकसित कण किरण पुंज की कल्पना करें जिसके लिए $p_x = p_0 = h/\lambda$ और $p_y = 0$। माना कि यह कण किरण पुंज एक चौड़ाई d की एकल स्लिट पर आपतित होता है (चित्र 5.5)। ये फ़ोटॉन इस स्लिट द्वारा विवर्तित होते हैं और विवर्तन पैटर्न को चित्र 5.5 में दिखाया गया है।



चित्र 5.5 : एकल-स्लिट विवर्तन प्रयोग।

चूंकि इस स्लिट की चौड़ाई d परिमित है, इसलिए y-दिशा में फ़ोटानों की स्थिति में d के बराबर अनिश्चितता है यानी $\Delta y = d$। अब हम y-दिशा में उनके संवेग घटक के बारे में क्या कह सकते हैं?

हम इतना ही जानते हैं कि फ़ोटॉन पर्दे से, विवर्तन पैटर्न के भीतर ही, कहीं न कहीं ज़रूर टकराएंगे। लेकिन हमें यह नहीं मालूम है कि वे ठीक-ठाक कहाँ टकराएंगी। इसलिए संवेग में अनिश्चितता इस पैटर्न के कोणीय परिसर (angular spread) से दी जाती है। क्योंकि ज़्यादातर फ़ोटॉन पर्दे के केन्द्रीय महत्तम की सीमाओं के अंतर्गत ही टकराते हैं, इसलिए हम केन्द्रीय महत्तम के विश्लेषण तक अपने को सीमित रखकर p_y के परिसर (यानी Δp_y) का अन्दाज़ा लगा सकते हैं। चित्र 5.5 से आप देख सकते हैं कि केन्द्रीय महत्तम के लिए p_y का मान $-p_0 \sin\theta$ से $p_0 \sin\theta$ के परिसर में होगा। इसलिए

$$\Delta p_y = 2p_0 \sin\theta$$

अब हम विवर्तन सिद्धांत से जानते हैं कि विवर्तन पैटर्न का कोणीय परिसर स्लिट की चौड़ाई के विलोमानुपाती होता है।

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

जहाँ λ आपतित प्रकाश की तरंग दैर्घ्य है। अतः हमें मिलता है :

$$\Delta y \, \Delta p_y = d\,(2p_0 \sin\theta) = 2p_0\lambda$$

या

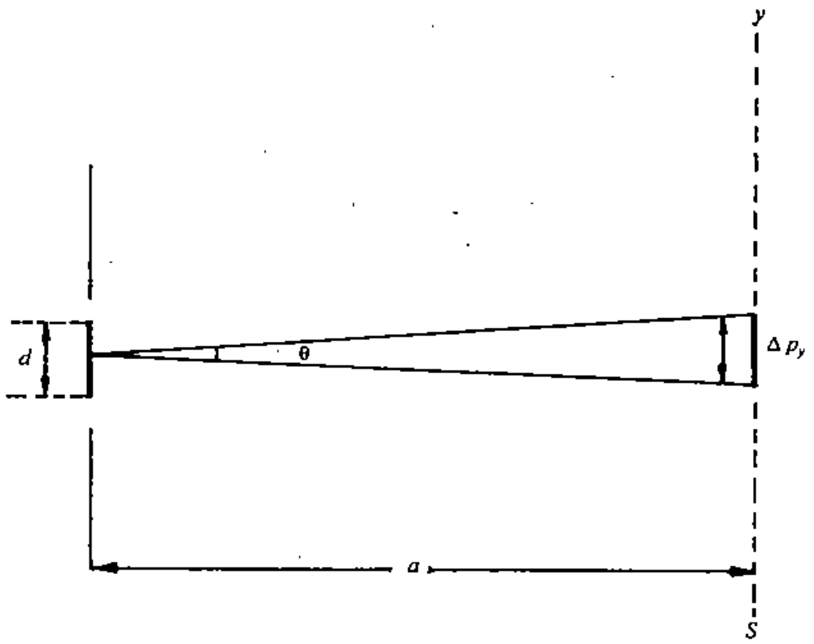
$$\Delta y \, \Delta p_y = 2h \qquad \left(\because \lambda = \frac{h}{p_0}\right)$$

यह परिणाम अनिश्चितता सिद्धांत के संगत है। स्लिट की चौड़ाई कम करने से यानी Δy को कम करने से विवर्तन पैटर्न का परिसर बढ़ जाता है जिससे संवेग में अनिश्चितता बढ़ जाती है। इस तरह एक ही क्षण पर सूक्ष्मदर्शी की स्थिति और संवेग का यथार्थ मापन करना असंभव है।

अंत में हम **द्वि-स्लिट** (double slit) **प्रयोग** का वर्णन करेंगे जिसकी अनिश्चितता सिद्धांत को स्थापित करने में महत्वपूर्ण भूमिका है।

द्वि-स्लिट प्रयोग

द्वि-स्लिट प्रयोग में एकवर्णी सूक्ष्मदर्शी कणों (जैसे फ़ोटॉनों, इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों आदि) का एक कण किरण पुंज दो स्लिटों से गुज़रकर नज़दीक रखे एक स्फुरदीप्त (fluorescent) पर्दे S पर आपतित होता है (देखें चित्र 5.6)।



चित्र 5.6 : द्वि-स्लिट प्रयोग।

अब अगर कुछ देर के बाद हम पर्दे से टकरा रहे कणों की कुल संख्या को स्थिति के फलन के रूप में दिखाएं तो हमें एक व्यतिकरण पैटर्न मिलता है। यह पैटर्न तरंगों का अभिलक्षण है और इसकी व्याख्या इस तरह की जा सकती है। कण के संगत द्रव्य तरंगें इन दो स्लिटों पर बंट जाती हैं और फिर उनका एक-दूसरे से व्यतिकरण होता है। लेकिन यहां हम आपको एक चेतावनी देना चाहेंगे। ये द्रव्य तरंगें क्लासिकी तरंगों जैसी नहीं हैं। क्योंकि ये कण स्फुरदीप्त पर्दे पर कण की ही तरह टकराते हैं। जब भी कोई कण पर्दे पर टकराता है, तो हमें एक स्थानीयित फ़्लैश (या स्फुर) दिखाई देता है। लेकिन बड़ी संख्या में इन कणों द्वारा बनाए गए सभी फ़्लैश मिल कर एक तरंग व्यतिकरण पैटर्न की तरह दिखते हैं। लेकिन क्या इससे यह समझा जाए कि यह तरंगनुमा व्यवहार तभी दिखता है, जबकि कणों का एक समूह पर्दे से टकराए? तब क्या होता है, जब इस द्वि-स्लिट पर केवल एक कण आता है?

इस सवाल का जवाब देने के लिए, आइए, हम कण किरण पुंज को इतना दुर्बल कर दें कि एक क्षण पर केवल एक ही कण इस द्वि-स्लिट पर आए। क्या अब भी हमें व्यतिकरण पैटर्न मिलता है? क्वांटम यांत्रिकी के मुताबिक हां, ऐसा ही होता है और प्रयोगों से भी इस बात की पुष्टि होती है। इस तस्वीर को आसानी से मानना मुश्किल ही है। आप पूछ सकते हैं कि क्या कोई एकल कण भी बंट कर दोनों स्लिटों से गुज़र सकता है? और फिर उसके दोनों हिस्सों का एक दूसरे से व्यतिकरण हो सकता है? क्वांटम यांत्रिकी के मुताबिक इन सभी सवालों का जवाब है कि हां, ऐसा हो सकता है। जैसा कि पाल डिरैक ने कहा, "प्रत्येक फ़ोटॉन (या सूक्ष्मदर्शी कण) का सिर्फ़ अपने आप से व्यतिकरण होता है।'' क्यों न हम एक मापन करके यह पता लगाएं कि यह बात सही है कि नहीं?

ऐसा करने का सबसे आसान तरीका है कि हम एक फ़्लैशलाइट की मदद से कण को देखें। हम इन दोनों स्लिटों पर फ़्लैशलाइट चमका सकते हैं यह देखने के लिए कि कण इनमें से किस स्लिट से गुज़र रहा है। तब हम क्या पाते हैं? हम पाते हैं कि व्यतिकरण पैटर्न नष्ट हो जाता है। इस परिणाम की हम कैसे व्याख्या करें? इस परिणाम को अनिश्चितता सिद्धांत की मदद से समझा जा सकता है। जैसे ही हम कण

की स्थिति का पता लगाते हैं और यह निर्धारित करते हैं कि वह किस स्लिट से गुज़रा, हम उसके संवेग के बारे में सब जानकारी खो बैठते हैं। जैसा कि हमने गामा किरण सूक्ष्मदर्शी प्रयोग में देखा, कण का प्रेक्षण करने के लिए इस्तेमाल किए गए फ़ोटॉन से कण के संघट्टन के कारण उस कण का संवेग प्रभावित होता है और उसमें एक अनिश्चितता आ जाती है। गणितीय रूप से इस बात को हम इस तरह कह सकते हैं : यह प्रेक्षण करने के लिए कि कण दो स्लिटों में से कौन-सी स्लिट से गुज़रा, फ़ोटॉन की तरंग दैर्घ्य, इन दो स्लिटों के बीच की दूरी d के आधे से भी कम होनी चाहिए : ($\Delta y < d/2$) इसलिए इसका संवेग ($= h/\lambda$), $2h/d$ से ज़्यादा होना चाहिए (दे ब्रॉग्ली संबंध के मुताबिक)। इस फ़ोटॉन और कण के संघट्टन के कारण, कण का संवेग Δp_y परिमाण से अनिश्चित हो जाएगा। Δp_y का मान अनिश्चितता सिद्धांत से निर्धारित किया जाता है।

कण के संवेग में इस अनिश्चितता के कारण पर्दे पर उसकी स्थिति में भी अनिश्चितता आ जाती है। जैसाकि चित्र 5.6 में दिखाया गया है, इसका मान है :

$$\frac{\Delta y}{a} = \frac{\Delta p_y}{p_0} \geq \frac{2\hbar}{dp_0} = \frac{\lambda_p}{d\pi} \quad (\because \Delta y \, \Delta p_y \gtrsim \hbar, \Delta y < d/2)$$

या

$$\Delta y \gtrsim \frac{a\lambda_p}{d\pi}$$

जहाँ λ_p ($= h/p_0$) कण की दे ब्रॉग्ली तरंग दैर्घ्य है। अब संपोषी व्यतिकरण के लिए प्रतिबंध है :

$$d \sin \theta_n = n\lambda_p$$

जिससे कि दो संलग्न उच्चिष्ठों के बीच की दूरी है :

$$y_m = a \sin \theta_{n+1} - a \sin \theta_n = a \frac{\lambda_p}{d}$$

इस तरह,

$$\Delta y \gtrsim \frac{y_m}{\pi}$$

दूसरे शब्दों में, इलेक्ट्रॉन की स्थिति में अनिश्चितता (जो उसे स्लिट के निकट देखने के कारण उत्पन्न हुई) की कोटि दो संलग्न उच्चिष्ठों के बीच की दूरी के बराबर होती है। इस अनिश्चितता के कारण पर्दे पर दिख रहे व्यतिकरण पैटर्न का y-दिशा में ऊपर-नीचे लगभग उतनी दूरी से विस्थापन होता है, जो दो संलग्न उच्चिष्ठों के बीच की दूरी के बराबर है। इस तरह का यादृच्छिक (random) विस्थापन व्यतिकरण पैटर्न को नष्ट करने के लिए पर्याप्त है जिसकी वजह से व्यतिकरण नहीं दिखाई देता। यानी अगर हम यह पता लगाने की कोशिश करें कि कण किस स्लिट से गुज़रा तो व्यतिकरण पैटर्न नष्ट हो जाता है। बात दरअसल यह है कि जैसे ही हम कण के संवेग के बारे में जानकारी खो बैठते हैं, वैसे ही हमें दे ब्रॉग्ली संबंध के मुताबिक उसके तरंग दैर्घ्य के बारे में भी जानकारी खो देनी चाहिए। लेकिन अगर पर्दे पर व्यतिकरण फ्रिंजें उपस्थित हों, तो उनके बीच की दूरी से हम तरंग दैर्घ्य का मापन कर पाएंगे। इसलिए फ्रिंज पैटर्न नहीं बना रह सकता – व्यतिकरण पैटर्न नष्ट हो जाता है।

पूरकता सिद्धांत

यहाँ ध्यान देने वाली बात यह है कि स्थिति और संवेग मापन वस्तुतः एक-दूसरे के पूरक (complementary) हैं, जैसा कि पहलेपहल बोर ने बताया। वे परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) प्रक्रियाएं हैं। इसका मतलब यह है कि हम एक बार में व्यतिकरण पैटर्न से कण की तरंग दैर्घ्य का मापन कर सकते हैं और इस तरह कण का संवेग निकाल सकते हैं। लेकिन तब हम यह नहीं बता सकते कि कण किस स्लिट से गुज़रा। या फिर हम कण की स्थिति के बारे में ठीक ठीक पता लगा सकते हैं और तब तरंग दैर्घ्य और संवेग के बारे में कुछ भी नहीं बता पाएंगे। आपने देखा ही है कि जब हम यह पता लगाने की कोशिश करते हैं कि कण किस स्लिट से गुज़रा तो व्यतिकरण पैटर्न नष्ट हो जाता है और इस तरह हमारे पास तरंग दैर्घ्य और संवेग के बारे में कोई सूचना नहीं रहती। सन् 1928 में अपने **पूरकता सिद्धान्त** (complementarity principle) द्वारा बोर ने इसी स्थिति का वर्णन किया : उन्होंने कहा कि

एक भौतिक निकाय के कण और तरंग आयाम एक-दूसरे के पूरक हैं — जब हम कण को स्थानीयित करते हैं (यानी पता लगाते हैं कि कण किस स्लिट से गुज़रा) तो हम कण के पहलू को उजागर कर रहे होते हैं। और जब हम कण को स्थानीयित नहीं कर रहे होते (यानी इस पर ध्यान नहीं देते कि कण किस स्लिट से गुज़रा) तो हम उसके तरंग पहलू को उजागर कर रहे होते हैं। लेकिन हम दोनों ही पहलुओं को एक ही साथ प्रत्यक्ष नहीं कर सकते — वे एक दूसरे के पूरक हैं।

अब आप पूछ सकते हैं कि क्या ऐसा है कि सूक्ष्मदर्शी कण तरंग और कण दोनों ही हैं और हमें किसी विशिष्ट प्रायोगिक व्यवस्था द्वारा उनका केवल एक ही गुण दिखाई देता है? यानी प्रत्येक क्षण पर उनके सुनिश्चित स्थिति और रैखिक संवेग होते हैं, लेकिन हम उनका एक साथ मापन नहीं कर सकते? या फिर ऐसा है कि कणों के लिए एक ही क्षण पर सुनिश्चित स्थिति और संवेग होते ही नहीं? एल्बर्ट आइंस्टीन इनमें से पहला विचार रखते थे कि कण के निश्चित संवेग और स्थिति होते हैं पर हम उनका यथार्थ मापन नहीं कर पाते और इसे उन्होंने कभी भी नहीं त्यागा। लेकिन बोर और हाइज़ेनबर्ग ने दूसरा दृष्टिकोण अपनाया। क्वांटम यांत्रिकी की उनकी व्याख्या को कोपेनहैगेन व्याख्या भी कहा जाता है। इस तरह अनिश्चितता सिद्धांत इस दृष्टिकोण का प्रतिपादन करता है कि ये अनिश्चितताएं प्रकृति की सहज (inherent) सीमाओं के कारण उत्पन्न होती हैं; ये क्वांटम संसार की प्रकृति में अंतर्निहित हैं। भले ही हमारे मापन करने वाले यंत्र या मापन के तरीके कितने भी परिष्कृत क्यों न हों, इन अनिश्चितताओं से बचा नहीं जा सकता। साफ़ तौर पर हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत, कण-तरंग द्वैतवाद का ही परिणाम है। यह परिणाम इस बात का भी द्योतक है कि क्वांटम यांत्रिकी भले ही अपनेआप में एक संपूर्ण सिद्धांत है, फिर भी क्लासिकी भौतिकी के मुकाबले यह एक भौतिक निकाय का अपूर्ण विवरण ही दे पाती है। और यह वर्णन पूरकता सिद्धांत से निर्धारित होता है।

अनिश्चितता सिद्धांत, क्वांटम यांत्रिकी का एक मूलभूत सिद्धांत है। आपने यहाँ भी प्लांक नियतांक की भूमिका पर गौर किया होगा। इसका मान इतना कम है कि अनिश्चितता सिद्धांत द्वारा लागू की गई सीमाएं केवल सूक्ष्मदर्शी कणों के संसार में महत्व रखती हैं। यानी कि यह सिद्धांत परमाणुओं, अणुओं, नाभिकीय और नाभिकों के अंदर पाए जाने वाले कणों पर ही लागू होता है। सूक्ष्मदर्शी कणों के लिए इस सिद्धांत की मदद से हम बहुत सारी प्राकृतिक परिघटनाओं को समझ सकते हैं। आइए अब इस सिद्धांत के कुछ रोचक अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ें।

5.3.2 अनिश्चितता सिद्धांत के कुछ अनुप्रयोग

क) एक वस्तु का पथ

किसी कण के पथ की सटीक परिभाषा देने के लिए हमें उसके एक ही क्षण पर सुनिश्चित स्थिति और वेग मालूम होने चाहिए। लेकिन अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार यह वर्जित है। इसलिए क्वांटम यांत्रिकी में किसी कण के पथ या कक्षा की परिभाषा नहीं दी जा सकती। इससे हाइड्रोजन परमाणु का बोर सिद्धांत भी अवैध साबित होता है क्योंकि यह कक्षीय गति कर रहे इलेक्ट्रॉनों की एक ही क्षण पर स्थिति और वेग निर्धारित करता है।

ख) एक वस्तु का कोणीय संवेग

किसी वस्तु के कोणीय संवेग की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है कि **L** स्थिति **r** और संवेग **p** का सदिश गुणनफल है। अब चूंकि **r** और **p** का एक ही क्षण पर मान पता नहीं होता, इसलिए **L** भी अनिश्चित होता है। लेकिन आप खंड 3 की इकाई 9 में पढ़ेंगे कि L^2 (= **L**.**L**) के सुनिश्चित मान हो सकते हैं।

ग) परमाणु का आमाप

आप अनिश्चितता सिद्धांत का इस्तेमाल करके एक परमाणु के आमाप का अनुमान लगा सकते हैं। इसके लिए, आइए, हम हाइड्रोजन परमाणु का उदाहरण लें। हाइड्रोजन परमाणु में एक प्रोटॉन और एक इलेक्ट्रॉन होते हैं। अगर हम परमाणु का आकार लगभग a के बराबर मान लें तब (क्योंकि इलेक्ट्रॉन

परमाणु के भीतर है) इलेक्ट्रॉन की स्थिति में अनिश्चितता लगभग a है। अतः हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत के मुताबिक, इलेक्ट्रॉन के संवेग में अनिश्चितता है $\Delta p = \hbar/a$। इलेक्ट्रॉन की कुल (ग़ैर-आपेक्षिकीय) ऊर्जा है

$$E = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a}$$

एक स्थायी परमाणु के लिए, E न्यूनतम होगा। इसलिए हम p की जगह $\hbar/a$ रखते हैं और dE/da को शून्य के बराबर रखते हैं। इससे हमें मिलता है :

$$a = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_0 e^2} = 0.5\,\text{Å}$$

और इसके संगत ऊर्जा E का मान है

$$E = -\frac{1}{2}\frac{m_0 e_0^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = -13.6\,\text{eV}$$

ऊर्जा का यह ऋणात्मक चिह्न बताता है कि इलेक्ट्रॉन प्रोटॉन से बद्ध है। यहाँ आप ध्यान दीजिए कि यह मान प्रायोगिक आंकड़ों के बहुत नज़दीक है।

घ) नाभिक के अंदर इलेक्ट्रॉनों का अस्तित्व

बोध प्रश्न 2 ख में आपने अनिश्चितता सिद्धांत का इस्तेमाल करके यह दिखाया है कि इलेक्ट्रॉन नाभिकों के अंदर नहीं रह सकते। नाभिक के आकार का परिमाण लगभग एक 1Fm (10^{-15}m) होता है। इसलिए इलेक्ट्रॉन अगर नाभिक के अंदर स्थित हों तो उनकी स्थिति में अधिकतम अनिश्चितता है $\Delta x = 10^{-15}\,\text{m}$। अतः $\Delta p = \hbar/\Delta x = 10^{-19}\,\text{Js m}^{-1}$। कुल ऊर्जा की हम इस संबंध से गणना कर सकते हैं :

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

या $E = pc$ क्योंकि m_0c^2, pc के मुकाबले बहुत कम है। इस तरह हमें मिलता है :

$$E = 3 \times 10^{-11}\ \text{J} = (3/1.6) \times 10^8\ \text{eV} = 200\ \text{MeV}$$

लेकिन प्रयोगों से हमें पता चलता है कि नाभिक के β-क्षय में उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जाएं केवल 2 से 3 MeV होती हैं। इससे हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि क्षय से पहले इलेक्ट्रॉन, नाभिक में मौजूद नहीं थे।

च) शून्य बिन्दु ऊर्जा

अणुगतिक सिद्धांत के अनुसार, क्रिस्टल में अपनी माध्य स्थितियों के इर्द-गिर्द दोलन कर रहे परमाणुओं की गतिज ऊर्जाएं, परम तापमान के समानुपाती होती हैं। अतः इस सिद्धांत के अनुसार, परम शून्य तापमान पर परमाणु दोलन करना बंद कर देंगे और अपनी लैटिस स्थितियों पर अचल रहेंगे। लेकिन अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार एक ही क्षण पर संपूर्ण यथार्थता के साथ किसी सूक्ष्मदर्शी कण की स्थिति और संवेग निर्धारित नहीं किए जा सकते। इसका मतलब यह हुआ कि परम शून्य तापमान पर भी परमाण्वीय दोलित्रों में दोलन गति के कारण कुछ ऊर्जा तो रहेगी ही और यह ऊर्जा इतनी होगी कि इस स्थिति के लिए अनिश्चितता सिद्धांत का पालन हो सके। परम तापमान पर परमाण्वीय दोलित्र की ऊर्जा को **शून्य बिन्दु ऊर्जा** (zero point energy) कहते हैं। परम शून्य तापमान के बहुत नज़दीक के तापमानों पर (0.001K पर) परमाणु की गति पर किए गए प्रयोगों से यह पता चलता है कि शून्य बिन्दु ऊर्जा एक वास्तविकता है।

इस भाग का अंत आप एक बोध प्रश्न करके करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3

5 मिनट लगाएं

द्रव्यमान m का एक रैखिक आवर्ती दोलक, आवृत्ति $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ से दोलन करता है, जहाँ k उसका बल नियतांक है। अनिश्चितता सिद्धांत का इस्तेमाल करके सिद्ध करें कि दोलक की न्यूनतम ऊर्जा $h\nu / 2$ है।

अब हम इस इकाई की सामग्री का सार प्रस्तुत कर रहे हैं।

5.4 सारांश

- कण-तरंग द्वैतवाद से और कणों को स्थानीयित करने पर हमें **तरंग पिटक** (wave packet) की संकल्पना मिलती है। एक कण को तरंगों के एक समूह द्वारा निरूपित किया जा सकता है जिसे तरंग पिटक कहते हैं। तरंग पिटक का **समूह वेग** (group velocity) v_g कण के वेग v के बराबर होता है और **प्रावस्था वेग** (phase velocity) v_p का मान होता है c^2/v.
- एक तरंग पिटक की संकल्पना से हाइज़ेनबर्ग का अनिश्चितता सिद्धांत भी प्राप्त होता है, जिसके मुताबिक x और p_x या E और t जैसे दो विहित संयुग्मी चरों का संपूर्ण यथार्थता के साथ एक साथ मान निर्धारण नहीं किया जा सकता। इन चरों के साथ संबद्ध अनिश्चितताओं का गुणनफल यानी $\Delta x \, \Delta p_x$ और $\Delta E \, \Delta t$ प्लांक नियतांक h की कोटि का है.

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq h$$

$$\Delta E \, \Delta t \geq h$$

- अनिश्चितता सिद्धांत के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम इस प्रकार हैं :
  - क्वांटम भौतिकी में कण के पथ की परिभाषा नहीं दी जा सकती।
  - नाभिक के अंदर इलेक्ट्रॉन नहीं होते।
  - परम शून्य तापमानों पर भी परमाण्वीय दोलित्रों की एक निश्चित निम्नतम ऊर्जा होती है, जिसे **शून्य बिन्दु ऊर्जा** कहते हैं।
- बहुत से वैचारिक प्रयोगों, जैसे **गामा-किरण सूक्ष्मदर्शी प्रयोग**, **एकल-स्लिट विवर्तन प्रयोग** और **द्वि-स्लिट विवर्तन प्रयोग** द्वारा अनिश्चितता सिद्धांत की वैधता को पूरी तरह स्थापित किया जा चुका है।

5.5 अंत में कुछ प्रश्न

30 मिनट लगाएं

1. सिद्ध करें कि अनिश्चितता सिद्धांत को इस रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है : $\Delta L \, \Delta\theta \geq h$ जहाँ ΔL कण के कोणीय संवेग में अनिश्चितता है और $\Delta\theta$ उसकी कोणीय स्थिति में अनिश्चितता है।

2. हाइड्रोजन परमाणु की त्रिज्या 5.3×10^{-11} m है। अनिश्चितता सिद्धांत का प्रयोग करके इस परमाणु में स्थित इलेक्ट्रॉन की न्यूनतम गतिज ऊर्जा की गणना करें।

3. एक परमाणु 10^{-8} s के लिए उत्तेजित अवस्था में रहता है। उसकी ऊर्जा में अनिश्चितता की गणना करें।

4. मान लीजिए कि एक सूक्ष्मदर्शी वस्तु x अक्ष के अनुदिश गतिमान है और क्षणों $t = 0$ और $t = t$ पर उसकी स्थिति में अनिश्चितताएं क्रमश: Δx_0 और Δx हैं। सिद्ध कीजिए कि Δx, t के समानुपाती है

और Δx_0 के विलोमानुपाती है। इस समस्या को हल करने पर आपको किसी वस्तु की गति से जुड़ी तरंगों के प्रसार के बारे में क्या जानकारी मिलती है?

5.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. प्रावस्था वेग

$$v_p = \frac{c^2}{v_g}$$

और

$$v_g = \frac{p}{m}$$

जहाँ

$$p = (m^2c^2 - m_0^2c^2)^{1/2} = (m^2 - m_0^2)^{1/2}c$$

और

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}}{9 \times 10^{16}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}} = 1.778 \times 10^{-30}\,\text{kg}$$

अत:

$$p = [(17.8)^2 - (9.11)^2]^{1/2} \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8\ \text{kg m s}^{-1}$$

$$= 4.58 \times 10^{-22}\ \text{kg ms}^{-1}$$

$$\therefore\ v_g = \frac{4.58 \times 10^{-22}\ \text{kg m s}^{-1}}{1.778 \times 10^{-30}\,\text{kg}}$$

$$= 2.576 \times 10^8\,\text{m s}^{-1}$$

और $v_p = \dfrac{9}{2.576} \times 10^8\text{m s}^{-1} = 3.5 \times 10^8\text{m s}^{-1}$

2. क) प्राकृतिक रेखा चौड़ाई की कोटि है

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\,\Delta t} = \frac{10^8}{2\pi}\ \text{Hz} = 1.6 \times 10^7\ \text{Hz}$$

ख) इलेक्ट्रॉन की स्थिति में अनिश्चितता है

$\Delta x = 5 \times 10^{-15}$ m अत :

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \geq \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\text{Js}}{2\pi \times 5 \times 10^{-15}\,\text{m}} \geq 2.11 \times 10^{-20}\,\text{kg m s}^{-1}$$

अगर संवेग में इतनी अनिश्चितता है तो संवेग का परिमाण भी इसी कोटि का होगा। इससे यह कहा जा सकता है कि इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा (K.E.) उसकी विराम ऊर्जा से कहीं ज़्यादा है और हम लिख सकते हैं

K.E. $= pc$ जिससे

$$\text{K.E.} = pc \geq (2.11 \times 10^{-20}\,\text{kg m s}^{-1}) \times (3 \times 10^8\,\text{m s}^{-1})$$

$$\geq 6.33 \times 10^{-12}\,\text{J}$$

$$\geq 39\,\text{MeV}$$

इस तरह अगर इलेक्ट्रॉन नाभिक का घटक हो तो उसकी गतिज ऊर्जा 39 MeV से ज़्यादा होनी चाहिए। प्रयोगों से पता चलता है कि परमाणु में इलेक्ट्रॉन इस ऊर्जा का एक अंश मात्र ही ऊर्जा रखते हैं। इससे हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि परमाण्वीय नाभिक में इलेक्ट्रॉन नहीं होते।

3. एक रैखिक आवर्ती दोलक की ऊर्जा है

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

यह गति का अचर है। हम E के इस नियत मान को गति के एक चक्र पर गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं के औसत मान के पदों में भी लिख सकते हैं

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle$$

एक दोलन करते हुए कण के लिए x और p के औसत मान शून्य हो जाने चाहिए। इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + (\Delta x)^2 \equiv (\Delta x)^2$$

और $\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 + (\Delta p)^2 = (\Delta p)^2 = \left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2$

इस प्रकार

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \frac{\hbar^2}{8m (\Delta x)^2} + \frac{k}{2} (\Delta x)^2$$

क्योंकि अनिश्चितता सिद्धांत से $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$। अब दोलक की न्यूनतम ऊर्जा का पता लगाने के लिए हम लिखते हैं

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = 0$$

या

$$-\frac{\hbar^2}{4m (\Delta x)^3} + k (\Delta x) = 0$$

या

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{4mk}\right)^{1/2}$$

न्यूनतम ऊर्जा है :

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{4mk}{\hbar^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\hbar^2}{4mk}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\hbar}{4} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} + \frac{\hbar}{4} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \frac{h}{2 (2\pi)} \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

या $E_{min} = \dfrac{h\nu}{2}$, चूंकि $\nu = \dfrac{1}{2\pi} \left(\dfrac{k}{m}\right)^{1/2}$

। में कुछ प्रश्न

माना कि कण त्रिज्या r के वृत्त में गतिमान है। अगर कोणीय स्थिति $\Delta\theta$ के संगत Δx चाप की लम्बाई है तो हम समीकरण (5.6) को इस तरह लिख सकते हैं

$$r \Delta \theta \, m \, \Delta v \geq \hbar$$

या

$$\Delta \theta \, m r \Delta v \geq \hbar$$

लेकिन कण के लिए $L = mvr$ और $\Delta L = m \Delta v r$ चूंकि m और r नियत हैं। अतः हमें मिलता है

$$\Delta L \Delta \theta \geq \hbar$$

2. इलेक्ट्रॉन की स्थिति में अनिश्चितता है

$$\Delta x = 5.3 \times 10^{-11}\,\text{m}$$

और

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\,\text{Js}}{5.3 \times 10^{-11}\text{m}} = 1.99 \times 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}$$

इतने कम परिमाण के संवेग वाले इलेक्ट्रॉन का व्यवहार लगभग क्लासिकी कण जैसा ही होता है, $\left[\text{चूंकि } \lambda = \frac{h}{p} \approx 10^{-10}\,\text{m}\right]$ और उसकी गतिज ऊर्जा है :

$$\frac{p^2}{2m} \geq \frac{(1.99 \times 10^{-24})^2\,\text{kg}^2\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{2 \times (9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg})} = 2.2 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.7\text{eV}$$

3. परमाणु की ऊर्जा में अनिश्चितता है

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.054 \times 10^{-34}\,\text{Js}}{10^{-8}\,\text{s}} = 1.054 \times 10^{-26}\ \text{J}$$

4. यदि सूक्ष्मदर्शी कण से संबद्ध तरंग पिटक का समूह वेग v_g हो तो समय t पर

$$\Delta x = v_g t = \frac{p_0}{m} t = \frac{h}{\lambda_0 m} t$$

जहाँ λ_0, क्षण $t = 0$ पर तरंग पिटक की प्रारंभिक तरंग दैर्घ्य है। यह Δx_0 के बराबर है जो कि क्षण $t = 0$ पर कण की स्थिति में अनिश्चितता है। इस तरह हमें मिलता है

$$\Delta x = \frac{h}{m} \quad \frac{t}{\Delta x_0}$$

यह परिणाम हमें बताता है कि Δx, यानी तरंग पिटक का परिसर समय के साथ बढ़ता है। प्रारंभ में तरंग पिटक जितना संकरा होता है, उतनी ही तेजी से वह फैलता है। ऐसा अनिश्चितता सिद्धांत के कारण ही होता है। अगर Δx_0 छोटा हो, तो उसके संवेग और परिणामतः वेग में अनिश्चितता ज़्यादा होगी $\left(\Delta v \approx \frac{\hbar}{m\,\Delta x_0}\right)$। इसका मतलब यह है कि तरंग पिटक में औसत समूह वेग p_0/m से कहीं अधिक मान वाले वेगों की तरंगें होंगी। वेग की इस अनिश्चितता के कारण, कण द्वारा तय की गई दूरी में भी $\Delta x(t)$ के बराबर अनिश्चितता होगी, यानी उसका परिसर बहुत अधिक होगा।

इकाई 6 श्रोडिन्गर समीकरण

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

इकाई 4 में आपने पढ़ा कि एक सूक्ष्मदर्शी कण को एक द्रव्य तरंग के रूप में निरूपित किया जाता है जिसकी तरंग दैर्घ्य दे ब्रॉग्ली संबंध से दी जाती है। अब सवाल उठता है कि हम एक ऐसे कण को या ऐसे कणों के निकाय की गति का वर्णन कैसे करें? ज़ाहिर है कि इसके लिए हम न्यूटन के गति के नियमों का इस्तेमाल नहीं कर सकते। यानी क्वांटम यांत्रिकीय कणों की गति के वर्णन के लिए हमें एक नए सिद्धांत की ज़रूरत है। यह नया सिद्धांत कणों की तरंग प्रकृति के संगत होना चाहिए। साथ ही यह स्थूल कणों की गति के लिए न्यूटनी यांत्रिकी में भी समानीत होना चाहिए। याद करें कि यह प्रतिबंध आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत से मिलता-जुलता है जो प्रकाश के वेग से काफ़ी कम वेगों के लिए न्यूटनी यांत्रिकी में समानीत हो जाता है।

इस सिलसिले में हम आपको एक रोचक कहानी सुनाना चाहेंगे। 1926 में दे ब्रॉग्ली तरंगों पर हुए एक सेमिनार के अंत में भौतिकीविद् पीटर डिबाय (Peter Debye) ने एक और भौतिकीविद् को कहा कि अगर द्रव्य वास्तव में तरंग है, तो द्रव्य तरंग का वर्णन करने के लिए एक तरंग समीकरण भी होना चाहिए। डिबाय तो इस बात को कहकर तुरंत ही भूल गए। लेकिन दूसरे भौतिकीविद्, इर्विन श्रोडिन्गर (Erwin Schrödinger) ने द्रव्य तरंगों की तरंग समीकरण खोज निकाली। इस समीकरण को उनके नाम पर **श्रोडिन्गर समीकरण** (Schrödinger Equation) कहा जाता है।

इस इकाई में आप एकविम श्रोडिन्गर समीकरण के बारे में पढ़ेंगे और साथ ही इसके हलों के बारे में भी पढ़ेंगे। हम इन हलों के भौतिक अर्थ की भी चर्चा करेंगे। ये हल कुछ ख़ास प्रतिबंधों के अधीन ही मान्य होते हैं, इसलिए आप इन प्रतिबंधों के बारे में भी इस इकाई के अंतिम भाग में पढ़ेंगे। इस खंड में एक परिशिष्ट भी दिया गया है, जो यहाँ इस्तेमाल किए गए सम्मिश्र बीजगणित (complex algebra) की संकल्पनाओं के बारे में है। अगली इकाई में हम क्वांटम यांत्रिकीय निकायों का वर्णन करने के एक और तरीके की, जिसे हाइज़ेनबर्ग ने दिया था, चर्चा करेंगे। इस विधि में संकारकों और प्रेक्षणीय राशियों का इस्तेमाल किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- एकविम कालाश्रित श्रोडिन्गर समीकरण लिख सकेंगे और उससे काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण की व्युत्पत्ति कर सकेंगे,
- तरंग फलन की सांख्यिकीय व्याख्या दे सकेंगे,

- प्रायिकता धारा घनत्व के लिए सांतत्य समीकरण की व्युत्पत्ति कर सकेंगे,
- किसी दिए गए तरंग फलन का प्रसामान्यीकरण कर सकेंगे,
- एक दिए हुए तरंग फलन पर परिसीमा प्रतिबंध लागू कर सकेंगे।

6.2 एकविम श्रोडिन्गर समीकरण

आप यह तो जानते ही हैं कि तरंग प्रकृति हर कण का सहज, अन्तर्जात गुणधर्म है। अब हमें एक ऐसे तरंग समीकरण की खोज करनी है जो इस कण से संबद्ध द्रव्य तरंगों के समय के साथ परिवर्तन का वर्णन कर सके। इकाई 5 में आपने जाना कि किसी कण को स्थानीयित (localise) करने का एक तरीका यह है कि तरंगों के समूह से एक तरंग पिटक बनाया जाए। लेकिन उसी इकाई में अंतिम प्रश्न 4 को हल करके आपने यह भी देखा कि एक तरंग पिटक का समय के साथ प्रसार होता है। इसका मतलब यह है कि एक तरंग पिटक द्वारा कण का निरूपण नहीं किया जा सकता। इसलिए क्वांटम यांत्रिकी में यह अभिगृहीत दिया जाता है

अभिगृहीत 1 : निकाय का वर्णन

प्रत्येक कण (या कणों के निकाय) को एक ''तरंग फलन'' द्वारा निरूपित किया जाता है, जो स्थानिक निर्देशांकों और समय का फलन होता है। यह तरंग फलन उस निकाय के बारे में जो कुछ भी जाना जा सकता है, उसका निर्धारण करता है।

कण की एकविम गति के लिए इस तरंग फलन को हम प्रतीक $\psi(x, t)$ से दिखा सकते हैं। अब आप पूछेंगे कि x और t के पदों में $\psi(x, t)$ का क्या स्वरूप होता है? इस सवाल का जवाब देने के लिए आइए, हम एक क्लासिकी (स्थूल) कण की गति समझें, जो किसी बल के अधीन चल रहा है। समय के साथ उसकी गति का वर्णन न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा किया जा सकता है जो कि एक अवकल समीकरण है। इसी तरह क्लासिकी विद्युतचुम्बकत्व के मैक्सवेल समीकरण भी अवकल समीकरण हैं। चूंकि सभी वस्तुएं कण और तरंग दोनों ही की प्रकृति रखती हैं, इसलिए यह उम्मीद करना स्वाभाविक है कि क्वांटम यांत्रिकीय तरंग फलन भी किसी अवकल समीकरण को संतुष्ट करता होगा, जिसमें x और t के सापेक्ष अवकलज उपस्थित होंगे।

चित्र 6.1 : इर्विन श्रोडिन्गर, 1871–1961, ऑस्ट्रिया के भौतिकीविद् थे। वे भी क्वांटम यांत्रिकी की आधारशिला रखने वालों में एक थे। उन्हें 1933 में नोबेल पुरस्कार मिला।

इस तरह की अवकल समीकरण की खोज करने का श्रेय इर्विन श्रोडिन्गर को जाता है (चित्र 6.1)। उन्होंने इस समीकरण की खोज कैसे की? इसका उत्तर है कि यह उनका अंतर्ज्ञान (intuition) था कि उन्होंने तब तक की समीकरणों की परंपरा से हटकर यह खोज की। श्रोडिन्गर समीकरण क्वांटम यांत्रिकी की सफलतम समीकरणों में से एक है क्योंकि यह ऐसे अनेकों परिणामों का पूर्वानुमान लगाती है जिनकी प्रयोगों द्वारा जांच की गई। अब हम आपको संक्षेप में यह बताएंगे कि श्रोडिन्गर ने अपनी समीकरण का यह रूप कैसे खोजा।

आइए सबसे पहले हम इस समीकरण को स्थापित करने के लिए कुछ पूर्व-प्रतिबंध लिखें। सबसे पहले तो द्रव्यमान m, ऊर्जा E और संवेग p वाले कण के लिए यह समीकरण, निम्न संबंधों के संगत होना चाहिए:

(i) दे ब्रॉग्ली संबंध $\lambda = \dfrac{h}{p}$ (6.1)

(ii) प्लांक फार्मूला $\nu = \dfrac{E}{h}$ (6.2)

इसे समस्त x और t के लिए निम्न संबंध को भी संतुष्ट करना चाहिए :

(iii) $E = \dfrac{p^2}{2m} + V(x, t)$ (6.3)

जहाँ $V(x, t)$ कण की स्थितिज ऊर्जा है।

(iv) अंततः श्रोडिन्गर समीकरण को x और t में रैखिक होना चाहिए। यानी अगर किसी दी हुई स्थितिज ऊर्जा $V(x, t)$ के लिए $\psi_1(x, t)$ और $\psi_2(x, t)$ श्रोडिन्गर समीकरण के दो हल हों, तब ψ_1 और ψ_2 का कोई रैखिक संयोजन, माना $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ जहाँ c_1 और c_2

स्वेच्छ नियतांक हैं, उसी श्रोडिन्गर समीकरण का हल होना चाहिए। यह रैखिकता प्रतिबंध इसलिए ज़रूरी है ताकि दो तरंगों का संयोजन होने से उनका व्यतिकरण हो सके। अब अगर श्रोडिन्गर अवकल समीकरण को यह रैखिकता प्रतिबंध संतुष्ट करना हो तो उसको घात (degree) एक होनी चाहिए यानी उसमें आने वाले तरंग फलनों और उसके अवकलजों की घात एक होनी चाहिए।

अब हम समीकरणों (6.1) और (6.2) को (6.3) में रखकर पाते हैं कि

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x, t) \tag{6.4}$$

जहाँ $\omega = 2\pi\nu$ और $k = 2\pi/\lambda$। अब हम एक सरल स्थिति लेंगे जिसमें स्थितिज ऊर्जा अचर (माना V_0 के बराबर) है। इस स्थिति में अगर हम यह मानें कि कण एक फ़ोटॉन है तब इसकी तरंग दैर्घ्य और आवृत्ति नियत होंगे जो समीकरणं (6.1) और (6.2) द्वारा दिए जाते हैं। और विद्युतचुम्बकत्व के सिद्धांत के अनुसार (देखें पी. एच. ई.-07 : वैद्युत एवं चुम्बकीय परिघटनाएं नामक पाठ्यक्रम की इकाई 14) इसका तरंग फलन होगा :

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \tag{6.5}$$

इस चर्चा को पढ़ते हुए, क्या आपके मन में यह सवाल आया कि अगर इस तरंग समीकरण में समय का द्वितीय कोटि अवकलज होता तो क्या होता? तब हमें आपेक्षिकीय ऊर्जा-संवेग संबंध मिलता। वस्तुत: शुरूआत में श्रोडिन्गर ने स्वयं भी यही कोशिश की थी। लेकिन जल्दी ही उन्होंने महसूस किया कि ऐसी समीकरण इलेक्ट्रॉनों के लिए कारगर नहीं थी - वह हाइड्रोजन परमाणु के लिए सही स्पेक्ट्रम नहीं देती थी। यहां यह बात ध्यान देने वाली है कि इलेक्ट्रॉन के लिए सही आपेक्षिकीय समीकरण में, जिसकी खोज डिराक ने की, समय का प्रथम कोटि अवकलज उपस्थित है।

इस समीकरण का एक बार समय के साथ अवकलन करके आप आसानी से यह परिणाम निकाल सकते हैं :

$$\omega = i\,\frac{1}{\psi(x, t)}\,\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} \tag{6.6}$$

और

$$k^2 = -\,\frac{1}{\psi(x, t)}\,\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

समीकरण (6.6) और (6.7) को समीकरण (6.4) में रखने पर हमें एक अवकल समीकरण मिलता है, जो $\psi(x, t)$ और उसके अवकलजों के बीच निम्न संबंध देता है :

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} + V_0\,\psi(x, t) \tag{6.8}$$

यह समीकरण नियत स्थितिज ऊर्जा V_0 की विशिष्ट स्थिति के लिए निकाला गया है। लेकिन श्रोडिन्गर ने इससे आगे बढ़कर यह अभिगृहीत दिया कि अगर समीकरण (6.8) को द्रव्यमान m वाले एक ऐसे कण के लिए लिखा जाए जो x और t के साथ विचरण करने वाले विभव में चलता है तब भी उसका स्वरूप नहीं बदलता।

अभिगृहीत 2 : निकाय का समय के साथ विकास

विभव $V(x, t)$ के अधीन गतिमान द्रव्यमान m वाले कण की एकविम गति के लिए **कालाश्रित श्रोडिन्गर समीकरण** होता है :

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\,\psi(x, t) \tag{6.9}$$

यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि समीकरण (6.9), (i) से (iv) तक के प्रतिबंधों के संगत है। श्रोडिन्गर समीकरण में $\hbar$ की उपस्थिति बहुत महत्वपूर्ण है। इसी के ज़रिए श्रोडिन्गर ने द्रव्य की तरंग समीकरण पर "क्वांटम प्रतिबंध" लागू किया।

अभी तक भौतिकी में आपने जिन समीकरणों के बारे में पढ़ा है, यह श्रोडिन्गर समीकरण उन सबसे अलग है। याद कीजिए कि तरंग समीकरण प्राय: फलन के द्वितीय कोटि समय अवकलज का उसके द्वितीय कोटि स्थानिक अवकलज से संबंध जोड़ती है। लेकिन यहाँ आपने देखा कि श्रोडिन्गर समीकरण में समय के सापेक्ष केवल प्रथम कोटि अवकलज है और स्थान के सापेक्ष द्वितीय कोटि अवकलज है। यानी इस समीकरण में समय और स्थानिक निर्देशांकों को बराबर का दर्जा नहीं दिया गया है। इसलिए समीकरण

(6.9) आपेक्षिकीय संसार में सही नहीं मानी जाएगी। अतः यह एक **ग़ैर–आपेक्षिकीय कालाश्रित श्रोडिन्गर समीकरण** (non-relativistic time dependent Schrödinger equation) है।

और इस तरंग समीकरण में केवल प्रथम कोटि समय अवकलज रखने के लिए हमें एक कीमत चुकानी पड़ती है। श्रोडिन्गर समीकरण के हल वास्तविक भौतिक तरंगें नहीं होती। वे सम्मिश्र फलन होते हैं जिनका एक वास्तविक और एक काल्पनिक भाग होता है। इससे एक बड़ी समस्या यह उठती है कि ऐसे तरंग फ़लन की व्याख्या कैसे की जाए। आख़िर इस तरंग फलन $\psi(x, t)$ का ठीक-ठीक भौतिक अर्थ क्या है? मैक्स बॉर्न द्वारा की गई ψ की व्याख्या पर हम अगले भाग में चर्चा करेंगे। लेकिन उससे पहले हम चाहेंगे कि आप $\psi(x, t)$ के रैखिकता गुणधर्म की जांच करें। इसके लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

यदि $\psi_1(x, t)$ और $\psi_2(x, t)$, श्रोडिन्गर समीकरण (6.9) के दो हल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $a\psi_1$ और $a\psi_1 + b\psi_2$ भी समीकरण (6.9) के हल हैं, जहाँ a और b स्वेच्छ नियतांक हैं।

6.3 तरंग फलन की सांख्यिकीय व्याख्या

समीकरण (6.9) में ψ के समय के सापेक्ष अवकलज का गुणांक काल्पनिक है। इसलिए यह साफ़ है कि तरंग फलन ψ, जो समीकरण (6.9) का हल है, आम तौर पर सम्मिश्र होगा। अतः $\psi(x, t)$ से कोई भी भौतिक सूचना निकाल सकने के लिए हमें $\psi(x, t)$ और कण के प्रेक्षणीय गुणधर्मों के बीच में एक गुणात्मक संबंध स्थापित करना होगा। 1926 में मैक्स बॉर्न ने इन दोनों के बीच यह संबंध प्रस्तावित किया।

अभिगृहीत 3 : तरंग फ़लन की प्रायिकतात्मक व्याख्या

माना कि एक कण तरंग फलन $\psi(x, t)$ से निरूपित किया जाता है। अगर क्षण t पर उस कण की स्थिति का मापन किया जाए, तब उसके निर्देशांकों x और $x + dx$ के बीच स्थित होने की प्रायिकता $P(x, t)\,dx$ निम्न संबंध से मिलती है :

$$P(x, t)\,dx = \psi^*(x, t)\,\psi(x, t)\,dx = |\psi(x, t)|^2\,dx \tag{6.10}$$

जहाँ ψ^*, ψ का सम्मिश्र संयुग्मी (complex conjugate) है।

आप देख सकते हैं कि $|\psi(x, t)|^2$ तरंग फलन का मॉड्यूलस वर्ग है। यहाँ $P(x, t) = \psi^*(x, t)\,\psi(x, t)$ को **प्रायिकता घनत्व** (probability density) भी कहते हैं। इसे शब्दों में कहें तो :

एक अल्प अंतराल dx में एक क्वांटम यांत्रिकीय वस्तु के मिलने की प्रायिकता उसके तरंग फलन के मॉड्यूलस वर्ग और उस अंतराल के गुणनफल के बराबर होती है।

इस कण के एक परिमित लम्बाई $L = (x_2 - x_1)$ के बीच में पाये जाने की प्रायिकता है :

$$P_L(t) = \int_{x_1}^{x_2} P(x, t)\,dx \tag{6.11}$$

इस तरह मैक्स बॉर्न के मुताबिक श्रोडिन्गर समीकरणों से प्रायिकता तरंगें मिलती हैं। तरंग फलन हमें यह बताता है कि कण के मिलने की संभावना कहाँ पर ज़्यादा होगी: जहाँ यह प्रायिकता ज़्यादा होगी, वहाँ पर तरंग ज़्यादा प्रबल होगी, उसका आयाम ज़्यादा बड़ा होगा। अगर किसी क्षेत्र में कण के मिलने की संभावना कम है, तो वहाँ पर तरंग दुर्बल होगी और उसका आयाम छोटा होगा। प्रायिकता पर आधारित इस व्याख्या से आपको ऐसा लग सकता है कि तरंग फलन की कला महत्व नहीं रखती क्योंकि हम $|\psi(x, t)|^2$ की प्रायिकता के रूप में व्याख्या करते हैं। लेकिन ऐसा नहीं है। हम इस बारे में यहाँ पर केवल संक्षेप में चर्चा करेंगे।

इस अवधारणा को समझने के लिए, कल्पना कीजिए कि आप दिल्ली जैसे महानगर में हैं और एक हेलीकॉप्टर में बैठकर इसकी सड़कों पर ट्रैफिक जैम का मुआयना कर रहे हैं। अगर गाड़ियां श्रोडिन्गर तरंगों द्वारा निर्दिष्ट की जा रही होतीं तो हम कहते कि तरंग ट्रैफिक जैम की स्थिति पर प्रबल है। अन्य स्थितियों पर वह दुर्बल होगी।

तरंग फलन की कला

श्रोडिन्गर समीकरण के रैखिकता गुणधर्म और बोध प्रश्न 1 से आप जानते हैं कि अगर ψ_1 और ψ_2 श्रोडिन्गर समीकरण के हल हैं तो उनका रैखिक संयोजन

$$\psi(x,t) = a_1\psi_1(x,t) + a_2\psi_2(x,t) \tag{6.12}$$

भी श्रोडिन्गर समीकरण का हल है जहाँ a_1 और a_2 स्वेच्छ सम्मिश्र संख्याएं हैं। यह **अध्यारोपण सिद्धांत** (superposition principle) है। अब $|\psi(x,t)|^2$ की गणना करें। आप पाएंगे कि यह ψ_1 और ψ_2 की आपेक्षिक कला (phase) पर निर्भर करता है। ऐसे अध्यारोपण को **संबद्ध अध्यारोपण** (coherent superposition) कहते हैं। इसी आपेक्षिक कला के कारण द्रव्य तरंगों का व्यतिकरण होता है। इसके कुछ मानों के संगत संपोषी व्यतिकरण होता है और कुछ और मानों के संगत विनाशी व्यतिकरण होता है। इस तरह हम पाते हैं कि तरंग फलन की कला बहुत महत्वपूर्ण है और उसे अनदेखा नहीं किया जा सकता।

यहाँ पर आप क्लासिकी भौतिकी में इस्तेमाल की जाने वाली प्रायिकता की संकल्पना में और क्वांटम भौतिकी में प्रायिकता की संकल्पना में एक खास अंतर पर ज़रूर गौर करें। ध्यान दीजिए कि क्लासिकी भौतिकी में प्रायिकताओं का योग होता है जैसाकि आपने भौतिकी पाठ्यक्रम पी.एच.ई.-04 : भौतिकी में गणितीय विधियां-I की इकाई 5 में पढ़ा है। लेकिन क्वांटम भौतिकी में प्रायिकता आयामों (probability amplitude) को जोड़ा जाता है जैसाकि समीकरण (6.12) से ज़ाहिर होता है। और तब हम समीकरण (6.10) से प्रायिकताओं की गणना करते हैं, जिसके कारण तरंग व्यतिकरण उत्पन्न होता है।

अब, आइए, हम फिर से तरंग फलन की सांख्यिकीय व्याख्या की बात करें जो प्रायिकता पर आधारित है। चूंकि कण को आकाश (space) में कहीं न कहीं तो होना ही है, इसलिए **संपूर्ण आकाश में उसके पाए जाने की प्रायिकता 1 होती है।** इस कुल प्रायिकता का मान हम प्रायिकता घनत्व का संपूर्ण अंतरिक्ष पर समाकलन करके मालूम कर सकते हैं :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\,\psi(x,t)\,dx = 1, \qquad \text{प्रत्येक क्षण } t \text{ पर} \tag{6.13}$$

समीकरण (6.10) से (6.13) द्वारा दी गई तरंग फलन की व्याख्या के अनुसार ψ के कुछ गुणधर्म होने चाहिए : ψ को सब बिन्दुओं पर **परिमित** (finite) और **एकल मानी** (single valued) होना चाहिए नहीं तो आकाश के किसी क्षेत्र में कण के पाए जाने की प्रायिकता परिमित और अद्वितीय (unique) नहीं होगी। साथ ही साथ समीकरण (6.13) से यह परिणाम भी मिलता है कि क्वांटम यांत्रिकी में इस्तेमाल होने वाले फलनों पर निम्न प्रतिबंध लागू होना चाहिए :

$$|\psi(x,t)|^2\,dx < \infty$$

यानी जब $x \to \infty$ तो $\psi(x,t)$ को शून्य की ओर कम से कम $x^{-1/2} - \epsilon$ की रफ़्तार से प्रवृत्त होना चाहिए, जहाँ $\epsilon > 0$ और स्वेच्छतः अत्यणु है। ऐसे फलनों को **वर्ग समाकलनीय फलन** (square integrable function) कहते हैं। इसी के साथ-साथ ψ पर कुछ सांतत्य प्रतिबंध भी लगाने होते हैं। इनकी हम विस्तार से चर्चा भाग 6.4.1 में करेंगे। तब तक आइए हम ψ के अर्थ को और अच्छी तरह से समझें।

6.3.1 प्रायिकता धारा घनत्व और सांतत्य समीकरण

चूंकि समीकरण (6.13), t के सभी मानों के लिए सही है, इसलिए **संपूर्ण प्रायिकता का संरक्षण होता है।** लेकिन ऐसा तभी हो सकता है, जब आकाश के प्रत्येक बिन्दु पर और समय के सभी क्षणों पर प्रायिकता का संरक्षण हो। आइए, इस बात को और अच्छी तरह समझें।

इसके लिए हम एक यथार्थ उदाहरण लेते हैं। माना कि एक तरल पदार्थ धनात्मक x दिशा में दो बिन्दुओं $x = x_1$ और $x = x_2$ के बीच वेग v से (जो x के साथ-साथ बदलता है) बह रहा है। माना कि बिन्दु x

के चारों ओर, $\rho(x)$, तरल का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान है। तब राशि $S_x = v(x)\ \rho(x)$ प्रति इकाई समय में किसी दिए हुए बिन्दु x पर गुज़र रहे तरल का द्रव्यमान है। अब दोनों बिन्दुओं $x = x_1$ और $x = x_2$ के बीच प्रति इकाई समय में संचित नेट द्रव्यमान क्या होगा? जाहिर है कि यह $S_{x=x_1} - S_{x=x_2}$ के बराबर होगा। और अगर इस क्षेत्र में तरल का संरक्षण होना है तो यह इस क्षेत्र में होने वाले द्रव्यमान परिवर्तन की दर के बराबर होना चाहिए। इस तरह,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx = S_{x=x_1} - S_{x=x_2} \tag{6.14}$$

हम इस अनुरूपता को प्रायिकता व्याख्या पर लागू कर सकते हैं। इसे हम इस तरह रखते हैं : अगर संपूर्ण प्रायिकता का संरक्षण होना हो, तो संरक्षण समीकरण (6.14) जैसा दिखाई देना चाहिए, जहाँ ρ की जगह प्रायिकता घनत्व $P(x, t)$ होना चाहिए और S_x की जगह एक ऐसे फलन $S(x, t)$ को होना चाहिए जिसे हम **प्रायिकता अभिवाह** (probability flux) या **प्रायिकता धारा घनत्व** (probabiltiy current density) कहते हैं। अत: हमें मिलना चाहिए :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} P(x, t)\, dx = S(x_1, t) - S(x_2, t) \tag{6.15}$$

आइए, अब हम प्रायिकता अभिवाह $S(x, t)$ की परिभाषा मालूम करें ताकि प्रायिकता संरक्षण समीकरण (6.15) का पालन हो सके। इसके लिए हम श्रोडिन्गर समीकरण का इस्तेमाल करेंगे।

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \tag{6.16क}$$

यहाँ पर और भविष्य में हम $\psi(x, t)$ और $V(x, t)$ की जगह ψ और V का इस्तेमाल करेंगे जब तक कि स्थिति स्पष्ट करने के लिए इनकी ज़रूरत न हो। समीकरण (6.16क) का सम्मिश्र संयुग्मी है

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* \tag{6.16ख}$$

जहाँ हमने यह माना है कि V वास्तविक है यानी $V^* = V$।

अब आप समीकरण (6.16क) में बाएं से ψ^* और समीकरण (6.16ख) में ψ से गुणा कर सकते हैं और फिर (6.16ख) को (6.16क) से घटाकर हमें मिलता है

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}\right)$$

अब इस समीकरण में कुछ आसान सा बीजगणित करके आप दिखा सकते हैं कि

$$\frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) \tag{6.17}$$

अब हम x_1 से x_2 तक, x के सापेक्ष समीकरण (6.17) का समाकलन करके पाते हैं

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \psi^* \psi\, dx = -\frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \tag{6.18}$$

समीकरण (6.15) और (6.18) की तुलना करने पर हमें पता चलता है कि प्रायिकता घनत्व $P(x, t)$ और **प्रायिकता अभिवाह** या **प्रायिकता धारा घनत्व** $S(x, t)$ की इस तरह से परिभाषा दी जानी चाहिए :

$$\boxed{\begin{aligned} & P(x, t) = \psi^*(x, t)\ \psi(x, t) \\ & \text{और} \\ & S(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) \end{aligned}} \tag{6.19}$$

समीकरण (6.17) को P और S के पदों में फिर से इस तरह लिख सकते हैं :

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0} \tag{6.20}$$

क्या यह समीकरण आपको जानी पहचानी नहीं लगती? ध्यान दें कि यह समीकरण विद्युतचुम्बकत्व में आवेश घनत्व और धारा घनत्व का संबंध देने वाली सांतत्य समीकरण के अनुरूप है। एक वजह यह भी है कि $P(x,t)$ को प्रायिकता घनत्व कहा जाता है और $S(x,t)$ को प्रायिकता धारा घनत्व कहा जाता है। इस समीकरण में पहला पद $\frac{\partial P}{\partial t}$ एक निश्चित लम्बाई में प्रायिकता घनत्व की परिवर्तन दर का द्योतक है। दूसरा पद उसी लम्बाई से बाहर आने वाले नेट अभिवाह का द्योतक है। समीकरण (6.20) तब हमें यह बताती है कि प्रायिकता घनत्व की समय के साथ परिवर्तन दर (जो एक ऋणात्मक राशि है क्योंकि जैसे-जैसे t बढ़ता है, वैसे-वैसे $\partial P/\partial t$ घटता है) कुल बहिर्मुखी अभिवाह (outward flux) के बराबर है। (बहिर्मुखी अभिवाह हमेशा धनात्मक राशि माना जाता है)। इसका मतलब यह है कि इस लम्बाई के भीतर **न तो कणों का विनाश होता है और न ही उनका जन्म होता है**। यानी यहाँ पर न तो स्रोत (source) उपस्थित है और न ही अभिगम (sink)।

इस तरह, समीकरण (6.20) एक **संरक्षण नियम** है, जो इस तथ्य को अभिव्यक्त करता है कि **अंतरिक्ष के किसी क्षेत्र में कण के घनत्व में परिवर्तन उस क्षेत्र में अभिवाह के कुल परिवर्तन के बराबर होता है**। अब आप यह भी देख सकते हैं कि हमें ψ पर सांतत्य प्रतिबंध क्यों लागू करने पड़ते हैं : ψ और उसके अवकलज $\partial\psi/\partial x$ को x के सभी मानों के लिए परिमित और संतत होना चाहिए बशर्ते $V(x)$ परिमित हो। हलों पर ये प्रतिबंध क्यों ज़रूरी हैं, यह बात नीचे दी गई व्याख्या से समझी जा सकती है।

प्रायिकता घनत्व $P(x)$ और प्रायिकता अभिवाह $S(x,t)$ भौतिक राशियों को निरूपित करते हैं। इसलिए इनका मान हर बिंदु और क्षण पर सुनिश्चित होना चाहिए। अगर $\psi(x)$ या उसका प्रथम कोटि अवकलज $\psi'(x)$, x के कुछ मानों के लिए परिमित न हो तो $P(x)$ और / या $S(x,t)$, x के सभी मानों के लिए सुनिश्चित (well-defined) नहीं होंगे। साथ ही साथ $\psi(x)$ और $\psi'(x)$ दोनों को संतत होना चाहिए। नहीं तो $S(x,t)$ कुछ बिन्दुओं पर विचित्र (singular) होगा और ये बिन्दु प्रायिकता धारा के स्रोत या अभिगम की तरह काम करेंगे। दूसरे शब्दों में, इन बिंदुओं पर पदार्थ का विनाश या उसकी रचना हो रही होगी। जैसाकि आप जानते हैं, यह बात ग़ैर-आपेक्षिकीय भौतिकी में असंभव है।

आगे बढ़ने से पहले हम यहाँ यह बताना चाहेंगे कि समीकरण (6.20) इस प्रतिबंध के अधीन लिखी गई है कि V वास्तविक है। ψ को $\psi = \psi_R + i\psi_I$ के रूप में लिख कर यह दिखाना आसान है कि P और S दोनों ही वास्तविक हैं और

$$S(x,t) = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \mathrm{Re}\left(\psi^* \frac{\hbar}{im}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{6.21}$$

जहाँ $\mathrm{Im}(Z)$, Z के काल्पनिक भाग का परिमाण है और $\mathrm{Re}(Z)$, Z के वास्तविक भाग का। अब आप इन बातों को अच्छी तरह से समझने के लिए एक बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 2

15 मिनट लगाएं

क) सिद्ध करें कि सम्मिश्र स्थितिज ऊर्जा के लिए, सांतत्य समीकरण (6.20) का यह रूप हो जाता है:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = \frac{2V_I}{\hbar}\,P(x,t)$$

जहाँ V_I स्थितिज ऊर्जा का काल्पनिक भाग है।

ख) द्रव्यमान m की एक वस्तु का तरंग फलन है

$$\psi(x,t) = e^{-(\alpha + i\beta)x}\, e^{-i\omega t}$$

$P(x,t)$ और $S(x,t)$ के मान निकालिए।

ψ की प्रायिकता व्याख्या से हमें तरंग फलन के **प्रसामान्यीकरण** (normalisation) की संकल्पना भी मिलती है।

6.3.2 तरंग फलनों का प्रसामान्यीकरण

समीकरण (6.13) याद करें जिसके अनुसार, क्योंकि कण को अंतरिक्ष में कहीं न कहीं तो होना ही है, इसलिए x के सभी मानों (यानी संपूर्ण आकाश) पर प्रायिकता घनत्व का समाकलन करने पर हमें समाकल का इकाई मान मिलना चाहिए। कोई भी तरंग फलन जो (6.13) को संतुष्ट करता है, **प्रसामान्यीकृत तरंग फलन** (normalised wave function) कहलाता है।

अब क्वांटम यांत्रिकी में हम दो तरह के तरंग फलनों का इस्तेमाल करते हैं। उनमें से एक के लिए, समाकल $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*\prime}(x, t)\ \psi'(x, t)\, dx$ का मान परिमित है जहाँ ψ' श्रोडिन्गर समीकरण का हल है। माना कि वह N के बराबर है। ऐसे फलनों का प्रसामान्यीकरण किया जा सकता है और N को तरंग फलन का **मानक** (norm) कहते हैं। इसका यह भी मतलब है कि ψ' एक वर्ग समाकलनीय फलन है, जो $|x| \to \infty$ के लिए शून्य हो जाता है।

आप यह भी जानते हैं कि श्रोडिन्गर समीकरण रैखिक है। साथ ही आप बोध प्रश्न 1 हल करके देख चुके हैं कि अगर ψ' समीकरण (6.9) का हल हो, तो ψ' और एक अचर का गुणनफल भी उस समीकरण का हल होगा। अत: हम हमेशा इस अचर का मान $N^{-1/2}$ के बराबर चुन सकते हैं और फिर $\psi = N^{-1/2}\,\psi'$ ले सकते हैं। तब ψ के लिए, समीकरण (6.13) संतुष्ट होता है और तरंग फलन ψ को **प्रसामान्यीकृत तरंग फलन** कहा जाता है। यहाँ ध्यान दीजिए कि N समय पर निर्भर नहीं करता (नहीं तो ψ समीकरण (6.9) का हल नहीं हो सकता था।) इसलिए **कोई तरंग फलन जो समय के किसी क्षण पर प्रसामान्यीकृत होता है, बाकी क्षणों पर भी प्रसामान्यीकृत रहता है।**

लेकिन तरंग फलनों का एक ऐसा वर्ग भी है जिनके लिए समीकरण (6.13) के समाकल का मान अनन्त होता है। ऐसे फलन वस्तुत: किसी भौतिक निकाय को निरूपित नहीं करते। लेकिन जैसाकि हम बाद में देखेंगे ऐसे फलनों का क्वांटम यांत्रिकी में मुक्त कणों का वर्णन करने के लिए बहुत इस्तेमाल होता है। वास्तव में, मुक्त कण को निरूपित करने के लिए हमने फलन $e^{i(kx-\omega t)}$ का इस्तेमाल तो किया ही है। यह एक ऐसा तरंग फलन है जिसका मानक अनन्त है। दूसरे शब्दों में इसका प्रसामान्यीकरण नहीं किया जा सकता। इस स्वरूप के तरंग फलन, $x \to \pm\infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होते। आइए, अब हम श्रोडिन्गर समीकरण का और विश्लेषण करें।

6.4 काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण

रिचर्ड फाइनमैन ने, जिनके भौतिकी पर व्याख्यान (Feynman Lectures on Physics) भौतिकी के सभी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्यत: पठनीय हैं, एक बार कहा, "इलेक्ट्रॉन तरंगें, अनिश्चितता के महासागर में प्रायिकता तरंगें हैं।" अब आप समझ गए होंगे कि इस कथन का क्या अर्थ है।

श्रोडिन्गर समीकण (6.9) से हमें तरंग फलन $\psi(x, t)$ का समय के साथ विकास का पता चलता है। आप यह देख चुके हैं कि कण के स्थानिक (position) प्रायिकता घनत्व का उसके तरंग फलन से क्या संबंध है। हम $\psi(x, t)$ का इस तरह भी रूपांतरण कर सकते हैं कि हमें कण का संवेग प्रायिकता बंटन मिले (ऐसे रूपांतरणों को फूरिए रूपांतरण कहते हैं)। इस तरह, अगर हमें किसी क्षण पर कण के स्थिति और संवेग बंटन पता हों तो श्रोडिन्गर समीकरण की मदद से कुछ समय बाद भी इनके मान निकाले जा सकते हैं। क्या यह स्थिति क्लासिकी यांत्रिकी में संगत स्थिति के अनुरूप नहीं है? क्लासिकी यांत्रिकी में अगर किसी आरंभिक क्षण पर कण की स्थिति और संवेग पता हों तो हम न्यूटन के गति समीकरण का इस्तेमाल करके बाद के किसी भी क्षण पर कण की स्थिति और संवेग का पता लगा सकते हैं। लेकिन क्लासिकी और क्वांटम यांत्रिकी में एक बुनियादी फर्क है। वह क्या है? यह जानने के लिए अनिश्चितता सिद्धांत को याद करें, जो हमें बताता है कि क्वांटम यांत्रिकी में समय के एक ही क्षण पर कण की स्थिति और संवेग संपूर्ण यथार्थता के साथ नहीं मापे जा सकते। हमें सिर्फ उनके वितरणों का ही पता लग सकता है। क्लासिकी यांत्रिकी की कई समस्याओं (जैसे कि कैपलर की ग्रहीय कक्षाओं, रदरफर्ड प्रकीर्णन आदि) में

हमने यह माना था कि कण की एक निश्चित ऊर्जा और/या कोणीय संवेग होता है। लेकिन अगर हम क्वांटम यांत्रिकी में यह मान लें कि कण की ऊर्जा का ठीक-ठाक मान पता है यानी अगर $\Delta E = 0$, तब अनिश्चितता संबंध $\Delta E\, \Delta t \geq \hbar$ के अनुसार Δt अनन्त होगा। इसका मतलब यह हुआ कि ऊर्जा के मापनों के लिए हमें अनन्त समय मिलना चाहिए। दूसरे शब्दों में, प्रायिकता घनत्व $\psi^*(x, t)\, \psi(x, t)$ को समय के साथ बदलना नहीं चाहिए। अत: अचर ऊर्जा वाले निकाय के लिए तरंग फलन $\psi(x, t)$ का स्वरूप इस तरह का होना चाहिए

$$\psi(x, t) = \psi(x) \;\; \exp\{ig(t)\} \tag{6.22}$$

जहाँ $g(t)$, t का कोई फलन है। ऐसे तरंग फलन द्वारा निरूपित निकाय के लिए, निकाय की ऊर्जा समय के साथ नहीं बदलती, यानी इस निकाय के लिए ऊर्जा का संरक्षण होता है। अत: अगर प्रारंभ में कण समीकरण (6.22) द्वारा दी गई किसी ऊर्जा अवस्था में स्थित है, तब वह अनिश्चित काल के लिए उसी अवस्था में बना रहेगा, जब तक कि उसको किसी बाह्य साधन द्वारा विक्षुब्ध (disturb) न किया जाए। ऐसी ऊर्जा अवस्थाओं को **स्थायी अवस्थाएं** (stationary states) कहते हैं।

क्लासिकी तौर पर यह ऊर्जा, जिसे **हैमिल्टोनियन** (Hamiltonian) भी कहते हैं, गति का अचर होती है, अगर इसमें स्पष्ट रूप से समय उपस्थित न हो। अब किसी निकाय का हैमिल्टोनियन उसकी गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का योग होता है। इस तरह कुल ऊर्जा के संरक्षण के लिए, उस विभव को जिसमें कण चल रहा है, समय से स्वतंत्र होना चाहिए। ऐसे विभवों के लिए श्रोडिन्गर समीकरण (6.9) को x और t चरों में विलगित किया जा सकता है। इसके लिए हम समीकरण (6.9) में यह प्रतिस्थापन करते हैं :

$$\psi(x, t) = \psi(x)\, f(t) \tag{6.23}$$

और पदों को फिर से व्यवस्थित करने पर हमें मिलता है :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{\psi(x)}\,\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = \frac{i\hbar}{f(t)}\,\frac{\partial f(t)}{\partial t} \tag{6.24}$$

इस समीकरण का बायां भाग किसी दिए हुए x के लिए t के सभी मानों पर अचर है। इसी तरह, दायां भाग x के सभी मानों के लिए एक निश्चित t पर अचर है। अत: समीकरण (6.24) तभी लागू होगा जब दोनों पक्ष किसी अचर C के बराबर हों, जो x और t दोनों पर ही निर्भर नहीं करता। इस तरह हमें मिलता है :

$$i\hbar\,\frac{df}{dt} = C\, f(t) \tag{6.25}$$

और

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) + V(x)\;\psi(x) = C\,\psi(x) \tag{6.26}$$

जहाँ $\psi''(x) = d^2\,\psi(x)/dx^2$

अब आप समीकरण (6.25) का हल करके यह परिणाम निकाल सकते हैं :

$$f(t) = A\exp\{-iCt/\hbar\} = Ae^{-i\omega t} \tag{6.27}$$

जहाँ A प्रसामान्यीकरण नियतांक है और $\omega = C/\hbar$। समीकरण (6.26) और (6.27) से यह स्पष्ट है कि C की विमा ऊर्जा की विमा के बराबर होनी चाहिए और इसका मान निकाय की कुल ऊर्जा के बराबर होना चाहिए। अत: समीकरण (6.27) को इस तरह लिखा जा सकता है

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\;\psi(x) = E\,\psi(x)} \tag{6.28}$$

समीकरण (6.28) को **काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण** (time independent Schrödinger equation) कहा जाता है।

अब हम एक ऐसे कण के लिए, जिसकी सुनिश्चित ऊर्जा E हो, कालाश्रित श्रोडिन्गर समीकरण का व्यापक हल या स्थायी अवस्था हल इस तरह लिख सकते हैं :

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar) \tag{6.29}$$

जहाँ $\psi(x)$ समीकरण (6.28) को संतुष्ट करता है। इन स्थितियों में प्रायिकता घनत्व और प्रायिकता अभिवाह के मान इस प्रकार होंगे :

$$P(x) = \psi^*(x)\ \psi(x) \tag{6.30}$$

और

$$S(x) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x) - \psi(x)\frac{d}{dx}\psi^*(x)\right] \tag{6.31}$$

यह स्पष्ट है कि $P(x)$ और $S(x)$ समय पर निर्भर नहीं करते। यहाँ आप ध्यान दीजिए कि समीकरण (6.28) में कोई काल्पनिक राशि नहीं है। इसलिए यह ज़रूरी नहीं कि $\psi(x)$ सम्मिश्र हो भले ही $\psi(x, t)$ सम्मिश्र हो। स्थायी अवस्था फलन के लिए प्रतिबंध (6.13) का स्वरूप हो जाता है।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ \psi(x)\, dx = 1 \tag{6.32}$$

अब आप अभी तक चर्चित संकल्पनाओं को लागू करके कुछ गणनाएं कीजिए।

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 3

किसी स्थायी अवस्था के लिए तरंग फलन है :

$$\psi(x) = N \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

प्रसामान्यीकरण नियतांक N की गणना करें।

इस पाठ्यक्रम में हम केवल उन्हीं समस्याओं का अध्ययन करेंगे जिनके लिए हमें काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण का हल करना पड़े यानी कि हम स्थायी अवस्था समस्याओं का ही अध्ययन करेंगे। अब आइए हम उन प्रतिबंधों की जांच करें जिन्हें ψ को संतुष्ट करना चाहिए ताकि हमें उसके भौतिक रूप से अनुमत हल मिलें।

6.4.1 परिसीमा प्रतिबंध और मान्य हल

याद कीजिए कि तरंग फलन $\psi(x)$ की प्रायिकता से संबद्ध व्याख्या के कारण उस पर निम्न प्रतिबंध लागू होते हैं :

i) $\psi(x)$ को सभी बिन्दुओं पर परिमित और एकल मानी होना चाहिए।

ii) $\psi(x)$ को वर्ग समाकलनीय होना चाहिए।

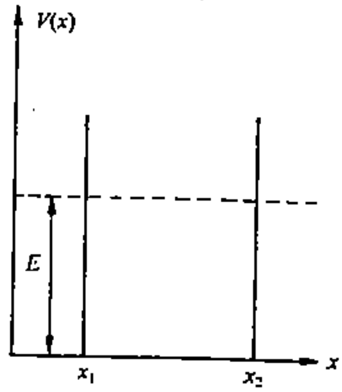
iii) दोनों ही $\psi(x)$ और $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ को प्रत्येक बिन्दु पर संतत होना चाहिए।

हम काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण (6.28) को फिर से इस तरह लिख सकते हैं

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\,\psi(x) \tag{6.33}$$

आप जानते हैं कि $\psi(x)$ एक प्रायिकता तरंग है जो समीकरण (6.13) को संतुष्ट करता है। इसके साथ ही यह बात कि $\psi(x)$ समीकरण (6.33) का मान्य हल है या नहीं, $\psi(x)$ के स्वरूप और परिसीमा

प्रतिबंधों से निर्धारित होती है। ये परिसीमा प्रतिबंध समस्या की प्रकृति पर निर्भर करते हैं। इसे समझने के लिए, आइए, अब हम एक कण का उदाहरण लें जो एक विभव कूप में बद्ध है, जैसाकि चित्र 6.2 में दिखाया गया है। यहाँ $x < x_1$ और $x > x_2$ के लिए $V(x) > E$।



चित्र 6.2 : विभव कूप में एक कण।

क्लासिकी तौर पर अगर कण आरंभ में x_1 और x_2 के बीच में है, तो आने वाले सभी क्षणों पर यह उसी स्थान में परिरूद्ध (confined) रहेगा यानी कि यह कण x_1 और x_2 के बीच बद्ध है। तब हम कहते हैं कि कण बद्ध अवस्था में है। क्वांटम यांत्रिकी के अनुसार, क्षेत्र $x_1 < x < x_2$ में कण के मिलने की प्रायिकता का मान बहुत अधिक होता है। लेकिन इसके साथ-साथ इस क्षेत्र से बाहर कण के पाए जाने की प्रायिकता का भी परिमित मान होता है जो दूरी के साथ लगातार घटता जाता है। क्लासिकी भौतिकी के अनुसार यह परिणाम अनुमत नहीं है। इस बात के कारण एक परिसीमा प्रतिबंध यह रखना पड़ता है कि बद्ध अवस्था में स्थित तरंग फलनों का अनन्त पर मान शून्य होना चाहिए। इस तरह के परिसीमा प्रतिबंध को मानने से एक बहुत रोचक परिणाम निकलता है, जिसके बारे में आप अगले खंड में विस्तार से पढ़ेंगे। यहाँ हम सिर्फ़ उसका ज़िक्र कर रहे हैं : काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण के (मान्य) हलों का अस्तित्व कुल ऊर्जा के कुछ विविक्त (discrete) मानों के लिए ही होता है। इस तरह **बद्ध अवस्थाओं के लिए ऊर्जा का क्वांटमीकरण श्रोडिन्गर समीकरण का एक सहज (inherent) गुणधर्म है।**

अभी-अभी आपने यह जाना कि तरंग फलन की प्रायिकतात्मक व्याख्या के कारण मान्य हलों पर एक और प्रतिबंध लागू होता है : तरंग फलन और उसका प्रथम कोटि अवकलज परिमित और संतत होने चाहिए। समीकरण (6.28) बताता है कि अगर $V(x)$, E और $\psi(x)$ परिमित हों, तब $\psi''(x)$ भी परिमित होता है। इसका यह अर्थ निकलता है कि $\psi'(x)$ संतत होता है। लेकिन अगर x के कुछ खास मानों के लिए $V(x)$ अनन्त हो जाता है, तो समीकरण (6.28) से उन बिन्दुओं पर $\psi''(x)$ का मान अनन्त होता है। इस तरह उन बिन्दुओं पर हो सकता है कि $\psi'(x)$ भी संतत न हो!

अब हम इस भाग की चर्चा के अंत में मान्य तरंग फलनों के गुणधर्मों और उन पर लगने वाले परिसीमा प्रतिबंधों का सार दे रहे हैं।

तरंग फलन के गुणधर्म

1) $\psi(x)$ को x के सभी मानों के लिए **एकलमानी, परिमित** और **संतत** होना चाहिए।
2) x के सभी मानों के लिए $\psi'(x)$ को परिमित और संतत होना चाहिए अलावा उन बिन्दुओं के, जिनके लिए $V \to \infty$। इन बिन्दुओं पर $\psi'(x)$ की एक परिमित असंततता है लेकिन ψ संतत रहता है।
3) बद्ध अवस्थाओं के लिए कण के x और $x + dx$ के बीच में पाए जाने की प्रायिकता, यानी $|\psi|^2 dx$, $|x| \to \infty$ होने पर शून्य होनी चाहिए। अतः $|x| \to \infty$ के लिए $\psi(x) \to 0$, यानी $\psi(x)$ वर्ग समाकलनीय तरंग फलन है।

आइए, अब इस इकाई का सार यहाँ प्रस्तुत करें।

6.5 सारांश

- इस इकाई में हमने कणों की एकविम गति पर चर्चा की। आपने **क्वांटम यांत्रिकी के तीन अभिगृहीतों** के बारे में जाना :

  1. हर निकाय को एक **तरंग फलन** द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

2. तरंग फलन एक अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है जिसे **श्रोडिन्गर समीकरण** कहते हैं :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

3. किसी कण के अंतराल dx में बिन्दु (x, t) पर पाए जाने की **प्रायिकता** होती है

$$P(x, t)\, dx = \psi^*(x, t)\ \psi(x, t)\, dx$$

जहाँ $P(x, t)$ **प्रायिकता घनत्व** है।

- श्रोडिन्गर समीकरण का इस्तेमाल करके **सांतत्य समीकरण** की व्युत्पत्ति की जा सकती है जो **प्रायिकता घनत्व** और संबद्ध **प्रायिकता धारा घनत्व** $S(x, t)$ के बीच में निम्न संबंध देता है :

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0$$

जहाँ

$$S(x, t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$$

सांतत्य समीकरण हमें बताता है कि वास्तविक विभव के अधीन गतिमान कण न तो नष्ट होता है और न ही कोई दूसरा कण उत्पन्न होता है। किसी क्षेत्र में कण के घनत्व में परिवर्तन, उस क्षेत्र में जा रहे या उससे बाहर आ रहे कुल अभिवाह के परिवर्तन के बराबर होता है।

- संपूर्ण अंतरिक्ष में किसी कण के पाए जाने की **संपूर्ण प्रायिकता** का मान इकाई होता है। वे तरंग फलन जो इस प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं, **प्रसामान्यीकृत** कहलाते हैं।

- **संरक्षित निकाय** के लिए हम लिख सकते हैं :

$$\psi(x, t) = \psi(x)\ e^{-iEt/\hbar}$$

जहाँ E निकाय की कुल ऊर्जा है और $\psi(x)$ **काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण** का हल है :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

- अगर $\psi(x)$ को किसी भौतिक निकाय को निरूपित करना हो तो तरंग फलन $\psi(x)$ को x के सभी मानों के लिए **एकलमानी, परिमित** और **संतत** होना चाहिए। उसका प्रथम अवकलज भी x के सभी मानों के लिए परिमित और संतत होना चाहिए अलावा उन बिन्दुओं के जिन पर $V(x) \to \infty$। इन बिन्दुओं पर प्रथम अवकलज की एक परिमित असंततता होती है।

6.6 अंत में कुछ प्रश्न

45 मिनट लगाएं

1. ऊर्जा E और संवेग p वाली एक वस्तु का तरंग फलन है

$$\psi(x, t) = A\, e^{i(px - Et)/\hbar}$$

   i) क्या ψ एक बद्ध अवस्था को निरूपित करता है?

   ii) क्या इस तरंग फलन का प्रसामान्यीकरण हो सकता है?

   iii) उपर्युक्त व्यंजक का इस्तेमाल करके वस्तु के वेग $\mathbf{v}$ और एक सम्मिश्र अचर A के पदों में प्रायिकता धारा घनत्व $S(x, t)$ की गणना करें।

2. एक निकाय का तरंग फलन है :

$$\psi(x) = Ax\, e^{-x^2/2}$$

इसके प्रसामान्यीकरण नियतांक A के मान की गणना करें।

3. एक फलन का व्यंजक है :

$$\psi(x) = N(1+ix)\exp(-x) \quad x > 1$$
$$= 0 \qquad x < 1$$

इसके लिए प्रसामान्यीकरण नियतांक N का मान परिकलित करें। इसके द्वारा किसी भौतिक निकाय को निरूपित क्यों नहीं किया जा सकता?

4. द्रव्यमान m और आवृत्ति ν वाले एक सरल आवर्त दोलक की स्थितिज ऊर्जा $2m(\pi\nu x)^2$ है। इसके लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण लिखें और सिद्ध करें कि इसे ऐसे भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right)\psi = 0$$

जहाँ $\alpha = 2mE/\hbar^2$, $\beta = 2\pi m\nu/\hbar$ और $\xi = \sqrt{\beta}\,x$, और E दोलक की कुल ऊर्जा है। α/β के किन मानों के लिए फलन $\psi(\xi) = \exp(-\xi^2/2)$ और $\psi(\xi) = \exp(-\xi^2/2)$ इस समीकरण के हल हैं।

6.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. समीकरण (6.9) में $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$ का प्रतिस्थापन करने पर हमें मिलता है।

$$i\hbar\left(a\,\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + b\,\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(a\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}\right) + Va\psi_1 + Vb\psi_2$$

या

$$a\left(i\hbar\,\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - V\psi_1\right) + b\left(i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - Vb\psi_2\right) = 0$$

चूँकि ψ_1 और ψ_2 समीकरण (6.9) को संतुष्ट करते हैं, अतः उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्ष शून्य हैं। अतः ψ समीकरण (6.9) को संतुष्ट करता है। इसी तरह आप सिद्ध कर सकते हैं कि $a\psi_1$ भी समीकरण (6.9) का हल है।

2(क) आइए, सम्मिश्र स्थितिज ऊर्जा V को इस तरह लिखें :

$$V = V_R + iV_I$$

जहाँ V_R उसका वास्तविक भाग है और V_I काल्पनिक भाग है। तब श्रोडिन्गर समीकरण (6.16क) और उसके सम्मिश्र संयुग्मी को क्रमशः इस तरह लिखा जा सकता है :

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (V_R + iV_I)\psi$$

$$-i\hbar\,\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V_R\psi^* - iV_I\psi^*$$

समीकरण (6.20) को पाने की प्रक्रिया दोहरा कर हमें मिलता है :

$$i\hbar\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\,\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right) + 2i\,V_I\psi^*\psi$$

या

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\,\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) + 2i\,V_I\psi^*\psi$$

या

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = \frac{2V_I}{\hbar} P(x,t)$$

ख) $P(x,t) = \psi^* \psi$

$$= e^{-(\alpha - i\beta)x} e^{i\omega t} e^{-(\alpha + i\beta)x} e^{-i\omega t}$$

$$= e^{-2\alpha x}$$

समीकरण (6.21) से हमें मिलता है :

$$S(x,t) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} \text{Im} [e^{-(\alpha - i\beta)x} e^{i\omega t} (-\alpha - i\beta) e^{-(\alpha + i\beta)x} e^{-i\omega t}]$$

$$= \frac{\hbar}{m} \text{Im} [e^{-2\alpha x} (-\alpha - i\beta)] = -\frac{\hbar\beta}{m} e^{-2\alpha x}$$

3. प्रसामान्यीकरण प्रतिबंध है :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx = 1$$

या

$$|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

या

$$2|N|^2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

प्रतिस्थापन $x^2 = t$ करने पर समाकल का यह स्वरूप हो जाता है :

$$|N|^2 \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$$

या

$$|N|^2 \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}\right]$$

या

$$|N|^2 \sqrt{\pi} = 1$$

या

$$|N|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

और

$$N = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. i) नहीं। ऐसा नहीं है क्योंकि $|x| \to \infty$ होने पर ψ, शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होता।

   ii) नहीं। इसका मानक (norm) अनन्त है।

   iii) $$S(x,t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[A^* A e^{-i(px-Et)/\hbar} \left(\frac{ip}{\hbar}\right) e^{i(px-Et)/\hbar} - AA^* e^{i(px-Et)/\hbar} \left(\frac{-ip}{\hbar}\right) e^{-i(px-Et)/\hbar} \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} AA^* \left[\frac{2ip}{\hbar}\right]$$

$$= v AA^* \quad (\because p = mv)$$

2. प्रसामान्यीकरण प्रतिबंध लागू करने पर हमें मिलता है :

$$|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 1$$

या

$$2|N|^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 1 \qquad \text{चूंकि समाकल्य सम फलन है।}$$

$x^2 = t$ का विस्थापन करने पर हमें मिलता है :

$$|N|^2 \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = 1$$

या

$$|N|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1, \quad \text{चूंकि } \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

चूंकि $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\therefore |N|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ और } N = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}$$

3. प्रसामान्यीकरण प्रतिबंध है :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx = 1$$

या

$$|N|^2 \int_1^{\infty} (1 - ix)(1 - ix) \exp(-2x)\, dx = 1 \qquad \text{चूंकि } x < 1 \text{ के लिए } \psi(x) = 0$$

या

$$|N|^2 \int_1^{\infty} (1 + x^2)\, e^{-2x}\, dx = 1$$

या

$$|N|^2 \int_1^{\infty} e^{-2x} dx + |N|^2 \int_1^{\infty} x^2 e^{-2x}\, dx = 1$$

या

$$|N|^2 \frac{e^{-2}}{2} + |N|^2 \int_1^{\infty} x^2 e^{-2x}\, dx = 1$$

दूसरे पद का खंडशः समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$|N|^2 \left(\frac{e^{-2}}{2} + \frac{5e^{-2}}{4}\right) = 1$$

या

$$|N| = 2e/\sqrt{7}$$

यह तरंग फलन किसी भौतिक निकाय को निरूपित नहीं कर सकता क्योंकि यह $x = 1$ पर संतत नहीं है। इस बात की जांच आप $x \to 1$ की सीमा दांई ओर से और बांई ओर से लेकर करें। दोनों सीमाएं बराबर नहीं हैं।

4. सरल आवर्त दोलक के लिए, काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण है :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2m(\pi\nu x)^2 \psi = E\psi \qquad (1)$$

जहां हमने $V(x) = 2m(\pi\nu x)^2$ प्रतिस्थापित किया है। चर परिवर्तन $\xi = \sqrt{\beta}\, x$, जहाँ

$\beta = \frac{2\pi m\nu}{\hbar}$, करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\beta}\ \frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \beta \cdot \frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

इस प्रकार (1) हो जाता है

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\beta\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + 2m\pi^2\ \nu^2\ \frac{\xi^2}{\beta}\ \psi = E\psi$$

या

$$\frac{\hbar^2}{2m}\quad \frac{2\pi m\nu}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2m\pi^2\nu^2\hbar}{2\pi m\nu}\ \xi^2\psi = E\psi$$

या

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{\pi\nu\hbar}{\pi\nu\hbar}\ \xi^2\psi = -\frac{2m}{\hbar^2\beta}\ E\psi$$

या

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2\beta} - \xi^2\right)\psi = 0$$

$\alpha = \frac{2mE}{\hbar^2}$ परिभाषित करके हम समीकरण को इस तरह लिख सकते हैं :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right)\psi = 0 \qquad \text{(क)}$$

(क) में प्रतिस्थापन $\psi(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ करने पर इस समीकरण को हम इस तरह लिख सकते हैं:

$$-\psi + \xi^2\psi + \frac{\alpha}{\beta}\ \psi - \xi^2\psi = 0 \left[\ \therefore\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\psi + \xi^2\psi\right]$$

या

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\psi = 0$$

या

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 \ \text{चूंकि}\ \psi \neq 0$$

इसी प्रकार, (क) में $\psi(\xi) = \xi \exp(-\xi^2/2)$ प्रतिस्थापित करके हमें यह मिलता है :

$$-3\psi + \xi^2\psi + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \xi^2\right)\psi = 0$$

या

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 3\right)\psi = 0$$

या

$$\frac{\alpha}{\beta} = 3 \ \text{चूंकि}\ \psi \neq 0.$$

इकाई 7 प्रेक्षणीय राशियाँ और संकारक

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

खंड के परिचय में हमने कहा था कि क्वांटम यांत्रिकी का विकास दो लीकों पर हुआ। इकाई 4 से 6 में हमने इनमें से एक के बारे में बताया। आपने इकाई 4 में कण-तरंग द्वैतवाद के बारे में पढ़ा। पिछली इकाई में आपने पढ़ा कि इर्विन श्रोडिन्गर ने द्रव्य तरंगों के लिए तरंग समीकरण की खोज कैसे की। इसे हम श्रोडिन्गर समीकरण कहते हैं। आपने यह भी सीखा कि क्वांटम यांत्रिकी में एक निकाय की किसी अवस्था को एक तरंग फलन ψ द्वारा निरूपित किया जाता है, जिसे श्रोडिन्गर समीकरण को हल करके प्राप्त किया जा सकता है। आपने मैक्स बॉर्न द्वारा दी गई ψ की प्रायिकतात्मक व्याख्या भी पढ़ी है, कि दे ब्रॉग्ली-श्रोडिन्गर तरंगें प्रायिकता तरंगें हैं, जो अनिश्चितता संबंधों को भी संतुष्ट करती हैं। इस तरह इकाई 4 से 6 में हमने क्वांटम यांत्रिकी का तरंग यांत्रिकी वृत्तान्त पेश किया है। यहाँ आपको यह अच्छी तरह समझ लेना चाहिए कि ψ का अस्तित्व और श्रोडिन्गर समीकरण (जो तरंग यांत्रिकी की आधारभूत संकल्पनाएं हैं) वस्तुत: क्वांटम यांत्रिकी के अभिगृहीत ही हैं। यानी क्वांटम यांत्रिकी कुछ ख़ास अभिगृहीतों पर आधारित हैं, जिन्हें सिद्ध नहीं किया जा सकता। ये ज्यामिति के स्वयं सिद्धों (axioms) या अभिगृहीतों की तरह ही हैं।

इस इकाई में हम क्वांटम यांत्रिकी के विकास की दूसरी लीक प्रस्तुत करने जा रहे हैं। इसे मैट्रिक्स यांत्रिकी के नाम से जाना जाता है और यह 1925 और 1926 के बीच वर्नर हाइज़ेनबर्ग, मैक्स बॉर्न और पी. जॉर्डन द्वारा विकसित की गई। इस यांत्रिकी में केवल प्रेक्षणीय भौतिक राशियां (observable physical quantities) ही आती हैं। प्रत्येक भौतिक राशि एक **संकारक** (operator) से संबद्ध होती है जिसे मैट्रिक्स द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है। आप पूछेंगे कि ये संकारक क्या होते हैं? इस सवाल का जवाब आपको अगले भाग में मिलेगा। इसी भाग में आप एक क्लासिकी फलन को क्वांटम यांत्रिकीय संकारक में बदलने की विधि भी सीखेंगे। यह विधि भी क्वांटम यांत्रिकी का एक अभिगृहीत है। क्वांटम यांत्रिकी के मैट्रिक्स यांत्रिकी वृत्तान्त और क्लासिकी यांत्रिकी में एक महत्वपूर्ण अंतर यह है : क्वांटम यांत्रिकीय संकारक अक्रमविनिमेय (non-commutative) बीजगणित का पालन करते हैं। भाग 7.2.2 में हम समझाएंगे कि इस बात का क्या मतलब है और कम्यूटेटर (commutator) बीजगणित की चर्चा करेंगे। साथ ही साथ हम उसके कुछ अनुप्रयोगों के बारे में भी बताएंगे।

इन दो लीकों (श्रोडिन्गर की तरंग यांत्रिकी और हाइज़ेनबर्ग की मैट्रिक्स यांत्रिकी) का एकीकरण पॉल ए. एम. डिराक (चित्र 7.1) ने किया, जब 1930 में उन्होंने क्वांटम यांत्रिकी का एक अमूर्त गणितीय विधान (abstract mathematical formalism) विकसित किया। इस इकाई के बाकी हिस्से में हम डिराक द्वारा दिए गए इस विधान की मूल संकल्पनाओं की चर्चा करेंगे। इस विधान का एक आधारभूत अभिगृहीत,

किसी गतिकीय चर के मापे हुए मान का, तरंग फलन ψ की मदद से प्राप्त उसके परिकलित मान से संबंध स्थापित करता है। इसके बारे में हम भाग 7.2.2 में बताएंगे और इस तरह आप क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों का प्रेक्षित भौतिक राशियों से संबंध समझ सकेंगे।

कुछ परिस्थितियों में यह भी होता है कि एक संकारक की तरंग फलन पर संक्रिया के फलस्वरूप उसी तरंग फलन का एक गुणज मिलता है। इस प्रक्रिया में हमें **आइगेन मान–आइगेन फलन** समीकरण मिलती है, जिसके बारे में आप भाग 7.3 में पढ़ेंगे। अंततः आप **एहरेनफेस्ट प्रमेय** के बारे में पढ़ेंगे, जिससे क्लासिकी और क्वांटम यांत्रिकी के बीच की समानताएं और एक मूलभूत अंतर का पता लगता है।

जब आप इस इकाई में दी गई संकल्पनाओं को पहली बार पढ़ेंगे तब हो सकता है कि ये आपको बहुत ज़्यादा गणितीय और अमूर्त लगें। लेकिन डिराक द्वारा प्रस्तुत यह अमूर्त गणितीय विधान क्वांटम यांत्रिकीय निकायों से संबद्ध गणनाएं करने का एक बहुत ही शक्तिशाली और सुंदर तरीका है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- एक क्लासिकी गतिकीय चर को क्वांटम यांत्रिकीय संकारक के रूप में व्यक्त कर सकेंगे,
- हर्मिटी (Hermitian) संकारक और पैरिटी संकारक की परिभाषा दे सकेंगे और क्वांटम यांत्रिकीय निकायों पर उनके गुणधर्मों को लागू कर सकेंगे,
- एक संकारक के प्रत्याशा मान की गणना कर सकेंगे,
- कम्यूटेटर बीजगणित के कुछ प्रारंभिक परिणामों की व्युत्पत्ति कर सकेंगे,
- किसी दिए हुए संकारक के आइगेन मानों और आइगेन फलनों की गणना कर सकेंगे,
- एहरेनफेस्ट (Ehrenfest) प्रमेय की व्युत्पत्ति और व्याख्या कर सकेंगे।

7.2 क्वांटम यांत्रिकीय संकारक

चित्र 7.1 : पॉल एएम. डिराक, अंग्रेज़ भौतिकीविद् थे। वे क्वांटम यांत्रिकी का विकास करने वालों में अग्रणी थे। उन्होंने क्वांटम यांत्रिकी की आपेक्षिकीय तरंग समीकरण की खोज की जिससे पॉज़िट्रॉन का पूर्वानुमान लगाया गया। उन्हें 1933 का नोबेल पुरस्कार दिया गया।

क्वांटम यांत्रिकीय "संकारक" (operator) से हम क्या समझते हैं? आइए इस बात को एक आसान उदाहरण की मदद से समझें। जब आप व्यायाम करते हैं तो इस व्यायाम के फलस्वरूप आपकी मांसपेशियां विकसित होती हैं यानी व्यायाम मांसपेशियों को बदल देता है। फलनों पर क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों की संक्रिया कुछ उस तरह है जैसे मांसपेशियों पर व्यायामों की क्रिया। वे भी फलनों को बदल देते हैं। आप क्लासिकी यांत्रिकी से जानते हैं कि किसी निकाय की गतिकीय अवस्था समय के प्रत्येक क्षण पर कुछ ख़ास भौतिक राशियों के परिमाणों से निर्धारित होती है जैसे कि उस निकाय के कणों की स्थिति, वेग, रैखिक संवेग, कोणीय संवेग, ऊर्जा आदि। ये भौतिक राशियां **गतिकीय चर** (dynamical variables) भी कहलाती हैं।

एक निकाय से संबंधित गतिकीय चरों का मापन करके, दिक्-काल के किसी विशिष्ट बिन्दु पर उस निकाय के बारे में जानकारी हासिल की जा सकती है। क्वांटम यांत्रिकी में **सभी गतिकीय चरों को संकारकों द्वारा निरूपित किया जाता है** क्योंकि वे उन तरंग फलनों में परिवर्तन लाते हैं, जिन पर वे संक्रिया करते हैं।

किसी क्वांटम यांत्रिकीय निकाय के सभी मापनीय गुणधर्मों को **प्रेक्षणीय** (observable) कहते हैं। क्वांटम यांत्रिकी के एक और अभिगृहीत के अनुसार :

अभिगृहीत 4 : भौतिक राशियों का वर्णन

प्रत्येक भौतिक प्रेक्षणीय राशि (observable) एक संकारक के साथ संबद्ध होती है, जो तरंग फलन पर संक्रिया करता है।

इनमें से ज़्यादातर गतिकीय चर या प्रेक्षणीय राशियां, स्थिति (x), रैखिक संवेग (p) और समय (t) आदि चरों के फलन होते हैं। इस तरह अगर हम x और p को संकारकों द्वारा निरूपित कर सकें तो हम अधिकांश बाक़ी बचे हुए गतिकीय चरों को भी संकारकों के रूप में लिख पाएंगे। इन चरों को क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों में बदलने की एक विधि को भी क्वांटम यांत्रिकी के अभिगृहीत के तौर पर निम्न रूप में दिया जाता है :

(i) $$\boxed{x_{op}\,\psi = x\psi} \tag{7.1}$$

यानी जब संकारक x_{op}, ψ पर संक्रिया करता है तो इसके फलस्वरूप ψ का केवल चर x से गुणनफल मिलता है। दूसरे शब्दों में, गतिकीय चर x से संबद्ध संकारक स्वयं x है।

(ii) $$(p_x)_{op}\,\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7.2 क}$$

इस तरह तरंग फलन पर संवेग संकारक की संक्रिया के कारण, उस तरंग फलन का उसके संयुग्मी स्थिति निर्देशांक x के सापेक्ष अवकलन होता है और परिणाम को $-i\hbar$ से गुणा कर दिया जाता है। इस तरह p_x का संकारक $-i\hbar\,\partial/\partial x$ है।

$$\boxed{(p_x)_{op} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}} \tag{7.2 ख}$$

यहाँ ध्यान रखिए कि समीकरणें (7.1) और (7.2ख) अभिगृहीतों के तौर पर प्रस्तुत की गई हैं यानी इन्हें सिद्ध नहीं किया जा सकता। अन्य गतिकीय चरों जैसे कि कोणीय संवेग, ऊर्जा आदि से संबद्ध संकारकों को प्राप्त करने के लिए स्थिति और संवेग संकारकों का इस्तेमाल किया जाता है। ऐसा हम कैसे करते हैं? इसके लिए हम इनमें से किसी भी संकारक D का x और p_x के पदों में क्लासिकी व्यंजक लिखते हैं और फिर समीकरण (7.1) और (7.2ख) का इस्तेमाल करके उसका संकारक स्वरूप $D_{op}(x, -i\hbar\,\partial/\partial x, t)$ प्राप्त करते हैं। यहाँ ध्यान दीजिए कि संकारक स्वरूप में समय के चर को वैसे का वैसा ही रखा गया है। क्वांटम यांत्रिकी में समय को एक संकारक के रूप में नहीं माना जाता। यह एक गतिकीय चर है।

इस विधि को और बेहतर समझने के लिए आइए, हम एकविम गति कर रहे मुक्त कण की गतिज ऊर्जा का उदाहरण लेते हैं। कण की गतिज ऊर्जा का मान है $p_x^2/2m$। गतिज ऊर्जा के क्वांटम यांत्रिकीय संकारक लिखने के लिए हम p_x की जगह $(p_x)_{op}$ रखते हैं। तब समीकरण (7.2ख) से :

$$(\text{K.E.})_{op} = \frac{(p_x^2)_{op}}{2m} = \frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7.3क}$$

साथ ही साथ अगर इसकी स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ है तो स्थितिज ऊर्जा संकारक खुद $V(x)$ ही होगा क्योंकि x_{op} खुद x होता है।

$$[V(x)]_{op} = V(x) \tag{7.3ख}$$

अब क्या आपने ध्यान दिया कि इनका योग $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)_{op}$ और कुछ नहीं बल्कि हैमिल्टोनियन का क्वांटम यांत्रिकीय संकारक है। याद करें कि हैमिल्टोनियन श्रोडिन्गार समीकरण में आता है। इस तरह हमें हैमल्टोनियन संकारक का निम्न व्यंजक मिलता है :

$$\boxed{(H)_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)} \tag{7.4}$$

इसी तरह से आप ज़्यादातर गतिकीय चरों को क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों में बदल सकते हैं। अपनी बाद की चर्चा में हमने एक महत्वपूर्ण संकारक का इस्तेमाल किया है। यह है पैरिटी (parity) संकारक। आपको हम यहाँ पर ही इसकी जानकारी दे रहे हैं।

पैरिटी संकारक

क्वांटम यांत्रिकी में पैरिटी एक बहुत सरल लेकिन बहुत ही उपयोगी संकल्पना है। एक तरंग फलन $\psi(x)$ को लें। अगर x की जगह $-x$ रखने पर निम्न संबंध मिलता है

$$\psi(-x) = \pm\,\psi(x) \tag{7.5}$$

तब हम कहते हैं कि $\psi(x)$ की एक निश्चित पैरिटी है। अगर $\psi(-x) = \psi(x)$ तब $\psi(x)$ की **सम** पैरिटी है। दूसरी ओर $\psi(-x) = -\psi(x)$ के लिए, $\psi(x)$ की पैरिटी **विषम** है। वे सभी फलन जो समीकरण (7.5) का पालन नहीं करते मिश्रित पैरिटी के होते हैं। पैरिटी संकारक की संक्रिया दरअसल दक्षिण-हस्त निर्देशांक तंत्र को वाम-हस्त निर्देशांक तंत्र में रूपांतरित करने के समतुल्य है। आपको याद आया कि आपका इस संकारक से पहले पहल कब सामना हुआ था? इसे सबसे पहले हमने अपने पाठ्यक्रम पी.एच.ई. – 04 भौतिकी में गणितीय विधियां-I की इकाई 1 में बताया था जहाँ आपने सदिशों के संदर्भ में इस संक्रिया के बारे में पढ़ा। पैरिटी संकारक की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

$$\boxed{P\,\psi(x, t) = \psi(-x, t)} \tag{7.6 क}$$

और

$$PA\left[x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, t\right] = A\left(-x, i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, t\right) \tag{7.6 ख}$$

आप यह देख सकते हैं कि पैरिटी संकारक एक आकाशीय व्युत्क्रमण (space inversion) संकारक है यानी इसकी संक्रिया के अधीन $x \to -x$। इस तरह अगर $\psi(x)$ किसी निकाय की अवस्था का वर्णन करता है तो $P\psi(x)$ इसके दर्पण प्रतिबिंब का वर्णन करता है।

अभी हमने क्लासिकी व्यंजकों के संगत क्वांटम यांत्रिकीय संकारक प्राप्त करने की एक विधि की चर्चा की जिसमें x की जगह पर x, t की जगह पर t और p_x की जगह पर $-i\hbar\,\partial/\partial x$ रखा जाता है। लेकिन x और p_x के पदों में कोई भी क्लासिकी व्यंजक ऐसा नहीं है जो अपनी संक्रिया द्वारा फलन के कोणांक (argument) का चिह्न बदल देता हो। इसलिए हम कहते हैं कि **पैरिटी संकारक का कोई क्लासिकी अनुरूप नहीं है।**

अब आप एक दो अभ्यास जल्दी से करें और इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह समझ लें।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

क) चर p_y और p_z को उनके संकारक रूप में व्यक्त करें।

ख) कोणीय संवेग L के x, y, z घटकों को x, y, z और p_x, p_y, p_z के पदों में लिखें और फिर L_x, L_y, L_z के संगत क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों के व्यंजक प्राप्त करें।

अभी आपने पढ़ा कि क्वांटम यांत्रिकी में उन क्लासिकी गतिकीय चरों को (जैसे स्थिति, संवेग आदि) जिनका मापन किया जा सकता है, संकारकों द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है। ये संकारक एक तरंग फलन पर संक्रिया करते हैं और इसे किसी न किसी तरह बदल देते हैं। अभी तक के परिणामों को हमने नीचे दी गई सारणी में संक्षेप में लिखा है ताकि आप ज़रूरत पड़ने पर इन्हें देख सकें। हमारी सलाह है कि आप इन्हें याद भी कर लें।

गतिकीय चर और संगत संकारक

गतिकीय चर	संकारक
स्थिति निर्देशांक x	x
संवेग का x घटक p_x	$-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$
गतिज ऊर्जा $T = \dfrac{p_x^2}{2m}$	$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

स्थितिज ऊर्जा $V(x, t)$	$V(x, t)$
कुल ऊर्जा $\frac{p_x^2}{2m} + V(x, t)$	हैमिल्टोनियन $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$
कोणीय संवेग	
L_x	$yp_z - zp_y$
L_y	$zp_x - xp_z$
L_z	$xp_y - yp_x$

आइए, अब हम इन संकारकों के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मों पर चर्चा करें।

7.2.1 संकारकों के गुणधर्म

इनका सबसे पहला गुण यह है कि क्वांटम यांत्रिकी में संकारक आमतौर पर रैखिक होते हैं। आप पूछेंगे कि रैखिक संकारक क्या होता है? परिभाषा से, एक रैखिक संकारक निम्न गुणधर्मों को संतुष्ट करता है

$$D_{op}(\phi + \psi) = D_{op}\phi + D_{op}\psi \tag{7.7क}$$

$$D_{op}\, c\,\phi = C\, D_{op}\phi \tag{7.7ख}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ संख्या है। आम तौर पर हम समीकरणों (7.7क और ख) को एक साथ इस तरह लिख सकते हैं :

$$D_{op}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda(D_{op}\phi) + \mu(D_{op}\psi) \tag{7.8}$$

जहाँ λ और μ सम्मिश्र संख्याएं हैं। आप देख सकते हैं कि x और p_x दोनों ही समीकरण (7.8) को संतुष्ट करते हैं। आप इसे खुद भी करके देख सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

10 मिनट लगाएं

सिद्ध कीजिए कि x और p_x रैखिक संकारक हैं।

दूसरे, आमतौर पर ज़रूरी नहीं कि क्वांटम यांत्रिकीय संकारक कम्यूट (commute) करें। इसका क्या मतलब है? इसे समझने के लिए याद कीजिए कि क्लासिकी यांत्रिकी में हम कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ की परिभाषा $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ से देते हैं; $\mathbf{p}\times\mathbf{r}$ से नहीं, जो कि $-\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ के बराबर है। इसी बात को गणितीय तौर पर हम इस तरह कहते हैं कि सदिश गुणनफल संक्रिया के अधीन $\mathbf{r}$ और $\mathbf{p}$ क्रम विनिमेय नहीं हैं या वे **कम्यूट नहीं करते।**

ऐसी ही स्थिति क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों के लिए भी पाई जाती है। अगर किसी फलन ψ पर दो संकारक A और B एक के बाद एक संक्रिया करते हैं तो उनकी संक्रिया का क्रम (order) महत्वपूर्ण होता है। आम तौर पर किसी भी स्वेच्छ ψ के लिए $BA\psi$, $AB\psi$ के बराबर नहीं होता। यानी

$$[AB - BA]\,\psi \neq 0 \tag{7.9क}$$

व्यंजक $AB - BA$ को कम्यूटेटर ब्रैकेट $[A, B]$ द्वारा दिखाया जाता है। इस तरह हम दो संकारकों के कम्यूटेटर की परिभाषा इस प्रकार से देते हैं

$$\boxed{[A, B] \equiv AB - BA} \tag{7.9ख}$$

और आमतौर पर

$$[A, B] \neq 0 \tag{7.9ग}$$

दूसरे शब्दों में, आमतौर पर संकारक A और B एक दूसरे से कम्यूट नहीं करते और $[A, B]$ का मान शून्य नहीं होता। इस परिणाम का क्या अर्थ है? इसका अर्थ यह है कि हमें क्वांटम यांत्रिकी में संकारकों की गुणा करते समय, संकारकों के क्रम के बारे में बहुत सावधान रहना चाहिए। लेकिन अगर संकारकों A और B का कम्यूटेटर शून्य होता है तो $AB=BA$ और A और B कम्यूट करते हैं। तब हम उनके क्रम को बदल सकते हैं।

इन संकल्पनाओं को बेहतर समझने के लिए आइए हम एक उदाहरण लें। आइए देखें कि संकारक x और p_x एक दूसरे से कम्यूट करते हैं या नहीं। इसके लिए हम निम्न गणना करते हैं :

$$[x, p_x]\,\psi = x\,(-i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial x}) + i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = i\hbar\psi$$

चूंकि ψ स्वेच्छ है, इसलिए हमें मिलता है :

$$\boxed{[x, p_x] = i\hbar} \qquad (7.10)$$

इस तरह हम पाते हैं कि x और p_x संकारक एक दूसरे से कम्यूट नहीं करते और इनके कम्यूटेटर ब्रैकेट का मान $i\hbar$ है। यह परिणाम हमें बताता है कि जब हम इनकी किसी भी निकाय पर संक्रिया करते हैं, तो हमें इन संकारकों के क्रम का ध्यान रखना चाहिए। उदाहरण के लिए, अगर किसी निकाय पर संवेग संकारक पहले संक्रिया करता है और फिर स्थिति संकारक संक्रिया करता है तो इससे एक निश्चित परिणाम मिलता है। लेकिन अगर स्थिति संकारक निकाय पर पहले संक्रिया करता है और उसके बाद संवेग संकारक संक्रिया करता है तो हमें दूसरा ही परिणाम मिलता है। इस परिणाम का एक बहुत रोचक नतीजा हमारे सामने आता है। कभी-कभी हम पाते हैं कि किसी क्लासिकी चर में x और p_x का गुणनफल उपस्थित है। अब आपने पढ़ा कि अगर उसके संगत क्वांटम यांत्रिकीय संकारक लिखना हो तो इनका क्रम महत्त्व रखता है। तो सवाल उठता है कि हम x और p_x को किस क्रम में रखें? ऐसी स्थितियों में हम xp_x चर की जगह संकारक $\frac{1}{2}\,(xp_x + p_x x)$ लेते हैं :

$$xp_x \rightarrow \frac{1}{2}\,(xp_x + p_x x)$$

यहाँ आप ध्यान दें कि x और p_x क्लासिकी यांत्रिकी के विहित संयुग्मी चर हैं। क्लासिकी यांत्रिकी में समीकरण (7.10) जैसी कोई समीकरण नहीं होती, क्योंकि x और p_x गतिकीय चर हैं, जिनके सम्मिश्र संख्यात्मक मान होते हैं। इसलिए भौतिक राशियों के क्लासिकी व्यंजकों में उनकी अदला-बदली करके भी उन्हें रखा जा सकता है। आगे पढ़ने से पहले आप इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह समझ लें। इसके लिए निम्न अभ्यास करें।

---

5 मिनट लगाएं **बोध प्रश्न 3**

क) सिद्ध करें कि x_{op}, $(p_y)_{op}$ और $(p_z)_{op}$ के साथ कम्यूट करता है।

ख) $[y, p_y]$ और $[z, p_z]$ का मान निकालें।

इस तरह आपने पाया कि क्लासिकी विहित संयुग्मी स्थिति और संवेग चरों के संगत क्वांटम यांत्रिकीय संकारक एक-दूसरे के साथ कम्यूट नहीं करते : x, p_x के साथ y, p_y के साथ और z, p_z के साथ कम्यूट नहीं करता। प्रत्येक स्थिति में कम्यूटेटर ब्रैकेट का मान $i\hbar$ होता है। इस अक्रमविनिमेयता के कारण, जब भी कभी क्लासिकी व्यंजकों में x, p_x, y, p_y या z, p_z आता है, तो हमें उसे क्वांटम यांत्रिकीय संकारक में बदलने के लिए सममित रूप में व्यक्त करना होता है। आइए, अब हम समीकरण (7.9ख) में दी गई $[A, B]$ की परिभाषा का इस्तेमाल करके कम्यूटेटर बीजगणित के मूलभूत परिणामों को हासिल करें।

1. संकारकों द्वारा संतुष्ट किए जाने वाले निम्न परिणाम बहुत उपयोगी हैं और इन्हें आप आसानी से सिद्ध कर सकते हैं :

$$[A, B] = -[A, B] \qquad (7.11\text{क})$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \qquad (7.11\text{ख})$$

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]B \qquad (7.11\text{ग})$$

अथवा

$$[A, BC] = B\,[A, C] + [A, B]C \qquad (7.11\text{घ})$$

आगे पढ़ने से पहले आप जल्दी से समीकरण (7.11क) से (7.11घ) तक के परिणामों की जांच कर लें।

2. कोई भी संकारक अपनी घात से कम्यूट करता है, यानी

$$[A^n, A] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.12)$$

समीकरणों (7.11) और (7.12) से यह नतीजा निकलता है कि अगर $f(x)$ कोई संकारक है, जिसे x की घात में विस्तारित किया जा सकता है, तब

$$[f(x), p_x] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x) \qquad (7.13)$$

इसी तरह, अगर $f(p_x)$ को p_x की घात में विस्तारित किया जा सकता है, तब

$$[x, f(p_x)] = i\hbar \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x} \qquad (7.14)$$

आप आगे बढ़ने से पहले समीकरणों (7.13) और (7.14) को सिद्ध करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4

10 मिनट लगाएं

क) समीकरणों (7.13) और (7.14) को सिद्ध कीजिए।

ख) सिद्ध करें कि पैरिटी संकारक निम्न संकारक से कम्यूट करता है :

$$A(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + ax^2 + bx^4$$

अब **चूंकि किसी भी भौतिक निकाय के लिए प्रेक्षणीय राशियां वे होती हैं जिनका मापन किया जा सकता है, इसलिए ज़ाहिर है कि वे राशियां वास्तविक होंगी।** इसलिए उन्हें केवल ऐसे ही संकारकों द्वारा निरूपित किया जाना चाहिए जो किसी भौतिक निकाय पर संक्रिया करते हुए इन प्रेक्षणों के वास्तविक मान ही देते हों। क्वांटम यान्त्रिकी में सभी प्रेक्षणीय राशियों से ऐसे ही संकारक संबद्ध किए जाते हैं और इन्हें **हर्मिटी संकारक** (hermitian operators) कहते हैं। आइए, अब हम संक्षेप में इनके बारे में जानें।

हर्मिटी संकारक

एक **हर्मिटी संकारक** की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

$$\boxed{\int \phi^* (D_{op}\,\psi)\, d\tau = \int (D_{op}\,\phi)^* \psi\, d\tau} \qquad (7.15\text{क})$$

एकविम निकाय के लिए आयतन अवयव $d\tau$ केवल dx के बराबर होता है और x की समाकलन सीमा $-\infty$ से $+\infty$ होती है। लेकिन एक त्रि-विम निकाय के लिए $d\tau$, $dx\,dy\,dz$ के बराबर होता है और तीनों चरों x, y, z के मान संपूर्ण अंतरिक्ष पर विस्तारित होते हैं, यानी इन चरों की सीमा $-\infty$ से $+\infty$ होती है।

समीकरण (7.15क) की तरह के समाकल इस पाठ्यक्रम में बहुत बार आएंगे। इसलिए हम इनके लिए निम्न संक्षिप्त संकेत का इस्तेमाल करते हैं :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* (D_{op}\,\psi)\, d\tau = (\phi, D\psi) \qquad (7.15\text{ख})$$

और

$$\int_{-\infty}^{\infty} (D_{op}\,\phi)^* \,\psi d\tau = (D\phi, \psi) \qquad (7.15\text{ग})$$

इसके बाद हम गतिकीय चर और उसके संगत संकारक के लिए एक ही संकेत D का इस्तेमाल करेंगे, अगर इससे चर्चा में कोई भ्रम न पैदा होता हो। समाकल $(\phi, D\psi)$ को ϕ का $D\psi$ के साथ **अदिश गुणनफल या आंतर गुणनफल** (inner product) कहा जाता है।

$\phi = \psi$ और $D = I$ के लिए (जहाँ I तत्समक (identity) संकारक है), समाकल (ψ, ψ) **तरंग फलन** ψ का **मानक** (norm) कहलाता है। ध्यान दीजिए कि प्रसामान्यीकृत ψ के लिए, इस मानक का मान 1 है। किसी निकाय की एक अवस्था को निरूपित करने वाले तरंग फलन का मानक हमेशा धनात्मक होता है। यह शून्य तभी हो सकता है जब $\psi = 0$, यानी निकाय की उस अवस्था का अस्तित्व ही न हो।

इन संकल्पनाओं को और बेहतर ढंग से समझने के लिए, आइए अब हम यह सिद्ध करें कि रैखिक संवेग संकारक $\mathbf{p}$ हर्मिटी संकारक है। यहाँ $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{l}}\, p_x + \hat{\mathbf{m}}\, p_y + \hat{\mathbf{n}}\, p_z$ जहाँ $\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}$ और $\hat{\mathbf{n}}$ क्रमशः x, y और z अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं। आप बोध प्रश्न 2 में तो यह सिद्ध कर ही चुके हैं कि :

$$p_x(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\,(p_x\phi) + \mu\,(p_x\psi)$$

यह परिणाम p_y और p_z पर भी लागू होता है। अतः p_x, p_y और p_z रैखिक संकारक हैं। आइए अब हम यह समाकल हल करें।

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* (p_{op}\,\psi)\, dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \,\frac{\partial\psi}{\partial x}\, dx$$

जहाँ p_{op}, p_x, p_y या p_z में से कोई भी हो सकता है। खंडशः समाकलन करने पर हमें मिलता है :

$$I = -i\hbar\,[\phi^*\psi]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^* \psi\, dx$$

यदि इनमें से एक फलन का भी प्रसामान्यीकरण किया जा सकता है तो पहला पद शून्य हो जाता है क्योंकि ऐसे तरंग फलन $x = \pm\infty$ पर शून्य हो जाते हैं। इस तरह

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (p_{op}\,\phi)^* .\,\psi\, dx \qquad (7.16)$$

इसका मतलब यह हुआ कि p_{op} एक हर्मिटी संकारक है। इस तरह p_x, p_y, p_z और $\mathbf{p}$, ये सब के सब हर्मिटी संकारक हैं।

स्पष्टतः **स्थिति संकारक x भी रैखिक और हर्मिटी** है। अतः **कोणीय संवेग और हैमिल्टोनियन संकारक भी रैखिक और हर्मिटी होंगे।**

समीकरण (7.15क) को संतुष्ट करने वाले संकारकों को **स्वसंलग्न** (self-adjoint) संकारक कहा जाता है। इसलिए यहाँ पर किसी संकारक D के संगत उसके **संलग्न** संकारक या **हर्मिटी संयुग्मी** की निम्न परिभाषा देना भी उचित रहेगा :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^*\, D\,\psi\, d\tau = \int (D^\dagger\phi)^*\, \psi\, d\tau \qquad (7.17\text{क})$$

अगर $D = D^\dagger$ तब संकारक D को **स्वसंलग्न संकारक** कहा जाता है। आप समीकरणों (7.15क) और (7.17क) की तुलना करके देख सकते हैं कि हर्मिटी संकारक के लिए

$$D^\dagger = D \qquad (7.17\text{ख})$$

अब माना कि $D = AB$ तब समीकरण (7.17क) के अनुसार

$$\int \phi^* \, (AB\,\psi)\, d\tau = \int \{(AB)^{\dagger}\phi\}^* \;\psi\, d\tau \qquad (7.18\text{क})$$

लेकिन इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$\int \phi^* \, (AB\,\psi)\, d\tau = \int \phi^* \{A\,(B\psi)\}\, d\tau$$

इस तरह, समीकरण (7.17क) को दो बार लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int \phi^* \, (AB\,\psi)\, d\tau = \int \{A^{\dagger}\,\phi\}^* (B\psi)\, d\tau = \int (B^{\dagger}A^{\dagger}\,\phi)^* \,\psi\, d\tau \qquad (7.18\text{ख})$$

अत: समीकरण (7.18क) की (7.18ख) से तुलना करने पर हमें संलग्न संकारकों के लिए एक महत्वपूर्ण परिणाम मिलता है, जो हर्मिटी संकारकों पर भी लागू होता है :

$$\boxed{(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}} \qquad (7.18\text{ग})$$

अभी तक हमने आपका परिचय प्रेक्षणीय राशियों (observables) और संकारकों की संकल्पना से कराया है। हमने यह बताया है कि प्रत्येक प्रेक्षणीय राशि के साथ एक संकारक संबद्ध होता है। अब आप पूछ सकते हैं : प्रेक्षणीय राशियों और संकारकों में आखिर क्या संबंध होता है? इसी बात की खोज हम अगले भाग में करने जा रहे हैं।

7.2.2 प्रत्याशा मान

आइए, अब हम किसी निकाय के लिए प्रेक्षणीय राशि या गतिकीय चर D के मापन का उदाहरण लें। निकाय को किसी विशिष्ट अवस्था ψ में रखकर हम D का बार-बार मापन करते हैं। आमतौर पर प्रत्येक मापन में हमें D का ज़रा सा अलग मान मिलेगा। इसलिए हम इन मापनों का औसत ले लेते हैं और यह मानते हैं कि उस ख़ास अवस्था $\langle D\rangle$ के लिए यही गतिकीय चर का मान है। चूंकि हम हमेशा एक ही अवस्था ψ से शुरुआत करते हैं, इसलिए यह मानना तर्कसंगत होगा कि अगर हमें ψ पता हो तो हम $\langle D\rangle$ का मान निकाल सकते हैं। ψ और $\langle D\rangle$ के बीच का यह संबंध क्वांटम यांत्रिकी के एक और अभिगृहीत द्वारा दिया जाता है। इस अभिगृहीत के मुताबिक :

अभिगृहीत 5 : मापन अभिगृहीत

> D के मापे गए मान का औसत होता है :
>
> $$\langle D\rangle = \frac{\int \psi^* D\psi\, d\tau}{\int \psi^*\,\psi\, d\tau} = \frac{(\psi, D\psi)}{(\psi, \psi)} \qquad (7.19)$$
>
> $\langle D\rangle$ को संकारक D का **प्रत्याशा मान** (expectation value) कहते हैं।

अगर समीकरण (7.19) से प्राप्त $\langle D\rangle$ वास्तविक होता है तब गतिकीय चर D को प्रेक्षणीय (observable) कहते हैं। इसलिए, हम कह सकते हैं :

> **एक प्रेक्षणीय, वह गतिकीय चर होता है, जिसका प्रत्याशा मान वास्तविक होता है।**

अब हम एक हर्मिटी संकारक का महत्व समझ सकते हैं। **हर्मिटी संकारकों के वास्तविक प्रत्याशा मान होते हैं।** इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए हम लिखते हैं :

$$\langle D\rangle = \frac{\int \psi^* D\psi\, d\tau}{\int \psi^*\,\psi\, d\tau} = C \int \psi^* \,(D\psi)\, d\tau \qquad (7.20\text{क})$$

यहां C, ψ का प्रसामान्यीकरण-नियतांक है। इस समीकरण का सम्मिश्र संयुग्मी होता है

$$\langle D\rangle^* = C \int \psi \,(D\psi)^*\, d\tau \qquad (7.20\text{ख})$$

इनका अंतर है

$$\langle D\rangle - \langle D\rangle^* = C\int \psi^* D\psi\, d\tau - C\int \psi\,(D\psi)^*\, d\tau$$

समीकरण (7.15क) का इस्तेमाल करके हमें मिलता है :

$$\begin{aligned}\langle D\rangle - \langle D\rangle^* &= C\int \psi^*(D\psi)\, d\tau - C\int \psi^*(D\psi)\, d\tau \\ &= 0\end{aligned} \tag{7.21}$$

या

$$\langle D\rangle = \langle D\rangle^*$$

जिसका मतलब है कि $\langle D\rangle$ वास्तविक है। इस तरह, हमने सिद्ध कर दिया कि **क्वांटम यांत्रिकी में सभी प्रेक्षणीयों को हर्मिटी संकारकों द्वारा निरूपित किया जाता है।**

अब हम आपको इस तमाम चर्चा से निकलने वाले एक और रोचक परिणाम के बारे में बताएंगे। वह यह कि श्रोडिन्गर समीकरण को एक आइगेन मान-आइगेन तरंग फलन समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है।

7.3 आइगेन फलन और आइगेन मान

अभी तक आपने पढ़ा कि आमतौर पर, जब कोई संकारक D, ψ पर क्रिया करता है तो हमें एक नया फलन ψ' मिलता है। लेकिन कुछ ख़ास परिस्थितियों में ψ', ψ का ही गुणज हो सकता है, यानी

$$D\psi = d\psi \tag{7.22}$$

जहाँ d एक सम्मिश्र संख्या है। इस परिस्थिति में ψ को संकारक D का **आइगेन फलन** कहा जाता है और d इसका **आइगेन मान** होता है। समीकरण (7.22) को संकारक D के लिए **आइगेन मान-आइगेन फलन समीकरण** कहा जाता है। अब इकाई 6 में दी गई काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण याद कीजिए :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right]\psi = E\psi$$

क्या आपने पहचाना कि इस समीकरण के बाएं पक्ष में कौन सा संकारक है? यह हैमिल्टोनियन संकारक ही है। इसलिए हम इस समीकरण को ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$H\psi = E\psi \tag{7.23}$$

इस तरह, काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण, वस्तुतः संकारक H के लिए आइगेन मान-आइगेन फलन समीकरण है (देखिए समीकरण 7.4)। यह हमें बताती है कि जब H एक ख़ास वर्ग के तरंग फलनों पर संक्रिया करता है, तो हमें उन्हीं तरंग फलनों और H के आइगेन मान E का गुणनफल मिलता है। चूंकि हर्मिटी है, इसलिए आइगेन मान E वास्तविक होता है। इस परिणाम को हम किसी भी हर्मिटी संकारक के लिए, जो आइगेन मान-आइगेन फलन समीकरण को संतुष्ट करता है, इस तरह सिद्ध कर सकते हैं :

समीकरण (7.15क) से

$$(\psi, D\psi) = (D\psi, \psi)$$

अब समीकरण (7.22) की मदद से हमें मिलता है

$$d\,(\psi, \psi) = d^*\,(\psi, \psi)$$

लेकिन किसी दी हुई अवस्था के लिए ψ शून्य नहीं होता इसलिए (ψ, ψ) परिमित है। इस तरह हमें मिलता है

$$d = d^*$$

यानी **हर्मिटी संकारक का आइगेन मान हमेशा ही वास्तविक होता है।** इस स्थिति में प्रत्याशा मान $\langle D \rangle$, d के बराबर होता है, जो वास्तविक है।

अब तक बताई गई संकल्पनाओं का प्रयोग करके अब हम आपका परिचय आइगेन फलनों के एक विशेष वर्ग से कराना चाहेंगे जिनके प्रसामान्यीकरण नियतांक का मान 1 होता है और जो **लांबिकता** (orthogonality) गुणधर्म को संतुष्ट करते हैं। ऐसे आइगेन फलनों को **प्रसामान्य लांबिक** (orthonormal) आइगेन फलन भी कहते हैं। इस सिलसिले में हम एक और उपयोगी संकल्पना के बारे में आपको बताएंगे। वह है **आइगेन फलनों की अपभ्रष्टता** (degenemcy)।

प्रसामान्य लांबिक आइगेन फलन

माना कि किसी निकाय के लिए एक से ज़्यादा आइगेन फलन ऐसे हैं, जिनका कि एक ही आइगेन मान है। तब ऐसे सभी फलनों को अपभ्रष्ट (degenerate) आइगेन फलन कहते हैं। किसी संकारक के वे आइगेन फलन जिनके आइगेन मान एक-दूसरे से अलग हों, अनपभ्रष्ट (non-degenerate) कहलाते हैं। आइए, अब हम एक हर्मिटी संकारक D के दो अनपभ्रष्ट आइगेन फलन ϕ और ψ लें जिनके आइगेन मान क्रमशः d_1 और d_2 हैं।

$$D\phi = d_1 \phi \quad \text{और} \quad D\psi = d_2 \psi$$

मान लीजिए इन दोनों आइगेन फलनों के प्रसामान्यीकरण नियतांकों के मान 1 है। तब समीकरण (7.15क) और (7.22) से हमें मिलता है :

$$\int \phi^* \, (D\psi) \, d\tau = \int (D\phi)^* \; \psi \, d\tau$$

या

$$d_2 \, (\phi, \psi) = d_1 \, (\phi, \psi)$$

या

$$(d_2 - d_1) \; (\phi, \psi) = 0 \tag{7.24}$$

चूंकि $d_1 \neq d_2$ इसलिए हम पाते हैं कि समीकरण (7.24) में ϕ और ψ का आंतर गुणनफल (ϕ, ψ) शून्य है। वे आइगेन फलन जिनका आंतर गुणनफल शून्य होता है, एक-दूसरे के प्रति **लांबिक** कहलाते हैं :

$$(\psi_i, \psi_j) = 0, \qquad i \neq j \text{ के लिए} \tag{7.25}$$

हम इस परिणाम को व्यापक तौर पर भी लिख सकते हैं : यदि $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \psi_n$ किसी हर्मिटी संकारक के अनपभ्रष्ट आइगेन फलन हैं, जिनके प्रसामान्यीकरण नियतांकों के मान 1 हों, तब वे निम्न प्रसामान्य लांबिक गुणधर्म को संतुष्ट करते हैं :

$$(\psi_i, \psi_j) = 0, \qquad i \neq j \text{ के लिए} \tag{7.26क}$$

$$(\psi_i, \psi_j) = 1, \qquad i = j \text{ के लिए} \tag{7.26ख}$$

इस तरह, इन आइगेन फलनों का प्रसामान्यीकरण नियतांक 1 होता है और ये सभी ψ_i, ψ_j लांबिक गुणधर्म (7.26क) को $i \neq j$ के लिए संतुष्ट करते हैं। इस परिणाम को संक्षेप में लिखने के लिए हम क्रोनेकर डेल्टा संकेत δ_{ij} का इस्तेमाल कर सकते हैं और समीकरणों (7.26क और ख) को संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं :

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \tag{7.26}$$

जहाँ परिभाषा से,

$$\delta_{ij} = 0, \qquad i \neq j \text{ के लिए}$$

$$\delta_{ij} = 1, \qquad i = j \text{ के लिए}$$

ऐसे आइगेन फलनों, जो समीकरण (7.26) को संतुष्ट करते हैं, **प्रसामान्य लांबिक** (orthonormal) फलन कहते हैं और ये सब मिलकर **प्रसामान्य लांबिक समुच्चय** (orthonormal set) बनाते हैं।

इन संकल्पनाओं का इस्तेमाल करके हम दिखा सकते हैं कि अगर ψ एक संकारक D का अनपभ्रष्ट आइगेन फलन हो और D किसी अन्य संकारक B से कम्यूट करता हो, तो ψ, B का भी आइगेन फलन होता है। इस परिणाम को सिद्ध करने के लिए आइए, B की समीकरण (7.22) पर बाएं से संक्रिया करें। तब हमें मिलता है :

$$BD\,\psi = d\,(B\psi) \qquad (7.27\text{क})$$

जहाँ d एक संख्या है। लेकिन साथ ही साथ B, D के साथ कम्यूट भी करता है। इसलिए

$$D\,(B\,\psi) = B\,(D\psi) = d(B\psi) \qquad (7.27\text{ख})$$

यह समीकरण साफ़ तौर पर दिखाता है कि $(B\psi)$, D का आइगेन फलन है और उसका आइगेन मान d ही है। चूंकि ψ और $B\psi$ अनपभ्रष्ट हैं, इसलिए $B\psi$, ψ का ही एक गुणज होना चाहिए यानी

$$B\psi = b\psi \qquad (7.28)$$

समीकरण (7.28) से हम यह नतीजा निकालते हैं कि ψ संकारक B का भी आइगेन फलन है और इसका आइगेन मान b है। आम तौर पर अगर n संकारक हों, जो एक-दूसरे के साथ कम्यूट करते हों और ψ उनमें से किसी एक का अनपभ्रष्ट आइगेन फलन हो तो ψ बाकी $(n-1)$ संकारकों का भी आइगेन फलन होता है और ये n संकारक **कम्यूट करने वाले संकारकों का एक समुच्चय** बनाते हैं।

अब हम सिद्ध करेंगे कि अगर एक संकारक A पैरिटी संकारक P से कम्यूट करता है, तो A के अनपभ्रष्ट आइगेन फलनों की एक निश्चित पैरिटी होती है। मान लीजिए

$$A(x, p_x)\;\psi(x) = \lambda\psi(x) \qquad (7.29\text{क})$$

अब समीकरण (7.29क) पर बाएं से P की संक्रिया करने पर और प्रतिबंध $[P, A] = 0$ का इस्तेमाल करने पर हमें मिलता है

$$A(x, p_x)\,\{P\psi(x)\} = \lambda\{P\psi(x)\} \qquad (7.29\text{ख})$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों ही $\psi(x)$ और $P\psi(x)$ एक ही आइगेन मान वाले आइगेन फलन हैं। चूंकि $\psi(x)$ अनपभ्रष्ट है, इसलिए $\psi(x)$ और $P\psi(x)$ में अधिक से अधिक एक अचर का अंतर हो सकता है। यानी

$$P\psi(x) = p\psi(x) \qquad (7.30\text{क})$$

इस प्रकार, $\psi(x)$ पैरिटी संकारक का आइगेन फलन है और इसके संगत आइगेन मान p है। एक बार फिर पैरिटी संकारक से संक्रिया करने पर हमें मिलता है :

$$P^2\,\psi(x) = pP\,\psi(x) = p^2\,\psi(x) \qquad (7.30\text{ख})$$

लेकिन $\psi(x)$ और $P^2\psi(x)$ एक ही हैं। अतः $p^2 = 1$ यानी $p = \pm 1$। यानी $\psi(x)$ एक निश्चित पैरिटी का है। अपभ्रष्ट आइगेन फलनों के लिए हम $\psi(x)$ और $\psi(-x)$ का रैखिक संयोजन ले सकते हैं और एक निश्चित पैरिटी के आइगेन फलन प्राप्त कर सकते हैं। समीकरण (7.30ख) से हमें पैरिटी संकारक के आइगेन मान भी मिलते हैं : ये हैं ± 1।

इस चर्चा का अंत हम आपके लिए एक अभ्यास दे कर कर रहे हैं।

बोध प्रश्न 5

10 मिनट लगाएं

सिद्ध करें कि फलन $\exp(-x^2/2)$ और $x\exp(-x^2/2)$ संकारक $(-d^2/dx^2 + x^2)$ के आइगेन फलन हैं। इनके आइगेन मानों की गणना कीजिए और सिद्ध कीजिए कि ये दोनों फलन एक दूसरे के प्रति लांबिक हैं।

इस इकाई के अंतिम भाग में यह उचित रहेगा कि हम क्वांटम यांत्रिकीय और क्लासिकी संकल्पनाओं के बीच में एक संगतता ढूंढे। यह ध्यान रखें कि क्वांटम यांत्रिकी में संकारक होते हैं, जबकि क्लासिकी यांत्रिकी में केवल गतिकीय चर होते हैं जो कि सम्मिश्र संख्याएं भी हो सकती हैं। इस तरह हमें संकारकों के प्रत्याशा मान ही लेने पड़ते हैं। अब, संगति नियम के अनुसार हम यह आशा कर सकते हैं कि किसी क्वांटम वस्तु, जिसे ψ द्वारा निरूपित किया जाता है, की गति को तब-तब एक क्लासिकी कण की गति के समान होना चाहिए जब-जब दूरियों और संवेग के मान इतने अधिक हो जाएं कि हम अनिश्चितता सिद्धांत की अवहेलना कर सकें। जब हम इस बात को और गहराई से समझने की कोशिश करते हैं, तो हमें **एहरेनफेस्ट प्रमेय** प्राप्त होती है।

7.4 एहरेनफ़ेस्ट प्रमेय

आइए, अब हम किसी प्रेक्षणीय D के परिवर्तन की दर को लें (जो स्पष्ट रूप से समय पर निर्भर नहीं करता)। समीकरण (7.19) से प्रसामान्यीकृत तरंग फलन ψ के लिए :

$$\frac{d\langle D\rangle}{dt} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, D\psi\right) + \left(\psi, D\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) \tag{7.31}$$

अब हम समीकरण (7.31) में कालाश्रित श्रोडिन्गर समीकरण का इस्तेमाल करके $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ की जगह $\frac{1}{i\hbar}H\psi$ रखते हैं। इस प्रकार :

$$\frac{d\langle D\rangle}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}(H\psi, D\psi) + \frac{1}{i\hbar}(\psi, DH\psi)$$

या

$$\frac{d\langle D\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\int\psi^* DH\psi\, d\tau - \int\psi^* HD\,\psi\, d\tau\right]$$ चूंकि H हर्मिटी है अतः $H^\dagger = H$

या

$$\frac{d\langle D\rangle}{dt} = \left(\psi, \frac{1}{i\hbar}[D, H]\,\psi\right) \tag{7.32क}$$

या

$$\frac{d\langle D\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [D, H]\rangle \tag{7.32ख}$$

अब हम D को स्थिति संकारक के बराबर रखें। तब,

$$[D, H] = [x, H] = \frac{1}{2m}[x, p_x^2] = i\hbar\frac{p_x}{m} \tag{7.33}$$

समीकरण (7.33) को समीकरण (7.32ख) में रखने पर हमें मिलता है :

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle p_x\rangle \tag{7.34}$$

अब आइए D को रैखिक संवेग संकारक के बराबर रखें। इस स्थिति में हमें मिलता है :

$$\frac{d\langle p_x\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \tag{7.35}$$

यहाँ ध्यान दें कि समीकरण (7.34) और (7.35) उन समीकरणों से काफी मिलती-जुलती हैं जो क्लासिकी यांत्रिकी में रैखिक संवेग और बल की परिभाषा देती हैं। लेकिन इन दोनों यांत्रिकियों में मूल अंतर यह है कि क्लासिकी यांत्रिकी के x, p_x और $\frac{\partial V}{\partial x}$ की जगह क्वांटम यांत्रिकी में इनके औसत मान रखे जाते हैं। स्थूल निकायों के लिए x, p_x और $\frac{\partial V}{\partial x}$ और उनके औसत मानों में कोई ख़ास अंतर नहीं होता। लेकिन सूक्ष्मदर्शी निकायों के लिए इन मानों में काफी अंतर हो सकता है। वस्तुत: आपने देखा ही है कि सूक्ष्मदर्शी निकाय के लिए x और p_x के परिशुद्ध मानों का एक साथ अस्तित्व ही नहीं हो सकता। लेकिन उनके औसत मानों को एक साथ प्राप्त किया जा सकता है।

समीकरण (7.34) और (7.35) मिलकर **एहरनफेस्ट प्रमेय** कहलाते हैं जिनसे क्लासिकी और क्वांटम यांत्रिकी के बीच की समानता और एक मूलभूत अंतर का पता चलता है जिनका ज़िक्र हम ऊपर कर चुके हैं। अब आप इन विचारों को लागू करके और समीकरण (7.32ख) का प्रयोग करके एक रोचक परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

5 मिनट लगाएं **बोध प्रश्न 6**

सिद्ध करें कि जब एक संकारक हैमिल्टोनियन के साथ कम्यूट करता है तो उससे संबद्ध प्रेक्षणीय का प्रत्याशा मान, गति का अचर होता है। तब सिद्ध करें कि जब निकाय पर कोई नेट बल क्षेत्र काम नहीं कर रहा होता तो उसका रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।

आइए अब हम इस इकाई में जो कुछ आपने पढ़ा है, उसका सारांश यहाँ दें।

7.5 सारांश

- इस इकाई में आपने क्वांटम यांत्रिकी के दो और अभिगृहीतों के बारे में जाना। इनमें से पहले अभिगृहीत के मुताबिक **प्रत्येक प्रेक्षणीय एक संकारक से संबद्ध होता है।** गतिकीय चरों x और p_x के संगत संकारक हैं x और $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ ।
- किसी और गतिकीय चर के संगत संकारक लिखने के लिए हमें उस फलन को x और p_x के पदों में (सममित रूप में) लिखना होता है और फिर p_x की जगह $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ रखना होता है।
- क्वांटम यांत्रिकी के अधिकतर संकारक रैखिक और हर्मिटी होते हैं। यानि

$$D(a\psi + b\,\phi) = a\,D\psi + bD\,\phi$$
$$(\psi, D\phi) = (D\psi, \phi)$$

- क्वांटम यांत्रिकी के एक अन्य अभिगृहीत के मुताबिक किसी गतिकीय चर का **प्रत्याशा मान** उसके औसत मान के बराबर होता है जिसे उस निकाय के लिए एक ही अवस्था ψ पर बार-बार मापन से प्राप्त किया जाता है। कोई गतिकीय चर जिसका प्रत्याशा मान वास्तविक होता है, **प्रेक्षणीय** कहलाता है।
- आम तौर पर क्वांटम यांत्रिकीय संकारकों के लिए $AB\,\psi \neq BA\,\psi$ और कम्यूटेटर ब्रैकेट

$$[A, B] = AB - BA$$

का मान शून्य नहीं होता।
- अगर ψ पर D की संक्रिया से ψ का ही एक गुणज, माना कि $d\psi$ मिलता है, तब यह कहा जाता है कि ψ, D का **आइगेन फलन** है जिसका **आइगेन मान** d है। हर्मिटी संकारकों के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।
- द्रव्यमान m और स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ वाले एक निकाय के लिए औसत $\langle x\rangle$ और $\langle p_x\rangle$ की परिवर्तन दर क्रमश: $\langle p_x\rangle/m$ और $\langle -\partial V/\partial x\rangle$ के बराबर होती है। इन संबंधों को **एहरेनफेस्ट प्रमेय** कहते हैं और ये क्लासिकी यांत्रिकी के परिणामों से मिलते-जुलते हैं। लेकिन इनमें एक

मूलभूत अंतर यह है कि जहाँ क्लासिकी यांत्रिकी में हम x, p_x और $\partial V/\partial x$ को लेते हैं, वहाँ क्वांटम यांत्रिकी में हम उनके औसत मानों को लेते हैं।

7.6 अंत में कुछ प्रश्न

45 मिनट लगाएं

1 द्रव्यमान m वाले एक कण की कोई अवस्था फलन $e^{-\alpha x^2}$ से दी जाती है। इस तरंग फलन का प्रसामान्यीकरण करें और कण की गतिज ऊर्जा के प्रत्याशा मान की गणना करें।

2 अगर दो संकारकों A और B के लिए

$$[A, B] = 1$$

तब सिद्ध कीजिए कि

$$[A^2, B^2] = 2(AB + BA)$$

3 अगर दो संकारक A और B अपने कम्यूटेटर $[A, B]$ से कम्यूट करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$[A, B^n] = n B^{n-1} [A, B]$$

जहाँ n एक पूर्णांक है। अतः $[e^x, p_x]$ के मान की गणना करें।

4 अगर एक क्वांटम यांत्रिकीय निकाय के लिए

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + V(x)\right] \psi(x) = E\,\psi(x)$$

तब सिद्ध करें कि

$$\langle \text{K.E.} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle x \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

इस व्यंजक को **वीरियल प्रमेय** (Virial theorem) कहा जाता है।

संकेत : $\langle [xp_x, H] \rangle = 0$ से प्रारंभ करें।

5 क) पता लगाएं कि पैरिटी संकारक P हर्मिटी है या नहीं।

ख) सिद्ध करें कि वे सभी संकारक जो आकाशीय व्युत्क्रमण के अधीन निश्चर हैं, पैरिटी संकारक से कम्यूट करते हैं।

6. किसी निकाय का हैमिल्टोनियन है

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$$

और $\psi_1(x)$ और $\psi_2(x)$ उस निकाय के दो अपभ्रष्ट ऊर्जा आइगेन फलन हैं। सिद्ध करें कि

$$(\psi_1, (x p_x + p_x x)\,\psi_2) = 0$$

संकेत : $(\psi_1, [H, x^2]\,\psi_2)$ से शुरू करें।

7. सिद्ध करें कि $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$। अतः सिद्ध कीजिए कि अगर ϕ, L_z का आइगेन फलन हो तो

$$\langle L_y \rangle = \langle L_x \rangle = 0$$

8. माना कि $\psi(x) = \sum c_i\, \phi_i(x)$

जहाँ $\phi_i(x)$ हर्मिटी संकारक D के आइगेन फलन हैं और d_i उनके संगत उसके आइगेन मान हैं और $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$।

तब सिद्ध करें कि

$$(\psi, D\psi) = \sum_i d_i \, |c_i|^2$$

7.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. क)
$$p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$
$$p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

ख)
$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$= -i\hbar y \frac{\partial}{\partial z} + i\hbar z \frac{\partial}{\partial y}$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$= -i\hbar z \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar x \frac{\partial}{\partial z}$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$
$$= -i\hbar x \frac{\partial}{\partial y} + i\hbar y \frac{\partial}{\partial x}$$

2.
$$x[a\psi + b\phi] = ax\psi + bx\phi$$
$$p_x[a\psi + b\phi] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}[a\psi + b\phi]$$
$$= -i\hbar a \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\hbar b \frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$= a\, p_x\psi + b\, p_x\phi$$

अतः x और p_x रैखिक हैं।

3. क)
$$[x, p_y] = [xp_y - p_y x]$$
$$= -x\, i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y}(x\psi)$$
$$= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\because x \text{ और } y \text{ स्वतंत्र हैं।})$$
$$= 0$$

चूंकि ψ स्वेच्छ है,

$$\therefore \quad xp_y - p_y x = 0$$

इस तरह संकारक x और p_y कम्यूट करते हैं।

इसी तरह, हम दिखा सकते हैं कि x, p_z के साथ कम्यूट करता है।

ख)
$$[y, p_y] = i\hbar$$
$$[z, p_z] = i\hbar$$

इसकी व्युत्पत्ति $[x, p_x] = i\hbar$ की व्युत्पत्ति के जैसी ही है।

4. क) चूंकि $f(x)$ को x की घातों में विस्तारित किया जा सकता है, इसलिए हम लिख सकते हैं

$$[f(x), p_x] = [\sum_{n=0}^{\infty} x^n, p_x]$$
$$= [x + x^2 + ... + x^n + ..., p_x]$$
$$= [x, p_x] + [x^2, p_x] + ... + [x^n, p_x] + ...$$

अब समीकरण (7.11ग) का इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं :

$$[x^2, p_x] = x[x, p_x] + [x, p_x]x$$
$$= 2i\hbar x$$

और

$$[x^3, p_x] = x[x^2, p_x] + [x, p_x]x^2$$
$$= x[2i\hbar x] + i\hbar x^2$$
$$= 3i\hbar x^2$$

इसी तरह,

$$[x^n, p_x] = nx^{n-1} i\hbar$$

इस प्रकार हमें मिलता है :

$$[f(x), p_x]$$
$$= i\hbar [1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ...]$$
$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x)$$

इसी प्रकार आप समीकरण (7.14) को सिद्ध कर सकते हैं।

ख) अब;

$$A(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + ax^2 + bx^4$$

चूंकि $A(-x) = A(x)$ इसलिए $PA(x)\ \psi(x) = A(-x)\ \psi(-x)$

$$= A(x)\ P\psi(x)$$

चूंकि $\psi(x)$ स्वेच्छ है, अत: $A(x)$, P के साथ कम्यूट करता है।

5. हमें सिद्ध करना है कि

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) f_i = \lambda_i f_i$$

और ψ का परिकलन करना है, जहाँ

(i) $f_1 = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$

और

(ii) $f_2 = x\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$

(i) $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$

$$= -x^2\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$= \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ जिससे $\lambda_1 = 1$

(ii) $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)\left(x\exp\frac{-x^2}{2}\right)$

$= [+3x\,e^{-x^2/2} - x^3\,e^{-x^2/2} + x^3\,e^{-x^2/2}]$

$= 3x\,e^{-x^2/2}$ जिससे $\lambda_2 = 3.$

अंत में कुछ प्रश्न

1. प्रसामान्यीकरण प्रतिबंध है $N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2}\,dx = 1$

या

$$N^2(\pi/2\alpha)^{1/2} = 1 \text{ या } N = (2\alpha/\pi)^{1/4} \quad \left[\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2}\right]$$

$$\langle \text{K.E.} \rangle = \langle p^2/2m \rangle = (2\alpha/\pi)^{1/2}\,\langle e^{-\alpha x^2}, -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-\alpha x^2}\rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}(2\alpha/\pi)^{1/2}\,\langle e^{-\alpha x^2}, -2\alpha(1-2\alpha x^2)\,e^{-\alpha x^2}\rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\left[-2\alpha\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2} + \frac{4\alpha^2}{4\alpha}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2}\right]$$

$$\left[\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2} \text{ और } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8\alpha^3}\right)^{1/2}\right]$$

या $\langle \text{K.E.} \rangle = 1/2\ \alpha\hbar^2/m.$

2. $[A^2, B^2] = A[A, B^2] + [A, B^2]A$ (समीकरण 7.11ग) का प्रयोग करने पर

$= A\{B[A,B] + [A,B]B\} + \{B[A,B] + [A,B]B\}A$

$= AB + AB + BA + BA \quad \because [A,B] = 1$

$= 2(AB + BA)$

3. माना

$[A, B^n] = n\,B^{n-1}\,[A, B]$ (1)

अत:

$[A, B^{n+1}] = B[A, B^n] + [A, B]\,B^n$

$= n\,B^n\,[A,B] + [A,B]\,B^n$ (समीकरण 7.14 का प्रयोग करने पर)

$= (n+1)\,B^n\,[A, B].$ (2)

अत: अगर (1), n के लिए सत्य है तो वह $n+1$ के लिए भी सत्य है। चूंकि (1), 1 के लिए तो सही है ही इसलिए वह 2 के लिए भी सही है। अत: समीकरण (1) किसी भी n के लिए सही है।

अब $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$

$$\therefore [e^x, p_x] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,[x^n, p_x]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = x^{n-1}\,[x, p_x]$$

$$= i\hbar\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = i\hbar\,e^x.$$

4. हम जानते हैं कि

$$\langle\psi, [xp_x, H]\psi\rangle = E\langle\psi, xp_x\psi\rangle = E\langle\psi, xp_x\psi\rangle = 0. \quad (1)$$

अब $[xp_x, H] = [xp_x, p_x^2/2m + V(x)]$

$$= \frac{1}{2m}\ [xp_x, p_x^2] + [xp_x, V(x)]$$

समीकरणों (7.11ख), (7.11ग) और (7.11घ) से :

$$[xp_x, H] = \frac{1}{2m}\ [x, p_x^2]\, p_x + x\, [p_x^2, V(x)] \quad [\because [p_x, p_x^n] = 0,\ [x, V(x)] = 0$$

$$= \frac{1}{2m}\ [x, p_x]\, 2p_x^2 + x\, [p_x, x]\, (\partial V / \partial x)$$

$$= i\hbar\, p_x^2/m - i\hbar x\, \frac{\partial V}{\partial x}$$

इसलिए (1) का प्रयोग करने पर हमें मिलता है :

$$\langle \text{K.E.} \rangle = \frac{1}{2}\ \langle x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

5\. क) दिया है

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, P\, \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(-x)\, dx = -\int_{\infty}^{-\infty} \psi^*(-x')\, \psi(x')\, dx$$

जहाँ $x' = -x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(P\, \psi(x'))]^*\, \psi(x')\, dx'.$$

अतः P एक हर्मिटी संकारक है।

ख) $PA(x, p_x)\, \psi(x) = A(-x, -p_x)\, \psi(-x) = A(-x, -p_x)\, P\, \psi(x) = A(x, p_x)\, P\, \psi(x)$

अतः $(PA(x, p_x) - A(x, p_x)\, P)\ \psi(x) = 0$

चूंकि $\psi(x)$ स्वेच्छ है, इसलिए हमें मिलता है :

$$[P, A] = 0$$

6\. चूंकि ψ_1 और ψ_2 अपभ्रष्ट हैं, इसलिए

$$(\psi_1, [H, x^2]\, \psi_2) = 0$$

अब

$$[H, x^2] = [p_x^2/2m + V(x), x^2]$$

$$= (1/2m)\, [p_x^2, x^2]$$

$$= (1/2m)\, 2\, [p_x x + xp_x]$$

$$= (1/m)\, [p_x x + xp_x] \qquad \text{(अंत के प्रश्न 2 के परिणाम का प्रयोग करके)}$$

$$\therefore\ (\psi_1, (p_x x + xp_x)\, \psi_2) = 0$$

7\. $[L_z, L_x] = L_z\ L_x - L_x\ L_z$

अब L_x और L_z की परिभाषा से (बोध प्रश्न 1 (ख) देखिए) हमें मिलता है :

$$L_x = yp_z - zp_y \ \text{ और } \ L_z = xp_y - yp_x$$

अतः

$$[L_z, L_x] = [xp_y - yp_x, yp_z - zp_y]$$

समीकरण (7.11ख) का प्रयोग करने से हमें मिलता है :

$$[L_z, L_x] = [xp_y,\ yp_z] - [xp_y - zp_y] - [yp_x,\ yp_z] + [yp_x,\ zp_y]$$

समीकरणों (7.11ग और घ) का प्रयोग करने पर :

$$[L_z, L_x] = y\,[xp_y, p_z] + [xp_y, y]\,p_z - 0 - 0 + y\,[p_x, zp_y] + [y, zp_y]\,p_x$$
$$= 0 - i\hbar\; xp_z + i\hbar\; zp_x$$
$$= i\hbar\,(zp_x - xp_z) = i\hbar\, L_y$$

माना $L_z \phi = m\,\phi$

लेकिन $L_z L_x - L_x L_z = i\hbar\, L_y$

$$\therefore (\phi, L_z L_x \phi) - (\phi, L_x L_z \phi) = i\hbar\,\langle L_y \rangle$$
$$m\,\langle L_x \rangle - m\,\langle L_x \rangle = i\hbar\,\langle L_y \rangle$$
$$\langle L_y \rangle = 0$$

इसी प्रकार

$$\langle L_x \rangle = 0$$

8. चूँकि $\psi(x) = \sum_i c_i\, \phi_i(x)$

इसलिए

$$\langle D \rangle = \sum_i \sum_j c_i^* c_j\, d_j\, (\phi_i, \phi_j)$$
$$= \sum_i \sum_j c_i^* c_j\, d_j\, \delta_{ij}$$
$$= \sum_i |c_i|^2\, d_i.$$

चूँकि j श्रेणी में एक ही पद बचा रहेगा जिसके लिए $j = i$ ।

क्वांटम यांत्रिकी पर एक दृष्टिकोण

इस खंड में हमने आपको क्वांटम यांत्रिकी के कुछ मूलभूत विचारों और संकल्पनाओं से परिचित कराया है। इस प्रक्रिया में शायद आपको लगा हो कि क्लासिकी भौतिकी का पूरा का पूरा ढांचा ही उलट पुलट हो गया है।

याद करें कि क्लासिकी भौतिकी के द्वारा हमें भौतिक संसार के बारे में क्या समझ मिलती है। क्लासिकी भौतिकी के अनुसार अगर हमें कारण (जैसे कि लगने वाला बल) पता हो तो उसके प्रभाव (जैसे कि कण का पथ) पूरी तरह निर्धारित किए जा सकते हैं – इसे कारणात्मक निर्धार्यता (causal determinism) कहते हैं। साथ ही साथ सभी क्लासिकी भौतिक राशियों में संततता (continuity) का गुण होता है और निकायों के क्लासिकी विवरण के लिए परिशुद्ध और निर्विवाद भाषा का प्रयोग किया जा सकता है। अब आप इस खंड में प्रस्तुत क्वांटम यांत्रिकी की संकल्पनाओं को याद करें। क्या क्वांटम यांत्रिकीय दृष्टिकोण में इन सभी क्लासिकी विचारों को पूरी तरह चुनौती नहीं दी जाती? वस्तुत: क्लासिकी दृष्टिकोण की तुलना में क्वांटम यांत्रिकीय दृष्टिकोण भौतिक संसार को समझने का एक बिल्कुल ही नया तरीका पेश करता है। शायद आपको पहले पहल क्वांटम संसार में वस्तुओं के व्यवहार को समझने में मुश्किलें आईं हों, ख़ासकर इसलिए कि इन वस्तुओं का व्यवहार हमारे आम अनुभवों से एकदम अलग हट कर है। लेकिन इस बात से आप परेशान न हों। क्योंकि जो भी कोई क्वांटम यांत्रिकी से पहली बार रूबरू होता है, उसे यह बहुत ही अजीबोग़रीब और रहस्यमय मालूम होती है चाहे वह कोई नया छात्र हो या फिर कोई अनुभवी भौतिकीविद्। आइए संक्षेप में एक बार फिर देखें कि क्वांटम यांत्रिकीय दृष्टिकोण क्या है।

यह तो हम सभी जानते हैं कि स्थूल वस्तुएं किस प्रकार व्यवहार करती हैं। हमारा पूरा का पूरा अनुभव और समझ ऐसी ही वस्तुओं पर लागू होती है। लेकिन जैसा कि आपने इस खंड में पढ़ा है, सूक्ष्मदर्शी वस्तुओं का व्यवहार और क्रियाएं स्थूल वस्तुओं की तरह का नहीं होता। आपने पढ़ा कि क्वांटम वस्तुएं दरअसल कण-तरंगें होती हैं जिन्हें तरंग फलनों द्वारा निरूपित किया जाता है भले ही तरंग फलनों का समय के साथ विकास गति के समीकरण द्वारा दिया जाता है लेकिन उसके हलों से हमें केवल किसी दिए समय पर किसी निश्चित क्षेत्र में कण-तरंगों को पाने की प्रायिकता भर मिलती है। स्थिति, संवेग, ऊर्जा आदि जैसे भौतिक प्रेक्षणीयों के मापन (जो कि क्लासिकी वस्तुओं के लिए परिशुद्ध तौर पर किए जा सकते हैं) क्वांटम यांत्रिकीय संसार में अनिश्चितता सिद्धांत द्वारा नियमित होते हैं। इनके साथ साथ क्वांटम यांत्रिकी में एक और संकल्पना है असंततता (discontinuity) या क्वांटम कूद (quantum jump) की। जिसके अनुसार भौतिक राशियों के विविक्त मान भी होते हैं। और बोर द्वारा विकसित क्वांटम यांत्रिकी की इस व्याख्या को कोपेनहागेन व्याख्या (Copenhagen interpretation) कहते हैं। सार रूप में कहें तो इस कोपेनहागेन व्याख्या में हम क्वांटम वस्तुओं के लिए प्रायिकतात्मक गणनाएं करते हैं, उनके गुणधर्मों का कुछ अनिश्चितता के साथ निर्धारण करते हैं और उनके व्यवहार की समझ पूरकता सिद्धांत के दायरे में बनाते हैं। इस तरह क्वांटम यांत्रिकी क्वांटम संसार को समझने का एक बहुत ही नया और रोमांचक दृष्टिकोण पेश करती है जो तमाम क्लासिकी विचारों को चुनौती देता है। क्वांटम यांत्रिकी के परिणाम हमें अकसर ही अकसर चौंकाते हैं (मसलन इलेक्ट्रॉन कण है या तरंग? इसका पथ है या नहीं?) और इस तरह हमारे मस्तिष्क को लगातार उलझाये रहते हैं। इन विचारों को हम निष्क्रियता के साथ तो ग्रहण कर ही नहीं सकते। अगर आप क्वांटम यांत्रिकी के दार्शनिक पहलुओं में रुचि रखते हैं तो आपके लिए हम फाइनमैन के व्याख्यानों से एक अंश यहां उद्धृत कर रहे हैं जिससे हम क्वांटम यांत्रिकी की अपनी समझ को और समृद्ध कर सकते हैं। इस अंश में क्वांटम यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाओं में से एक यानी अनिश्चितता सिद्धांत की एक विद्वत्तापूर्ण व्याख्या प्रस्तुत की गई है। वास्तव में अनिश्चितता सिद्धांत ने भौतिकी में अच्छे से अच्छे मस्तिष्कों को बेहद परेशान किया है। यह अंश हम जैसे भौतिकी के विद्यार्थियों को फाइनमैन की नज़रों से क्वांटम यांत्रिकी की प्रकृति और साथ साथ विज्ञान की प्रकृति को बहुत गहराई से समझने और दार्शनिक तौर पर देखने का मौका देता है। हमारी राय में यह उद्धरण क्वांटम यांत्रिकीय संसार की इस परिचयात्मक यात्रा का एक समुचित अंतिम पड़ाव है। इस अंश को हम यहां अंग्रेज़ी में ही प्रस्तुत कर रहे हैं, क्योंकि अनुवाद में उसकी ख़ूबसूरती जाती रहेगी।

"Philosophical Implications

Let us consider briefly some philosophical implications of quantum mechanics. As always, there are two aspects of the problem; one is the philosophical implication for physics, and the other is the extrapolation of philosophical matters to other fields. When philosophical ideas associated with science are dragged into another field, they are usually completely distorted. Therefore we shall confine our remarks as much as possible to physics itself.

First of all, the most interesting aspect is the idea of the uncertainty principle; making an observation affects a phenomenon. It has always been known that making observations affects a phenomenon, but the point is that the effect cannot be disregarded or minimized or decreased arbitrarily by rerranging the apparatus. When we look for a certain phenomenon we cannot help but disturb it in a certain minimum way, and *the disturbance is necessary for the consistency of the viewpoint.* The observer was sometimes important in prequantum physics, but only in a rather trivial sense. The problem has been raised: if a tree falls in a forest and there is nobody there to hear it, does it make a noise? A *real* tree falling in a *real* forest makes a sound, of course, even if nobody is there. Even if no one is present to hear it, there are other traces left. The sound will shake some leaves, and if we were careful enough we might find somewhere that some thorn had rubbed against a leaf and made a tiny scratch that could not be explained unless we assumed the leaf were vibrating. So in a certain sense we would have to admit that there is sound made. We might ask; was there a *sensation* of sound? No, sensations have to do, presumably, with consciousness. And whether ants are conscious and whether there were ants in the forest, or whether the tree was conscious, we do not know. Let us leave the problem in that form.

Another thing that people have emphasized since quantum mechanics was developed is the idea that we should not speak about those things which we cannot measure. (Actually relativity theory also said this.) Unless a thing can be defined by measurement, it has no place in a theory. And since an accurate value of the momentum of a localized particle cannot be defined by measurement it therefore has no place in the theory. The idea that this is what was the matter with classical theory *is a false position.* It is a careless analysis of the situation. Just because we cannot measure position and momentum precisely does not a *priori* mean that *we cannot* talk about them. It only means that we *need* not talk about them. The situation in the sciences is this: A concept or an idea which cannot be measured or cannot be referred directly to experiment may or may not be useful. It need not exist in a theory. In other words, suppose we compare the classical theory of the world with the quantum theory of the world, and suppose that it is true experimentally that we can measure position and momentum only imprecisely. The question is whether the *ideas* of the exact position of a particle and the exact momentum of a particle are valid or not. The classical theory admits the ideas: the quantum theory does not. This does not in itself mean that classical physics is wrong. When the new quantum mechanics was discovered, the classical people — which included everybody except Heisenberg, Schrödinger, and Born — said: "Look, your theory is not any good because you cannot answer certain questions like: what is the exact position of a particle?, which hole does it go through?, and some others.". Heinseberg's answer was: "I do not need to ask such questions because you cannot ask such a question experimentally." It is that we do not *have* to. Consider two theories (a) and (b): (a) contains an idea that cannot be checked directly but which is used in the analysis, and the other, (b) does not contain the idea. If they disagree in their predictions, one could not claim that (b) is false because it cannot explain this idea that is in (a) because that idea is one of the things that cannot be checked directly. It is always good to know which ideas cannot be checked directly, but it is not necessary to remove them all. It is not true that we can pursue science completely by using only those concepts which are directly subject to experiment.

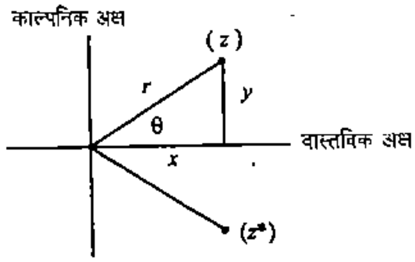
In quantum mechanics itself there is a wave function amplitude, there is a potential, and there are many constructs that we cannot measure directly. The basis of a science is its ability to *predict.* To predict means to tell what will happen in an experiment that has never been done. How can we do that? By assuming that we know what is there, independent of the experiment. We must extrapolate the experiments to a region where they have not been done. We must take out concepts and extend them to places where they have not yet been checked. If we do not do that, we have no prediction. So it was perfectly sensible for the classical physicists to go happily along and suppose that the position — which obviously means something for a baseball — meant something also for an electron. It was not stupidity. It was a sensible procedure. Today we say that the law of relativity is supposed to be true at all energies, but somebody may come along and say how stupid we were. We do not know where we are "stupid" until we "stick our neck out", and so the whole idea is to put our neck out. And the only way to find out that we are wrong is to find out *what* our predictions are. It is absolutely necessary to make constructs.

We have already made a few remarks about the indeterminacy of quantum mechanics. That is, that we are unable now to predict what will happen in physics in a given physical circumstance which is arranged as carefully as possible. If we have an atom that is in an excited state and so is going to emit a photon, we cannot say *when* it will emit the photon. It has a certain amplitude to emit the photon at any time, and we can predict only a probability for emission; we cannot predict the future exactly. This has given rise to all kind of nonsense and questions on the meaning of freedom of will, and of the ideas that the world is uncertain.

Of course we must emphasise that classical physics is also indeterminate, in a sense. It is usually thought that this indeterminacy, that we cannot predict the future, is an important quantum-mechanical thing, and this is said to explain the behaviour of the mind, feelings of free will, etc. But if the world were classical — if the laws of mechanics were classical — it is not quite obvious that the mind would not feel more or less the same. It is true classically that if we knew the position and the velocity of every particle in the world, or in a box of gas, we could predict exactly what would happen. And therefore the classical world is deterministic. Suppose, however, that we have a finite accuracy and do not know *exactly* where just one atom is, say to one part in a billion. Then as it goes along it hits another atom, and because we did not know the position better than to one part in a billion, we find an even larger error in the position after the collision. And that is amplified, of course, in the next collision, so that if we start with only a tiny error it rapidly magnifies to a very great uncertainty. To give an example: if water falls over a dam, it splashes. If we stand nearby, every now and then a drop will land on our nose. This appears to be completely random, yet such a behavior would be predicted by purely classical laws. The exact position of all the drops depends upon the precise wigglings of the water before it goes over the dam. How? The tiniest irregularities are magnified in falling, so that we get complete randomness. Obviously, we cannot really predict the position of the drops unless we know the motion of the water *absolutely exactly*.

Speaking more precisely, given an arbitrary accuracy, no matter how precise, one can find a time long enough that we cannot make predictions valid for that long a time. Now the point is that this length of time is not very large. It is not that the time is millions of years if the accuracy is one part in a billion. The time goes, in fact, only logarithmically with the error, and it turns out that in only a very, very tiny time we lose all our information. If the accuracy is taken to be one part in billions and billions and billions — no matter how many billions we wish, provided we do stop somewhere — then we can find a time less than the time it took to state the accuracy — after which we can no longer predict what is going to happen! It is therefore not fair to say that from the apparent freedom and indeterminancy of the human mind, we should have realized that classical "deterministic" physics could not even hope to understand, and to welcome quantum mechanics as a release from a "completely mechanistic" universe. For already in classical mechanics there was indeterminability from a practical point of view."

परिशिष्ट सम्मिश्र संख्याएं

काल्पनिक संख्या	$i = \sqrt{-1}$
सम्मिश्र संख्या	$z = x + iy$ (कार्तीय रूप)
वास्तविक भाग	$x = \mathrm{Re}\, z$
काल्पनिक भाग	$y = \mathrm{Im}\, z$
सम्मिश्र संयुग्मी	$z^* = x - iy$
मॉड्यूलस	$\lvert z \rvert$ जहां $\lvert z \rvert = zz^* = x^2 + y^2 = r^2$
कला	θ जहां $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
सम्मिश्र तल	

घात श्रेणी

$$x = r\cos\theta = r\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + ...\right)$$

$$y = r\sin\theta = r\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + ...\right)$$

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\left[1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + ...\right]$$

सम्मिश्र संख्या	$x = re^{i\theta}$ (ध्रुवीय रूप)
कला गुणक	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ और $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
वास्तविक भाग	$\mathrm{Re}\; e^{i\theta} = \cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$
काल्पनिक भाग	$\mathrm{Im}\, e^{i\theta} = \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$

मूलभूत नियतांकों की तालिका

राशि	प्रतीक	मान
प्लांक नियतांक	h	6.62618×10^{-34} J s
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	1.05459×10^{-34} J s
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	2.99792×10^{8} m s^{-1}
इलेक्ट्रॉन पर आवेश (निरपेक्ष मान)	e	1.60219×10^{-19} C
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1} $= 1.25664 \times 10^{-6}$ H m^{-1}
मुक्त आकाश की विद्युतशीलता	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\ 19 \times 10^{-12}$ F m^{-1}
गुरुत्वाकर्षण नियतांक	G	6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
सूक्ष्म संरचना नियतांक	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$	$\frac{1}{137.036} = 7.297\ 35 \times 10^{-3}$
आवोगाद्रो संख्या	N_A	$6.022\ 05 \times 10^{23}$ mol^{-1}
फैराडे नियतांक	$F = N_A e$	$9.648\ 46 \times 10^{4}$ C mol^{-1}
बोल्ट्समान नियतांक	k	$1.380\ 66 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
गैस नियतांक	$R = N_A k$	$8.314\ 41$ J mol^{-1} K^{-1}
परमाण्वीय द्रव्यमान एकक	$a.m.u. = \frac{1}{12} M_{12_C}$	$1.660\ 57 \times 10^{-27}$ kg
इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान	m या m_e	$9.109\ 53 \times 10^{-31}$ kg $= 5.485\ 80 \times 10^{-4}$ a.m.u.
प्रोटॉन द्रव्यमान	M_p	$1.672\ 65 \times 10^{-27}$ kg $= 1.007\ 276$ a.m.u.
न्यूट्रॉन द्रव्यमान	M_n	$1.674\ 92 \times 10^{-27}$ kg $= 1.008\ 665$ a.m.u.
प्रोटॉन द्रव्यमान और इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान का अनुपात	M_p / m_e	1836.15
इलेक्ट्रॉन आवेश और द्रव्यमान अनुपात	$\lvert e \rvert / m_e$	$1.758\ 80 \times 10^{11}$ C kg^{-1}
इलेक्ट्रॉन की क्लासिकी त्रिज्या	$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	2.81784×10^{-15} m
परमाण्वीय हाइड्रोजन के लिए बोर त्रिज्या	$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}$	5.29177×10^{-11} m
(अनंत नाभिकीय द्रव्यमान के लिए) रिडबर्ग नियतांक	$R_\infty = \frac{me^2}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = \frac{-\alpha}{4\pi a_0}$	$1.097\ 37 \times 10^{7}$ m^{-1}
परमाण्वीय हाइड्रोजन के लिए रिडबर्ग नियतांक	R_H	$1.096\ 78 \times 10^{7}$ m^{-1}
बोर मैग्नेटॉन	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$	9.27408×10^{-24} J T^{-1}
नाभिकीय मैग्नेटॉन	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_P}$	5.05082×10^{-27} J T^{-1}

NOTES

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-08
आधुनिक भौतिकी

खंड

3

कुछ निकायों पर क्वांटम यांत्रिकी के अनुप्रयोग

कुछ निकायों पर क्वांटम यांत्रिकी के अनुप्रयोग

इस पाठ्यक्रम के पिछले दो खंडों में हमने आपको विशिष्ट आपेक्षिकता और क्वांटम यांत्रिकी से जुड़ी कुछ ऐसी धारणाओं के बारे में बताया है जिन्होंने भौतिक संसार के बारे में हमारी बहुत सी पुरानी मान्यताओं को जड़ से हिला दिया। क्या आपने ध्यान दिया कि इनमें से ज़्यादातर धारणाएं और सिद्धान्त बीसवीं सदी के पहले पच्चीस वर्षों में विकसित किए गए ? तो हम यहं कह सकते हैं कि 25 बरस का यह दौर भौतिकी में क्रांतिकारी परिवर्तनों का दौर था। अब क्रांति की बात चल ही पड़ी है, तो हम आपको बताना चाहेंगे कि क्वांटम यांत्रिकी के विकास की गिनती इस सदी की महानतम सैद्धांतिक क्रांतियों में की जाती है। मानवता के इतिहास में भी इसको यही दर्ज़ा हासिल है। इसका प्रभाव शायद मानव विचारधारा में कोपर्निकस और डार्विस के सिद्धांतों और आपेक्षिकता के सिद्धांतों द्वारा लाए गए क्रांतिकारी परिवर्तनों से भी कहीं अधिक गहन और व्यापक है। याद करें कि आपने कोपर्निकस और डार्विन के सिद्धांतों के बारे में एफ. एस. टी. पाठ्यक्रम की इकाई 9 और 13 में पढ़ा है।

क्वांटम यांत्रिकी हमें मजबूर करती है कि प्राकृतिक संसार के बारे में अपनी गहरी से गहरी समझ पर भी फिर से विचार करें। मिसाल के तौर पर, पदार्थ और विकिरण में विभेदन क्लासिकी भौतिकी का एक मूलभूत आधार है। लेकिन यह संकल्पना कि प्रकृति में सब वस्तुएं कण-तरंगें हैं (देखें इकाई 4), इस विभेदन को समाप्त कर देती है। इसी के साथ साथ क्लासिकी भौतिकीविद के इस संकट से कि "एक इलेक्ट्रॉन (या कोई भी कण) कण और तरंग दोनों ही कैसे हो सकता है ? " सफलतापूर्वक निपटा जा चुका है। अब हम कहते हैं, "इलेक्ट्रॉन न तो क्लासिकी कण है और न ही क्लासिकी तरंग। यह एक क्वांटम कण तरंग है जिसके संवेग और तरंगदैर्घ्य दोनों ही होते हैं।" कुछ प्रयोगों में इसके कणनुमा गुणधर्मों की अभिव्यक्ति होती है और कुछ में तरंगनुमा गुणधर्मों की (पूरकता)।

फिर आपने यह भी देखा है कि क्वांटम यांत्रिकी किस तरह अनिश्चितता नियम (इकाई 5) और प्रायिकतात्मक वर्णन के माध्यम से क्लासिकी निश्चयात्मकता (determinism) और कार्य-कारक प्रभाव (causality) पर सवाल खड़ा करती है। अनिश्चितता का कारण यह नहीं है कि हम और बेहतर तरीके से मापन नहीं कर सकते। क्वांटम यांत्रिकी के मुताबिक अनिश्चितता क्वांटम संसार का अंतर्जात गुण है। किसी कण के एक साथ सुनिश्चित स्थिति और संवेग नहीं हो सकते – यह धारणा मूलतः नई और क्रांतिकारी है जिसे आइन्सटीन समेत तमाम भौतिकीविदों को स्वीकार करने में बहुत दिक्कत हुई। अनिश्चितता सिद्धांत का मानना है कि यह एक अंतर्जात सीमा है। यह गुण वस्तुओं की प्रकृति में निहित है – या तो हम उनकी स्थिति सुनिश्चित कर लें; तब हम उनके संवेग के बारे में सब जानकारी खो बैठेंगे। और अगर हम संवेग निर्धारित करेंगे तो हमें यह पता न रहेगा कि आकाश में वह कण कहां है। ये बातें क्लासिकी संसार की हमारी समझ को पूरी तरह हिला कर रख देती हैं।

इन अवधारणाओं और पदार्थ तरंगों के समय के साथ विकास की समीकरणों (इकाई 6) को साथ लेकर हम क्वांटम संसार की प्रायिकतात्मक व्याख्या पर पहुंचते हैं। क्वांटम यांत्रिकी हमें बताती है कि प्रायिकतात्मक वर्णन ही आधारभूत वर्णन है, इससे ज़्यादा गहरी समझ हमें मिल ही नहीं सकती। इस वर्णन से हमें प्रायिकता आयाम मिलता है जिससे प्रायिकता की गणना की जा सकती है। उदाहरण के लिए, हम किसी इलेक्ट्रॉन का एक ख़ास वेग होने की प्रायिकता भर मालूम कर सकते हैं। लेकिन क्वांटम यांत्रिकी हमें यह नहीं बताती कि इस कण का कितना वेग है। बल्कि यह हमें बताती है कि इतनी विस्तृत सूचना का अस्तित्व तक नहीं होता। यह क्लासिकी सवाल कि 'कणों के एक समूह में एक कण विशेष का क्या वेग है,' ज्यादातर स्थितियों में अर्थहीन समझा जाता है।

खंड 2 पढ़ते हुए क्या आपको इस बात का भी अहसास हुआ कि क्वांटम यांत्रिकी की इन संकल्पनाओं की बुनियाद मुट्ठी भर लोगों ने ही रखी है ? इनमें से 5 प्रमुख वैज्ञानिकों में तीन करीब चालीस साल के थे और बाकी दो बीस बाइस साल के। बड़े वैज्ञानिकों में, जर्मनी के मैक्स बॉर्न और डेनमार्क के नील्स बोर ने गणितीय सिद्धांत देने की बजाय उनकी व्याख्याएं ज़्यादा दीं। गणितीय सिद्धांत देने वाले दोनों युवा थे – इंग्लैंड के डिराक और जर्मनी के हाइज़ेनबर्ग। पांचवें वैज्ञानिक ऑस्ट्रिया के श्रोडिन्गर ने एक अनोखी ही भूमिका अदा की – सिद्धांत के स्तर पर तो उन्होंने गहन योगदान दिया लेकिन उनकी व्याख्या से मुंह फेर लिया।

श्रोडिन्गर ने अपनी 'तरंग यांत्रिकी' लगभग उसी समय लेकिन स्वतंत्र रूप से विकसित की जब हाइज़ेनबर्ग ने 'मैट्रिक्स यांत्रिकी' का विकास किया। यह सिद्धांत ऊपरी तौर पर अलग लगते थे — यहां तक कि इनमें प्रयुक्त गणित भी अलग था — तरंग यांत्रिकी में कैल्कुलस का इस्तेमाल किया गया था और मैट्रिक्स यांत्रिकी में बीजगणित का। लेकिन श्रोडिन्गर और गणितज्ञ जॉन वॉन न्यूमान के साथ मिलकर डिराक ने साबित किया कि ये दोनों सिद्धांत पूर्णतः समतुल्य हैं। उस समय से इन दोनों ही को क्वांटम यांत्रिकी कहा जाता है।

इस तरह खंड 2 में चर्चित क्वांटम यांत्रिकी की बुनियादी बातों पर फिर से एक सरसरी नज़र डाल लेने के बाद, हम आपको इसकी एक और ख़ासियत के बारे में बताना चाहेंगे — इसकी पूर्वानुमान लगाने की क्षमता। इस खंड में आपको क्वांटम यांत्रिकी की क्षमता का अहसास होगा जब आप भिन्न निकायों पर इसके अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे; जैसे कि **विभव रोधिका** और **विभव कूप** और **आवर्ती दोलक** पर (इकाई 8)। क्वांटम कणों द्वारा रोधिकाओं के **सुरंगन** के आज बहुत से अनुप्रयोग हैं — सुरंगन डायोडों में, स्कैनिंग-सुरंगन-इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में जिसकी मदद से हम क्वांटम संसार को और भी बेहतर 'देख' सकते हैं (हां, यहां अनिश्चितता नियम का उल्लंघन फिर भी नहीं होगा)।

जब क्वांटम यांत्रिकी के गणितीय प्रारूप का विकास हुआ तो पहले-पहल उसे **हाइड्रोजन परमाणु** की संरचना समझने के लिए इस्तेमाल किया गया। इसके द्वारा पूर्वानुमानित ऊर्जा स्तर प्रायोगिक परिणामों से अभूतपूर्व मेल खाते थे। और साथ ही साथ हाइड्रोजन परमाणु का प्रकाशिक स्पेक्ट्रम भी इसकी मदद से समझाया जा सका। अतः इकाई 9 में हम क्वांटम यांत्रिकी के गोलतः सममित निकायों और ख़ासकर हाइड्रोजन परमाणु पर अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे। क्वांटम यांत्रिकी के विकास में परमाण्विक स्पेक्ट्रोस्कोपी में हुई खोजों की प्रमुख भूमिका रही है। क्वांटम यांत्रिकी द्वारा परमाणुओं की आंतरिक संरचना और उनसे उत्पन्न स्पेक्ट्रम (दोनों ही, **दृश्य** और **X-किरण**) की सफलता पूर्वक व्याख्या की जा चुकी है। अतः हम इकाई 10 और 11 में इनकी चर्चा करेंगे।

जहां तक इस खंड को पढ़ने का सवाल है, खंड 2 में दी गई सलाह का अनुसरण करें — क्वांटम यांत्रिकीय तौर पर सोचना और गणना करना सीखें। शायद शुरू में यह खंड आपको मुश्किल लगे क्योंकि इसमें गणितीय व्याख्या ज़्यादा है। इससे पार पाने के लिए हमारा सुझाव है कि आप एक एक चरण खुद करके देखें। अगर आप इस खंड को अच्छी तरह समझना चाहते हैं तो जल्दबाज़ी न करें। हमारे हिसाब से आपको इकाई 8 को पढ़ने और समझने में 8 घंटे, इकाई 9 के लिए 7 घंटे, इकाई 10 के लिए 5 घंटे और इकाई 11 के लिए सिर्फ़ 3 घंटे लगने चाहिए। और हमें उम्मीद है कि जब आप यह खंड पूरा समझ लेंगे तो शायद आपको भी बीसवीं सदी की इस महानत वैज्ञानिक संरचना को समझ पाने के आनंद और उपलब्धि का उतना ही सच्चा अहसास होगा जितना कि भौतिकी के हर विद्यार्थी को होता है। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

इकाई 8 कुछ सरल निकाय

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

खंड 2 की इकाई 6 में आपने काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण के बारे में पढ़ा है। इस इकाई में हम उसे कुछ सरल एक-विमीय निकायों पर लागू करेंगे ताकि आपको काल-स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को हल करने का कुछ अनुभव मिल सके। आप इसे हल करके इकाई 6 के भाग 6.4 में दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले इसके आइगेनफलन प्राप्त करेंगे और इन निकायों के लिए उनके संगत आइगेनमान प्राप्त करेंगे। हालांकि हमारे इर्द-गिर्द का वास्तविक संसार त्रि-विमीय है, लेकिन इन एक-विमीय निकायों का अध्ययन भी बहुत महत्वपूर्ण है। ऐसा न सिर्फ़ इसलिए है कि बहुत सी भौतिक स्थितियाँ वस्तुतः एक-विमीय होती हैं, बल्कि इसलिए भी कि हम इनका इस्तेमाल करके वास्तविक संसार का काफ़ी अच्छी तरह निदर्शन कर सकते हैं। बहुत सी जटिल भौतिक समस्याओं को ऐसी समस्याओं में समानीत किया जा सकता है जो एक-विम श्रोडिन्गर समीकरण जैसी समीकरणों को हल करने के समतुल्य होती हैं। इसलिए यह ज़रूरी है कि आप सरल स्थितियों के लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को हल करना सीखें।

इस इकाई में सबसे पहले हम एक **मुक्त कण** के लिए काल स्वतंत्र एक-विमीय श्रोडिन्गर समीकरण को हल करेंगे और फिर उस कण को किसी सीमित जगह (जैसे कि एक बक्स) में परिरुद्ध करके उस निकाय के हल प्राप्त करेंगे। तब आप यह जानेंगे कि इन दोनों निकायों के लिए आइगेनमान और आइगेनफलन अलग-अलग होते हैं।

फिर हम **एक-विमीय आयताकार विभव रोधिका** (rectangular potential barrier) में और **एक-विमीय विभव कूप** (potential well) में गतिमान कण के लिए श्रोडिन्गर समीकरण को हल करेंगे। सरल विभवों के ये उदाहरण कई प्राकृतिक प्रक्रियाओं का निदर्शन करते हैं जैसे रेडियो-एक्टिव नाभिकों का अल्फ़ा क्षय, परमाणुओं, अणुओं और नाभिकों का ऊर्जा स्पेक्ट्रम आदि। इस प्रकार इन मॉडलों द्वारा हमें ऐसे निकायों की भौतिकी के बारे में एक समझ हासिल होती है। इन उदाहरणों से हम यह भी समझ सकेंगे कि वस्तुओं की गति के क्लासिकी और क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में क्या फ़र्क होता है। इस इकाई के अंत में हम एक **सरल आवर्ती दोलक** के क्वांटम यांत्रिकीय व्यवहार का अध्ययन करेंगे। उसके अनुप्रयोग के तौर पर हम एक द्विपरमाणुक अणु के दोलनों का उदाहरण लेंगे और उन्हें एक सरल आवर्ती दोलक के दोलनों रूप में समझेंगे। अगली इकाई में आप हाइड्रोजन परमाणु के लिए श्रोडिन्गर समीकरण को हल करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- सरल, एक-विमीय निकायों के लिए काल स्वतंत्र एक-विमीय श्रोडिन्गर समीकरण को हल कर सकेंगे और निम्न तंत्रों के लिए आइगेनफलन और आइगेनमान निकाल सकेंगे
    - — मुक्त कण और बक्स में परिरुद्ध कण
    - — एक-विमीय विभव रोधिका में कण और एक-विमीय विभव कूप में कण
    - — सरल आवर्ती दोलक
- एक-विमीय विभव मॉडलों को क्वांटम भौतिकी के सरल अनुप्रयोगों पर लागू कर सकेंगे।

8.2 मुक्त कण

आइए, सबसे पहले सबसे सरल स्थिति लें, जिसमें विभव अचर है:

$$V(x) = V_0$$

तब कण पर काम करे रहा बल, $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ शून्य हो जाता है यानि कि कण मुक्त है। व्यापक तौर पर हम इस अचर V_0 का मान शून्य भी ले सकते हैं। अब हमारे पास एक मुक्त कण है जिसका द्रव्यमान m है। चूंकि कण पर कोई बल नहीं लग रहा इसलिए इसकी कुल ऊर्जा E जो इसकी गतिज ऊर्जा के बराबर है और साथ ही इसका रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ समय के साथ नहीं बदलते। E और p का संबंध इस समीकरण से मिलता है:

$$\frac{p^2}{2m} = E \tag{8.1}$$

अब आप इकाई 6 से समीकरण (6.28) को याद करें। इसमें $V(x) = 0$ रखने पर हम एक मुक्त कण के लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को इस तरह लिख सकते हैं:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x) \tag{8.2}$$

जहाँ सदिश $\mathbf{p}$ की दिशा x अक्ष के अनुदिश ली गई है। चूंकि $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, जहाँ k तरंग संख्या है, इसलिए समीकरणों (8.1) और (8.2) से हमें मिलता है:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\,\psi(x) \tag{8.3 क}$$

जहां

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{8.3 ख}$$

समीकरण (8.3 क) के दो रैखिकतः स्वतंत्र हल इस प्रकार हैं:

$$\psi_{\pm k}(x) = e^{\pm ikx} \tag{8.4 क}$$

इस तरह, E के एक मान के लिए हमारे पास दो आइगेनफलन e^{+ikx} और e^{-ikx} होते हैं। हम उन्हें $\psi_k(x)$ और $\psi_{-k}(x)$ से दिखाते हैं। याद कीजिए कि ऐसे आइगेनफलन जिनके एक दिए आइगेनफलन-आइगेनमान समीकरण के लिए एक ही आइगेनमान हों, अपभ्रष्ट कहलाते हैं। नहीं तो वे अनपभ्रष्ट होते हैं। इस प्रकार $\psi_k(x)$ और $\psi_{-k}(x)$ अपभ्रष्ट आइगेनफलन हैं। समीकरण (8.3 क) का व्यापक हल निम्न रैखिक संयोजन से मिलता है:

$$\psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} \tag{8.4 ख}$$

जहां A और B स्वेच्छ अचर हैं। यह साफ़ है कि अगर $\psi(x)$ को भौतिक तौर पर मान्य हल होना है तो k का काल्पनिक भाग नहीं हो सकता। क्योंकि अगर ऐसा हो तो $x = +\infty$ या $x = -\infty$ में से एक सीमा में $\psi(x)$ चरघातांकी रूप से बढ़ेगा, या शायद दोनों ही सीमाओं पर। आप शायद जानते हों कि समीकरण (8.4) द्वारा दी गई तरंगों के तरंगाग्र समतल होते हैं और वे तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् होते हैं। इसीलिए हम $e^{\pm ikx}$ को समतल तरंगें (plane waves) कहते हैं। ये $x \to \pm\infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होते। इस प्रकार इन तरंग फलनों का प्रसामान्यीकरण नहीं किया जा सकता (इकाई 6 का भाग 6.3.2 याद कीजिए)।

समीकरण (8.4 ख) का भौतिक अर्थ समझने के लिए, आइए, अब हम कुछ ख़ास स्थितियों को लें। माना $B = 0$। तब परिणामी तरंग फलन निम्न समतल तरंग होगी:

$$\psi(x, t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$$

जहाँ हमने समय की निर्भरता शामिल कर ली है (समीकरण 6.27 याद कीजिए)। यह तरंग फलन द्रव्यमान m वाले एक मुक्त कण से संबद्ध है जो परिमाण $\hbar k$ के रैखिक संवेग और ऊर्जा $\hbar^2 k^2/2m$ के साथ धनात्मक x अक्ष के अनुदिश चल रहा है। इसके संगत प्रायिकता घनत्व है $\psi^*\psi = |A|^2$। यह समय और स्थिति दोनों पर ही निर्भर नहीं करता यानी कण की स्थिति के बारे में बिल्कुल भी पता नहीं लगाया जा सकता। यह बात अनिश्चितता सिद्धांत के संगत है। इसी प्रकार का परिणाम आप समीकरण (8.4 ख) में $A = 0$ रखकर हासिल कर सकते हैं। इस स्थिति में समतल तरंग ऋणात्मक x दिशा में चल रही होगी।

आप इस बात की भी आसानी से जांच कर सकते हैं कि $\psi_{\pm k}(x)$ संकारक p के आइगेनफ़लन हैं और इनके संगत आइगेनमान हैं $\pm\hbar k$। यानी जहाँ तक रैखिक संकारक p का संबंध है, ये दोनों आइगेनफलन $\psi_{\pm k}(x)$ अनपभ्रष्ट हैं। यानी इनके अलग-अलग आइगेनमान हैं। आप इस समस्या को खुद ही क्यों नहीं हल करते ?

बोध प्रश्न 1

सिद्ध कीजिए कि $p_x\, e^{\pm ikx} = \pm\hbar k\, e^{\pm ikx}$

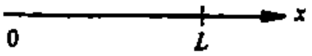
ऊपर दिए गए निकाय के लिए दोनों ही गति के अचर E और p, k के पदों में दिए जाते हैं। इस प्रकार k आइगेनफलन $\psi_k(x)$ का एक अभिलक्षण है। अतः हम k को क्वांटम अंक कहते हैं।

चूंकि $E = \hbar^2 k^2/2m$ इसलिए $E > 0$ यानी पूरे अंतराल $(-\infty, \infty)$ के लिए ऊर्जा विभव से कम मान वाली नहीं हो सकती (यहाँ $V = 0$ है)। चूंकि E का कोई भी धनात्मक मान अनुमत है, इसलिए एक मुक्त कण का ऊर्जा स्पेक्ट्रम संतत होता है और E का मान 0 से ∞ के बीच कुछ भी हो सकता है। ये परिणाम बिल्कुल ही आश्चर्यजनक नहीं

हैं क्योंकि E एक मुक्त कण की गतिज ऊर्जा ही है और यह क्लासिकी परिणाम के संगत भी है।

आइए, देखें क्या होता है जब हम एक मुक्त कण को किसी बक्स में परिरुद्ध कर देते हैं।

8.3 बक्स में कण



चित्र 8.1: रेखा खंड में परिरुद्ध कण।

आइए एक-विमीय निकाय ही लें और एक मुक्त कण को रेखा खंड में परिरुद्ध करें जो $x = 0$ और $x = L$ के बीच स्थित है (चित्र 8.1)। तब कण को $x = L - \varepsilon$ और $x = L + \varepsilon$ के बीच, जहाँ ε एक अत्यणु संख्या है, पाए जाने की प्रायिकता शून्य होनी चाहिए। साथ ही साथ चूंकि तरंग फलन एकल-मानी और संतत हैं इसलिए इन्हें यह प्रतिबंध संतुष्ट करना चाहिए कि परिसीमा $x = 0$ और $x = L$ पर वे शून्य हैं, यानी

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_k(-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_k(L + \varepsilon) = 0 \qquad (8.5 \text{ क})$$

समीकरण (8.5 क) से हमें मिलता है कि

$$\psi_k(0) = \psi_k(L) = 0 \qquad (8.5 \text{ ख})$$

अब हम तरंग फलन को इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$\psi_k(k) = A \cos kx + B \sin kx$$

जहाँ $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$। चूंकि $\psi_k(0) = 0$ इसलिए

$$A = 0$$

और चूंकि $\psi_k(L) = 0$ इसलिए

$$B \sin kL = 0 \qquad (\because B \neq 0)$$

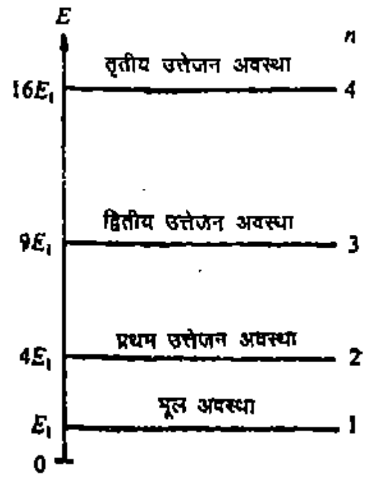
जिससे $kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

अतः k का मान क्वांटमीकृत होता है: आइए इसे हम k_n कहें। तब

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8.6 \text{ क})$$

अतः ऊर्जा E भी क्वांटमीकृत होती है। आइए इसे हम E_n कहें। तब

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8.6 \text{ ख})$$



चित्र 8.2: एक-विमीय बक्स में परिरुद्ध कण के चार निम्नतम ऊर्जा स्तर, जहाँ $E_1 = h^2/8mL^2$।

ध्यान दें कि ऊर्जा का क्वांटमीकरण इस बात का नतीजा है कि हमने कण को एक निश्चित परिक्षेत्र में परिरुद्ध कर दिया है और उसके कारण तरंग फलन पर कुछ परिसीमा प्रतिबंध लगाए हैं। इस तरह जैसे ही हम एक मुक्त कण को एक परिक्षेत्र में सीमित करते हैं वैसे ही उसकी ऊर्जा के मान संतत नहीं रह जाते। वे विविक्त मान ही ले सकते हैं, जो समीकरण (8.6 ख) से दिए जाते हैं। यानी कि ऊर्जा का क्वांटमीकरण हो जाता है (चित्र 8.2)। इस प्रकार किसी बक्स में परिरुद्ध एक कण की क्वांटमीकृत ऊर्जा E_n के संगत आइगेनफलन का मान होता है:

$$\psi_k(x) = \psi_n(x) = N \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (8.6 \text{ ग})$$

यहाँ ध्यान दें कि हमें अभी प्रसामान्यीकरण नियतांक N की गणना करनी है। आप यह अभ्यास खुद करना चाहेंगे। इसके लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 2

5 मिनट लगाएं

क) सिद्ध कीजिए कि $N = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}$ ।

ख) सिद्ध कीजिए कि $\psi_n(x)$ और $\psi_m(x)$ लाम्बिक फलन हैं जबकि $m \neq n$ ।

अतः लम्बाई L के एक रेखा खंड में परिरुद्ध मुक्त कण के आइगेनफलन होते हैं:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (8.7\text{ क})$$

बक्स में परिरुद्ध कण की स्थायी अवस्था के लिए सम्पूर्ण हल है:

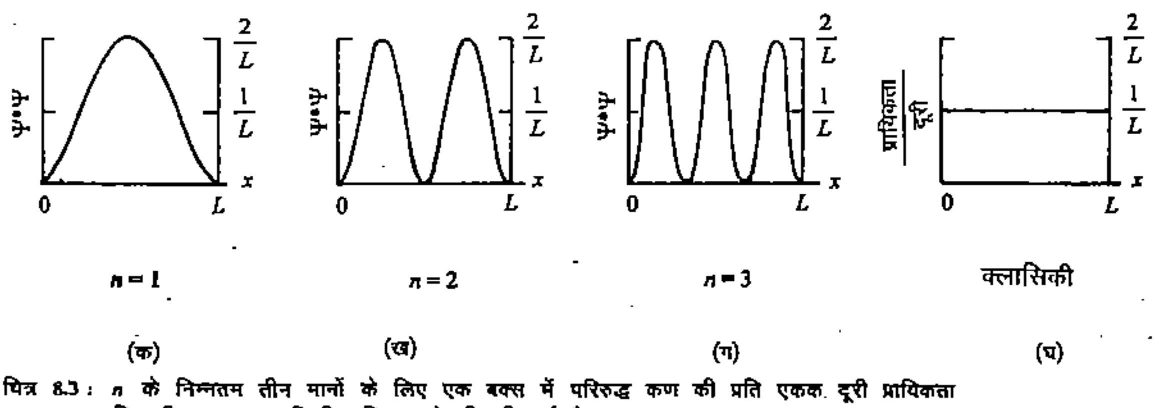
$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$= \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (8.7\text{ ख})$$

और स्थिति x पर कण के पाए जाने की प्रायिकता समय पर निर्भर नहीं करती:

$$P_n(x) = |\psi_n(x, t)|^2 = \left(\frac{2}{L}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (8.7\text{ ग})$$

लेकिन अब यह कण की स्थिति पर निर्भर करती है। चित्र 8.3 में बक्स में परिरुद्ध एक कण के लिए उसकी तीन निम्नतम ऊर्जा अवस्थाओं के लिए प्रति एकक दूरी प्रायिकताओं को दिखाया गया है। तुलना के लिए क्लासिकी परिणाम को भी दिखाया गया है।



चित्र 8.3 : n के निम्नतम तीन मानों के लिए एक बक्स में परिरुद्ध कण की प्रति एकक दूरी प्रायिकता जिसकी तुलना क्लासिकी परिणाम से भी की गई है।

n का सबसे छोटा मान है $n = 0$ लेकिन $n = 0$ के लिए $\psi = 0$। इस परिणाम का मतलब यह है कि $n = 0$ अवस्था की प्रायिकता शून्य है। अब चित्र 8.3 देखें। $n = 1$ के लिए $\psi^*\psi = (2/L)\sin^2(\pi/L)x$, $n = 2$ के लिए $\psi^*\psi = (2/L)\sin^2(2\pi/L)x$; और $n = 3$ के लिए $\psi^*\psi = (2/L)\sin^2(3\pi/L)x$। अतः $\psi^*\psi$, 0 और $2/L$ के बीच दोलन करता है और बक्स में उसका औसत मान $1/L$ होता है।

क्लासिकी तौर पर, यह कण दीवारों से टकरा कर उन के बीच गति करता है। चूंकि इसकी गतिज ऊर्जा अचर है अतः यह दीवारों से संघट्टन के बीच के समय में अचर वेग

से चलता है। इस तरह यह बराबर दूरी के अंतरालों में बराबर समय लेता है। इस प्रकार बक्स में कण के कहीं भी पाए जाने की प्रति एकक दूरी प्रायिकता का मान अचर होता है और $1/L$ के बराबर होता है (चित्र 8.3घ)।

जैसाकि आप चित्र 8.3 क से ग तक देख सकते हैं $\psi^*\psi$ के n शीर्ष होते हैं। इस व्यवहार को आप आसानी से समझ सकते हैं, अगर आप याद करें कि k_n, जो अवस्था n की तरंग संख्या है, $2\pi/\lambda_n$ के बराबर होता है। इस तरंग संख्या को $n\pi/L$ के बराबर रखने पर $L = n\,\lambda_n/2$ मिलता है। यानी, n कण की अर्द्ध तरंगदैर्घ्यों की वह संख्या है, जो दीवारों के बीच फ़िट की जा सकती है। बड़े क्वांटम अंकों की सीमा में किसी परिमित Δx के बीच इन शीर्षों की संख्या इतनी ज़्यादा हो जाती है कि $\psi^*\psi\,\Delta x$ का मान क्लासिकी मान $(1/L)\,\Delta x$ की ओर प्रवृत्त होता है।

कण का रैखिक संवेग होता है:

$$p_n = k_n\hbar = \pm\frac{\hbar\, n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.8}$$

यहाँ आप ध्यान दीजिए कि समीकरणों (8.6 क, ख) और (8.8) में उपस्थित पूर्णांक n की वही भूमिका है, जो मुक्त कण के लिए k की थी। अतः n को **क्वांटम अंक** का दर्जा दिया जाता है। चूंकि n के केवल पूर्णांकीय मान हो सकते हैं, इसलिए कण के संवेग और ऊर्जा अब संतत नहीं रह जाते बल्कि केवल विविक्त मान ही ले सकते हैं।

आइए देखें कि एक-विमीय बक्स में परिरुद्ध कण के लिए प्राप्त इन परिणामों के और क्या-क्या अर्थ निकलते हैं। क्वांटम यांत्रिकी के मुताबिक बक्स में स्थित कण की एक न्यूनतम ऊर्जा (जिसे निम्नतम या मूल अवस्था (ground state) ऊर्जा कहते हैं) $E_1 = \pi^2\,\hbar^2/2m\,L^2$ होनी ही चाहिए। यह परिणाम क्लासिकी परिणाम से बिलकुल अलग है, जहाँ $E = 0$ समेत सभी ऊर्जा मान अनुमत होते हैं। आप आसानी से देख सकते हैं कि यह परिणाम अनिश्चितता सिद्धांत के ही कारण मिलता है। हम कण को लम्बाई L के बीच परिरुद्ध कर रहे हैं। यानी उसकी स्थिति में एक अनिश्चितता L, मौजूद है। अनिश्चितता सम्बन्ध समीकरण (5.6 क) के मुताबिक उसके संवेग में एक संगत अनिश्चितता $\hbar/L$ होगी। इसका मतलब है कि कण की एक निम्नतम ऊर्जा होनी ही चाहिए। उसकी ऊर्जा कभी भी शून्य नहीं होगी क्योंकि तब वह अनिश्चितता सिद्धांत का विरोध करेगी। इस न्यूनतम ऊर्जा को **शून्य बिन्दु ऊर्जा** (zero point energy) कहते हैं।

समीकरण (8.6 ख) से ध्यान दें कि उत्तरोत्तर क्वांटमीकृत ऊर्जा स्तरों के बीच दूरी, परिरोधन लंबाई L घटने के साथ-साथ बढ़ती जाती है। विलोमतः जैसे-जैसे L बढ़ता है वैसे-वैसे उनके बीच की दूरी घटती जाती है। जब L परमाण्वीय दूरियों के मुकाबले कहीं ज़्यादा हो जाता है तो ऊर्जा स्तरों के बीच की दूरी इतनी छोटी हो जाती है कि हमें संगत क्लासिकी सीमा मिलती है। ध्यान दें कि L के बहुत बड़े मान के लिए शून्य बिन्दू ऊर्जा, शून्य की ओर प्रवृत्त होती है।

अभी तक हमने इस स्थिति को गुणात्मक रूप से समझा है। लेकिन आइए कुछ गणनाएं भी करके देखें कि हमें क्या नतीजे मिलते हैं। आइए हम एक इलेक्ट्रॉन ($m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) के ऊर्जा स्तरों की गणना करें जिसे परमाण्वीय माप ($L = 10^{-8}$ सेमी) के एक बक्स में परिरुद्ध किया गया है। समीकरण (8.6 ख) यानी ऊर्जा स्तर फॉर्मूले में ये मान रखने पर हमें $E_n \approx 40\, n^2$ eV मिलता है। तब मूल और प्रथम उत्तेजन अवस्था के बीच का अंतर 120 eV होता है और इन ऊर्जा स्तरों के बीच संक्रमण के कारण उत्सर्जित फ़ोटॉन की आवृत्ति 3×10^{16} Hz होती है जो कि बहुत से परमाण्वीय संक्रमणों में उत्सर्जित आवृत्ति के परिमाण की है।

अब समीकरण (8.8) से:

$$p_{n+1} - p_n = \hbar\pi/L \quad (8.9)$$

इस तरह, L बढ़ने के साथ p_{n+1} और p_n के बीच का अंतर घटता जाता है। अगर अब हम L का मान बहुत अधिक ले लें तो $(p_{n+1} - p_n)$ शून्य की ओर प्रवृत्त होगा। यानी p संतत हो जाएगा। इस प्रकार, हम मुक्त कण को एक ऐसे प्रसामान्यीकृत तरंग फलन से निरूपित कर सकते हैं जिसके लिए L का मान बहुत बड़ा हो। एक मुक्त कण के तरंग फलन के प्रसामान्यीकरण की यह प्रक्रिया बक्स प्रसामान्यीकरण (box normalisation) कहलाती है और आप आसानी से देख सकते हैं कि एक एक-विमीय बक्स प्रसामान्यीकृत तरंग फलन का मान होता है:

$$\psi_k(x) = \left(\frac{1}{L}\right)^{1/2} e^{ikx} \quad (8.10)$$

इस विश्लेषण का व्यापकीकरण करके इसे हम एक त्रि-विमीय बक्स में परिरुद्ध कण पर भी लागू कर सकते हैं। आप इसे खुद ही करके देखें।

बोध प्रश्न 3

10 मिनट लगाएं

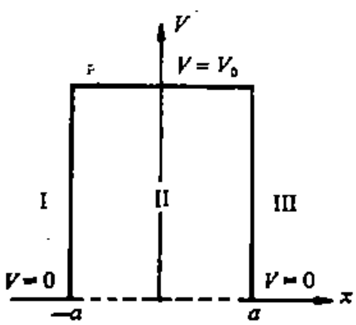
एक कण, जिसे लम्बाई L_x, L_y और L_z के त्रि-विम बक्स में परिरुद्ध किया गया है, के लिए आइगेनफलनों और आइगेनमानों की गणना करें।

आइए, अब हम एक-विमीय आयताकार विभव रोधिका (potential barrier) में स्थित कण की समस्या पर विचार करें।

8.4 एकविम आयताकार विभव रोधिका

भाग 8.2 में हमने एक मुक्त कण की गति की चर्चा की यानी तब हमने संपूर्ण आकाश में विभव का मान शून्य लिया था। आइए अब हम उस स्थिति को थोड़ा-सा बदलें और एक-विमीय समष्टि लें जिसमें एक कण की स्थितिज ऊर्जा $x = -a$ और $x = +a$ के बीच V_0 है लेकिन अन्य स्थितियों में शून्य है:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (8.11)$$



चित्र 8.4: एक-विमीय विभव रोधिका।

इस प्रकार, हम संपूर्ण एक-विमीय समष्टि को तीन क्षेत्रों में बांटते हैं। क्षेत्र I, $-\infty$ से $-a$ तक है, क्षेत्र II, $-a$ से $+a$ तक है और क्षेत्र III, $+a$ से $+\infty$ तक है (चित्र 8.4 देखिए)। इस केन्द्रीय क्षेत्र को विभव रोधिका (potential barrier) के नाम से जाना जाता है। ध्यान दीजिए कि समीकरणों (8.11) से परिभाषित V आयताकार है।

आइए हम इस एक-विमीय क्षेत्र में द्रव्यमान m और कुल अचर ऊर्जा E वाले एक कण की गति समझें। विशुद्ध भौतिकीय दृष्टि से देखें तो हम कह सकते हैं कि कण क्षेत्र I में मुक्त है यानी इस क्षेत्र के लिए एक आपतित समतल तरंग होगी और इस विभव रोधिका द्वारा परावर्तित समतल तरंग होगी। इस प्रकार क्षेत्र I के लिए हम तरंग फलन को इस तरह लिख सकते हैं:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x < -a \text{ के लिए} \quad (8.12)$$

जहाँ

$$k = \sqrt{2m\,E}/\hbar \tag{8.13}$$

क्षेत्र III में भी कण एक बार फिर से मुक्त है, लेकिन वहाँ पर केवल संचरित तरंग है। अतः

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx} \qquad x > a \text{ के लिए} \tag{8.14}$$

लेकिन क्षेत्र II में श्रोडिन्गर समीकरण है:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0\,\psi_{II}(x) = E\,\psi_{II}(x) \tag{8.15}$$

आइए, इस समीकरण को निम्न रूप में लिखें:

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\psi_{II}(x) = 0 \tag{8.16}$$

एक वास्तविक प्राचल γ परिभाषित करने पर हम समीकरण (8.16) को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} - \gamma^2\,\psi_{II}(x) = 0 \tag{8.17 क}$$

जहाँ

$$\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \tag{8.17 ख}$$

हम समीकरण (8.17 क) के हल को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}, \qquad -a < x < a \text{ के लिए} \tag{8.18}$$

अब, दो संभावनाएं हैं : (i) E, V_0 से छोटा है और (ii) E, V_0 से बड़ा है। आइए, सबसे पहले पहली संभावना लें जब $E < V_0$। तब γ वास्तविक होता है और समीकरण (8.17 क) का हल होता है:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}, \qquad -a < x < a \text{ के लिए} \tag{8.19}$$

समीकरण (6.19) और (8.12) के आपतित भाग (Ae^{ikx}) की मदद से हम पाते हैं कि विभव रोधिका के बाईं ओर आपतित अभिवाह है

$$S_i = \frac{\hbar k}{m}\,|A|^2 \tag{8.20}$$

इसी प्रकार तरंग फलन के परावर्तित अंश और संचरित तरंग फलन का प्रयोग करके हम पाते हैं कि परावर्तित अभिवाह S_r और संचरित अभिवाह S_t के मान हैं:

$$S_r = S_i\,|B/A|^2 \tag{8.21}$$

$$S_t = S_i\,|F/A|^2 \tag{8.22}$$

आप समीकरणों (8.20) और (8.22) की, आगे पढ़ने से पहले जल्दी से जाँच कर लें।

इस तरह हमें मिलता है:

$$\text{परावर्तन की प्रायिकता } P_r = \frac{S_r}{S_i} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \tag{8.23}$$

और

$$\text{संचरण की प्रायिकता } P_t = \frac{S_t}{S_i} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 \tag{8.24}$$

अब P_r और P_t यानी गुणांकों B और F के मान निकालने के लिए हमें तरंग फलनों ψ और उनके अवकलजों ψ' को परिसीमाओं $x = -a$ और $x = +a$ पर मिलाना होगा। परिसीमा प्रतिबंध इस प्रकार हैं :

$$\psi_I (x = -a) = \psi_{II} (x = -a); \quad \psi_I (x = -a) = \psi'_{II} (x = -a) \tag{8.25 क}$$

और

$$\psi_{II} (x = a) = \psi_{III} (x = a); \quad \psi'_{II} (x = a) = \psi'_{III} (x = a) \tag{8.25 ख}$$

समीकरण (8.12), (8.19) और (8.14) से ψ_I, ψ_{II} और ψ_{III} रखने पर और समुचित बीजगणित करने पर हमें P_r और P_t के निम्न व्यंजक मिलते हैं:

$$P_t = \left[1 + \frac{V_0 \sinh^2 (2\gamma a)}{4E (V_0 - E)} \right]^{-1} \tag{8.26}$$

$$P_r = \left[1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0 \sinh^2 (2\gamma a)} \right]^{-1} \tag{8.27}$$

आप आगे बढ़ने से पहले समीकरण (8,26) और (8.27) को सिद्ध करना चाहेंगे। इसके लिए निम्न अभ्यास करें।

बोध प्रश्न 4

10 मिनट लगाएं

समीकरण (8.26) और (8.27) को सिद्ध कीजिए।

आप आसानी से इस बात की जाँच कर सकते हैं कि $P_t + P_r = 1$। इस विश्लेषण की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि $E < V_0$ के लिए भी संचरण की एक परिमित प्रायिकता मिलती है यानी कि जब कण की ऊर्जा, विभव की ऊंचाई से कम होती है तब भी कण का रोधिका के पार संचरण हो सकता है। यह क्लासिकी परिस्थिति के विपरीत है। यह एक विशुद्ध क्वांटम प्रभाव है, जो क्वांटम वस्तुओं के तरंग गुणधर्म का द्योतक है। इस बात को इस तरह से कहा जाता है कि क्लासिकी तौर पर अभेद्य रोधिका को भी क्वांटम वस्तुएं सुरंगन (tunneling) कर सकती हैं। इस परिघटना को यानी कण द्वारा विभव रोधिका को पार करने की परिघटना को **सुरंगन प्रभाव** कहा जाता है। यह एक क्वांटम यांत्रिकीय परिघटना है और सिर्फ़ उन्हीं वस्तुओं के लिए घटती है जिनके लिए कण-तरंग द्वैतवाद महत्वपूर्ण होता है। आपको यह जानना चाहिए कि सुरंगन प्रभाव के बहुत से अनुप्रयोग होते हैं। यह रेडियो-एक्टिव अल्फ़ा क्षय में α कण के उत्सर्जन की व्याख्या करता है। और क्षेत्र उत्सर्जन में इलेक्ट्रॉनों की वर्जित क्षेत्र में गति की व्याख्या करता है। इलेक्ट्रॉनिकी में इसका इस्तेमाल करके सुरंग डायोड (tunnel diode) का निर्माण किया गया है। आइए, इनमें से एक प्रयोग यानी अल्फ़ा क्षय के अनुप्रयोग पर चर्चा करें।

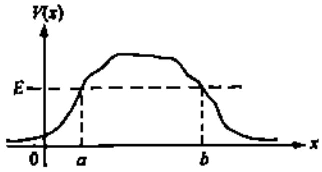
उदाहरण 1 : अल्फ़ा क्षय के लिए अनुप्रयोग

हम यहाँ इस अनुप्रयोग की चर्चा केवल व्यापक रुचि के कारण कर रहे हैं। आपकी इस गणित के लिए परीक्षा नहीं ली जाएगी।

आइए, अब हम नाभिकों से अल्फ़ा कणों के उत्सर्जन की परिघटना लें। यह अनुप्रयोग सबसे पहले गैमोव (Gamow), गरनी (Gurney), और कॉन्डन (Condon) ने प्राप्त किया था।

चूंकि यह एक वास्तविक समस्या है, इसलिए इस भौतिक रोधिका का आकार आयताकार नहीं होता (चित्र 8.5)। अब $\gamma a >> 0$ के लिए संचरण की प्रायिकता हो जाती है:

$$P_t = |T|^2 = \frac{16\,k^2\,\gamma^2}{(k^2+\gamma^2)^2}\exp(-4\gamma a) \simeq \exp(-4\gamma a)$$



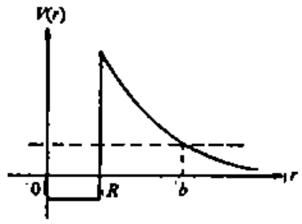
(क)

इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$P_t = \exp\,[-2\,\{2m\,(V_0 - E)\,/\,\hbar^2\}^{1/2}\,.\,2a]$$

ऐसी रोधिकाओं के एक बहुत बड़े परिसर के लिए हम इसके परिमाण की कोटि का अनुमान लगा सकते हैं। P_t के व्यंजक को $V(x)$ के लिए व्यापकीकृत करके हम लिख सकते हैं:

$$P_t = \exp\left[-2\int_a^b dx\,\left\{\frac{2m}{\hbar^2}\,(V(x) - E)\right\}^{1/2}\right]$$



(ख)

चित्र 8.5: (क) एक वास्तविक विभव रोधिका देखने में आयताकार रोधिका की तुलना में अधिक टेढ़ी मेढ़ी होती है। (ख) नाभिक के अल्फ़ा क्षय के लिए रोधिका का मॉडल विभव।

अब नाभिक से अल्फ़ा उत्सर्जन की स्थिति का हम चित्र 8.5 ख में दी गई विभव रोधिका से सन्निकटन कर सकते हैं। नाभिक के अंदर अल्फ़ा कण मुक्त है यानी $E > 0$। (क्योंकि यदि अल्फ़ा कण बद्ध होता तो नाभिक का क्षय कैसे होता ?). इसे निम्न कूलॉम रोधिका से सुरंगन करके निकलना है:

$$V(r) = \frac{ZZ'\,e^2}{r}$$

जहाँ Z और Z' क्रमशः क्षयजात नाभिक और अल्फ़ा कण की परमाणु संख्याएं हैं, जिनमें कि जनक नाभिक विखंडित हो रहा है। यहां r त्रिज्य दूरी है। अब P_t के व्यंजक में चर x की जगह हम r लिख सकते हैं क्योंकि x समाकल का मूक (dummy) चर है। P_t को e^{-G} के बराबर रखकर हमें मिलता है

$$G = 2\,(2m/\hbar^2)^{1/2}\int_R^b \left(\frac{ZZ'\,e^2}{r} - E\right)^{1/2} dr$$

जहाँ R क्षयजात नाभिक की त्रिज्या है और समाकल की ऊपरी सीमा b क्लासिकी वर्तन बिन्दु (turning point) है जिस पर समाकल शून्य हो जाता है, चूंकि

$$E = \frac{ZZ'\,e^2}{b}$$

इस प्रकार

$$G = 2\,(2m/\hbar^2)^{1/2}\,(ZZ'\,e^2)^{1/2}\int_R^b \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)^{1/2} dr$$

समाकल का मान है

$$\int_R^b dr\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)^{1/2} = \sqrt{b}\,\left[\cos^{-1}\left(\frac{R}{b}\right)^{1/2} - \left(\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}\right)^{1/2}\right]$$

कम ऊर्जाओं और उच्च रोधिकाओं के लिए $b >> R$ और हमें मिलता है:

$$G \approx 2 \left(\frac{2m\, ZZ'\, e^2 b}{\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{\pi}{2}$$

लेकिन $b = ZZ'\, e^2/E = 2\, ZZ'\, e^2/mv^2$ जहाँ v नाभिक के अंदर अल्फ़ा कण का वेग है। अतः

$$G = \frac{2\pi\, ZZ'\, e^2}{\hbar v}$$

अब प्रति सेकंड अल्फ़ा कण की पलायन प्रायिकता की गणना करने के लिए हमें संचरण गुणांक $\exp(-G)$ को रोधिका से टकराने वाले अल्फ़ा कणों की दर से गुणा करना होगा जो v/R है। एक 1 MeV अल्फ़ा कण के लिए, $R = 1.2 \times 10^{-13} A^{1/3}$ cm रखने पर जहाँ $A = 216$, हमें मिलता है $v/R = 10^{21}\ \mathrm{s}^{-1}$। परिणामतः

प्रति सेकंड पलायन प्रायिकता $= \tau^{-1} = 10^{21}\, e^{-G}$ जहाँ τ क्षय काल है। $Z' = 2$ और अल्फ़ा कण का द्रव्यमान $m \approx 4 \times 10^3$ MeV रखने पर हमें मिलता है:

$$G = \frac{2\pi\, ZZ'\, e^2}{\hbar\, (2E/m)^{1/2}} \approx \frac{4Z}{(E(\text{MeV में}))^{1/2}}$$

अतः

$$\log_{10} \frac{1}{\tau} = C_1 - C_2 \frac{Z}{(E\ \text{MeV})^{1/2}}$$

जहां C_1 और C_2 दो अचर हैं। अभी इनके मानों की बात हम छोड़ देते हैं। यह फॉर्मूला जिसे सबसे पहले गैमोव, गरनी और कॉन्डन ने प्राप्त किया था, अल्फ़ा कण क्षय के प्रायोगिक आंकड़ों से काफ़ी अच्छा सामंजस्य दिखाता है। यह भी एक अनूठी बात है कि हम इस फॉर्मूले की व्युत्पत्ति एक-विमीय गणना से ही कर सके।

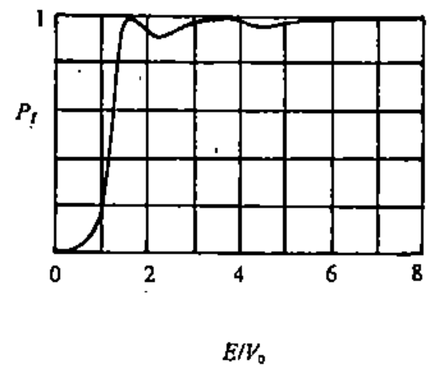
आइए अब $E > V_0$ की स्थिति लें। क्लासिकी तौर पर वह कण जिसके लिए $E > V_0$ है शतप्रतिशत प्रायिकता के साथ संचरित हो जाएगा। क्वांटम यांत्रिकीय दृष्टि से ऊपर प्राप्त फ़ार्मूलों को थोड़ा-सा बदल कर इस स्थिति पर लागू किया जा सकता है। इसमें एक ही बदलाव है कि γ अब काल्पनिक है। अतः $\gamma = iq$ रखने पर, जहाँ $q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$ हमें मिलता है:

$$P_t = |T|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2 (2qa)}{4E\,(E - V_0)}\right]^{-1} \tag{8.28}$$

और

$$P_r = |R|^2 = \left[1 + \frac{4E\,(E - V_0)}{V_0^2 \sin^2 (2qa)}\right]^{-1} \tag{8.29}$$

इस तरह हम पाते हैं कि क्वांटम यांत्रिकीय तौर पर $P_r \neq 0$ और इसलिए $E > V_0$ होने पर भी आपतित अभिवाह का एक हिस्सा परावर्तित हो जाता है। चित्र 8.6 में हमने रोधिका की ऊंचाई के साथ संचरण प्रायिकता का विचलन दिखाया है। इस चित्र में आप देख सकते हैं कि कम E के लिए P_t का मान कम है, और उच्च ऊर्जा के लिए यह इकाई की ओर प्रवृत्त होता है।

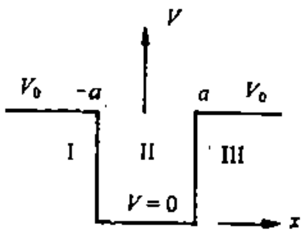


चित्र 8.6: ऊंचाई V_0 वाली आयताकार विभव रोधिका के लिए ऊर्जा E वाले कण की संचरण प्रायिकता।

चित्र 8.6 में दिखाए गए वक्र का एक रोचक पहलू है कि (E/V_0) के एक ख़ास मान के लिए संचरण प्रायिकता P_t का मान 1 होता है। और इस प्रकार $P_r = 0$ (देखें चित्र 8.6)। यह तब होता है जब-जब $2qa = n\pi$ जहाँ $n = 0, 1, 2, \ldots$ आदि। इन दोनों परिसीमाओं $x = \pm a$ पर, जहाँ पर परावर्तन हो रहा है वस्तुतः बराबर आयाम और विपरीत कलाओं वाली परावर्तित तरगें उत्पन्न हो रही हैं। अतः परावर्तन होता ही नहीं है।

आइए अब एक-विमीय विभव कूप में कण की समस्या को लें।

8.5 एकविम विभव कूप



चित्र 8.7 : आयताकार विभव कूप।

चित्र 8.7 में दिखाए गए विभव कूप के लिए आइए हम आइगेनमानों और आइगेनफलनों की गणना करें। इस कूप के लिए कण की स्थितिज ऊर्जा $x < -a$ और $x > a$ के लिए V_0 है लेकिन $-a < x < a$ के लिए शून्य है।

$$V(x) = V_0 \qquad x < -a$$

$$V(x) = 0 \qquad -a < x < a$$

$$V(x) = V_0 \qquad x > a$$

द्रव्यमान m वाले इस कण की कुल ऊर्जा E गति का अचर है। अतः क्षेत्र I और क्षेत्र III में कण की श्रोडिन्गर समीकरण होगी:

$$H\psi = E\psi \tag{8.30 क}$$

जहाँ

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{8.30 ख}$$

$V(x)$ का मान रखने पर क्षेत्र I के लिए हमें मिलता है:

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\psi(x) = 0, \qquad |x| > a \text{ के लिए} \tag{8.31 क}$$

और क्षेत्र II में

$$\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0, \qquad |x| < a \text{ के लिए} \qquad (8.31 \text{ ख})$$

परिभाषा से :

$$\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \quad \text{और} \quad q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (8.32)$$

आइए अब वह स्थिति लें जब $V_0 > E$ यानी γ वास्तविक है। क्षेत्र II में तरंग फलन है:

$$\psi_{II}(x) = B\cos(qx) + C\sin(qx) \qquad (8.33)$$

इसी प्रकार, क्षेत्र I और III में व्यापक हल हैं:

$$\psi_I(x) = A\exp(\gamma x) \qquad (8.34 \text{ क})$$

और

$$\psi_{III}(x) = D\exp(-\gamma x) \qquad (8.34 \text{ ख})$$

आइए, तरंग फलन $\psi_{II}(x)$ का विश्लेषण करें। ध्यान दीजिए कि इस निकाय का हैमिल्टोनियन (समीकरण 8.30 ख) नहीं बदलता जब x की जगह $-x$ रखा जाता है। इससे हमें एक रोचक परिणाम मिलता है कि H, पैरिटी संकारक P के साथ कम्यूट करता है। इसे हम इस तरह सिद्ध कर सकते हैं:

$$P[H\psi(x)] = H(-x)\,\psi(-x) = H\psi(-x) = H(x)\,[P\psi(x)]$$

अतः

$$PH - HP = 0 \qquad \text{चूंकि } \psi(x) \neq 0$$

या

$$[P, H] = 0$$

अब आप इकाई 7 के भाग से यह परिणाम याद कीजिए: कि अगर कोई संकारक A पैरिटी संकारक से कम्यूट करता है, तब A के अनपभ्रष्ट आइगेनफलनों की निश्चित पैरिटी होती है यानी या तो वे विषम पैरिटी के होते हैं या सम पैरिटी के। आइए, इसे हम फिर से H के लिए दिखाएं। माना कि

$$H(x, p_x)\,\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

तब बाईं ओर से P से संक्रिया कराने पर हमें मिलता है

$$PH(x, P_x)\,\psi(x) = \lambda P\psi(x)$$

या

$$H(P\psi) = \lambda(P\psi) \qquad (\because PH = HP)$$

इस प्रकार दोनों ही ψ और $P\psi$, H के आइगेनफलन हैं और उनका एक ही आइगेन-मान λ है। चूंकि $\psi(x)$ एक अनपभ्रष्ट तरंग फलन है, इसलिए इन दोनों फलनों में एक अचर गुणक से ज़्यादा का अंतर नहीं होना चाहिए।

अतः

$$P\psi(x) = p\psi(x)$$

जहाँ p एक अचर है।

इस तरह $\psi(x)$, P का आइगेनफलन है, जिसके संगत आइगेनमान है p। P से एक बार फिर से बाईं ओर से संक्रिया कराने पर हमें मिलता है:

$$P^2\psi(x) = Pp\psi(x) = p^2\psi(x)$$

और

$$P^2\psi(x) = P\psi(-x) = \psi(x)$$

जिससे $p^2 = 1$ और $p = \pm 1$। वे तरंग फलन जिनके लिए $p = +1$ है, **सम पैरिटी के तरंग फलन** कहलाते हैं और जिनके लिए $p = -1$ है, **विषम पैरिटी के तरंग फलन** कहलाते हैं। चूंकि p का इनमें से एक समय में एक ही मान हो सकता है, इसलिए $\psi(x)$ को या तो सम या विषम पैरिटी का होना चाहिए।

समीकरण (8.33) द्वारा दिया $\psi_{II}(x)$, मिश्र पैरिटी का है। इस तरह ऊपर दी गई चर्चा के अनुसार यह एक अमान्य हल है।

अतः या तो C को या B को शून्य होना चाहिए। अगर हम समीकरण (8.33) में $B = 0$ ले लेते हैं तो हमें सम पैरिटी वाले हल मिलते हैं जबकि $C = 0$ लेने से विषम पैरिटी वाले हल मिलते है। आप यह जाँच कर सकते हैं कि कूप की परिसीमाओं पर तरंग फलनों को बराबर रखने पर विषम और सम पैरिटी हलों के लिए क्रमशः $D = \pm A$ मिलता है। अतः कूप के लिए सम-पैरिटी हल हैं:

$$\psi_I(x) = A \exp(\gamma x) \qquad x < -a \text{ के लिए} \qquad (8.35\text{ क})$$

$$\psi_{II}(x) = B \cos(qx) \qquad -a < x < a \text{ के लिए} \qquad (8.35\text{ ख})$$

और

$$\psi_{III}(x) = A \exp(-\gamma x) \qquad x > a \text{ के लिए} \qquad (8.35\text{ ग})$$

दूसरी ओर विषम पैरिटी हल हैं:

$$\psi_I(x) = D \exp(\gamma x) \qquad x < -a \text{ के लिए} \qquad (8.36\text{ क})$$

$$\psi_{II}(x) = C \sin(qx) \qquad -a < x < a \text{ के लिए} \qquad (8.36\text{ ख})$$

और

$$\psi_{III}(x) = -D \exp(-\gamma x) \qquad x > a \text{ के लिए} \qquad (8.36\text{ ग})$$

चूंकि ψ और $\partial\psi/\partial x$ को संतत होना है, इसलिए इनका लघुगणकीय अवकलज $\frac{\partial}{\partial x}(\ln \psi)$ यानी $\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ को भी परिसीमा पर संतत होना चाहिए। $x = \pm a$ पर लघुगणकीय अवकलजों के सांतत्य प्रतिबंध को सम पैरिटी हल पर लागू करने पर हमें यह प्रतिबंध मिलता है कि:

$$\eta = \xi \tan \xi \qquad (8.37)$$

जहाँ

$$\eta = \gamma a \quad \text{और} \quad \xi = qa \qquad (8.38)$$

आगे पढ़ने से पहले आप समीकरण (8.37) को सिद्ध करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 5

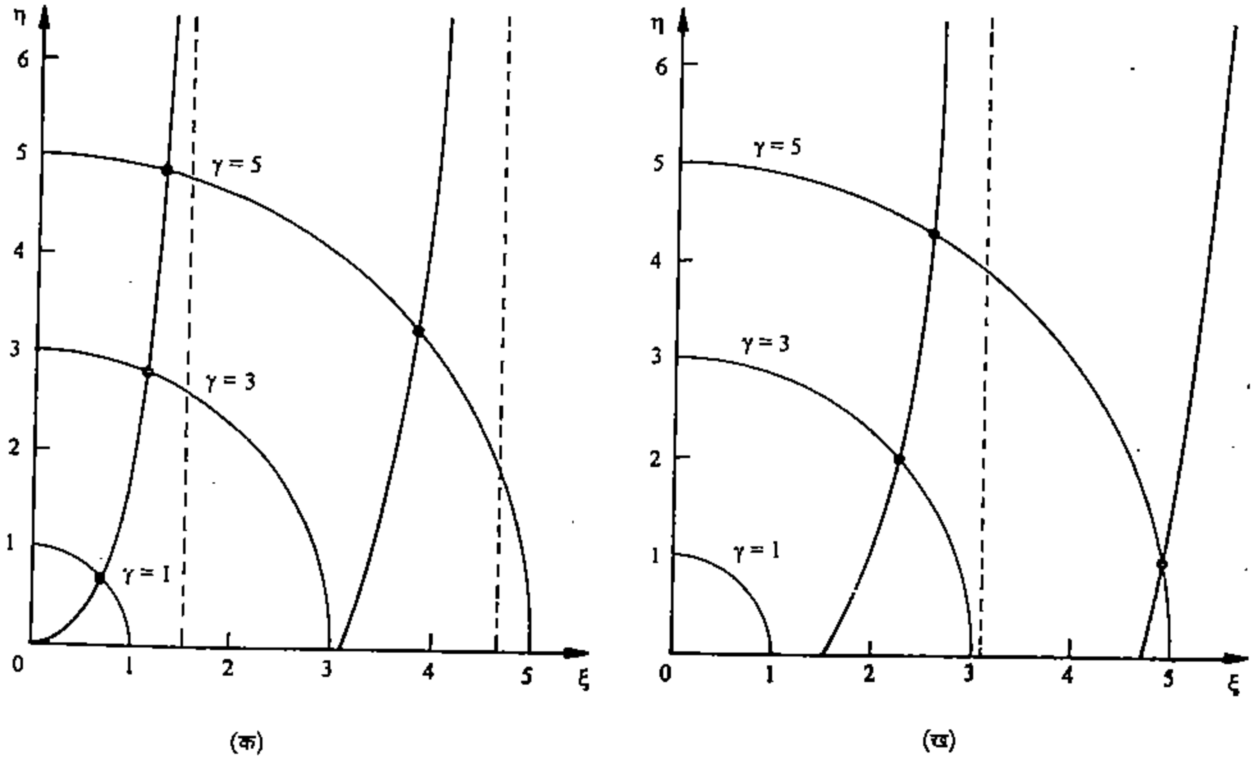
5 मिनट लगाएं

समीकरण (8.37) को सिद्ध कीजिए।

समीकरण (8.38) और (8.32) से मिलता है

$$\eta^2 + \xi^2 = 2m\, V_0\, a^2/\hbar^2 = R^2 \tag{8.39}$$

अब η और ξ के लिए समीकरणों (8.37) और (8.38) को हल करके ऊर्जा आइगेन-मानों को प्राप्त किया जा सकता है जहाँ से γ और q के मान निकाले जा सकते हैं। इन समीकरणों को हल करने की ग्राफ़ीय विधि चित्र 8.8 क में दिखाई गई है।



चित्र 8.8: (क) समीकरणों $\eta^2 + \xi^2 = R^2$ और $\eta = \xi \tan \xi$ में ξ के साथ η का विचरण। इनके प्रतिच्छेदन से हल प्राप्त होते हैं; (ख) समीकरणों $\eta^2 + \xi^2 = R^2$ और $\eta = -\xi \cot \xi$ में ξ के साथ η का विचरण। इनके प्रतिच्छेदन से हल प्राप्त होते हैं।

η और ξ के संभव मान और इनसे γ और q के संभव मान वृत्त $\eta^2 + \xi^2 = R^2$ (जहाँ $R^2 = 2mV_0\, a^2/\hbar^2$) और वक्र $\eta = \xi \tan \xi$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त होते हैं। चूंकि γ और q वास्तविक हैं, इसलिए इन वक्रों और वृत्त को पहले चतुर्थांश में ही लिया जाना है। चित्र से यह साफ़ है कि ξ के अनुमत मान और इसलिए E के अनुमत मान विविक्त हैं और E के अनुमत मानों की संख्या R का मान बढ़ने के साथ-साथ बढ़ जाती है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि $R = 1$ के लिए एक ही हल होगा। $R = 2$ के लिए भी यही सही है। लेकिन $R = 3.5$ के लिए सम पैरिटी हलों की संख्या 2 है।

इसी प्रकार विषम पैरिटी हलों के लिए :

$$\eta = -\xi \cot \xi \tag{8.40}$$

ऊपर दी गई स्थिति के लिए $R = 1$ के लिए कोई हल नहीं मिलता। लेकिन $R = 2$ और 3 के लिए एक बद्ध अवस्था मिलती है (चित्र 8.8 ख)।

सार रूप में कहें तो $E < V_0$ के लिए, एक विभव कूप में कण के ऊर्जा स्तरों का मान V_0 और a पर निर्भर करता है। 0 और $\pi/2$ के बीच R के मानों के लिए यानी 0 और $(\hbar^2/2m)(\pi/2)^2$ के बीच $V_0(a^2)$ के मानों के लिए समकोटि का एक ही ऊर्जा स्तर होता है। R के $\pi/2$ और $2(\pi/2)$ के बीच के मानों के लिए एक सम और एक विषम कोटि का हल होता है। जैसे-जैसे R बढ़ता है, ऊर्जा स्तरों की कुल संख्या बढ़ती जाती है। अतः $E < V_0$ के लिए कण कूप में बद्ध है और ऊर्जा स्पेक्ट्रम विविक्त है। दूसरी ओर $E > V_0$ के लिए हम सिद्ध कर सकते हैं कि कण कन्टिनुअम (continuum) में है और आइगेन ऊर्जा E का मान V_0 से ∞ तक सतत रूप से लिया जा सकता है।

आइए अंत में हम अनन्त गहराई वाले एक विभव कूप का उदाहरण लें। इस स्थिति में कण के कूप के बाहर पाए जाने की प्रायिकता शून्य होगी और तरंग फलन केवल $|x| < a$ के लिए ही शून्य नहीं होगा। इसके सम और विषम पैरिटी हल क्रमशः समीकरणों (8.35 ख) और (8.36 ख) से दिए जाएंगे। $x = \pm a$ पर $\psi_n(x) = 0$ रखने पर हमें मिलता है:

$$qa = (n + 1)\,\pi/2 \tag{8.41}$$

जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है और इसमें शून्य भी शामिल है। समीकरण (8.41) को (8.32) में रखने पर हमें मिलता है:

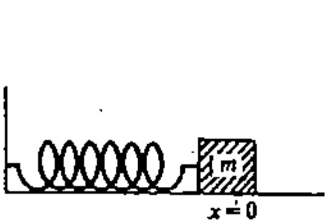
$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n + 1)^2}{8\, m\, a^2} \qquad \text{जहाँ } n = 0, 1, 2 \ldots \tag{8.42}$$

यहाँ ध्यान दीजिए कि $n = 0$ के लिए भी ऊर्जा का एक परिमित मान मिलता है। यह ऊर्जा $E_0\ (= \hbar^2/8\,ma^2)$ शून्य बिन्दु ऊर्जा के नाम से जानी जाती है और यह हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत का ही परिणाम है। चूंकि कूप की चौड़ाई $2a$ है, इसलिए कण की स्थिति में अधिकतम अनिश्चितता $2a$ है। अतः कण के संवेग में अनिश्चितता है $\hbar/2a$। इसे हम कण का न्यूनतम संवेग मान सकते हैं। अतः कण की न्यूनतम ऊर्जा $\hbar^2/8\,ma^2$ होगी। इस ऊर्जा की कोटि वही है जो E_0 की है। अतः शून्य बिन्दु ऊर्जा हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत के संगत है।

यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि इस समस्या में गति का केवल एक अचर है; वह है कण की कुल ऊर्जा। अतः ऊर्जा स्तरों को हम एक क्वांटम अंक n से निरूपित कर सकते हैं। और भले ही $E < V_0$ हो, कण के कूप के बाहर पाए जाने की प्रायिकता शून्य नहीं है। यह परिणाम ग़ैर-क्लासिकी है। लेकिन आपको यह याद रखना चाहिए कि $|x|$ बढ़ने के साथ-साथ इस प्रायिकता में चरघातांकी रूप से कमी आती है।

आइए, अब हम एकविम सरल आवर्ती दोलक की समस्या लें।

8.6 एकविम सरल आवर्ती दोलक



चित्र 8.9 : एक-विमीय आवर्ती दोलक के रूप में स्प्रिंग पर लगा द्रव्यमान।

एकविम सरल आवर्ती दोलक की समस्या में हमें इसलिए रुचि है कि इसके बहुत से सीधे-सीधे भौतिक अनुप्रयोग हैं। वास्तव में सरल आवर्ती दोलक की समीकरण से बहुत सारे भौतिक निकायों का निरूपण किया जा सकता है। यहाँ याद कीजिए एक आवर्ती दोलक की क्लासिकी परिभाषा। यह हुक के नियम का पालन करता है, जिसके मुताबिक किसी कण पर बल $\mathbf{F}$ उसके विस्थापन के समानुपाती होता है और उसकी माध्य स्थिति की ओर लगता है। यानी $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ जहाँ k, जो कि आनुपातिकता स्थिरांक है, बल नियतांक के नाम से जाना जाता है (चित्र 8.9)। k और दोलक की क्लासिकी आवृत्ति ν में संबंध है, $k = 4\pi^2 \nu^2 m$ जहाँ m कण का द्रव्यमान है। x पर कण की स्थितिज ऊर्जा का मान होता है

$$\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{या} \quad \frac{1}{2}m\,\omega^2x^2;$$

जहाँ $\omega = 2\pi\nu$ कोणीय आवृत्ति है। इसलिए इस निकाय के लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण होती है:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\,\omega^2\,x^2\right]\psi(x) = E\,\psi(x) \tag{8.43}$$

जहां E दोलक की कुल ऊर्जा है और वह समय पर निर्भर नहीं करती। ऊपर दी गई समीकरण से यह स्पष्ट है कि निकाय का हैमिल्टोनियन आकाशीय व्युत्क्रमण (space inversion) की संक्रिया के अधीन निश्चर रहता है यानी यह पैरिटी संकारक से कम्यूट करता है अतः इसके आइगेनफलनों की एक निश्चित पैरिटी होगी। अब हम निम्न प्राचलों की परिभाषा देते हैं:

$$\xi = ax, \qquad a^2 = m\omega/\hbar \tag{8.44}$$

और

$$E = \frac{\lambda\hbar\omega}{2}$$

ऊपर दी गई परिभाषाओं से हम समीकरण (8.43) को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\,\psi(\xi) = 0 \tag{8.45}$$

अब आप जल्दी से समीकरण (8.45) की जाँच करें।

बोध प्रश्न 6 — 5 मिनट लगाएं

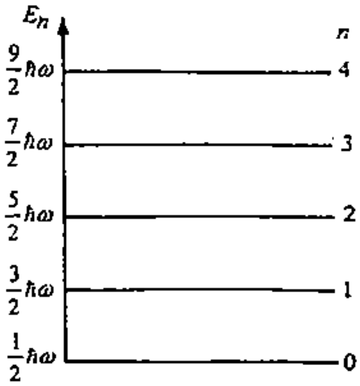
समीकरण (8.45) को सिद्ध कीजिए।

समीकरण (8.45) के मान्य हल प्राप्त करने के लिए हमें बहुत लम्बा गणित करना पड़ेगा जिसकी हमें यहाँ ज़रूरत नहीं है। यहाँ हम सिर्फ़ परिणाम लिखेंगे। हलों के मान्य होने के लिए λ को निम्न संबंधों को संतुष्ट करना चाहिए।

$$\lambda = 2n + 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.46}$$

अतः समीकरण (8.46) से:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.47}$$



चित्र 8.10 : एक सरल आवर्ती दोलक का ऊर्जा स्तर आरेख।

पूर्णांक n को ऊर्जा क्वांटम अंक भी कहते हैं। चूंकि हमारा सरल आवर्ती दोलक एकविम निकाय है, इसलिए हमें एक ही क्वांटम अंक मिलता है। चित्र 8.10 से देखें:

- एक क्वांटम यांत्रिकीय दोलक के ऊर्जा स्तरों के बीच की दूरी बराबर होती है। यह वास्तव में कुछ अणुओं और नाभिकों के प्रायोगिक स्पेक्ट्रम के कुछ हिस्सों का एक अभिलक्षण है। इस तरह इन स्पेक्ट्रमों के लिए एक सरल आवर्ती दोलक एक अच्छे मॉडल का काम करता है। वास्तव में यह इतना अच्छा मॉडल होता है कि इन स्पेक्ट्रमों को अक्सर कम्पनिक (vibrational) स्पेक्ट्रम कहा जाता है। ठोसों में होने वाले उत्तेजनों, जिन्हें फ़ोनॉन कहा जाता है, को भी इसी श्रेणी में रखा जा सकता है।
- प्रत्येक आइगेनमान के लिए एक ही आइगेनफलन होगा। यानी कि यहाँ पर अपभ्रष्टता नहीं है। ये गुणधर्म वास्तव में सभी एक-विमीय विभवों के लिए, जो x के सभी

परिमित मानों के लिए परिमित होते हैं, बद्ध अवस्थाओं का एक उभयनिष्ठ अभिलक्षण होता है। शून्य विन्दु ऊर्जा का मान है:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad n = 0 \text{ के लिए} \tag{8.48}$$

यह शून्य विन्दु ऊर्जा हाइज़ेनवर्ग अनिश्चितता सिद्धांत का ही एक परिणाम है जिसे हम इस तरह समझ सकते हैं। चूंकि

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

अतः E का मान शून्य तभी हो सकता है जब x और p दोनों ही एक साथ शून्य के बराबर हों। ऐसी स्थिति में x और p एक साथ सुनिश्चित किए जा सकते हैं। यह परिणाम अनिश्चितता सिद्धांत का उल्लंघन करेगा, इसलिए मूल या निम्नतम आइगेन ऊर्जा को शून्य नहीं होना चाहिए।

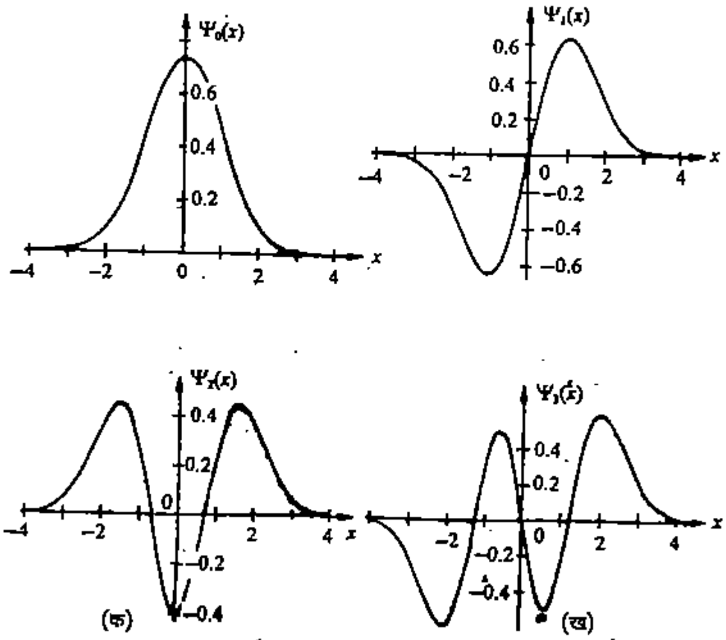
एक सरल आवर्ती दोलक के प्रसामान्यीकृत आइगेनफलन हैं:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}\right)^{1/2} H_n(ax) \exp(-a^2 x^2/2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.49}$$

जहाँ $H_n(ax)$ हर्माइट बहुपद हैं। इनमें से कुछ के मान नीचे दिए गए हैं:

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1 \\ H_1(\xi) &= 2\xi \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2 \\ H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi \\ H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \\ H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \end{aligned} \tag{8.50}$$

अब हम सिद्ध कर सकते हैं कि इस हैमिल्टोनियन के आइगेनफलन पैरिटी संकारक के भी आइगेनफलन हैं। समीकरणों (8.49) और (8.50) से स्पष्ट है कि n के सम मानों या $n = 0$ के संगत आइगेनफलन सम-पैरिटी के हैं। दूसरी ओर विषम पैरिटी वाले आइगेन-फलनों के लिए n के विषम मान होते हैं। $n = 0, 2$ और 4 के संगत सम-पैरिटी फलनों के x के साथ विचरण चित्र (8.11 क) में दिखाए गए हैं। $n = 1, 3$ और 5 के संगत विषम पैरिटी फलनों को चित्र (8.11 ख) में दिखाया गया है।



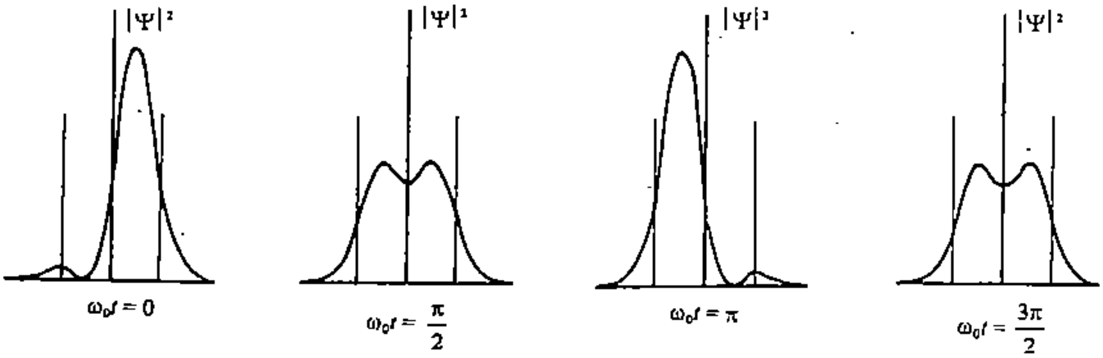
चित्र 8.11 : एक-विमीय सरल आवर्ती दोलक के लिए (क) सम पैरिटी हल और (ख) विषम पैरिटी हल।

आइए, अब हम क्वांटम दोलक की क्लासिकी दोलक से तुलना करें। सबसे पहले समय पर निर्भरता के सवाल को लेते हैं। क्लासिकी तौर पर सरल आवर्ती दोलक इस प्रकार दोलन करता है कि दोलक द्वारा निरूपित कण की स्थिति हरेक क्षण पर बदल जाती है। दूसरी ओर क्वांटम यांत्रिकी हमें बताती है कि ऊर्जा E वाली किसी अवस्था के लिए भले ही विभिन्न स्थितियों पर प्रायिकताओं का बंटन अलग अलग हो, यह बंटन समय पर निर्भर नहीं करता। यह अचर होता है। यानी ये प्रायिकताएं समय में अचर होती हैं। इस बात का यह मतलब है कि ऊर्जा आइगेन अवस्थाएं स्थायी अवस्थाएं हैं। क्या इन दोनों विवरणों की विभिन्नताओं को समझा जा सकता है?

इसे समझने के लिए हमें एक आइगेनफलन की जगह कुछ आइगेनफलनों का अध्यारोपण करके एक तरंग पिटक बनाना होगा। उदाहरण के लिए, दोलक के पहले दो आइगेनफलनों का अध्यारोपण करके हम $\psi(x, t)$ प्राप्त करते हैं

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\exp\left(-i E_0 t / \hbar\right) \psi_0(x) + \exp\left(-i E_1 t / \hbar\right) \psi_1(x)\right]$$

अगर हम $|\psi(x, t)|^2$ का चित्र खींचते हैं तो हमें चित्र 8.12 मिलता है जहाँ समय के चार मानों के लिए ये आरेख दिए गए हैं। स्पष्ट है कि प्रायिकता समय के साथ ठीक उस आवृत्ति से दोलन करती है जो सरल आवर्ती दोलक की आवृत्ति है और यह परिणाम क्लासिकी परिणाम से मिलता-जुलता है। अतः यह तर्कसंगत है कि अगर हम बहुत बड़ी संख्या में दोलक के आइगेनफलनों का अध्यारोपण करें तो हमें क्लासिकी व्यवहार मिलेगा।



चित्र 8.12: दोलक के पहले दो आइगेनफलनों के अध्यारोपण से प्राप्त प्रायिकता जिसे चार विभिन्न समयों पर दिखाया गया है। इन आइगेनफलनों के आयाम बराबर हैं और इनमें इनकी समय निर्भरता शामिल है। चित्र में क्लासिकी दोलक जैसा व्यवहार साफ़ दिखता है। उर्ध्वाधर लाइनें गति की क्लासिकी सीमाएं दिखाती हैं; जहाँ हमने ऊर्जा का मान $E = \langle H \rangle = \hbar\omega$ लिया है।

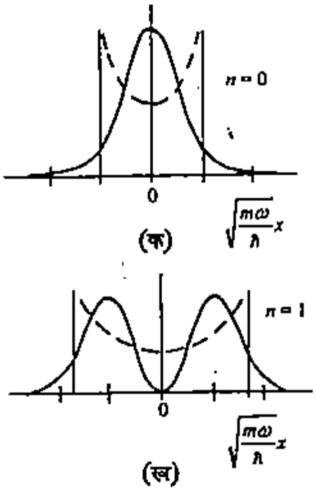
आपको यह साफ़ तौर पर समझ लेना चाहिए कि सरल आवर्ती दोलक का क्वांटमी हल क्लासिकी दोलक से एकदम अलग है। क्लासिकी यांत्रिकी में यह दोलक विभव की सीमाओं से परे यानी वर्तन बिन्दुओं से परे जहाँ कि गतिज ऊर्जा ऋणात्मक हो जाती है, नहीं जा सकता। लेकिन साफ़ है कि क्वांटमी तरंग फलन इस विभव के परे भी शून्य नहीं होते यानी कि इनके दोलक के क्लासिकी तौर पर वर्जित क्षेत्र में भी पाए जाने की परिमित प्रायिकता होती है।

आइए, इस बात को और अच्छी तरह समझने के लिए हम $n = 0$ और $n = 1$ के संगत अवस्थाओं के लिए क्लासिकी और क्वांटम प्रायिकताओं की तुलना करें। क्वांटम प्रायिकताओं की हम आसानी से गणना कर सकते हैं ψ_0 और ψ_1 के वर्ग करके।

द्रव्यमान m और ऊर्जा E वाले एक क्लासिकी सरल आवर्ती दोलक के, जिसका निरूपण समीकरण $x = A \sin \omega t$ से होता है, एक क्षेत्र Δx में पाए जाने की प्रायिकता है:

$$P(x)\,\Delta x = \frac{1}{2\pi A}\,\frac{1}{(1-x^2/A^2)^{1/2}}\,\Delta x$$

जहाँ $A = (2E/m\omega^2)^{1/2}$। जैसी कि हमें आशा थी, क्लासिकी प्रायिकता केवल $-A < x < A$ के लिए ही परिमित होती है। और यह दोलक वर्तन बिन्दुओं के अंदर परिरुद्ध है। लेकिन $x > A$ के लिए यह स्पष्ट है कि स्थितिज ऊर्जा $\frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 > E$ और क्लासिकी तौर पर यह असंभव है।



चित्र 8.13 : आवर्ती दोलक के लिए समान ऊर्जा वाली, $n = 0$ और $n = 1$ के संगत दो अवस्थाओं के लिए क्वांटम (ठोस वक्र) और क्लासिकी (डैशदार वक्र) प्रायिकता घनत्व की तुलना।

चित्र 8.13 (क) और (ख) में $n = 0$ और $n = 1$ के लिए क्वांटम और क्लासिकी प्रायिकताओं की तुलना की गई है। दोनों ही स्थितियों में क्लासिकी तौर पर वर्जित क्षेत्र में क्वांटम प्रायिकता शून्य नहीं होती। $n = 1$ के लिए, क्लासिकी प्रायिकता वर्तन बिन्दुओं पर अधिकतम है लेकिन क्वांटम प्रायिकता साम्यावस्था के बिन्दु पर अधिकतम होती है। विशाल n के लिए क्वांटम यांत्रिकीय प्रायिकता बंटन का औसत, क्लासिकी प्रायिकता वक्र द्वारा दिया जाता है।

आइए, अब हम भौतिक निकायों पर सरल आवर्ती दोलक के अनुप्रयोग के बारे में पढ़ें। यह है द्विपरमाणुक अणु के दोनों परमाणुओं का कंपन।

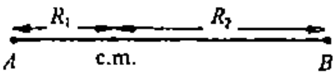
उदाहरण 2 : द्वि-परमाणुक अणु

आइए हम यह मानें कि अणु में स्थित दोनों परमाणु अपनी माध्य अवस्थाओं के इर्द-गिर्द सरल आवर्ती गति करते हैं। इस तरह ये निम्न समीकरणों को संतुष्ट करते हैं:

$$M_1 \frac{d^2 R_1}{dt^2} = -k(R - R_e) \tag{8.51}$$

और

$$M_2 \frac{d^2 R_2}{dt^2} = -k(R - R_e)$$



चित्र 8.14 : द्वि-परमाणुक अणु में दो परमाणुओं A और B का कंपन।

जहाँ R_1 और R_2 उन दोनों परमाणुओं A और B की अपने संहति केन्द्र से दूरी है और $R = R_1 + R_2$ (चित्र 8.14)। इन दोनों परमाणुओं के द्रव्यमान क्रमशः M_1 और M_2 हैं, k बल नियतांक है और साम्यावस्था पर उनके बीच की दूरी R_e है।

अब A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर हमें मिलता है:

$$M_2 \dot{R} = (M_1 + M_2)\,\dot{R}_1 \tag{8.52}$$

समीकरण (8.52) को समीकरण (8.51) में रखने पर हमें मिलता है:

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\frac{d^2 R}{dt^2} = -k(R - R_e) \tag{8.53}$$

या

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\,x \tag{8.54}$$

जहाँ $x = R - R_e$। इस तरह हमने M_1 और M_2 द्रव्यमानों वाले एक द्वि-पिंड निकाय को μ द्रव्यमान वाले एक-पिंड निकाय में बदल दिया है और यह पूरा का पूरा अणु इस प्रकार व्यवहार करता है, मानों वह द्रव्यमान μ (जो कि अणु का समानीत द्रव्यमान है) वाला एक सरल आवर्ती दोलक हो, जिसका बल नियतांक k है। अतः इस अणु के आइगेनफलन और आइगेनमान क्रमशः समीकरण (8.49) और (8.47) से मिलते हैं। ये

समीकरणें वस्तुतः अणुओं के स्पेक्ट्रम को समझने में (ख़ासकर विद्युतचुम्बकीय तरंगों के इन्फ्रारेड क्षेत्र में उत्सर्जित स्पेक्ट्रम को समझने में) काफ़ी लाभदायक रही हैं। प्रायोगिक स्पेक्ट्रम के विश्लेषण से बहुत बड़ी तादाद में अणुओं के बल नियतांकों की गणना की जा सकी है।

अभी तक प्रस्तुत चर्चा को क्या आप किन्हीं ख़ास स्थितियों पर लागू नहीं करना चाहेंगे ? इसके लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न कीजिए।

20 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 7

(क) मान लीजिए कि एक प्रोटॉन एक बद्ध दोलक है जिसकी प्राकृतिक आवृत्ति 3×10^{21} Hz है। उसकी निम्नतम और प्रथम उत्तेजन अवस्था की ऊर्जा क्या होगी ?

(ख) सरल आवर्ती दोलक आइगेनफलनों की मूल (निम्नतम) अवस्था के लिए $\langle x \rangle$ और $\langle p_x \rangle$ के मानों की गणना कीजिए।

अभी तक इस इकाई में आपने जो भी पढ़ा है, अब हम उसका सार यहाँ दे रहे हैं।

8.7 सारांश

इस इकाई में आपने बहुत से सरल एकविम संरक्षी निकायों के लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को हल किया है। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण परिणामों को सार रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

- एक **मुक्त कण** की आइगेनऊर्जा E का, जो एकविम समष्टि में गतिमान है, मान है $\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$। इसका मान संतत होता है और शून्य से अनन्त तक कुछ भी हो सकता है। यानी **मुक्त कण का ऊर्जा स्पेक्ट्रम संतत** होता है। इसके संगत आइगेनफलन होते हैं : $\psi_{\pm k}(x) = A\, e^{\pm ikx}$ और इनका प्रसामान्यीकरण नहीं किया जा सकता। लेकिन अगर कण को एक निश्चित लम्बाई में परिरुद्ध कर दिया जाए तो आइगेनऊर्जाओं के मान विविक्त हो जाते हैं। और बद्ध अवस्था आइगेनफलनों का प्रसामान्यीकरण किया जा सकता है। तरंग का **बक्स प्रसामान्यीकरण** भी किया जा सकता है।

- **एक-विमीय आयताकार विभव रोधिका** के लिए आइगेन ऊर्जाएं 0 से ∞ तक संतत रूप से मान लेती हैं। लेकिन क्लासिकी यांत्रिकी से अलग हटकर रोधिका पर कण के परावर्तन और संचरण की क्वांटम यांत्रिकीय प्रायिकताएं परिमित होती हैं। अतः $E < V_0$ के लिए भी कण, रोधिका का सुरंगन कर सकता है। इसका एक और रोचक परिणाम यह है कि

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\,\hbar\,\pi}{2a}\right)^2 + V_0$$

  के लिए शत-प्रतिशत संचरण होता है और बिल्कुल भी परावर्तन नहीं होता। यहाँ प्रतीकों के वे ही अर्थ हैं, जो पाठ्यक्रम में दिए गए हैं।

- **एक-विमीय विभव कूप** के लिए आइगेनऊर्जा स्पेक्ट्रम के दो हिस्से होते हैं। $E > V_0$ के लिए आइगेनऊर्जा संतत रूप से विचरण करती है। दूसरी ओर $E < V_0$

के लिए, आइगेनऊर्जा के विविक्त मान होते हैं और बद्ध अवस्थाएं प्राप्त होती हैं। निम्नतम आइगेन ऊर्जा शून्य नहीं होती जो कि हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत के मुताबिक ही है। अनुमत बद्ध अवस्थाओं की संख्या V_0 के मान के साथ बढ़ती है और ये आइगेनफलन सम और विषम पैरिटी के होते हैं जिनमें से निम्नतम आइगेनफलन सम पैरिटी का होता है।

- सरल आवर्ती गति करने वाले कण के लिए सभी आइगेन अवस्थाएं बद्ध अवस्थाएं होती हैं और आइगेनऊर्जाएं विविक्त मान लेती हैं। उत्तरोत्तर आइगेनऊर्जा अवस्थाओं के बीच की दूरी एक ही होती है और वह $\hbar\omega$ के बराबर होती है। आइगेनफलन हरमाइट बहुपदों के पदों में दिए जाते हैं और इनकी पैरिटी सुनिश्चित होती है — सम या विषम पैरिटी। निम्नतम आइगेनऊर्जा का परिमित मान वास्तव में अनिश्चितता सिद्धांत का परिणाम है। सरल आवर्ती दोलक के लिए मिले इन परिणामों को द्वि-परमाणुक अणुओं के कम्पनिक स्पेक्ट्रम के अध्ययन में इस्तेमाल किया जा सकता है।

8.8 अंत में कुछ प्रश्न

45 मिनट लगाएं

1. अनन्त वर्ग कूप जिसकी चौड़ाई $2a$ ($-a$ से a) है, में स्थित द्रव्यमान m के एक कण का तरंग फलन है

$$\psi(x) = A \cos \frac{3\pi x}{2a} + B \sin \frac{3\pi x}{2a}$$

A और B के मान निकालें और ऊपर दिए गए आइगेनफलन के संगत आइगेनऊर्जा का मान निकालें।

2. द्रव्यमान m के कण की स्थितिज ऊर्जा का मान है:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad x > 0 \text{ के लिए}$$

$$= \infty \qquad x < 0 \text{ के लिए}$$

सिद्ध कीजिए कि इसकी आइगेन ऊर्जाएं हैं

$$E_{2m+1} = 2\left(m + \frac{3}{4}\right) \hbar\omega, \qquad \text{जहां } m = 0, 1, 2, \ldots$$

3. सिद्ध कीजिए कि nवीं क्वांटम अवस्था में एक सरल आवर्ती दोलक के लिए x का औसत मान शून्य होता है।

4. मूल अवस्था में स्थित सरल आवर्ती दोलक के लिए औसत गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का परिकलन कीजिए।

8.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $p_{op}\, e^{\pm ikx} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\pm ikx} \qquad \left[\because p_{op} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right]$

$$= \frac{-ie^{2\gamma a}(\gamma^2 + k^2) + ie^{-2\gamma a}(\gamma^2 + k^2)}{-ie^{2\gamma a}(k + i\gamma)^2 + ie^{-2\gamma a}(k - i\gamma)^2}$$

$$= \frac{(\gamma^2 + k^2) + (e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma a})}{e^{2\gamma a}(k + i\gamma)^2 - e^{-2\gamma a}(k - i\gamma)^2}$$

$$= \frac{2(\gamma^2 + k^2)\sinh 2\gamma a}{(k^2 - \gamma^2)(e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma a}) + 2ik\gamma(e^{2\gamma a} + e^{-2\gamma a})}$$

$$= \frac{2(\gamma^2 + k^2)\sinh 2\gamma a}{2(k^2 - \gamma^2)\sinh 2\gamma a + 4ik\gamma \cosh 2\gamma a}$$

अब

$$P_r = \left|\frac{B}{A}\right| = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2 2\gamma a}{(k^2 - \gamma^2)^2 \sinh^2 2\gamma a + 4k^2\gamma^2 \cosh^2 2\gamma a}$$

$$= \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2 2\gamma a}{(k^4 + \gamma^4 - 2k^2\gamma^2)\sinh^2 2\gamma a + 4k^2\gamma^2 \cosh^2 2\gamma a}$$

$$= \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2 2\gamma a}{(k^4 + \gamma^4 + 2k^2\gamma^2)\sinh^2 2\gamma a + 4k^2\gamma^2}$$

जहाँ हमने हर में $4k^2\gamma^2 \sinh^2 2\gamma a$ जोड़ा और घटाया है और इस संबंध का इस्तेमाल किया है: $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$

तब

$$P_r = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2 2\gamma a}{(\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2 2\gamma a + 4k^2\gamma^2}$$

अब

$$\gamma^2 + k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E + E) = \frac{2m}{\hbar^2} V_0$$

और

$$\gamma^2 k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E(V_0 - E)$$

अतः

$$P_r = \frac{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a + 4E(V_0 - E)}$$

$$= \left[\frac{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a + 4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}\right]^{-1}$$

P_t का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (7) का इस्तेमाल कर सकते हैं जिससे :

$$\frac{F}{A} = \frac{4e^{-2ika}}{e^{2\gamma a}\left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{i\gamma}{k}\right) + e^{-2\gamma a}\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{i\gamma}{k}\right)}$$

$$= \frac{4e^{-2ika}}{e^{2\gamma a}\left(2 - \frac{ik}{\gamma} + \frac{i\gamma}{k}\right) + e^{-2\gamma a}\left(2 + \frac{ik}{\gamma} - \frac{i\gamma}{k}\right)}$$

$$= \frac{4e^{-2ika}}{4\cosh 2\gamma a + 2i\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k}{\gamma}\right)\sinh 2\gamma a}$$

इस प्रकार,

$$P_t = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4}{4\cosh^2 2\gamma a \left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k}{\gamma}\right)^2 \sinh^2 2\gamma a}$$

$$\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k}{\gamma}\right)^2 = \frac{(\gamma^2 - k^2)^2}{k^2\gamma^2} = \frac{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 (V_0 - E - E)^2}{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 (V_0 - E)E}$$

$$= \frac{(V_0 - 2E)^2}{E(V_0 - E)}$$

अत:

$$P_t = \frac{4E(V_0 - E)}{4\cosh^2 2\gamma a(EV_0 - E^2) + (V_0^2 + 4E^2 - 4V_0E)\sinh^2 2\gamma a}$$

$$= \frac{4E(V_0 - E)}{4EV_0 - 4E^2 + V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}$$

$$= \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}$$

$$= \left[\frac{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 2\gamma a}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1}$$

5. प्रतिबन्ध

$$\frac{1}{\psi_I}\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{x=-a} = \frac{1}{\psi_{II}}\frac{\partial\psi_{II}}{\partial x}\bigg|_{x=-a}$$

से मिलता है:

$$\frac{-\gamma A e^{-\gamma a}}{A e^{-\gamma a}} = \frac{-q\ B \sin qa}{B \cos qa}$$

या

$$-\gamma a = -qa \tan qa$$

या

$$\eta = \xi \tan \xi$$

जहाँ $\eta = \gamma a$ और $\xi = qa$ ।

6. चूंकि $\xi = ax$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = a\frac{d\psi}{d\xi}$$

और

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = a^2\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

इस प्रकार हम समीकरण (8.43) को इस तरह लिख सकते हैं:

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{2m}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{a^2}\xi^2\psi = \frac{\lambda\hbar\omega}{2}\psi(\xi)$$

या $$-\frac{\hbar^2 m\omega}{2m\ \hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\frac{m\omega^2\hbar}{m\omega}\xi^2\psi = \frac{\lambda\hbar\omega}{2}\psi$$

या $$-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{\hbar\omega}{2}\xi^2\psi = \frac{\lambda\hbar\omega}{2}\psi$$

या $$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\ \psi(\xi) = 0$$

7. (क) $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

मूल अवस्था के लिए $n = 0$, $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\nu$

$$= \frac{1}{2} \times 6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js} \times 3 \times 10^{21}\ \text{Hz}$$

$$= 9.939 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

प्रथम उत्तेजन अवस्था $n = 1$ के लिए:

$$E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\nu$$

$$= 3E_0 = 2.982 \times 10^{-12}\ \text{J}$$

(ख) सरल आवर्ती दोलक के मूल अवस्था तरंग फलन के लिए:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi_0^*(x)\ x\ \psi_0(x)\ dx$$

जहाँ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_0(ax) \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right) \text{ चूंकि } H_0(\xi) = 1$$

इस प्रकार,

$$\langle x \rangle = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-a^2 x^2)\, dx$$

यहाँ समाकल्य एक विषम फलन है। अतः इस अंतराल पर समाकल शून्य होगा, इसलिए

$$\langle x \rangle = 0$$

इसी तरह

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x)\, dx$$

$$= -i\hbar \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right)(-a^2 x) \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{ia^3}{\sqrt{\pi}} \hbar \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-a^2 x^2)\, dx$$

एक बार फिर समाकल्य x का विषम फलन है। इसलिए इस अंतराल पर समाकल शून्य होगा।

$$\therefore \langle p_x \rangle = 0$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. चूंकि कूप अनन्त गहराई का है, इसलिए $\psi(+a) = 0$ । अतः $B = 0$। A का मान इस तरह निकाला जा सकता है:

$$A^2 \int_{-a}^{+a} \cos^2\left(\frac{3\pi x}{2}\right) dx = 1$$

या

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

अब कूप के अंदर $V(x) = 0$ और श्रोडिन्गर समीकरण से

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(A \cos\frac{3\pi x}{2a}\right) = +A\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)$$

$$\therefore \quad E = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8m\, a^2}$$

2. यह समस्या सरल आवर्ती दोलक जैसी ही है लेकिन

$$\psi(0) = 0$$

अतः n को विषम होना चाहिए (देखिए समीकरण 8.50)। इसलिए,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \qquad \text{जहां } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$n = 2m + 1$ रखने पर हमें मिलता है:

$$E_{2m+1} = 2 \left(m + \frac{3}{4}\right) \hbar\omega \quad \text{जहां } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

3. $\langle x \rangle = (\psi_n, x\psi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\, x\, \psi_n(x)\, dx$

चूंकि $\psi_n(x)$ सुनिश्चित पैरिटी का है इसलिए यह x का एक विषम या सम फलन है। इसमें से किसी भी स्थिति में $\psi_n^*(x)\, \psi_n(x)$ सम होगा। चूंकि x विषम है, इसलिए समाकल्य x का विषम फलन होगा और इसलिए समाकल शून्य होगा।

4. स्थितिज ऊर्जा का औसत मान है:

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\, \frac{1}{2} kx^2\, \psi_0(x)\, dx$$

$\psi_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{2}\right)$ रखने पर और समाकल की गणना करने पर हमें मिलता है:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \hbar\omega$$

$$\text{चूंकि } E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad \therefore \langle \text{K.E.} \rangle = E_0 - \frac{1}{4} \hbar\omega = \frac{1}{4} \hbar\omega$$

इकाई 9 गोलीय सममिति वाले निकाय : हाइड्रोजन परमाणु

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने कई एकविम निकायों के लिए आइगेनफलनों और आइगेनमानों की गणना की। इस इकाई में हम एक त्रिविम निकाय का अध्ययन करेंगे। इस तरह यहाँ तीन स्वतंत्र चर (कार्तीय निर्देशांक तंत्र में) x, y और z होंगे या गोलीय ध्रुवीय निर्देशांक तंत्र में r, θ, ϕ होंगे। इस प्रकार कण की स्वातंत्र्य कोटि (degrees of freedom) एक से बढ़कर तीन हो जाएंगी। और काल-स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण एक त्रिविम अवकल समीकरण होगी।

आम तौर पर, वह विभव जिसमें कण त्रिविम आकाश में गति करता है, तीन निर्देशाकों का फलन होता है। लेकिन इस इकाई में हम केवल उन्हीं विभवों की चर्चा करेंगे जो त्रिज्य निर्देशांक r पर निर्भर करते हैं और ध्रुवीय निर्देशाकों θ और ϕ पर निर्भर नहीं करते। ऐसे विभवों को **गोलतः सममित (spherically symmetric) विभव** कहा जाता है। और इनके संगत निकायों को **गोलतः सममित निकाय** कहा जाता है।

जब बीसवीं सदी के दूसरे दशक में क्वांटम यांत्रिकी का विकास हुआ तो उसका सबसे पहला और (शायद सबसे महत्वपूर्ण) अनुप्रयोग था – हाइड्रोजन परमाणु और हाइड्रोजन सम (यानी एक संयोजकता इलेक्ट्रॉन वाले) परमाणुओं पर, ताकि उनसे संबद्ध प्रायोगिक आंकड़ों को समझा जा सके। इस इकाई में हमारा मुख्य उद्देश्य होगा – हाइड्रोजन परमाणु के लिए त्रिविम श्रोडिन्गर समीकरण को हल करके उसके स्पेक्ट्रम को समझना। जैसा कि आप जानते हैं, हाइड्रोजन परमाणु में एक प्रोटॉन होता है और प्रोटॉन के कूलॉम विभव में गतिमान एक इलेक्ट्रॉन होता है। नाभिक के कूलॉम विभव में गतिमान इलेक्ट्रॉन की समस्या को क्वांटम यांत्रिकी की केपलर समस्या के नाम से भी जाना जाता है। इसका यथार्थ हल निकाला जा सकता है। अब आप जानते हैं कि दूरी r पर प्रोटॉन का कूलॉम विभव

$-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ होता है। अतः यह विभव गोलीय सममिति रखता है।

इस इकाई में हम हाइड्रोजन परमाणु के लिए त्रिविम श्रोडिन्गर समीकरण को हल करेंगे और हाइड्रोजन परमाणु की स्थायी अवस्थाओं के लिए आइगेनफलन और आइगेन ऊर्जाएं प्राप्त करेंगे।

इस समस्या को हल करते समय जब भी हमें लगेगा कि इसका गणित बहुत मुश्किल हो रहा है, तब हम इस समस्या की गुणात्मक व्याख्या ही करेंगे। हाइड्रोजन परमाणु के लिए हम बद्ध और कन्टिनुअम दोनों अवस्थाओं की चर्चा करेंगे। अपने अध्ययन को और आसान बनाने के लिए सबसे पहले हम गोलीय सममिति वाले विभव में कण की गति की चर्चा करेंगे और फिर उन संकल्पनाओं को हाइड्रोजन परमाणु पर लागू करेंगे। अगली इकाई में हम इस इकाई के परिणामों को हाइड्रोजन सम (hydrogen like) और बहुइलेक्ट्रॉन (multi-electron) परमाणुओं पर लागू करके इनका प्रकाशीय स्पेक्ट्रम समझेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- गोलीय सममिति वाले निकाय के लिए काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को उसके त्रिज्य और कोणीय भागों में पृथक कर पाएंगे,
- यह सिद्ध कर पाएंगे कि ऐसे निकायों के लिए कोणीय संवेग, गति का अचर होता है,
- आकाशी क्वांटमीकरण की संकल्पना को समझा सकेंगे,
- द्वि-कण हाइड्रोजन परमाणु निकाय को दो एक कण निकायों में समानीत कर सकेंगे,
- हाइड्रोजन परमाणु की स्थायी अवस्था के लिए आइगेनफलनों और ऊर्जा आइगेन-मानों की गणना कर सकेंगे,
- हाइड्रोजन परमाणु के स्पेक्ट्रम की व्याख्या कर सकेंगे,
- हाइड्रोजन परमाणु समस्या के लिए गति के अचर और उनके संगत क्वांटम अंकों को बता सकेंगे।

9.2 केन्द्रीय विभव के लिए त्रिविम श्रोडिन्गर समीकरण

आइए एक गोलीय सममिति वाले विभव में द्रव्यमान μ वाले कण की त्रिविम गति को समझें। उसकी स्थायी अवस्था के लिए त्रिविम काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण होती है:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right]\psi(\mathbf{r}) = E\,\psi(\mathbf{r}) \qquad (9.1)$$

जहाँ E कण की कुल ऊर्जा है और $V(r)$ उसकी स्थितिज ऊर्जा। ध्यान दीजिए कि $V(r)$ ध्रुवीय कोण θ और ϕ पर निर्भर नहीं करता। कण पर लग रहा बल $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}$ के अनुदिश है। इसलिए क्लासिकी तौर पर कण पर लग रहा बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ के बराबर है। चूंकि $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ एक ही दिशा में हैं, इसलिए $|\boldsymbol{\tau}|$ का मान शून्य होगा। साथ ही साथ क्योंकि बल आघूर्ण कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ के परिवर्तन की दर के बराबर है इसलिए

एक गोलीय सममिति वाले विभव के अधीन गतिमान कण का कोणीय संवेग समय के साथ नहीं बदलेगा। इस तरह उस कण के लिए कोणीय संवेग गति का अचर होगा। यहाँ याद करें कि आपने इस समस्या को भौतिकी के पाठ्यक्रम. पी.एच.ई.-01 की इकाई 6 में क्लासिकी भौतिकी के लिए हल किया है और सूर्य के चारों ओर गतिमान ग्रहों के लिए उनकी कक्षाओं के समीकरण प्राप्त किए हैं।

लेकिन, **L** के अचर होने का मतलब यह है कि उसके तीनों घटक L_x, L_y और L_z एक साथ अचर होंगे। क्वांटम यांत्रिकी में यह संभव नहीं है क्योंकि **L** के तीनों घटक एक-दूसरे से कम्यूट नहीं करते (देखें इकाई 7)। इस तरह कोणीय संवेग की क्लासिकी और क्वांटम अवधारणाओं में फ़र्क है। क्लासिकी यांत्रिकी की तरह कोणीय संवेग को बल आघूर्ण से संबंधित करने के बजाय क्वांटम यांत्रिकी में हम पाते हैं कि हैमिल्टोनियन को इस तरह लिखा जा सकता है कि वह केवल कोणीय संवेग पर निर्भर करता है। क्वांटम यांत्रिकी में कोणीय संवेग की अवधारणा इसी तरह लायी जाती है।

आइए, देखें कि ऐसा कैसे किया जाता है। पी.एच.ई.-04 की इकाई 3 से आप जानते हैं कि गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में ∇^2 का व्यंजक होता है:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

समीकरण (9.1) में ∇^2 का यह व्यंजक रखने पर हमें मिलता है:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r))r^2\right]\psi$$

$$= -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi \qquad (9.2)$$

समीकरण (9.2) से यह समझ में आता है कि $\psi(r, \theta, \phi)$ का r, θ, ϕ में इस तरह पृथक्करण किया जा सकता है:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\, Y(\theta, \phi) \qquad (9.3)$$

समीकरण (9.2) में समीकरण (9.3) रखने पर और चर पृथक्करण विधि (देखिए पी.एच.ई.-05 की इकाई 6) का प्रयोग करने पर हमें निम्न दो समीकरण मिलते हैं:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \left\{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{K}{r^2}\right\}R(r) = 0 \qquad (9.4)$$

और

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2} = -KY(\theta,\phi) \qquad (9.5)$$

जहाँ K एक अचर है। अब हम यह दिखा सकते हैं कि गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में संकारकों L^2 और L_z के व्यंजक हैं:

आगे पढ़ने से पहले आप जल्दी से समीकरण (9.4) और (9.5) की जांच कर लें।

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad (9.6\text{ क})$$

$$L_z = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (9.6\text{ ख})$$

वस्तुतः शायद आप यह अभ्यास खुद ही करना चाहेंगे। इसके लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1

15 मिनट लगाएं

(क) समीकरण (9.6 क) और (9.6 ख) को सिद्ध कीजिए।

(ख) सिद्ध करें कि L^2 और L_z हैमिल्टोनियन के साथ कम्यूट करते हैं।

नोटः हम इस परिणाम का इस इकाई के भाग 9.2.1 में प्रयोग करेंगे।

समीकरण (9.6 क) का इस्तेमाल करके हम समीकरण (9.5) को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$L^2\, Y(\theta, \phi) = K\hbar^2\, Y(\theta, \phi) \tag{9.7}$$

इस प्रकार $Y(\theta, \phi)$ संकारक L^2 का आइगेन फलन है और इसका आइगेन मान $K\hbar^2$ है। आइए, अब हम फलनों $Y(\theta, \phi)$ के बारे में कुछ विस्तार से जानें।

9.2.1 कोणीय संवेग संकारक के आइगेनफलन और आइगेनमान

आइए हम समीकरण (9.7) के संगत आइगेनमान निकालें और $Y(\theta, \phi)$ का व्यंजक निर्धारित करें। समीकरण (9.7) से आप देख सकते हैं कि $Y(\theta, \phi)$ संकारक L^2 का आइगेनफलन है और उसका संगत आइगेनमान $K\hbar^2$ है। साथ ही साथ आप बोध प्रश्न 1 में यह सिद्ध कर चुके हैं कि L^2 कण के हैमिल्टोनियन से कम्यूट करता है।

$$[L^2, H] = 0 \tag{9.8 क}$$

अब आप इकाई 7 के समीकरण (7.32 ख) को याद कीजिए। अगर उस समीकरण में $[D, H] = 0$ तो $\dfrac{d\langle D\rangle}{dt} = 0$ यानी $\langle D\rangle$ अचर होता है। इस परिणाम को कोणीय संवेग के वर्ग (L^2) पर लागू करने पर हमें मिलता हैः

$$\langle L^2 \rangle = \text{अचर} \tag{9.8 ख}$$

यानी कोणीय संवेग का वर्ग एक केन्द्रीय विभव के लिए गति का अचर होता है।

हम $Y(\theta, \phi)$ की गणना θ और ϕ चरों को पृथक करके इस तरह से कर सकते हैं

$$Y(\theta, \phi) = P(\theta)\, \Phi(\phi) \tag{9.9 क}$$

समीकरण (9.7) में समीकरण (9.9 क) और समीकरण (9.6 क) रखने पर और चर पृथक्करण विधि का इस्तेमाल करने पर हमें मिलता हैः

$$\left[\frac{\sin\theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + K \sin^2\theta\right] = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \tag{9.9 ख}$$

समीकरण (9.9 ख) से पता चलता है कि दोनों ही पक्ष एक ही अचर, माना m_l^2 के बराबर हैं। इसलिए, हम लिख सकते हैंः

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \tag{9.10}$$

और इसका हल हैः

$$\Phi(\phi) = e^{im_l\phi} \tag{9.11}$$

अब, $\Phi(\phi)$ को एकलमानी होना चाहिए। अतः

$$e^{im_l\phi} = e^{im_l(\phi + 2\pi)} \tag{9.12}$$

क्योंकि कोण $\phi = 0$ और $\phi = 2\pi$ दरअसल एक ही हैं। इसलिए m_l को पूर्णांक ही होना चाहिए। समीकरण (9.6 ख) के संकारक L_z की फलन $e^{im_l\phi}$ पर संक्रिया करा कर हमें मिलता है:

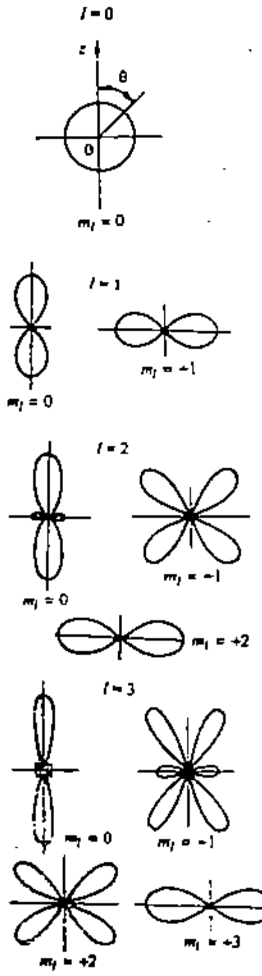
$$\boxed{L_z e^{im_l\phi} = m_l \hbar\, e^{im_l\phi}} \tag{9.13}$$

इस प्रकार, $e^{im_l\phi}$ संकारक L_z का आइगेन फलन है और उसका आइगेन मान $m_l\hbar$ है।

$P(\theta)$ के लिए अवकल समीकरण होती है:

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + KP(\theta)\sin^2\theta = m_l^2\, P(\theta) \tag{9.14}$$

समीकरण (9.14) को हल किया जा सकता है। लेकिन यह प्रक्रिया काफ़ी लम्बी है और इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर है। इसलिए हम यहाँ केवल परिणामों को लिखेंगे और उनकी गुणात्मक व्याख्या करेंगे। अगर हम अचर K को $l(l + 1)$ के बराबर ले लें तो यह पाते हैं कि समीकरण (9.14) के क्वांटम यांत्रिकीय तौर पर मान्य हल तभी प्राप्त होते हैं जबकि अचर l का मान नीचे दिए गए किसी पूर्णांक के बराबर हो:



चित्र 9.1 : l और m_l के कुछ मानों के लिए $|Y_{l,m_l}(\theta,\phi)|^2$ के ध्रुवीय आरेख।

$$l = |m_l|, |m_l| + 1, |m_l| + 2, \ldots \tag{9.15}$$

वैकल्पिक तौर पर हम यह भी कह सकते हैं कि किसी दिए हुए पूर्णांक l के लिए m_l के निम्न $(2l + 1)$ मान होंगे:

$$-l, -l + 1, -l + 2, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l \tag{9.16}$$

तब मान्य हल इस प्रकार होते हैं:

$$P_l^{|m_l|}(\theta) = \sin^{|m_l|}(\theta)\, F_{l,|m_l|}(\cos\theta) \tag{9.17}$$

जहाँ $F_{l,|m_l|}(\cos\theta)$, $\cos\theta$ में बहुपद हैं और इन्हें सहचारी लेजान्द्रे बहुपद (associated Legendre polynomials) कहा जाता है। इस प्रकार, समीकरण (9.9 क) में समीकरण (9.11) और (9.17) रखने पर हमें L^2 के आइगेनफलन प्राप्त होते हैं:

$$Y_{l,m_l}(\theta,\phi) = P_l^{|m_l|}(\theta)\, e^{im_l\phi} \tag{9.18}$$

समीकरण (9.18) द्वारा दिए गए फलनों को गोलीय हारमोनिक (spherical harmonics) कहते हैं। समीकरण (9.7) में $K = l(l + 1)$ रखने पर, आप देख सकते हैं कि वे संकारक L^2 के आइगेनफलन हैं और उनके आइगेनमान हैं $l(l + 1)\hbar^2$:

$$\boxed{L^2\, Y_{l,m_l}(\theta,\phi) = l(l + 1)\,\hbar^2\, Y_{l,m_l}(\theta,\phi)} \tag{9.19}$$

इस तरह, एक ही l लेकिन अलग-अलग m_l ($-l$ से l तक) के मानों के लिए $(2l + 1)$ आइगेनफलन $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ के एक ही आइगेनमान होते हैं। इसलिए हम कह सकते हैं कि ये आइगेनफलन अपभ्रष्ट आइगेनफलन हैं। ये फलन गोलीय सममिति वाले विभवों में गतिमान सभी कणों के स्थायी अवस्था आइगेनफलनों के कोणीय भाग को निर्धारित करते हैं। वे एक लाम्बिक समुच्चय बनाते हैं जैसाकि इकाई 7 के भाग 7.3 में समझाया गया है। और θ और ϕ के किसी भी फलन को $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ हम $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ के कुछ निम्न कोटि फलनों के व्यंजक दे रहे हैं:

$$Y_{00} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{20} = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1) \qquad (9.20)$$

$$Y_{2,\pm1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta \, e^{\pm i\phi}$$

और

$$Y_{2,\pm2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta \, e^{\pm i2\phi}$$

इनमें से कुछ फलनों के वर्ग जो कि हाइड्रोजन परमाणु के तरंग फलन के कोणीय भाग को भी निरूपित करते हैं चित्र 9.1 में दिखाए गए हैं। अब आप अभी तक प्रस्तुत संकल्पनाओं पर आधारित कुछ सवाल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 2 — 10 मिनट लगाएं

(क) सिद्ध कीजिए कि $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$, L_z का [illegible] फलन है। इसके आइगेनमानों का निर्धारण कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि Y_{l,m_l} प्रसामान्यीकृत [illegible] के लाम्बिक है।

आगे पढ़ने से पहले हमारे लिए गोलीय हार्मोनिक फलनों की पैरिटी को समझना भी ठीक रहेगा। इसके लिए हम $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ का मूल बिन्दु के प्रति परावर्तन करते हैं। इस परावर्तन में θ का मान बदलकर $\pi-\theta$ हो जाता है और ϕ का मान बदलकर $\pi+\phi$ हो जाता है। अब

$$e^{im_l(\pi+\phi)} = (-1)^{m_l} e^{im_l\phi} \qquad (9.21\text{ क})$$

साथ ही साथ $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ और $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$। अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$P_l^{|m_l|}(\pi-\theta) = (-1)^{l-|m_l|} P_l^{|m_l|}(\theta) \qquad (9.21\text{ ख})$$

यानी कि $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ की पैरिटी $(-1)^{l-|m_l|+|m_l|}$ होती है, जो $(-1)^l$ के बराबर है। हम इन संकल्पनाओं का प्रयोग इस इकाई के बाद के भागों में करेंगे।

बोध प्रश्न 3 — 2 मिनट लगाएं

समीकरण (9.20) में दिए गए व्यंजक को इस्तेमाल करके जाँच कीजिए कि $Y_{2,1}(\theta,\phi)$ सम पैरिटी के फलन हैं।

संक्षेप में अभी तक हमने एक गोलीय सममिति वाले विभव में गतिमान कण की स्थायी अवस्थाओं के कोणीय भाग का व्यंजक प्राप्त किया है। यह और कुछ नहीं बल्कि कोणीय संवेग संकारक L^2 के आइगेनफलन हैं। उनकी ठीक-ठीक θ और ϕ पर निर्भरता गोलीय हारमोनिक फलनों द्वारा दी जाती है। संकारक L^2 के आइगेनमान $l(l+1)\hbar^2$ हैं जहाँ l के विविक्त पूर्णांकी मान होते हैं जो समीकरण (9.15) द्वारा दिए गए हैं।

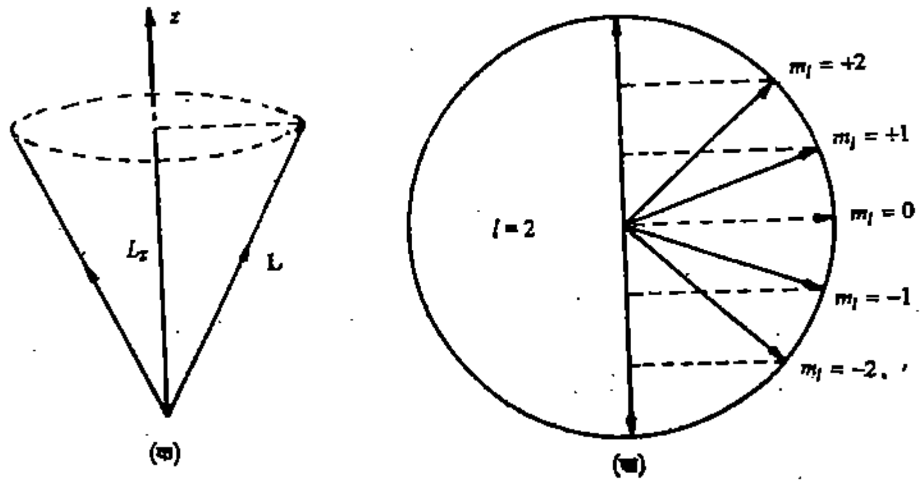
आइए अब समझें कि इन परिणामों का भौतिक अर्थ क्या है। इनसे हमें आकाशी क्वांटमीकरण (space quantization) की संकल्पना मिलती है।

9.2.2 आकाशी क्वांटमीकरण

बोध प्रश्न 2(क) में आप सिद्ध कर चुके हैं कि गोलीय हारमोनिक $Y_{l,\,m_l}(\theta, \phi)$, L_z के आइगेनफलन हैं और उनके आइगेनमान हैं $m_l\hbar$ । इस प्रकार हम एक साथ L^2 और L_z के ठीक-ठीक मान निर्धारित कर सकते हैं। लेकिन अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार क्योंकि L_x, L_y और L_z के मान एक साथ निर्धारित नहीं किए जा सकते, इसलिए L_x और L_y के मान अनिश्चित होंगे। इस तरह क्लासिकी भौतिकी की तुलना में क्वांटम यांत्रिकी में कोणीय संवेग की संकल्पना के लिए कुछ अलग किस्म के परिणाम मिलते हैं।

क्लासिकी भौतिकी में कोणीय संवेग के एक ही परिमाण के लिए हम कोणीय संवेग सदिश की दिशा बदलकर अनन्त अवस्थाएं प्राप्त कर सकते हैं। लेकिन क्वांटम यांत्रिकी में कोणीय संवेग के हर मान के लिए अवस्थाओं की एक परिमित संख्या होती है जो l और m_l के मानों से निर्धारित होती है। साथ ही साथ क्वांटम यांत्रिकी में तीन में से दो दिशाओं में $\mathbf{L}$ के घटक अनिश्चित होते हैं। इस कारण से हम किसी अवस्था का वर्णन उसके कोणीय संवेग सदिश की दिशा निर्धारित करके नहीं कर सकते। इसके बजाय हम कोणीय संवेग का एक निश्चित दिशा में घटक निर्दिष्ट करके किसी अवस्था का विवरण देते हैं। इस दिशा को हम आसानी के लिए z-अक्ष के अनुदिश ले लेते हैं। अब हम इस स्थिति की परिकल्पना कैसे करें ?

इन क्वांटम यांत्रिकीय परिणामों को अभिव्यक्त करने के लिए एक बहुत ही उपयोगी तरीका है जिसे हम कोणीय संवेग का **सदिश मॉडल** (vector model) कहते हैं। इस मॉडल में हम गतिमान कण के कोणीय संवेग को एक सदिश $\mathbf{L}$ द्वारा निरूपित करते हैं, जिसकी लम्बाई $[l(l+1)]^{1/2}$ होती है। कोणीय संवेग सदिश z-अक्ष के इर्द-गिर्द इस तरह से पुरस्सरण (precession) करता है कि $\mathbf{L}$ का परिमाण (यानी L^2 का मान) और $\mathbf{L}$ का z-अक्ष पर प्रक्षेप यानी L_z अचर हों (देखें चित्र 9.2 क)।



(क) (ख)

चित्र 9.2 : (क) z-अक्ष के इर्द-गिर्द $\mathbf{L}$ का पुरस्सरण; (ख) $l = 2$ के लिए आकाशी क्वांटमीकरण। वृत्त की त्रिज्या $[2(2+1)]^{1/2}$ है। अवस्थाओं की बहुकता (multiplicity) 5 है।

चूंकि l के एक दिए मान के लिए, L_z के आइगेनमान $m_l\hbar$ हैं, जहाँ m_l के ($-l$ से $+l$ तक) पूर्णांक मान हैं, इसलिए z-अक्ष के अनुदिश $\mathbf{L}$ का घटक क्वांटमीकृत होता है। L_z के मापन से हमें केवल $2l + 1$ क्वांटमीकृत मान मिलेंगे जिनमें $l \neq 0$ के लिए, अधिकतम मान l सदिश $\mathbf{L}$ के परिमाण से कम होगा। साथ ही साथ सदिश $\mathbf{L}$, z-अक्ष के साथ कुछ निश्चित क्वांटमीकृत कोण ही बना सकता है। $\mathbf{L}$ और L_z के बीच के इस कोण θ के कुछ विविक्त मान ही हो सकते हैं जो कि निम्न व्यंजक से दिए जाते हैं:

$$\cos \theta = \frac{m_l}{[l(l+1)]^{1/2}} \qquad (9.22)$$

निर्देशांक अक्षों में से एक अक्ष के सापेक्ष **L** की दिशा का क्वांटमीकरण आकाशी क्वांटमीकरण कहलाता है। चूंकि $|m_l|$ हमेशा ही $l(l+1)$ से कम होता है (सिवाय $l = 0$ के), इसलिए सदिश **L** कभी भी z-अक्ष के अनुदिश नहीं हो सकता। $l = 2$ के लिए, m_l के मान हैं 2, 1, 0, –1, और –2 जैसाकि चित्र 9.2 ख में दिखाया गया है। साथ ही साथ भले ही L_x और L_y अनिश्चित हैं, क्योंकि $L_x^2 + L_y^2$, $L^2 - L_z^2$ के बराबर है इसलिए इसके मान शून्य से अलग होंगे जब तक $l = 0$ न हो। लेकिन L_x और L_y के मान क्वांटमीकृत नहीं हैं। इस प्रकार हम कोणीय संवेग सदिश का यह चित्र खींच सकते हैं कि उसकी दिशा xy तल में सभी संभव दिशाओं में हो सकती है।

इस प्रकार तरंग फलन के कोणीय भाग का विश्लेषण करके और उसका भौतिक अर्थ समझने के बाद, आइए हम इस गोलीय सममिति वाले विभव के आइगेनफलन के त्रिज्य भाग की चर्चा करें।

9.2.3 त्रिज्य आइगेनफलन

समीकरण (9.4) में $K = l(l+1)$ रखने पर, हमें त्रिज्य फलन $R(r)$ का अवकल समीकरण मिलता है:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right) + \left\{V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right\} R(r) = E\,R(r) \qquad (9.23\text{ क})$$

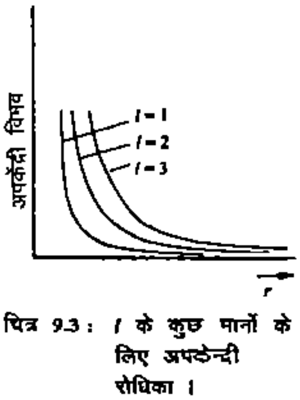
यह त्रिज्य आइगेनफलन $R(r)$ के लिए एकविम आइगेनमान समीकरण है। इसका वास्तविक हल स्थितिज ऊर्जा फलन $V(r)$ की प्रकृति पर निर्भर करता है। लेकिन कण की **प्रभावी** स्थितिज ऊर्जा है:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \qquad (9.23\text{ ख})$$

इस प्रकार, इस समीकरण में एक अतिरिक्त पद $l(l+1)\,\hbar^2/2\mu r^2$ है, जो कि एक प्रतिकर्षण स्थितिज ऊर्जा के समतुल्य है जो l के साथ बढ़ती है (देखिए चित्र 9.3)। आप देख सकते हैं कि इस पद के कारण कण के बल केन्द्र के नज़दीक पाए जाने की प्रायिकता घट जाती है। इसे **अपकेन्द्र स्थितिज ऊर्जा** या **अपकेन्द्र रोधिका** (centrifugal barrier) भी कहते हैं।

इस अपकेन्द्र पद की उपस्थिति को क्लासिकी संगतता के आधार पर इस तरह समझा जा सकता है। क्लासिकी तौर पर द्रव्यमान μ वाले एक कण के लिए जो त्रिज्या r की वर्तुल कक्षा में गतिमान है, उस पर त्रिज्यतः बाहर की ओर एक अपकेन्द्र बल लगता है। इस बल का परिमाण $\mu v^2/r = L^2/\mu r^3$ है, जहाँ वर्तुल कक्षा के लिए $L = \mu v r$। इस बल के संगत विभव है $L^2/2\mu r^2$ (चूंकि $F = -\partial V/\partial r$)। क्वांटम यांत्रिकी में हमें L^2 के स्थान पर इसका आइगेनमान $l(l+1)\hbar^2$ रखना होता है। इस तरह हमें अपकेन्द्र विभव का क्वांटम यांत्रिकीय व्यंजक मिलता है।

बद्ध कणों के लिए (जैसा कि सरल आवर्ती दोलक के लिए होता है) E के मान (आइगेन-मान) विविक्त होते हैं। अन्यथा E के संतत मान होते हैं। लेकिन $V(r)$ का जो भी स्वरूप हो, जब तक वह गोलीय सममिति रखता है, तब तक कण के आइगेनफलन का कोणीय भाग गोलीय हारमोनिक द्वारा ही दिया जाता है।



चित्र 9.3 : l के कुछ मानों के लिए अपकेन्द्री रोधिका।

अगले भाग में हम $V(r)$ को कूलॉम स्थितिज ऊर्जा के रूप में लेंगे जो कि एक हाइड्रोजन परमाणु के संगत है और फिर हम हाइड्रोजन परमाणु के आइगेनफलनों और आइगेनमानों को निकालेंगे।

9.3 हाइड्रोजन परमाणु

आइए, हम एक त्रिविम क्वांटम यांत्रिकीय निकाय के उदाहरण के रूप में हाइड्रोजन

परमाणु को लें। जैसाकि आप जानते हैं हाइड्रोजन परमाणु में एक प्रोटॉन और एक इलेक्ट्रॉन होता है। इस तरह यह एक द्वि-कण निकाय है। एक केन्द्रीय बल क्षेत्र में द्वि-कण गति के लिए हैमिल्टोनियन का स्वरूप होता है:

$$H = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \qquad (9.24\text{ क})$$

इस तरह, हाइड्रोजन परमाणु की स्थायी अवस्थाएं निम्नलिखित काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण के हल हैं:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right]\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E_T\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \qquad (9.24\text{ ख})$$

जहाँ M और m क्रमशः प्रोटॉन और इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान हैं। $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ मूल बिन्दु O के सापेक्ष क्रमशः प्रोटॉन और इलेक्ट्रॉन के निर्देशांक हैं। E_T निकाय की कुल ऊर्जा है, और ε_0 विद्युतशीलता नियतांक है। इस तरह हमें आइगेनफलन $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ और आइगेन-मान E_T का मान निकालने के लिए एक षट्विम (six-dimensional) अवकल समीकरण को हल करना होता है।

लेकिन हम इस समीकरण को दो त्रिविम समीकरणों में इस तरह समानीत कर सकते हैं।

मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ परमाणु के संहति केन्द्र का निर्देशांक है। तब

$$\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m} \qquad (9.25)$$

प्रोटॉन और इलेक्ट्रॉन के बीच की दूरी होती है:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad (9.26)$$

$\mathbf{R}$ और $\mathbf{r}$ के पदों में $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ को हल करने पर हमें मिलता है:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m}{M + m}\mathbf{r} \qquad (9.27)$$

और

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{M}{M + m}\mathbf{r} \qquad (9.28)$$

अब आप जानते हैं कि :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}$$

जहाँ x_1, X और x क्रमशः $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{R}$ और $\mathbf{r}$ के x निर्देशांक हैं। अतः x घटक के लिए समीकरणों (9.25) – (9.27) से हमें मिलता है

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{M}{m + M}\frac{\partial\psi}{\partial X} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (9.29)$$

इस तरह, ∇_1 और ∇ के त्रिविम व्यंजक होंगे:

$$\nabla_1 = \frac{M}{m + M}\nabla_{\mathbf{R}} + \nabla \qquad (9.30)$$

जहाँ

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (9.31)$$

और (x_1, y_1, z_1), (x, y, z) और (X, Y, Z) क्रमशः $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{R}$ के घटक हैं। इसी तरह समीकरण (9.28) से हमें मिलता है:

$$\nabla_2 = \frac{m}{m+M}\nabla_{\mathbf{R}} - \nabla \qquad (9.32)$$

समीकरण (9.30) और (9.32) से:

$$\nabla_1^2 = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \nabla_{\mathbf{R}}^2 + 2\left(\frac{M}{m+M}\right)\nabla_{\mathbf{R}}\cdot\nabla + \nabla^2 \qquad (9.33\ \text{क})$$

और

$$\nabla_2^2 = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \nabla_{\mathbf{R}}^2 - 2\left(\frac{m}{m+M}\right)\nabla_{\mathbf{R}}\cdot\nabla + \nabla^2 \qquad (9.33\ \text{ख})$$

समीकरण (9.33 क और ख) से ∇_1^2 और ∇_2^2 के व्यंजकों को समीकरण (9.24 ख) में रखने पर हमें मिलता है:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(M+m)}\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right]\psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = E_T\psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) \qquad (9.34)$$

जहाँ आसानी के लिए हमने $e^2/4\pi\varepsilon_0$ की जगह e^2 ही रखा है,

जहाँ $e^2 = 2.31 \times 10^{-28}$ Jm.

समीकरण (9.34) को $\mathbf{R}$ और $\mathbf{r}$ में पृथक किया जा सकता है। इसके लिए हम लेते हैं:

$$\psi(\mathbf{R},\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}) \qquad (9.35)$$

तब $\phi(\mathbf{R})$ और $\psi(\mathbf{r})$ क्रमशः निम्नलिखित त्रिविम अवकल समीकरणों के हल हैं:

$$-\frac{\hbar^2}{2(m+M)}\nabla_{\mathbf{R}}^2\phi(\mathbf{R}) = E_H\phi(\mathbf{R}) \qquad (9.36)$$

और

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{r}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \qquad (9.37\ \text{क})$$

जहां

$$\mu = \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^{-1} \qquad (9.37\ \text{ख})$$

और

$$E_T = E + E_H \qquad (9.37\ \text{ग})$$

जैसा कि आप जानते हैं कि μ निकाय का **समानीत द्रव्यमान** है।

समीकरण (9.36) दिखाता है कि द्रव्यमान $m + M$ का एक कण (जो कि हाइड्रोजन परमाणु का कुल द्रव्यमान है) त्रिविम आकाश में मुक्त रूप से गतिमान है और उसकी

कुल ऊर्जा E_H है जहाँ स्थितिज ऊर्जा शून्य है। इस समस्या को आपने भाग 8.2 में हल किया हुआ है। इसके आइगेनफलन निम्नलिखित समतल तरंगों द्वारा दिए जाते हैं:

$$\phi(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \tag{9.38}$$

जहां

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2(m+M)} = E_H \tag{9.39}$$

आइगेनमान E_H और संगत क्वांटम अंक K के संतत मान होते हैं।

दूसरी ओर समीकरण (9.37 क) द्रव्यमान μ वाले एक कण की गति का वर्णन करता है जिसकी एक स्थिर केन्द्र के सापेक्ष स्थितिज ऊर्जा $-e^2/r$ है। इस तरह ऊपर दी गई प्रक्रिया की मदद से हमने एक द्वि-कण निकाय को दो एक-कण निकायों में समानीत किया है जिनमें से एक का द्रव्यमान $(m+M)$ है जो मुक्त रूप से आकाश में गतिमान है और दूसरे का द्रव्यमान μ और आवेश e है जो एक आकर्षक विभव $-e^2/r$ के अधीन गति करता है। यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि वर्तमान मॉडल में एक-दूसरे के सापेक्ष इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन की गति को द्रव्यमान μ वाले एक कण की एक स्थिर बल केन्द्र के सापेक्ष गति से प्रतिस्थापित कर दिया गया है।

अब समीकरण (9.37 क) ठीक समीकरण (9.1) जैसा ही है जिसमें $V(r) = -e^2/r$ रखा गया है। अतः द्रव्यमान μ वाले कण के आइगेनफलन, जो कि हाइड्रोजन परमाणु के भी आइगेनफलन हैं, इस प्रकार दिए जाते हैं:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\, Y_{l,\, m_l}(\theta, \phi) \tag{9.40}$$

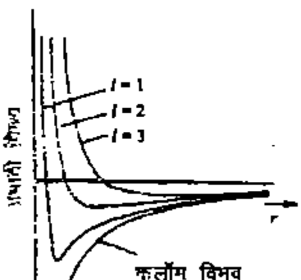
त्रिज्य फलन $R(r)$, निम्नलिखित एकविम अवकल समीकरण का हल है

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left\{-\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R(r) = E\,R(r) \tag{9.41}$$

यह समीकरण, समीकरण (9.23 क) से प्राप्त की गई है, जहाँ $V(r) = -e^2/r$ रखा गया है। इस स्थिति में प्रभावी स्थितिज ऊर्जा है:

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$$

इसे चित्र 9.4 में दिखाया गया है।



चित्र 9.4: l के कुछ मानों के लिए कूलॉम विभव और प्रभावी विभव। इसकी तुलना चित्र 9.3 से कीजिए।

चित्र 9.4 से आप देख सकते हैं कि मूल बिन्दु के निकट $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$, $-e^2/r$ से बहुत बड़ा है। अब हम समीकरण (9.41) के विस्तृत गणितीय हल में जाए बिना कुछ परिणामों को पेश करेंगे। हम पाते हैं कि E के परिमित मानों के लिए मूल बिन्दु के निकट समीकरण (9.41) का हल होता है $R(r) = cr^l$ जहाँ c एक अचर है। साथ ही साथ r के बड़े मानों के लिए, $V(r)$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और अवकल समीकरण निम्नलिखित समीकरण में समानीत हो जाती है :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}R(r) \tag{9.42}$$

अब हम ऊर्जा E का शून्य उस अवस्था के बराबर लेते हैं जबकि हाइड्रोजन परमाणु का आयनीकरण हो चुका होता है लेकिन हाइड्रोजन परमाणु के मुक्त इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। तब हाइड्रोजन परमाणु की बद्ध आइगेन अवस्थाओं की ऋणात्मक कुल ऊर्जा होती है क्योंकि द्रव्यमान μ वाले कण की धनात्मक गतिज ऊर्जा ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा के परिमाण से कम होती है। दूसरी ओर हाइड्रोजन परमाणु की मुक्त आइगेन अवस्थाओं की धनात्मक ऊर्जा E होती है। बद्ध अवस्थाओं के लिए $E < 0$ और हम $E = -|E|$ रखते हैं जिससे कि समीकरण (9.42) का हल हो जाता है:

$$R(r) = c_2 \exp\left[-\left(-\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/2} r\right] \qquad (9.43)$$

चूंकि E ऋणात्मक है इसलिए त्रिज्य तरंग फलन, r के बड़े मानों के लिए चरघातांकी रूप से घटता है। r के मध्यवर्ती मानों के लिए $R(r)$ के हल को घात श्रेणी विधि से निकाला जा सकता है लेकिन यहाँ पर हम सिर्फ़ अंतिम परिणाम ही देंगे। जैसा कि आपने ध्यान दिया होगा अन्य निकायों की बद्ध अवस्थाओं के लिए (जैसे सरल आवर्ती दोलक के लिए) $R(r)$ के मान्य हलों का अस्तित्व E के विविक्त मानों के लिए ही होता है और हाइड्रोजन परमाणु के लिए ये विविक्त मान इस व्यंजक द्वारा दिए जाते हैं:

$$E_n = -\frac{\mu}{2\hbar^2}\frac{e^4}{n^2} \qquad (9.44)$$

जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है और l के एक दिए मान के लिए इसका मान होता है:

$$n = l+1, l+2, l+3, \ldots \qquad (9.45)$$

इस प्रकार, हम पाते हैं कि त्रिज्य आइगेनफलन n और l दोनों पर निर्भर करते हैं और इनके मान होते हैं:

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^l G_{nl}(r/a_0) \qquad (9.46)$$

जहाँ $G_{nl}(r/a_0)$ सहचारी लागेर बहुपद (associated Laguerre polynomials) हैं और N_{nl} प्रसामान्यीकरण नियतांक है। प्राचल a_0 का मान होता है:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \qquad (9.47)$$

यहाँ ध्यान देने वाली बात है कि a_0, बोर द्वारा दिए गए हाइड्रोजन परमाणु के मॉडल में इलेक्ट्रॉन की पहली कक्षा की त्रिज्या है अगर μ की जगह हम इलेक्ट्रॉन का विराम द्रव्यमान m रख दें। चूंकि m और μ का अनुपात ($m/\mu \sim 1.0005$) 1 के बहुत नज़दीक है, इसलिए हम a_0 को प्रथम बोर त्रिज्या के बराबर ले लेते हैं और इसका मान होता है 0.529×10^{-10} m। इसी सन्निकटन के अधीन आइगेन ऊर्जा E_n का मान होता है:

$$\boxed{E_n = -\frac{R}{n^2} \quad \text{जहाँ} \quad R = \frac{me^4}{2\hbar^2}} \qquad (9.48)$$

जैसाकि आप जानते हैं, R रिडबर्ग नियतांक है।

अब आप थोड़ी देर रुक कर इन संकल्पनाओं की जांच करना चाहेंगे। इसके लिए एक आसान सा अभ्यास भी करें।

बोध प्रश्न 4 — 5 मिनट लगाएं

इलेक्ट्रॉन वोल्ट और m^{-1} की इकाइयों में रिडबर्ग नियतांक का मान निकालिए।

हाइड्रोजन परमाणु के कुछ निम्न कोटि त्रिज्य आइगेनफलनों के मान इस प्रकार हैं:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \qquad (9.49\text{ क})$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \qquad (9.49\text{ ख})$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0 \sqrt{3}} e^{-r/2a_0} \qquad (9.49 \text{ ग})$$

$$R_{30}(r) = \left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2} 2\left[1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27\, a_0^2}\right] e^{-r/3a_0} \qquad (9.49 \text{ घ})$$

$$R_{31}(r) = \left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6\, a_0}\right) e^{-r/3a_0} \qquad (9.49 \text{ च})$$

$$R_{32}(r) = \left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \qquad (9.49 \text{ छ})$$

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

सिद्ध करें कि $R_{20}(r)$ प्रसामान्यीकृत है और वह $R_{10}(r)$ के लाम्बिक है।

अन्ततः हाइड्रोजन परमाणुओं के आइगेनफलनों का व्यंजक होता है:

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)\, Y_{l,\, m_l}(\theta, \phi) \qquad (9.50)$$

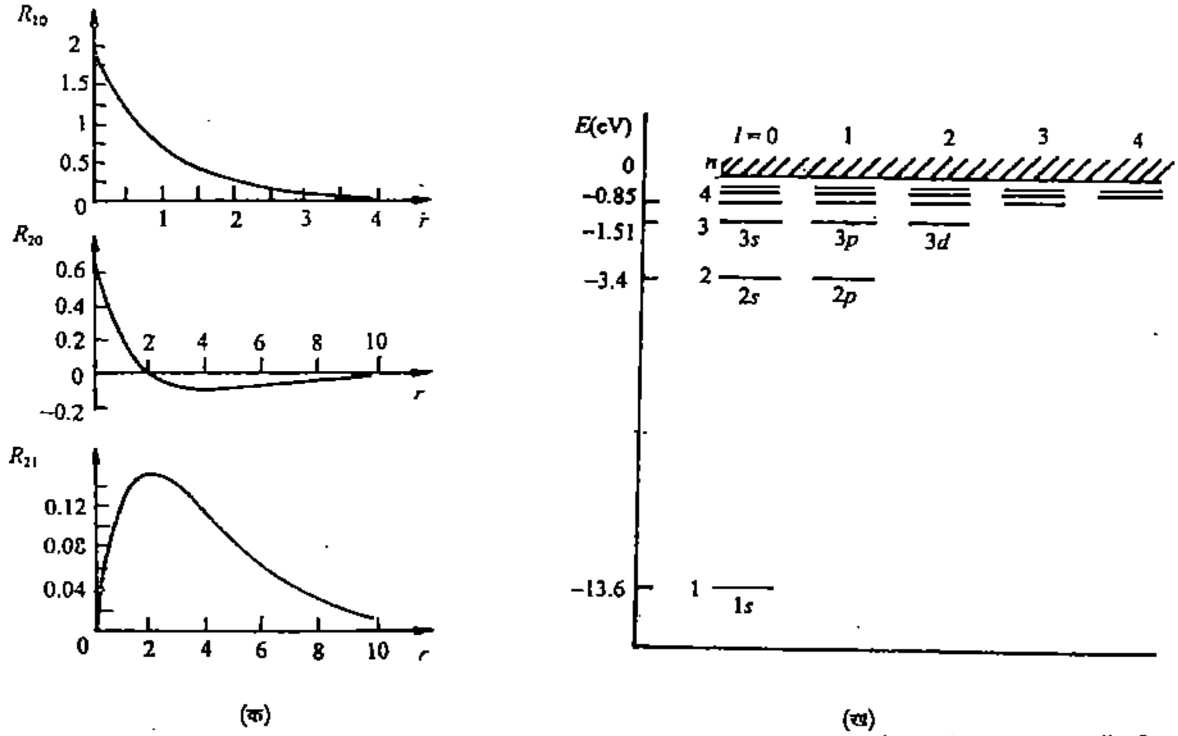
जहाँ $R_{nl}(r)$ और $Y_{l,\, m_l}(\theta, \phi)$ के मान क्रमशः समीकरण (9.46) और समीकरण (9.18) द्वारा दिए जाते हैं। ये आइगेनफलन एक प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय (orthogonal set) बनाते हैं यानी

$$\int \psi^*_{nlm_l}(\mathbf{r})\psi_{n'l'm_l'}(\mathbf{r}) r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{nn'}\, \delta_{ll'}\, \delta_{m_l m_l'} \qquad (9.51)$$

जहाँ $\delta_{jj'} = 1$, $\quad j = j'$ के लिए

$\quad = 0 \quad j \neq j'$ के लिए

इनमें से कुछ आइगेनफलनों का त्रिज्य भाग चित्र 9.5 में दिखाया गया है।



चित्र 9.5: (क) कुछ त्रिज्य आइगेनफलन, (ख) हाइड्रोजन परमाणु की बद्ध और कन्टिनुअम अवस्थाओं की आइगेन ऊर्जाएं।

अब हम हाइड्रोजन परमाणु से संबंधित कूलॉम विभव ऊर्जा समस्या के बारे में कुछ बातें कर सकते हैं। समीकरण (9.46) हमें बताता है कि कूलॉम विभव के संगत बद्ध अवस्था आइगेनफलन (जिनके लिए $E < 0$), r के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। ध्यान दीजिए कि इस विभव के संगत, ऊर्जा $-\mu e^4/2\hbar^2$ से शुरू होकर शून्य पर ख़त्म होने वाली अनन्त बद्ध अवस्थाएं होती हैं। समीकरण (9.44) द्वारा दी गई आइगेन ऊर्जा के मान विविक्त होते हैं। दो उत्तरोत्तर ऊर्जा अवस्थाओं की ऊर्जाओं के अन्तर के मान, n बढ़ने के साथ घटते जाते हैं (देखिए चित्र 9.5 ख)। n के विशाल मानों के लिए यह ऊर्जा अंतर बहुत छोटा हो जाता है। n के उच्च मानों वाली अवस्थाओं को **रिडबर्ग अवस्थाएं** कहते हैं। अन्ततः $n = \infty$ पर आइगेन ऊर्जा शून्य हो जाती है और हाइड्रोजन परमाणु का, एक प्रोटॉन और शून्य ऊर्जा वाले इलेक्ट्रॉन में आयनीकरण हो जाता है। $E > 0$ के संगत आइगेन अवस्थाएं **कन्टिनुअम अवस्थाएं** कहलाती हैं। ये चित्र 9.5 ख के छायादार हिस्से द्वारा दिखाई गई हैं। ऐसी अवस्थाओं के आइगेनफलन r के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त नहीं होते और E के संतत मान होते हैं। हाइड्रोजन परमाणु की कन्टिनुअम अवस्थाओं के आइगेनफलन कूलॉम तरंगें होती हैं।

$l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ मान वाले परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों को क्रमशः $s, p, d, f \ldots$ इलेक्ट्रॉन भी कहा जाता है। समीकरण (9.46) और (9.50) से यह स्पष्ट है कि सिर्फ़ s इलेक्ट्रॉनों के, जिनके लिए $l = 0$ होता है, $r = 0$ पर आइगेनफलन ψ_{nlm_l} परिमित होते हैं जोकि लगभग नाभिक की स्थिति पर ही है। अतः केवल s इलेक्ट्रॉनों के नाभिक की स्थिति पर पाए जाने की प्रायिकता परिमित होती है जबकि $l > 0$ वाले इलेक्ट्रॉनों के लिए, जिनके कोणीय संवेग शून्य से अलग हैं, यह प्रायिकता शून्य होती है। इस व्यवहार को हम समीकरण (9.41) से समझ सकते है। $l > 0$ के लिए अपकेंद्र स्थितिज ऊर्जा $\hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$ इस बात की अनुमति नहीं देती कि $p, d, f \ldots$ आदि इलेक्ट्रॉन नाभिक के बहुत अधिक नज़दीक आ सकें। हाइड्रोजन परमाणु के लिए $n = 1$ अवस्था, मूल अवस्था (ground state) कहलाती है जबकि $n = \infty$ अवस्था उसकी निम्नतम आयनीकृत अवस्था के संगत होती है। इस प्रकार हाइड्रोजन परमाणु का आयनीकरण करने के लिए एक रिडबर्ग ऊर्जा चाहिए।

इस विवरण का एक और रोचक लक्षण है, जिसकी चर्चा हम यहाँ करना चाहेंगे। परमाण्वीय स्पेक्ट्रम में एक अपभ्रष्टता उपस्थित है जिसे l-अपभ्रष्टता कहते हैं। ऊर्जा केवल n पद निर्भर करती है, l पर नहीं। लेकिन एक नियत n के लिए संभव l मान हैं $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$। l-अपभ्रष्टता के साथ m_l-अपभ्रष्टता भी है जोकि गोलीय सममिति का परिणाम है। हरेक l के लिए, m_l के मान $-l$ से $+l$ तक होते हैं जिससे हमें $2l + 1$ अपभ्रष्ट स्तर मिलते हैं। किसी n के लिए कुल अपभ्रष्टता होती है:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

और यदि हम स्पिन के कारण अपभ्रष्टता को इसमें जोड़ दें, जिसके बारे में आप इकाई 10 में पढ़ेंगे, तब कुल अपभ्रष्टता $2n^2$ के बराबर होती है।

अभी तक की चर्चा की मदद से हम हाइड्रोजन परमाणु के स्पेक्ट्रम की बहुत अच्छी तरह से व्याख्या कर सकते हैं।

9.3.1 हाइड्रोजन परमाणु का स्पेक्ट्रम

जब हाइड्रोजन परमाणु में कोई एक इलेक्ट्रॉन ($n > 1$) के संगत उत्तेजन अवस्थाओं से किसी निम्न उत्तेजन अवस्था या मूल अवस्था में संक्रमण करता है तो वह हाइड्रोजन परमाणु की अभिलक्षणिक आवृत्तियों वाले विद्युतचुम्बकीय विकिरण उत्सर्जित करता है। हाइड्रोजन परमाणु की दो आइगेन अवस्थाओं के बीच ऊर्जा अंतर होता है:

$$\Delta E = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{9.52}$$

यदि हम R को m^{-1} की इकाई में लें तो उत्सर्जित विकिरण की तरंग संख्या होती है:

$$\bar{\nu} = 1.097 \times 10^7 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)(\mathrm{m}^{-1}) \tag{9.53}$$

$n_2 = 1$ और $n_1 = 2, 3, 4, ..$ आदि के लिए हमें भिन्न तरंग दैर्घ्यों वाले विद्युतचुम्बकीय विकिरणों की एक श्रेणी मिलती है। इस श्रेणी को **लाइमैन श्रेणी** (Lyman series) कहते हैं और यह विद्युतचुम्बकीय स्पेक्ट्रम के परावैगंनी क्षेत्र में होती है। $n_1 = 3, 4, 5, ...$ से $n_2 = 2$ के संक्रमणों के संगत श्रेणी को **बामर श्रेणी** (Balmer series) कहते हैं। इसी तरह $n_1 = 4, 5, 6, ...$ आदि से $n_2 = 3$ और $n_1 = 5, 6, 7, ...$ से $n_2 = 4$ के संक्रमणों के कारण क्रमशः **पाश्चेन श्रेणी** (Paschen series) और **ब्रैकेट श्रेणी** (Brackett series) उत्पन्न होती है। इस प्रकार सैद्धान्तिक रूप से प्राप्त आइगेन ऊर्जा स्पेक्ट्रम से हम हाइड्रोजन के प्रेक्षित प्रकाशीय स्पेक्ट्रम की अच्छी तरह व्याख्या कर सकते हैं।

लेकिन जब हम इस ऊर्जा स्पेक्ट्रम की अत्यधिक यथार्थ प्रायोगिक आंकड़ों से तुलना करते हैं तो हमें कुछ अपवाद मिलते हैं। ऐसा इसलिए है कि वास्तविक हाइड्रोन परमाणु में और भी अन्योन्यक्रियाएं होती हैं जिन्हें हमने यहाँ पर नहीं लिया है। आप इन अन्योन्यक्रियाओं के बारे में उच्चतर पाठ्यक्रमों में पढ़ेंगे।

अब हम ऐसे निकायों से जुड़ी एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना की चर्चा करेंगे। यह संकल्पना क्वांटम अंकों की है जो गति के अचर होते हैं और ऐसे निकाय की अवस्था को निरूपित करते हैं।

9.3.2 क्वांटम अंक और गति के अचर

हाइड्रोजन परमाणु के अध्ययन में आपका वास्ता तीन पूर्णांकों से पड़ा है, यानी n, l और m_l से। इन पूर्णांकों को **क्वांटम अंक** (quantum numbers) भी कहा जाता है। चूंकि n निकाय की आइगेन ऊर्जा से संबद्ध है (देखें समीकरण 9.48), इसलिए इसे **ऊर्जा क्वांटम अंक** या **प्रमुख क्वांटम अंक** (principal quantum number) कहते हैं। इसका अस्तित्व इसलिए है क्योंकि निकाय की ऊर्जा गति का अचर है यानी ये अवस्थाएं स्थायी अवस्थाएं हैं। यह ऊर्जा क्वांटम अंक, कन्टिनुअम अवस्थाओं के लिए भी होता है लेकिन तब यह फर्क होता है कि इसका मान संतत होता है। इन अवस्थाओं के लिए इसे k द्वारा व्यक्त किया जाता है।

गोलतः सममित विभव के कारण कण का कोणीय संवेग **L** भी गति का अचर है लेकिन क्योंकि L_x, L_y, L_z एक-दूसरे के साथ कम्यूट नहीं करते, इसलिए कोणीय संवेग सदिश **L** क्वांटम यांत्रिकी यांत्रिकी में गति का अचर नहीं होता। लेकिन जैसाकि आप देख चुके हैं L^2 गति का अचर होता है। इससे हमें एक और क्वांटम अंक l मिलता है जिसके विविक्त मान होते हैं और यह एक धनात्मक पूर्णांक होता है। चूंकि l वस्तु की कक्षीय गति से संबद्ध है इसलिए इसे **कक्षीय क्वांटम अंक** (orbital quantum number) कहते हैं। समीकरण (9.45) से हम यह देखते हैं कि l, n से छोटा होता है और एक दिए n के लिए इसके निम्नलिखित मान होते हैं:

$$0, 1, 2, ... n-1 \tag{9.54}$$

चूंकि एक गोलीय सममिति वाले विभव में अक्षीय सममिति भी होती है, इसलिए सदिश **L** का z घटक भी गति का अचर होता है। और इससे हमें एक तीसरा क्वांटम अंक m_l मिलता है। इसके ऋणात्मक और धनात्मक पूर्णांकीय मान हो सकते हैं। एक मुक्त हाइड्रोजन परमाणु की ऊर्जा केवल क्वांटम अंक n पर निर्भर करती है। लेकिन यह दिखाया जा सकता है कि अगर इस परमाणु को एक चुम्बकीय क्षेत्र में रख दिया जाए तो इसकी ऊर्जा m_l पर भी निर्भर करती है। अतः m_l को **चुम्बकीय क्वांटम अंक** (magnetic quantum number) भी कहा जाता है। l के एक दिए मान के लिए, m_l के मान्य मान हैं:

$$-l, -l+1, ... 0, 1, 2, ... l-1, l \tag{9.55}$$

तीन क्वांटम अंकों का अस्तित्व इस बात का भी परिणाम है कि काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर

समीकरण में तीन स्वतंत्र चर r, θ और ϕ उपस्थित हैं। इस प्रकार हर आकाशीय निर्देशांक के संगत एक क्वांटम अंक का अस्तित्व होता है।

बोध प्रश्न 6

5 मिनट लगाएं

सिद्ध करें कि $n = 3$ के लिए हाइड्रोजन परमाणु के 9 अपभ्रष्ट आइगेनफलन होते हैं।

आइए, अब हम इस इकाई में जो कुछ भी आपने सीखा है, उसका सार प्रस्तुत करें।

9.4 सारांश

- इस इकाई में हमने *अचर कुल ऊर्जा* वाले एक कण के क्वांटम यांत्रिकीय व्यवहार की चर्चा की है, जो एक त्रिविम गोलतः सममित विभव में गतिमान है।

- गोलतः सममित विभव केवल त्रिज्य निर्देशांक r पर निर्भर करता है और वह ध्रुवीय निर्देशांकों θ और ϕ पर निर्भर नहीं करता।

- क्लासिकी यांत्रिकी में ऐसे कण का कोणीय संवेग **L**, गति का अचर होता है लेकिन क्वांटम यांत्रिकी में सदिश **L** के तीनों घटक L_x, L_y और L_z एक ही साथ गति के अचर नहीं हो सकते क्योंकि ये तीनों घटक एक-दूसरे के साथ कम्यूट नहीं करते। लेकिन **L** का परिमाण या L^2 या **L** का कोई एक घटक (यहां हमने L_z लिया है) गति के अचर हो सकते हैं। केन्द्रीय विभव के अधीन गतिमान एक कण के लिए त्रिविम काल स्वतंत्र श्रोडिन्गर समीकरण को तीन एकविम अवकल समीकरणों में पृथक किया जा सकता है जिनमें से हरेक केवल एक ही निर्देशांक r, θ या ϕ के समीकरण हैं। ϕ की अवकल समीकरण का हल है $e^{im_l\phi}$ जबकि θ की अवकल समीकरण का हल है सहचारी लेजान्द्रे बहुपद $P_l^{|m_l|}(\theta)$। क्वांटम यांत्रिकीय रूप से मान्य हलों के लिए l और m_l केवल पूर्णांकीय मान वाले हो सकते हैं। l के मान धनात्मक पूर्णांक होते हैं और एक दिए हुए l के लिए m_l के $(2l + 1)$ मान होते हैं

$$m_l = -l, -l + 1, -l + 2, \ldots 0, 1, l - 1, l$$

क्वांटम अंक l और m_l को क्रमशः कक्षीय और चुम्बकीय क्वांटम अंक कहा जाता है। θ और ϕ में दोनों हलों के गुणनफलों को गोलीय हारमोनिक (spherical harmonics) कहा जाता है और उसका निरूपण $Y_{l,\,m_l}(\theta, \phi)$ द्वारा किया जाता है।

- सदिश **L** आकाश में स्थिर नहीं होता बल्कि z-अक्ष के इर्द-गिर्द पुरस्सरण करता है। **L** और z-अक्ष के बीच का कोण केवल विविक्त मान ले सकता है जो $\cos^{-1}(m/\sqrt{l(l+1)})$ द्वारा दिए जाते हैं। किसी एक निर्देशांक अक्ष के सापेक्ष **L** के अभिविन्यास के क्वांटमीकरण को आकाशी क्वांटमीकरण कहते हैं।

- त्रिज्य तरंग फलन $R(r)$ की प्रकृति इस बात पर निर्भर करती है कि कोई अवस्था बद्ध अवस्था है या कन्टिनुअम अवस्था है। r के बड़े मानों पर बद्ध अवस्थाओं के लिए आइगेनफलन का विचरण इस प्रकार होता है:

$\exp\left[-\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}E\right)^{1/2}\frac{r}{a_0}\right]$। अतः r के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर कण के पाए जाने की प्रायिकता शून्य की ओर प्रवृत्त होती है। दूसरी ओर कन्टिनुअम अवस्थाओं के लिए यह प्रायिकता r के अनन्त की ओर प्रवृत्त होने पर भी परिमित रहती है। r के छोटे और मध्यवर्ती मानों के लिए अलग-अलग गोलीय सममिति वाले विभवों के संगत अलग-अलग त्रिज्य फलन होते हैं। इस इकाई में हमने कूलॉन विभव की चर्चा की है जोकि हाइड्रोजन परमाणु के संगत विभव है।

- एक हाइड्रोजन परमाणु द्वि-कण निकाय होता है जिसमें कि एक प्रोटॉन और एक इलेक्ट्रॉन होता है। उसकी स्थायी अवस्था श्रोडिन्गर समीकरण एक षट्विम अवकल

समीकरण है। लेकिन इसे दो त्रिविम अवकल समीकरणों में पृथक किया जा सकता है। इनमें से एक द्रव्यमान $(m + M)$ वाले मुक्त कण की गति के संगत है। इसके हल समतल तरंगें $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}$ हैं जहाँ कि ऊर्जा क्वांटम अंक K संतत मान रखता है और इसका मान E_H से संबद्ध समीकरण (9.39) द्वारा दिया जाता है। दूसरी त्रिविम अवकल समीकरण द्रव्यमान μ वाले एक कण की गति का वर्णन करती है (μ निकाय का समानीत द्रव्यमान है) जिसका आवेश $-e$ होता है। यह कण एक गोलीय सममिति वाले कूलॉम विभव में एक नियत बल केन्द्र जिसका कि आवेश $+e$ है, के सापेक्ष गतिमान है। इस अवकल समीकरण को फिर से तीन एकविम अवकल समीकरणों में पृथक किया जा सकता है जिनमें से हरेक अवकल समीकरण एक ध्रुवीय निर्देशांक r, θ या ϕ के संगत है। इस प्रकार इस निकाय के लिए तीन क्वांटम अंक n, l और m_l मिलते हैं।

- हाइड्रोजन परमाणु के कोणीय आइगेनफलन गोलीय हारमोनिक होते हैं और बद्ध अवस्थाओं के त्रिज्य आइगेनफलन सहचारी लागेर बहुपद द्वारा दिए जाते हैं। क्वांटम अंक n के शून्य के अलावा धनात्मक पूर्णांकीय मान होते हैं। n के दिए हुए मान के लिए क्वांटम अंक l के n मान होते हैं

$$l = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

l के प्रत्येक मान के लिए चुम्बकीय क्वांटम अंक m_l के ये मान होते हैं

$$m_l = -l, -l + 1, ... 0, l, ..., l - 1, l$$

- भिन्न आइगेनफलनों $\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi)$ के संगत ऊर्जा E के मान केवल क्वांटम अंक n पर निर्भर करते हैं। अतः एक दिए हुए n के लिए, l और m_l के विभिन्न अनुमत मानों के संगत n^2 अपभ्रष्ट आइगेनफलन होते हैं। कन्टिनुअम अवस्थाओं ($E > 0$) के लिए त्रिज्य आइगेनफलन कूलॉम तरंगें होती हैं और ऊर्जा क्वांटम अंक k के संतत मान होते हैं। अब ऊर्जा अवस्थाएं विविक्त नहीं रह जातीं और हम प्रति इकाई ऊर्जा अवस्थाओं की बात करते हैं।

- हाइड्रोजन परमाणु के इस क्वांटम यांत्रिकीय विश्लेषण के द्वारा इस परमाणु के स्पेक्ट्रम में प्रेक्षित विभिन्न विद्युतचुम्बकीय विकिरण श्रेणियों को समझा जा सकता है।

9.5 अंत में कुछ प्रश्न

30 मिनट लगाएं

1. समीकरण (9.20) द्वारा दिए गए व्यंजकों का इस्तेमाल करके सिद्ध कीजिए कि

$$\sum_{m_l=-2}^{2} \left| Y_{2, m_l} (\theta, \phi) \right|^2 = \frac{5}{4\pi}$$

यहाँ आप ध्यान दें कि आम तौर पर

$$\sum_{m_l=-l}^{+l} \left| Y_{l, m_l} (\theta, \phi) \right|^2 = \frac{(2l + 1)}{4\pi}$$

2. विरियल प्रमेय के मुताबिक एक कण जो कि एक कूलॉम विभव में गतिमान है, की स्थितिज ऊर्जा का औसत मान किसी भी स्थायी बद्ध अवस्था के संगत उसकी कुल ऊर्जा का दोगुना होता है। हाइड्रोजन परमाणु की मूल अवस्था के लिए इस प्रमेय को सिद्ध करें। साथ ही साथ दिखाएं कि औसत गतिज ऊर्जा कुल ऊर्जा के परिमाण के बराबर होती है।

3. अनिश्चितता सिद्धांत का उपयोग करके दिखाइए कि सबसे अधिक स्थायी मूल अवस्था हाइड्रोजन परमाणु की आमाप प्रथम बोर त्रिज्या की कोटि की होती है।

4. हाइड्रोजन परमाणु की मूल अवस्था के लिए r का सबसे अधिक प्रायिकता वाला मान और प्रत्याशा मान प्राप्त करें।

9.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. हम जानते हैं कि

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r[\hat{\mathbf{e}}_r \times (-i\hbar\nabla)]$$

गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

इसलिए

$$\mathbf{L} = -i\hbar\, r\, \hat{\mathbf{e}}_r \times \left[\hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \quad (\because \hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0)$$

$$= -i\hbar\, r\left[\hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= -i\hbar\left[\hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

अतः

$$L^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = -\hbar^2\left(\hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

एकक सदिशों के अवकलज इस प्रकार हैं:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi = -(\hat{\mathbf{e}}_r \sin\theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos\theta)$$

L^2 के लिए समीकरण में इनको प्रतिस्थापित करने पर और कुछ सरलीकरण करने पर हमें मिलता है:

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$L_z = \hat{\mathbf{e}}_z\cdot\mathbf{L} = (\hat{\mathbf{e}}_r\cos\theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta\sin\theta)\cdot\left(-i\hbar\,\hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\hbar\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

अब

$$[H, L^2] = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu} + V(r), L^2\right]$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r), L^2\right] \quad \text{(समीकरण 9.6 क से)}$$

$= 0$ [$\because r, \theta$ और ϕ स्वतंत्र चर हैं और $[L^2, L^2] = 0$]

इसी तरह

$$[H, L_z] = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r), L_z\right] = 0 \quad (\because [L^2, L_z] = 0)$$

2.(क) समीकरण (9.6 ख) का प्रयोग करने पर हम लिख सकते हैं:

$$L_z Y_{l, m_l}(\theta, \phi) = c\, Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$$

या

$$-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \phi} Y_{l, m_l}(\theta, \phi) = c\, Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$$

जहाँ c, $Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$ के संगत L_z का आइगेनमान है। अब L_z में केवल ϕ पर संक्रिया होती है और $Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$ में ϕ घटक केवल $e^{im_l\phi}$ है। अतः समीकरण (9.18) का इस्तेमाल करके हमें मिलता है:

$$-\frac{ih}{2\pi} im_l\, Y_{l, m_l}(\theta, \phi) = c\, Y_{l, m_l}(\theta, \phi)$$

$$\therefore c = m_l h/2\pi = m_l \hbar$$

(ख) हमें सिद्ध करना है कि:

$$\int Y^*_{2, 2}(\theta, \phi)\, Y_{2, 2}(\theta, \phi)\, d\Omega = 1$$

या

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{2, 2}\, Y_{2, 2} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 1$$

माना

$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*_{2, 2}\, Y_{2, 2} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \left(\frac{15}{32\pi}\right)2\pi \int_0^{\pi} \sin^4\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{15}{16}\int_{-1}^{1}(1 - 2\mu^2 + \mu^4)\, d\mu \text{ जहां } \mu = \cos\theta$$

या

$$I_1 = \frac{15}{16}(2 - 4/3 + 2/5)$$

$$= \frac{15}{8}\frac{(15 - 10 + 3)}{15} = 1$$

अतः सिद्ध हुआ।

अब हमें सिद्ध करना है कि $\int Y^*_{2, 2}(\theta, \phi)\, Y_{2, -2}(\theta, \phi)\, d\Omega = 0$

माना $I_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y^*_{2,2}\, Y_{2,-2} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$= \frac{15}{32\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4\theta\, e^{-4i\phi}\, d\theta\, d\phi$$

अब $\int_0^{2\pi} e^{-4i\phi}\, d\phi = \theta,$

$\therefore I_2 = 0.$

अतः सिद्ध हुआ।

3. θ की जगह $\pi - \theta$ और ϕ की जगह $\pi + \phi$ रखने पर हमें मिलता है:

$$Y_{2,1}(\pi - \theta, \pi + \phi) = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin(\pi - \theta)\cos(\pi - \theta)\, e^{i(\pi + \phi)}$$

$$= -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \cos\theta\, e^{+i\phi} = Y_{2,1}(\theta, \phi)$$

अतः $Y_{2,1}(\theta, \phi)$ सम पैरिटी का फलन है।

4. $R = \dfrac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18}$ Joules $= 13.6$ eV

m^{-1} इकाई में $R = \dfrac{me^4}{2\hbar^2} \dfrac{1}{ch} = 1.10 \times 10^7\ m^{-1}$

रिडबर्ग नियतांक का यथार्थ मान है:

$$R = 1.09737373 \times 10^7\ m^{-1}.$$

5. हमें सिद्ध करना है कि $\int_0^{\infty} R^*_{20}(r)\, R_{20}(r)\, r^2\, dr = 1$

माना $I = \int_0^{\infty} R^2_{20}(r)\, r^2\, dr.$

$$I = \frac{1}{(2a_0)^3} \int_0^{\infty} \left(4 - 4\frac{r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2}\right) r^2 e^{-r/a_0}\, dr$$

अब हम जानते हैं कि

$$\int_0^{\infty} r^p e^{-\beta r}\, dr = \frac{p!}{\beta^{p+1}}$$

इसलिए

$$I = \frac{1}{8a_0^3} \left[4 \frac{2!}{\left(\frac{1}{a_0}\right)} - \frac{4}{a_0} \frac{3!}{\left(\frac{1}{a_0}\right)^4} + \frac{1}{a_0^2} \frac{4!}{\left(\frac{1}{a_0}\right)^5}\right]$$

$$= \frac{1}{8}[8 - 24 + 24] = 1$$

साथ ही साथ

$$\int_0^\infty R_{20}^*(r)\, R_{10}(r)\, r^2\, dr = \frac{1}{(2\, a_0^6)^{1/2}} \int_0^\infty \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) r^2\, e^{-(3r/2a_0)}\, dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, a_0^3} \left[2 \frac{2!}{\left(\frac{3}{2a_0}\right)^3} - \frac{1}{a_0} \frac{3!}{\left(\frac{3}{2a_0}\right)^4} \right] = 0.$$

6. चूंकि $n = 3$, इसलिए l के अनुमत मान हैं 0, 1, 2। इसलिए m_l के 9 अनुमत मान हैं 0($l = 0$ के लिए), −1, 0 और 1($l = 1$ के लिए), −2, −1, 0, 1, 2($l = 2$ के लिए)। इनमें से n, l, m_l मानों के प्रत्येक संयोजन के संगत एक आइगेनफलन होता है लेकिन ऊर्जा तो केवल n पर निर्भर करती है, इसलिए ये सभी 9 आइगेनफलन अपभ्रष्ट हैं।

अंत में कुछ प्रश्न

1. $$\sum_{m_l=-2}^{2} \left| Y_{2,m_l}(\theta, \phi) \right|^2 = 2\, \frac{15}{8\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta + 2\, \frac{15}{32\pi} \sin^4\theta$$

$$+ \frac{5}{16\pi}(3\cos^2\theta - 1)^2$$

$$= \frac{5}{16\pi}[6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 4 + 6\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$= \frac{5}{4\pi}$$

ध्यान दीजिए कि योग $\sum_{m_l=-l}^{+l} \left| Y_{l,m_l}(\theta, \phi) \right|^2$

हमेशा ही गोलीय सममिति रखता है।

2. $$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

$$\langle V(r) \rangle = \int \left| \psi_{100}(r) \right|^2 \left(-\frac{e^2}{r}\right) r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi\, a_0^3}\, 4\pi(-e^2) \int_0^\infty e^{-2r/a_0}\, r\, dr$$

$$= -\frac{4\, e^2}{a_0^3} \frac{1}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^2} = -\frac{e^2}{a_0} = 2E_0. \quad \left(\because a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \text{ और } E_0 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\right)$$

चूंकि गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा = कुल ऊर्जा। इसलिए

$$\langle \text{K . E.} \rangle = E_0 - \langle V(r) \rangle = -\frac{e^2}{2a_0} + \frac{e^2}{a_0} = \frac{e^2}{2a_0} = |E_0|$$

3. माना कि परमाणु की आमाप R है। चूंकि इलेक्ट्रॉन परमाणु के अंदर है, इसलिए उसके संवेग में अनिश्चितता है $p = \hbar / R$। परिमाण p वाले रैखिक संवेग की दिशा कुछ भी हो सकती है जिससे कि इसके घटकों के मान $-p$ से $+p$ तक होंगे। अतः

इसके संवेग में भी लगभग p के बराबर अनिश्चितता है। अतः हम $\Delta p = p$ लेते हैं।

अब हम लेते हैं

$$\langle \text{K. E.} \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} = \text{K. E.}$$

$$E = \text{K. E.} + V = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} - \frac{e^2}{R}, \; R \text{ पर}$$

अब $\dfrac{dE}{dR} = -\dfrac{\hbar^2}{\mu R^3} + \dfrac{e^2}{R^2} = 0$ स्थायी परमाणु के लिए

अतः $R = \dfrac{\hbar^2}{\mu e^2} = a_0$।

इसलिए सबसे अधिक स्थायी परमाणु का आमाप प्रथम बोर त्रिज्या के बराबर ही है।

4. r और $r + dr$ के बीच इलेक्ट्रॉन के पाए जाने की प्रायिकता होती है

$$|\psi_{100}(r)|^2 \, r^2 \, 4\pi dr = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} r^2 \, 4\pi dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

अतः r का सबसे अधिक प्रायिकता वाला मान निकालने के लिए हम $r^2 e^{-2r/a_0}$ का r के सापेक्ष अवकलन करते हैं और परिणाम को शून्य के बराबर रखते हैं। इस तरह हमें मिलता है

$$\left(r^2\left(-\frac{2}{a_0}\right) + 2r\right) e^{2r/a_0} = 0$$

या

$$r = a_0.$$

लेकिन r का औसत मान होता है:

$$\langle r \rangle = \int |\psi_{100}(r)|^2 \, r \, r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} 4\pi \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^3 \, dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \frac{6}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^4}$$

$$= \frac{3}{2} a_0.$$

इकाई 10 परमाण्वीय स्पेक्ट्रम

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने परमाणु के सदिश मॉडल और आकाशी क्वांटमीकरण की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ा। आप ये जानते हैं कि ये संकल्पनाएं कोणीय संवेग की संकल्पना से जुड़ी हुई हैं। आप यह भी जानते हैं कि किसी निकाय का कोणीय संवेग एक प्रेक्षणीय राशि है। इसलिए इसका मापन किया जा सकता है। अब चूंकि एक परमाणु का कोणीय संवेग उसके चुम्बकीय आघूर्ण से संबद्ध होता है, इसलिए अगर हम चुम्बकीय आघूर्ण का मापन कर सकें तो हम कोणीय संवेग का भी मापन कर सकेंगे। कोणीय संवेग का मापन करने के लिए ऐसा ही एक प्रयोग 1992 में ओ. स्टर्न और डब्ल्यू. गर्लैक ने डिज़ाइन किया। इस इकाई की शुरुआत में हम स्टर्न–गर्लैक प्रयोग की चर्चा करेंगे, जिसके द्वारा आकाशी क्वांटमीकरण की संकल्पना की जाँच की जा सकी। लेकिन स्टर्न–गर्लैक प्रयोग से प्राप्त गुणात्मक परिणामों को केवल तीन क्वांटम अंकों यानी n, l और m_l की सहायता से नहीं समझाया जा सका। साथ ही साथ और भी ऐसे स्पेक्ट्रमी आंकड़े थे, जिन्हें सदिश मॉडल द्वारा नहीं समझाया जा सका।

इस स्थिति से निपटने के लिए दो शोध छात्रों एस.ए.गॉडस्मिट (S. A. Goudsmit) और जी. ई. ऊहलेनबेक (G. E. Uhlenbeck) ने यह संकल्पना दी कि प्रत्येक इलेक्ट्रॉन का एक स्पिन कोणीय संवेग **S** होता है। इस स्पिन कोणीय संवेग और कक्षीय कोणीय संवेग **L** के संयोजन से कुल कोणीय संवेग **J** मिलता है। **L** की तरह कोणीय संवेग **S** और **J** का भी आकाशी क्वांटमीकरण होता है और इनसे हमें क्वांटम अंक, क्रमशः (s, m_s) और (j, m_j) मिलते हैं। आप इन संकल्पनाओं के बारे में भाग 10.3 और 10.4 में पढ़ेंगे। स्पिन कोणीय संवेग की संकल्पना स्टर्न–गर्लैक प्रयोग के परिणामों की व्याख्या में काफ़ी उपयोगी रही है। इसका इस्तेमाल करके हाइड्रोजन जैसे परमाणुओं के लिए बहुत सारे स्पेक्ट्रमी आंकड़ों को भी समझाया जा सका है। भाग 10.5 में हमने ऐसे परमाणुओं के दृश्य स्पेक्ट्रम की चर्चा की है।

अंत में भाग 10.6 में हम बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणुओं के स्पेक्ट्रम की चर्चा करेंगे। ऐसे परमाणुओं में प्रत्येक इलेक्ट्रॉन, परमाणु के नाभिक और बाकी इलेक्ट्रॉनों द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में गतिमान होता है। ऐसे विभव में गोलाकार सममिति नहीं होती। अतः यदि यथार्थ रूप में देखा जाए तो बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु के लिए परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों का कक्षीय कोणीय संवेग, गति का अचर नहीं होता। फिर भी यह मानना कि प्रत्येक परमाण्वीय

इलेक्ट्रॉन गोलतः सममित विभव में गतिमान है एक अच्छा सन्निकटन है और तब हम इसकी ऊर्जा अवस्था को चार क्वांटम अंकों n, l, m_l और m_s या n, l, j और m_j द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। इस भाग में हम **पाउली अपवर्जन सिद्धांत** (Pauli exclusion principle) की भी चर्चा करेंगे जिसके द्वारा परमाणुओं की कोश संरचना की व्याख्या दी जाती है। इस सिद्धांत की मदद से हम परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों को उनकी ऊर्जा अवस्थाओं के मुताबिक व्यवस्थित कर सकते हैं। इस तरह के विन्यास को **इलेक्ट्रॉनिक विन्यास** (electronic configuration) कहते हैं। इस इलेक्ट्रॉनिक विन्यास का उपयोग करके हम संपूर्ण परमाणु के संगत L, S और J क्वांटम अंकों का निर्धारण कर सकते हैं और इस प्रकार परमाणु की मूल और उत्तेजन अवस्थाओं के संगत स्पेक्ट्रमी पदों का निर्धारण कर सकते हैं।

जब कोई परमाणु एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण करता है तब कुछ **वरण नियमों** का पालन होता है। इसी इकाई में आप इन वरण नियमों को भी सीखेंगे। उत्तेजन अवस्था से निम्न अवस्था में परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन के संक्रमण के कारण अभिलक्षणिक आवृत्ति वाली एक स्पेक्ट्रमी रेखा उत्पन्न होती है। ऐसे संक्रमणों के कारण उत्पन्न हुई रेखाओं से परमाण्वीय स्पेक्ट्रम बनता है। ऐसे परमाण्वीय संक्रमणों में परिमित समय लगता है। अतः प्रत्येक उत्तेजन अवस्था का एक परिमित जीवन काल τ होता है। इसलिए हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत ($\Delta E\, \Delta t \sim h$) के मुताबिक हरेक स्पेक्ट्रमी रेखा की एक आवृत्ति चौड़ाई होती है। एक परमाण्वीय ऊर्जा अवस्था से दूसरी ऊर्जा अवस्था में आंतरिक परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन के संक्रमण के कारण उच्च आवृत्ति क्षेत्र में भी स्पेक्ट्रमी रेखाएं मिलती हैं जिन्हें एक्स-किरण स्पेक्ट्रम कहते हैं। अगली इकाई में जो कि इस खंड की अंतिम इकाई भी है, हम संक्षेप में एक्स-किरण स्पेक्ट्रम की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

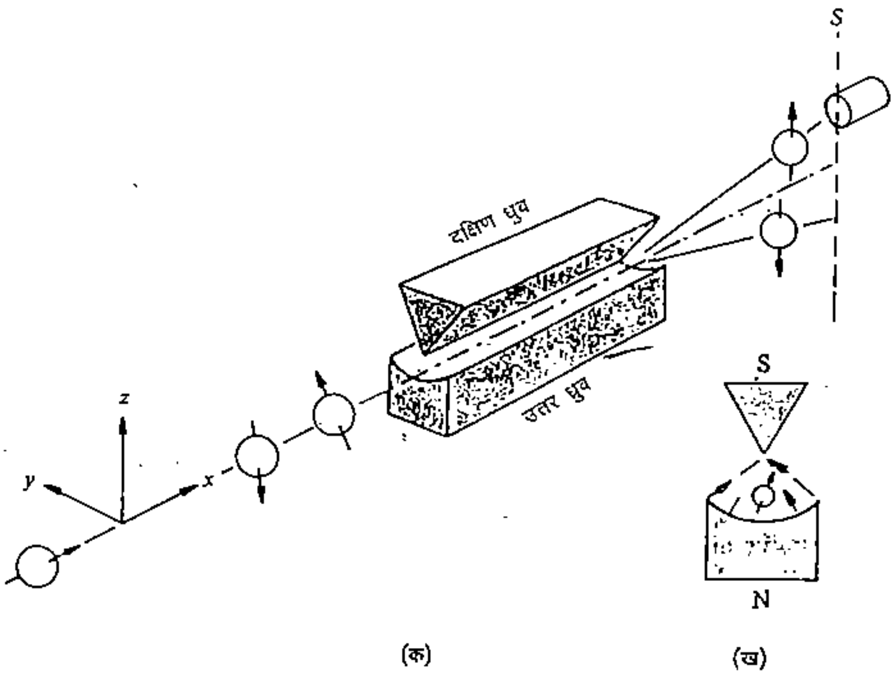
- स्टर्न–गर्लैक प्रयोग का वर्णन कर पाएंगे,
- स्पिन कोणीय संवेग की संकल्पना की व्याख्या कर पाएंगे,
- कुल कोणीय संवेग की गणना कर पाएंगे,
- हाइड्रोजन-सम और बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणुओं के स्पेक्ट्रमी पदों की गणना कर पाएंगे,
- अनुमत और वर्जित संक्रमणों के बीच भेद कर पाएंगे।

10.2 स्टर्न–गर्लैक प्रयोग

पिछली इकाई में आपने देखा कि कोणीय संवेग सदिश **L** और z-अक्ष के बीच का कोण विविक्त मान ही ले सकता है। इस कोण का मान होता है $\cos^{-1}[m_l/\sqrt{l(l+1)}]$ जहाँ l के एक दिए मान के लिए चुम्बकीय क्वांटम अंक m_l के $-l, -l+1, \ldots l-1, l$ के बराबर पूर्णांकीय मान ही हो सकते हैं। इस परिघटना को, जिसे आकाशी क्वांटमीकरण कहा जाता है, स्टर्न और गर्लैक द्वारा किए गए एक प्रयोग में परखा गया। इस प्रयोग में z अक्ष के अनुदिश एक असमांग चुम्बकीय क्षेत्र **B** को आरोपित किया गया और x दिशा के अनुदिश चल रहे एक परमाण्वीय किरण पुंज को इस क्षेत्र से गुज़ारा गया (देखिए चित्र 10.1)। तब यह पाया गया कि पर्दे S पर इस एकल परमाण्वीय किरण पुंज के एक से ज़्यादा अनुरेख (trace) बनते थे। इससे यह साफ़ ज़ाहिर था कि एक असमांगी चुंबकीय क्षेत्र, परमाणुओं के एकल किरण पुंज को एक से अधिक घटकों में विभक्त करता है।

इस प्रायोगिक परिणाम को समझने के लिए, मान लीजिए कि परमाणु में स्थित इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग **L** है। चूंकि इस इलेक्ट्रॉन का आवेश e है और यह परमाणु के अंदर गतिमान है इसलिए क्लासिकी भौतिकी के मुताबिक इस इलेक्ट्रॉन का एक चुम्बकीय आघूर्ण μ_L भी होता है:

$$\mu_L = -\frac{e}{2\mu}\mathbf{L} \qquad (10.1)$$



चित्र 10.1 : स्टर्न–गर्लैक प्रयोग। चांदी के परमाणु पर्दे S पर दो अनुरेख बनाते हैं; (क) x दिशा के अनुदिश आपतित किरण पुंज असमांग चुम्बकीय क्षेत्र से गुज़रने पर दो हिस्सों में बंट जाता है; (ख) चुम्बकीय क्षेत्र की असमांगता ऐसे स्थापित की जाती है। यह क्षेत्र z के बढ़ने के साथ-साथ बहुत तेज़ी से बढ़ता है।

क्लासिकी तौर पर परमाणु पर असमांग चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला बल होता है

$$\mathbf{F} = \nabla\,(\mu_L \cdot \mathbf{B}) \qquad (10.2)$$

चूंकि $\mathbf{B}$, z-अक्ष के अनुदिश है, इसलिए यह बल भी z-अक्ष के अनुदिश होगा और तब,

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{e}{2\mu} L_z \frac{\partial B}{\partial z} \qquad (10.3)$$

इस प्रकार किरण पुंज में स्थित कणों का ऊपर या नीचे विचलन होना चाहिए और वह इनके चुम्बकीय द्वि-ध्रुव आघूर्ण के z घटक के समानुपाती होना चाहिए। इस प्रकार पर्दे पर विचलित कण के पथ को देखकर हम चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में उसके चुम्बकीय आघूर्ण घटक का मापन कर सकते हैं।

इस तरह से स्टर्न–गर्लैक उपकरण दरअसल चुम्बकीय द्वि-ध्रुवों के एक किरण पुंज के साथ वही करता है जो कि एक प्रिज़्म सफेद प्रकाश के साथ करता है: यह चुम्बकीय द्वि-ध्रुवों का अपवर्तन करता है और इस प्रकार किरण पुंज में उपस्थित कणों के चुम्बकीय आघूर्ण का स्पेक्ट्रम प्रदर्शित करता है।

अगर स्टर्न–गर्लैक प्रिज़्म से परमाण्वीय द्वि-ध्रुवों के एक किरण पुंज को गुज़ारा जाए तो हम क्लासिकी तौर पर क्या उम्मीद करते हैं कि क्या होगा ? क्लासिकी तौर पर चुम्बकीय आघूर्ण के z घटक का स्पेक्ट्रम (यानी उसके अनुमत मान) संतत होता है और यह $-\mu_z$ से μ_z तक कोई भी मान ले सकता है। लेकिन जब स्टर्न–गर्लैक ने पहले पहल अपना प्रयोग किया तो उन्हें क्या मिला ? एक विविक्त रैखिक स्पेक्ट्रम। यानी चुम्बकीय आघूर्ण का स्पेक्ट्रम क्वांटमीकृत होता है, और यह तो स्पष्ट है, क्योंकि μ_z, L_z के समानुपाती है और L_z क्वांटमीकृत होता है।

इन परिणामों को समझने के लिए, आइए, हम F_z के क्लासिकी व्यंजक के संगत क्वांटम यांत्रिकीय व्यंजक लिखें। इसके लिए हम F_z को संकारक के तौर पर लेंगे। तब F_z का औसत मान होता है:

$$\langle F_z \rangle = \int \psi^*_{nlm_l}(\mathbf{r})\, F_z\, \psi_{nlm_l}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{10.4}$$

अब, समीकरण (9.50) द्वारा दिया गया $\psi_{nlm_l}(\mathbf{r})$, L_z का आइगेनफलन होता है और उसका आइगेनमान $\hbar m_l$ होता है। अतः z दिशा में परमाणु पर लग रहा बल है

$$\langle F_z \rangle = -\left(\frac{e\hbar}{2\mu}\right) m_l \frac{\partial B}{\partial z} \tag{10.5}$$

राशि $\frac{e\hbar}{2\mu}$ को बोर मैग्नेटोन (Bohr magneton) μ_B भी कहा जाता है।

स्टर्न और गर्लेक ने दोनों अनुरेखों के बीच की दूरी भी मापी और इससे यह परिणाम निकाला कि m_l का मान इकाई से बदलता है। इस प्रकार आकाशी क्वांटमीकरण की संकल्पना को प्रायोगिक रूप से जाँचा गया।

लेकिन जैसा कि हमने ऊपर कहा है स्टर्न–गर्लेक प्रयोगों में प्राप्त अनुरेखों की संख्या की व्याख्या केवल क्वांटम अंकों l और m_l की व्याख्या के आधार पर नहीं की जा सकती। समीकरण (10.5) से यह स्पष्ट है कि m_l के विविक्त मानों के कारण परमाणुओं का एकल किरण पुंज, $(2l + 1)$ पुंजों में टूट जाएगा। और इनमें से हरेक परदे S पर अपना एक अनुरेख छोड़ेगा। यानी अनुरेखों की संख्या हमेशा विषम होनी चाहिए। लेकिन आशा के विपरीत जब चांदी के परमाणुओं का एक किरण पुंज असमांग चुम्बकीय क्षेत्र से गुज़ारा गया तो उसके कारण केवल दो (यानी सम संख्या) अनुरेख बने। अब यह जानी-मानी बात है कि चांदी की संयोजकता एक है यानी इसमें एक सक्रिय इलेक्ट्रॉन है और मूल अवस्था में यह इलेक्ट्रॉन एक s इलेक्ट्रॉन है यानी इस इलेक्ट्रॉन के लिए $l = 0$ है। अतः m_l का एक ही संभव मान है यानी कि $m_l = 0$। इसलिए किरण पुंज का विचलन होना ही नहीं चाहिए था और परदे S पर एक ही अनुरेख बनना चाहिए था न कि दो। दूसरी ओर, अगर हम यह मान लें कि चांदी के परमाणु p (यानी $l = 1$) अवस्था में थे, तब इन अनुरेखों की संख्या तीन होनी चाहिए थी। अतः यह स्पष्ट है कि स्टर्न–गर्लेक प्रयोग के परिणामों को केवल l और m_l क्वांटम अंकों के आधार पर नहीं समझाया जा सकता था। यहाँ कुछ ऐसा हो रहा था जो कि तब की भौतिकी में ज्ञात नहीं था। इस विसंगति को गॉडस्मिट और ऊहलेनबेक ने हल किया जब उन्होंने स्पिन कोणीय संवेग की संकल्पना पेश की। आपको यह संकल्पना बहुत ध्यान से पढ़नी होगी। लेकिन उससे पहले हम चाहते हैं कि आप एक अभ्यास करें।

बोध प्रश्न 1 — 5 मिनट लगाएं

सिद्ध कीजिए कि SI इकाई में बोर मैग्नेटोन का मान 9.27×10^{-24} $\mathrm{JT^{-1}}$ (या amp $\mathrm{m^2}$) है। μ को इलेक्ट्रॉन के विराम द्रव्यमान के बराबर लें।

10.3 स्पिन कोणीय संवेग

गॉडस्मिट और ऊहलेनबेक ने बड़ी संख्या में स्पेक्ट्रमी रेखाओं का विश्लेषण किया और पाया कि इन्हें तीन क्वांटम अंकों n, l और m_l के आधार पर नहीं समझाया जा सकता। इनमें से एक जाना पहचाना उदाहरण है – सोडियम लैम्प द्वारा उत्सर्जित स्पेक्ट्रम में D_1 और D_2 रेखाओं का। इन तीन क्वांटम अंकों के आधार पर स्पेक्ट्रम में $3p$ से $3s$ संक्रमण के संगत केवल एक ही रेखा होनी चाहिए थी। ऐसी विसंगतियों को समझाने के लिए गॉडस्मिट और ऊहलेनबेक ने एक नई संकल्पना दी, जिसके मुताबिक हरेक इलेक्ट्रॉन का एक अंतर्जात कोणीय संवेग $\mathbf{S}$ होता है और उसके संगत एक अंतर्जात चुम्बकीय

आघूर्ण μ_s भी होता है। लेकिन μ_s और **S** का अनुपात $-e/\mu$ होता है, $-e/2\mu$ नहीं। उनका तर्क इस बात पर आधारित था कि एक मुक्त इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग शून्य होता है। इस तरह इन दो अनुरेखों के होने की वजह कुछ और होनी चाहिए थी – ये एक अंतर्जात कोणीय संवेग के कारण होते हैं जोकि विशुद्ध रूप से कणों का एक क्वांटम यांत्रिकीय गुण है। उन्होंने इसे स्पिन कोणीय संवेग **S** या केवल स्पिन का नाम दिया। चूंकि बहुकता (multiplicity), $(2s + 1)$ का मान दो है, इसलिए हम स्पिन **S** से संबद्ध क्वांटम अंक का मान $\frac{1}{2}$ ले सकते हैं। इस प्रकार इलेक्ट्रॉनों की स्पिन $\frac{1}{2}$ होती है।

अब सदिश **S** के बारे में क्या कहा जाए? कक्षीय कोणीय संवेग **L** की तरह स्पिन कोणीय संवेग **S** भी z-अक्ष के इर्द-गिर्द पुरस्सरण करता है। सदिश **S** और z-अक्ष के बीच का कोण भी क्वांटमीकृत होता है यानी **S** आकाशी क्वांटमीकरण प्रदर्शित करता है। लेकिन चूंकि सदिश **S** से संबद्ध क्वांटम अंक s का मान 1/2 है, इसलिए m_s के दो ही मान हो सकते हैं $\pm s$, यानी $\pm 1/2$। परिणामतः केवल दो स्पिन फलन होते हैं: एक $m_s = 1/2$ के संगत और दूसरा $m_s = -1/2$ के संगत। ये दो स्पिन फलन संकारक S^2 और S_z के आइगेनफलन होते हैं जिनके संगत आइगेनमान क्रमशः $s(s + 1)\hbar^2$ और $m_s\hbar$ होते हैं। अतः यह क्वांटमीकृत कोण जिनके मान समीकरण (9.22) में l और m_l की जगह क्रमशः $s = 1/2$ और $m_s = \pm 1/2$ रखने से मिलते हैं, $\pm \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ के बराबर हैं।

ऊपर दी गई परिकल्पना की मदद से यह समझाना आसान है कि स्टर्न–गर्लैक प्रयोग में चांदी के परमाणुओं की मूल अवस्था के दो ही अनुरेख क्यों होते हैं। चूंकि $l = 0$ और $s = 1/2$, इसलिए $m_l = 0$ और $m_s = \pm 1/2$ । प्रत्येक m_s के संगत एक अनुरेख बनता है और इस तरह चांदी के परमाणुओं का किरण पुंज दो हिस्सों में बंट जाता है।

ऊपर दी गई संकल्पनाओं को समझने में और इनसे अभ्यस्त होने में आपको कुछ समय लगेगा। यहाँ हम आपको सावधान भी करना चाहेंगे। आप यह मान कर चलें कि इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान की ही तरह स्पिन कोणीय संवेग और उसके संगत चुम्बकीय आघूर्ण, इलेक्ट्रॉन के अंतर्जात गुणधर्म हैं। आप अपने दिमाग में इलेक्ट्रॉन की यह तस्वीर कतई न बनाएं कि वह एक घूमते हुए लट्टू की तरह है, जो अपने ही अक्ष पर प्रचक्रण कर रहा है या फिर अपने अक्ष पर चक्रण कर रही पृथ्वी की तरह है। ऐसा विवरण सरासर ग़लत होता है और इससे बिलकुल ग़लत परिणाम निकलते हैं, जैसाकि आप बोध प्रश्न 2 में देखेंगे। स्पिन, क्वांटम संसार की एक और अद्भुत परिकल्पना है और आपको इसका अभ्यस्त होना ही पड़ेगा।

यहाँ आप यह सोच सकते हैं कि इलेक्ट्रॉन या किसी भी और कण में स्पिन कोणीय संवेग होता ही क्यों है? स्पिन कोणीय संवेग के होने के कारण को समझने के लिए हमें इस पाठ्यक्रम के दायरे से बाहर जाना होगा। यह व्याख्या काफ़ी ऊंचे स्तर के पाठ्यक्रमों में मिलती है। इसे आप अपनी एम. एससी. आदि की पढ़ाई में समझ सकेंगे।

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

सिद्ध करें कि अगर हम इलेक्ट्रॉन के अंतर्जात स्पिन कोणीय संवेग को उसके अपने अक्ष के इर्द-गिर्द प्रचक्रण के कारण मानते हैं, तब इलेक्ट्रॉन का वेग प्रकाश के वेग से ज़्यादा होगा।

स्पिन कोणीय संवेग सदिश **S** स्थानिक निर्देशांकों पर निर्भर नहीं करता। यानी इसका मूल विशुद्ध रूप से क्वांटम यांत्रिकी में है। साथ ही साथ, चूंकि S^2 और S_z गति के अचर हैं, अतः किसी परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन का आइगेनफलन, चार क्वांटम अंकों n, l, m_l और m_s से निर्दिष्ट होता है जहाँ s का मान हमेशा 1/2 होता है। इस प्रकार स्पिन, इलेक्ट्रॉन को एक चौथी विमा देती है यानी इलेक्ट्रॉन एक चतुर्विम कण है। हमें चार मापन करने होंगे, इसलिए चार विमाएं चाहिए !

इस प्रकार, क्वांटम यांत्रिकी में स्पिन कोणीय संवेग की संकल्पना के आने से हमें कुल कोणीय संवेग की संकल्पना प्राप्त होती है ।

संवेग है। राशि $2S + 1$ को बहुकता (multiplicity) भी कहा जाता है। $L > S$ के लिए हमें J के $2S + 1$ मान मिलते हैं और $L < S$ के लिए J के $2L + 1$ मान मिलते हैं। कभी-कभी स्पेक्ट्रमी पद में n का संख्यात्मक मान भी लगाया जाता है और तब इसे इस तरह लिखा जाता है $n\,^{2S+1}L_J$।

आइए, अब हम एक हाइड्रोजन-सम परमाणु की वह अवस्था लें जिसके लिए $l = 0$। इस स्थिति में $S = \frac{1}{2}$, $L = 0$ और $J = \frac{1}{2}$। तब हम हाइड्रोजन-सम परमाणु के लिए लिख सकते हैं:

$$\boxed{J = \frac{1}{2} \quad \text{किसी भी } l = 0 \text{ अवस्था के लिए}}$$

इस प्रकार, एक हाइड्रोजन-सम परमाणु के लिए एक ही पद होता है, जिसका मान है $^2S_{1/2}$। यहाँ ध्यान दें कि स्पेक्ट्रमी पद में हमने संख्यात्मक मान शून्य की जगह संकेत S का प्रयोग यह बताने के लिए किया है कि इस स्थिति में $L = 0$ है। इसी तरह $L = 1, 2, 3 \ldots$ आदि के लिए हम संकेतों $P, D, F, \ldots$ आदि का इस्तेमाल करते हैं और इस तरह स्पेक्ट्रमी पद में L के संख्यात्मक मानों की जगह इन संकेतों को लिखते हैं। तो हम कक्षीय क्वांटम अंक को निम्न कोड के अनुसार अभिव्यक्त करते हैं:

$L = 0$ के लिए S, $L = 1$ के लिए P, $L = 2$ के लिए D, $L = 3$ के लिए F ...,

आइए, अब हम उन अवस्थाओं को लें जिनके लिए $l \neq 0$। $l = 1$ और $s = 1/2$, के लिए $L = 1$, $S = 1/2$ और $J = 3/2, 1/2$ जिससे दो पद मिलते हैं: $^2P_{1/2}$ और $^2P_{3/2}$।

इसी तरह, जब $l = 2$ और $s = 1/2$, तब $L = 2$, $S = 1/2$ और $J = 5/2, 3/2$।

इससे फिर से हमें दो पद $^2D_{3/2}$ और $^2D_{5/2}$ मिलते हैं। आम तौर पर, आप देख सकते हैं कि हाइड्रोजन-सम परमाणु के लिए J के दो ही संभव मान होंगे:

$$\boxed{J = L + \frac{1}{2} \text{ या } L - \frac{1}{2} \quad \text{किसी भी } l \neq 0 \text{ अवस्था के लिए}}$$

इस तरह, वे सभी अवस्थाएं जिनके लिए $l \geq 1$, द्विक (doublets) होती हैं यानी उनके लिए J के दो मान होते हैं। इन परिणामों में क्या आपने ध्यान दिया कि $n = 1$ के लिए एक ही अवस्था $^2S_{1/2}$ होती है लेकिन $n = 2$ के संगत तीन उत्तेजन अवस्थाएं होती हैं। हमारी आपको फिर से यह सलाह है कि हमने जो कुछ भी लिखा है उसे यूं ही पढ़ते न चले जाएं। इन संख्याओं को खुद गणना करके निकालें। साथ ही स्पेक्ट्रमी पदों के बारे में और ज़्यादा अभ्यास हासिल करने के लिए आप नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

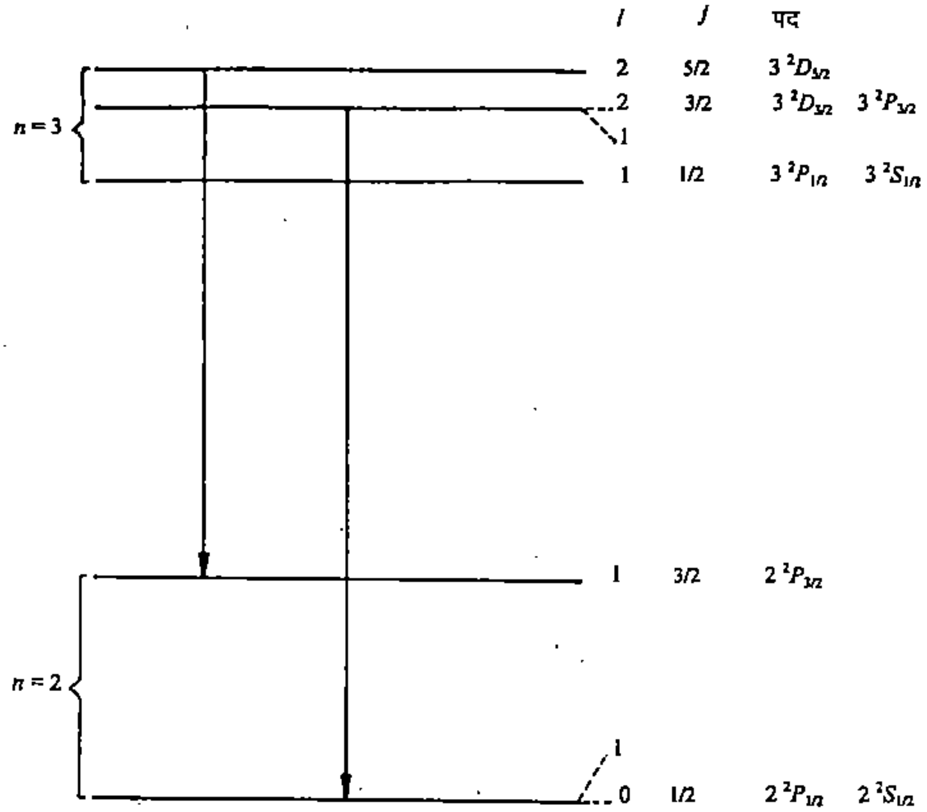
बोध प्रश्न 4

हाइड्रोजन-सम परमाणु के लिए $n = 2$ और $n = 3$ के लिए सभी स्पेक्ट्रमी पदों को निर्धारित करें।

समीकरण (9.44) के अनुसार, आइगेन ऊर्जा केवल n पर निर्भर करती है यानी स्पिन को शामिल करने से आइगेनफलनों की अपभ्रष्टता बढ़कर $2n^2$ हो जाती है। लेकिन अगर हम इस निकाय की क्वांटम यांत्रिकीय गणना में आपेक्षिकीय प्रभाव और कक्षीय कोणीय संवेग और स्पिन कोणीय संवेग की अन्योन्यक्रिया भी शमिल करें तो यह सिद्ध कर सकते हैं कि निकाय की आइगेन ऊर्जा क्वांटम अंक n के साथ-साथ क्वांटम अंक j पर भी निर्भर करती है। तब इसका मान होता है:

$$E_{nj} = -\frac{RZ^2}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right] \qquad (10.10)$$

जहाँ α को सूक्ष्म संरचनांक (fine structure constant) कहते हैं और यह $e^2/\hbar c$ (= 1/137) के बराबर है। इस प्रकार चित्र 9.5 ख में दिखाया गया हाइड्रोजन परमाणु का ऊर्जा स्तर आरेख बदलकर चित्र 10.5 जैसा हो जाता है।



चित्र 10.5 : हाइड्रोजन परमाणु में H_α रेखा की डबलेट संरचना ।

ध्यान दीजिए कि हालांकि $^2S_{1/2}$ और $^2P_{1/2}$ अवस्थाएं अभी भी अपभ्रष्ट हैं, $^2P_{3/2}$ अवस्था $^2P_{1/2}$ अवस्था से कुछ ऊंचाई पर है। इसी तरह $^2D_{5/2}$ अवस्था, $^2D_{3/2}$ अवस्था से ऊर्जा-स्तर-आरेख (energy level diagram) में ऊपर है। इस तरह, हाइड्रोजन परमाणु और हाइड्रोजन-सम परमाणुओं की एक सूक्ष्म संरचना भी होती है। हम इस बात की फिर से चर्चा करेंगे जब आप नीचे दिए गए अभ्यास को कर लेंगे।

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

समीकरण (10.10) का इस्तेमाल करके इलेक्ट्रॉन वोल्ट में हाइड्रोजन परमाणु के लिए $3^2P_{3/2}$ और $3^2P_{1/2}$ अवस्थाओं के बीच में ऊर्जा का अंतर निकालिए।

चूंकि उत्तेजन अवस्था में स्थित परमाणु की उसकी मूल अवस्था के मुकाबले ज़्यादा ऊर्जा होती है, तो उसमें स्वाभाविक प्रवृत्ति यह होती है कि वह निचली उत्तेजन अवस्थाओं या मूल अवस्था में संक्रमण करे, और इस तरह विद्युतचुम्बकीय विकिरण उत्सर्जित करके अपनी ऊर्जा घटाए। कोई परमाणु विद्युतचुम्बकीय ऊर्जा अवशोषित करके निचली अवस्थाओं से ऊंची उत्तेजन अवस्थाओं में भी संक्रमण कर सकता है। लेकिन ऐसे सभी संक्रमण अनुमत नहीं होते। क्वांटम यांत्रिकी के मुताबिक अनुमत संक्रमणों के लिए कुछ वरण नियम (selection rules) होते हैं जिनका यहाँ हम सिर्फ़ ज़िक्र करेंगे। बाकी संक्रमण अनुमत नहीं होते।

वरण नियम

माना कि एक हाइड्रोजन-सम परमाणु एक अवस्था nlj से $n'l'j'$ अवस्था में संक्रमण करता है। तब अनुमत संक्रमणों के लिए वरण नियम इस प्रकार हैं :

हाइड्रोजन-सम परमाणुओं के लिए वरण नियम

(i) $j' - j = \pm 1, 0$ या $\Delta j = \pm 1, 0$

लेकिन दोनों ही j और j' एक साथ शून्य नहीं हो सकते। (10.11)

(ii) $l' - l = \pm 1$ या $\Delta l = \pm 1$

यहाँ ध्यान दीजिए कि n' और n के मानों पर कोई पाबन्दी नहीं है। चूंकि एक अवस्था की पैरिटी $(-1)^l$ से निर्धारित होती है, तो अनुमत संक्रमण में परमाणु की पैरिटी बदल जाती है। ऊपर दिए गए नियमों के अनुसार $3\,^2P_{3/2}$ से $2\,^2S_{1/2}$ का संक्रमण अनुमत है। क्योंकि इस स्थिति में l के मान में परिवर्तन है $\Delta l = 1 - 0 = 1$। क्या $3\,^2D_{5/2}$ से $1\,^2S_{1/2}$ का संक्रमण अनुमत है? नहीं। क्योंकि इस स्थिति में $\Delta l = 2 - 0 = 2$.

वे सभी संक्रमण जो वरण नियमों का पालन नहीं करते, अनुमत संक्रमण नहीं होते: वे वर्जित (forbidden) संक्रमण कहलाते हैं। इनमें से कुछ संक्रमण जो अनुमत नहीं होते, परमाणुओं में होते ज़रूर हैं लेकिन इनकी तीव्रताएं अनुमत संक्रमणों की तीव्रताओं के मुकाबले 10^4 गुना छोटी होती हैं। चित्र 10.5 में दिखाए गए ऊर्जा स्तर आरेख की मदद से हम आसानी से प्रयोगों में देखी गयी बामर श्रेणी के पहले सदस्य की डबलेट संरचना समझा सकते है। ये इन दो संक्रमणों की वजह से उत्पन्न होती है: $3\,^2D_{5/2}$ से $2\,^2P_{3/2}$ और $3\,^2P_{3/2}$ से $2\,^2S_{1/2}$। इसी तरह, सोडियम लैम्प में D_1 और D_2 रेखाएं इन संक्रमणों से उत्पन्न होती हैं: $3\,^2P_{3/2}$ से $3\,^2S_{1/2}$ और $3\,^2P_{1/2}$ से $3\,^2S_{1/2}$। यही संरचनाएं नहीं बल्कि स्पेक्ट्रम के और भी कई लक्षणों को हम हरेक इलेक्ट्रॉन के साथ स्पिन कोणीय संवेग संबद्ध करके और समीकरण (10.11) द्वारा दिए वरण नियमों का प्रयोग करके समझा सकते हैं।

आइए, अब इन विचारों को बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणुओं पर लागू करें।

10.6 बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु

आइए, अब हम ऐसे परमाणु लें जिनमें एक से ज़्यादा इलेक्ट्रॉन होते हैं। अगर i वें परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग संदिश $\mathbf{l}_i$ है, तो संपूर्ण निकाय का कुल कक्षीय कोणीय संवेग सदिश $\mathbf{L}$ होगा:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i \tag{10.12}$$

अब क्वांटम अंक L का मान प्राप्त करने के लिए हम पहले l_1 और l_2 का संयोजन करके उनका परिणामी l_R निकालेंगे। फिर इस l_R को l_3 से संयोजित करके नया परिणामी l'_R निकालेंगे। इस प्रक्रिया को हम तब तक दोहराते हैं, जब तक कि हम सभी इलेक्ट्रॉनों के कक्षीय कोणीय संवेगों को नहीं जोड़ लेते। परमाणु के सदिश मॉडल के अनुसार परिणामी l_R के निम्न मान होते हैं:

$$l_R = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1,\ \dots,\ |l_1 - l_2| + 1,\ |l_1 - l_2| \tag{10.13}$$

ऊपर दिए हुए नियम का पालन करते हुए प्रत्येक l_R, l_3 के साथ संयोजित होगा और इससे हमें मिलेगा:

$$l'_R = l_R + l_3,\ l_R + l_3 - 1,\ \dots,\ |l_3 - l_R| + 1,\ |l_3 - l_R| \tag{10.14}$$

आदि। उदाहरण के लिए, यदि $l_1 = 1, l_2 = 1$ और $l_3 = 2$ तो l_R के मान क्रमशः 2, 1, 0 होंगे और l'_R के मान क्रमशः (4, 3, 2, 1, 0) और (3, 2, 1) और 2 होंगे। इसी तरह स्पिन कोणीय संवेग के लिए

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i \tag{10.15}$$

और परिणामी S के मान समीकरण (10.12) से (10.14) तक का पालन करके मिलते हैं, जहाँ l_i की जगह s_i रखा जाता है। क्योंकि हरेक इलेक्ट्रॉन के लिए $s_i = 1/2$, इसलिए

दो इलेक्ट्रॉनों के लिए $S = 1$ और 0 और तीन इलेक्ट्रॉनों के लिए $S = (3/2, 1/2)$ और 1/2। अब आप आसानी से इस बात की जाँच कर सकते हैं कि जिस परमाणु में सम संख्या में इलेक्ट्रॉन होंगे तो उसके लिए परिणामी S का पूर्णांकीय मान होगा लेकिन जिन परमाणुओं में विषम संख्या में इलेक्ट्रॉन होंगे, परिणामी के मान अर्द्ध-पूर्णांकीय होंगे।

अंत में **L** और **S** समीकरण (10.6) के अनुसार संयोजित होते हैं और फिर हमें कुल कोणीय संवेग क्वांटम अंक J का मान मिलता है। उसके बाद हम स्पेक्ट्रमी पद $^{2S+1}L_J$ को लिख सकते हैं। J के मान समीकरण (10.13) से मिलते हैं जहाँ l_R, l_1 और l_2 की जगह क्रमशः J, L और S रखे जाते हैं। इस तरह,

$$J = L + S,\ L + S - 1,\ \ldots,\ |L - S| + 1,\ |L - S| \qquad (10.16)$$

इस तरह के कोणीय संवेगों के योग को LS युग्मन (LS coupling) कहते हैं। कोणीय संवेगों को जोड़ने का एक और तरीक़ा है, जिसे JJ युग्मन कहते हैं, लेकिन उसके बारे में हम यहाँ चर्चा नहीं करेंगे।

आइए, अब देखें कि एक बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु में प्रत्येक इलेक्ट्रॉन के साथ ये चार क्वांटम अंक (n, l, m_l, m_s) किस तरह संबद्ध किए जाते हैं। परमाणु के स्थायित्व के लिए यह ज़रूरी है कि उसकी ऊर्जा न्यूनतम रहे। इससे यह परिणाम निकलता है कि एक परमाणु में सभी इलेक्ट्रॉनों के लिए $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ और $m_s = +1/2$ या $-1/2$ होना चाहिए। लेकिन यह तो सही नहीं है। परमाणु में उनके क्वांटम अंकों n और l के मुताबिक परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों के वितरण को उस परमाणु का **इलेक्ट्रॉनिक विन्यास** (electronic configuration) कहते हैं। यह पाउली अपवर्जन सिद्धांत से निर्धारित होता है। इसकी हम यहाँ संक्षेप में चर्चा करेंगे।

पाउली अपवर्जन सिद्धांत

इस सिद्धांत के अनुसार **किसी भी परमाणु में किन्हीं दो इलेक्ट्रॉनों के लिए इन चार क्वांटम अंकों (n, l, m_l, m_s) के एक ही मान नहीं हो सकते।** उदाहरण के लिए, हीलियम परमाणु की मूल अवस्था में इसके दो परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों के साथ संबद्ध क्वांटम अंक हैं: (1, 0, 0, +1/2) और (1, 0, 0, −1/2) । इस तरह पहले तीन क्वांटम अंक n, l और m_l एक से ही हैं लेकिन इन दोनों इलेक्ट्रॉनों के लिए चौथा क्वांटम अंक m_s फ़र्क है। लेकिन हीलियम में उत्तेजन अवस्था में एक इलेक्ट्रॉन (1, 0, 0, +1/2) अवस्था में हो सकता है जबकि दूसरे इलेक्ट्रॉन के लिए क्वांटम अंकों n, l, m_l और m_s के कोई भी और मान हो सकते हैं। अब अगर $s_1 = 1/2$ और $s_2 = 1/2$ तो परिणामी S का मान 1 और 0 दोनों ही हो सकते हैं। और तब हमें दो प्रकार के पद मिलेंगे: ^3L_J और ^1L_J। इनमें से पहले पद के लिए जिसे त्रिक (triplet) कहा जाता है, J के तीन मान हैं: $L + 1, L, L - 1$ जहाँ $L = 1$। दूसरी ओर, दूसरे पद के लिए जिसे एकक (singlet) कहा जाता है J का एक ही मान है L के बराबर। पाउली अपवर्जन सिद्धांत की मदद से अब हम परमाणु की **कोश संरचना** (shell structure) का वर्णन कर सकते हैं।

जैसाकि आपने इस इकाई में पहले भी पढ़ा है, बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु के केन्द्रीय बल क्षेत्र की गोलाकार सममिति नहीं होती। इसलिए निकाय की ऊर्जा L और S दोनों पर निर्भर करती है। एक क्वांटम यांत्रिकीय गणना से हमें पता चलता है कि हीलियम परमाणु के लिए त्रिक पदों की उनके संगत एकक पदों के मुकाबले कम ऊर्जाएं होती हैं। लेकिन एक अच्छे सन्निकटन के तौर पर यह माना जा सकता है कि **प्रत्येक परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा उसके प्रमुख क्वांटम अंक n और कक्षीय कोणीय संवेग क्वांटम अंक l दोनों पर निर्भर करती है।** आप जानते हैं कि हाइड्रोजन परमाणु के लिए ऐसा नहीं होता। इन ऊर्जाओं को m_l और m_s पर निर्भर नहीं करना चाहिए क्योंकि इनमें से प्रत्येक इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा गोलाकार सममिति वाली है और स्पिन पर निर्भर नहीं करती। अतः एक ही ऊर्जा E_{nl} वाली $2(2l + 1)$ अपभ्रष्ट अवस्थाएं हैं जोकि m_s के दो संभव मानों और m_l के $(2l + 1)$ संभव मानों के संगत हैं। इनमें सभी अवस्थाओं की लगभग बराबर ऊर्जा होगी। $2(2l + 1)$ स्पिन ऑर्बिटल (spin orbitals) का यह समूह ऊर्जा E_{nl} के संगत और n और l क्वांटम अंकों के प्रत्येक युग्म के लिए एक **परमाण्वीय उपकोश** (sub shell) बनाता है। इसे (nl) ऊर्जा उपकोश कहा जाता है। इस प्रकार किसी परमाणु में $n = 2$ और $l = 1$ के लिए, $(2p)$ उपकोश में $2(2 \times 1 + 1) = 6$ इलेक्ट्रॉन होंगे।

n के प्रत्येक मान के लिए एक दिए हुए परमाणु में एक **इलेक्ट्रॉन कोश** निर्धारित होता है। nवें कोश में इलेक्ट्रॉनों की संख्या $2n^2$ होती है। इस प्रकार $n = 1$ वाले कोश में 2 इलेक्ट्रॉन होंगे, $n = 2$ वाले कोश में 8 इलेक्ट्रॉन होंगे, आदि। साथ ही साथ हरेक कोश में n उपकोश होते हैं जिन्हें n और l से संकेतित किया जाता है, क्योंकि l का मान 0 से $n - 1$ तक होता है। और इनमें से प्रत्येक nl उपकोश में $2(2l + 1)$ स्पिन-और्बिटल अवस्थाएं होती हैं। उदाहरण के लिए, $n = 2$ के लिए $l = 0$ और 1, और दो उपकोश ($2s$) और ($2p$) होंगे। $2s$ उपकोश में $2(2 \times 0 + 1) = 2$ इलेक्ट्रॉन होंगे। $2p$ उपकोश में 6 इलेक्ट्रॉन होंगे, आदि।

$n = 1, 2, 3, 4$ ... आदि के संगत इन कोशों को K, L, M, N ..... आदि प्रतीकों से भी दिखाया जाता है। पाउली अपवर्जन सिद्धांत के अनुसार एक कोश में सभी इलेक्ट्रॉनों को 4 क्वांटम अंकों के भिन्न समुच्चयों और भिन्न आइगेनफलनों से दिखाया जाता है।

संक्षेप में परमाणु संख्या Z वाले एक परमाणु की **मूल अवस्था** (ground state) उन Z इलेक्ट्रॉनों के बद्ध निकाय के संगत वह निम्नतम ऊर्जा अभिविन्यास है, जो एक कोशीय संरचना में रहते हैं। सबसे अंदर के इलेक्ट्रॉनों से शुरू करके बढ़ती हुई ऊर्जा के संगत कोश और उपकोश इस प्रकार दिए जाते हैं:

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, [4s, 3d], 4p, [5s, 4d], 5p, [6s, 4f, 5d] \ldots \qquad (10.17)$$

यहाँ पर 1, 2, 3 आदि अंक n के मान के लिए हैं और $s, p, d, f, \ldots$ आदि अक्षर $l = 0, 1, 2, 3$ आदि के संगत हैं। समीकरण (10.17) में कोष्ठक में दिए हुए स्तर वे हैं, जिनके ऊर्जा मान लगभग बराबर हैं। हालांकि हमने यह कहा है कि n और l के बराबर मानों वाले इलेक्ट्रॉनों की लगभग बराबर ऊर्जाएं होती हैं लेकिन एक विस्तृत अध्ययन से पता चलता है कि उपकोशों को भरने के वे नियम जो तत्वों की आवर्ती सारणी में पूरी तरह लागू होते हैं, इस प्रकार हैं:

1. उपकोशों को $n + l$ के समान मानों के संगत समूह में रखा जाता है।
2. समूहों को $n + l$ के बढ़ते हुए मानों के संगत भरा जाता है।
3. प्रत्येक $n + l$ समूह में, उपकोशों को घटते हुए l के मानों के संगत भरा जाता है।

अब आप इन विचारों को लागू करके आवर्ती सारणी में तत्वों की इलेक्ट्रॉनिक संरचना को प्राप्त कर सकते हैं यानी आवर्ती सारणी में किसी भी परमाणु के लिए मूल अवस्था अभिविन्यास को लिख सकते हैं।

तत्वों का आवर्ती निकाय

Z इलेक्ट्रॉनों वाले एक उदासीन परमाणु का मूल अवस्था विन्यास उन्हें ऊपर दिए गए नियमों के मुताबिक वितरित करने से मिलता है।

पहला तत्व है परमाण्वीय हाइड्रोजन जिसके लिए $Z = 1$। इसके लिए मूल अवस्था विन्यास है $1s$। $Z = 2$ (हीलियम) के लिए दोनों इलेक्ट्रॉन $1s$ ऊर्जा स्तर में होते हैं और विन्यास है $1s^2$। इस प्रकार हम उनका इलेक्ट्रॉन विन्यास इस तरह लिख सकते हैं:

H	He
$1s$	$1s^2$

लीथियम परमाणु के लिए मूल अवस्था में तीन इलेक्ट्रॉन होते हैं और उसका इलेक्ट्रॉनिक विन्यास है $1s^2\,2s^1$ क्योंकि $1s^3$ पाउली अपवर्जन नियम से अनुमत नहीं है। $Z = 4$ (बिरीलियम) के लिए विन्यास है $1s^2\,2s^2$. इस प्रकार हमें मिलता है:

Li	Be
$1s^2\,2s^1$	$1s^2\,2s^2$

अगला तत्व है बोरॉन ($Z = 5$). चूंकि K कोश और $2s$ उपकोश भरे हुए हैं, इसलिए पांचवां इलेक्ट्रॉन $2p$ उपकोश में जाता है। जैसे-जैसे Z, 5 से 10 तक बढ़ता है, इलेक्ट्रॉन

लगातार $2p$ उप-कोश को भरते रहते हैं। इस प्रकार $Z = 5$ से 10 के लिए हमें मिलता है

B	C	N	O	F
$1s^2\, 2s^2\, 2p^1$	$...2s^2\, 2p^2$	$...\, 2s^2\, 2p^3$	$...\, 2s^2\, 2p^4$	$...\, 2s^2\, 2p^5$
Ne				
$...\, 2s^2\, 2p^6$				

फिर सोडियम परमाणु, जिसके 11 इलेक्ट्रॉन हैं, के लिए इलेक्ट्रॉनिक विन्यास है: $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^1$। इसके चार उपकोश हैं जिनके लिए (nl) के अलग-अलग मान हैं। इन चार उपकोशों में से पहले तीन में अधिकतम अनुमत इलेक्ट्रॉन भरे हैं। ऐसे उपकोशों को संवृत उपकोश (closed subshell) कहते हैं। इसमें आखिरी उपकोश को विवृत उपकोश (open subshell) कहते हैं।

$Z = 11$ से $Z = 18$ (आर्गन) के लिए $3p$ स्तर लगातार भरते चलते जाते हैं। $Z = 19$ (पोटैशियम) के लिए आप शायद सोचेंगे कि 19वां इलेक्ट्रॉन $3d$ स्तर में जाता है। लेकिन ऐसा नहीं है क्योंकि $4s$ स्तर की ऊर्जा $3d$ स्तर से कम होती है। इस प्रकार पोटैशियम परमाणु का मूल इलेक्ट्रॉनिक विन्यास है $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^1$, $1s^2\, 2s^2\, 2p^2\, 3s^6\, 3p^6\, 4d^1$ नहीं। इसी तरह स्कैंडियम परमाणु $(Z = 21)$ के लिए मूल अवस्था इलेक्ट्रॉनिक विन्यास है: $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d^1$। ये विन्यास प्रायोगिक तौर पर प्रेक्षित परिणामों से मेल खाते हैं। आगे पढ़ने से पहले आप इन बातों को अच्छी तरह समझ लें। इसके लिए नीचे दिया गया अभ्यास करें।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

$Z = 20$, $Z = 35$, $Z = 31$ और $Z = 37$ वाले परमाणुओं के इलेक्ट्रॉनिक विन्यासों की गणना करें।

बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणुओं के स्पेक्ट्रमी पद

अब सवाल उठता है कि हम एक बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु के स्पेक्ट्रमी पदों की गणना कैसे करें ? ऐसे परमाणुओं के लिए कुल L, S और J मानों में केवल विवृत उपकोशों का ही योगदान होता है।

आइए, अब हम उदाहरण के तौर पर कार्बन परमाणु $(Z = 6)$ लें। उसका इलेक्ट्रॉनिक विन्यास $1s^2\, 2s^2\, 2p^2$ है। क्योंकि हमें सिर्फ खुले उपकोश से ही योगदान लेना है, तो आइए इसके $2p$ उपकोश के दो इलेक्ट्रॉनों को लें। इन इलेक्ट्रॉनों के लिए

$$n_1 = 2,\ l_1 = 1,\ s_1 = \frac{1}{2} \text{ और } n_2 = 2,\ l_2 = 1,\ s_2 = \frac{1}{2}$$

इस तरह, कुल स्पिन

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},\ \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1,\ 0$$

और कुल कक्षीय कोणीय संवेग

$$L = 1 + 1,\ 1 + 1 - 1,\ |1 - 1|$$
$$= 2,\ 1,\ 0$$

इस प्रकार $S = 0$ के लिए संभव J मान हैं $J = 0, 1, 2$ और $S = 1$ के लिए $J = 1, (2, 1, 0), (3, 2, 1)$।

अब पाउली सिद्धांत हमें यह भी बताता है कि $S = 0$, L के सम मानों के संगत होता है और $S = 1$, L के विषम मानों के संगत। इस प्रकार हमें केवल निम्न L, S, J संयोजन ही मिल सकते हैं:

$S = 0, L = 0$ जिससे $J = 0$

$S = 0, L = 2$ जिससे $J = 2$

$S = 1, L = 1$ जिससे $J = 2, 1, 0$

इस तरह स्पेक्ट्रमी पद हैं:

$${}^1S_0, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2 \text{ और } {}^1D_2$$

अब, सवाल उठता है कि इनमें से निम्नतम ऊर्जा किसकी है ? इसका पता हम नीचे दिए हुण्ड के **नियमों** (Hund's rules) से लगा सकते हैं:

1. अधिकतम स्पिन वाली अवस्था की निम्नतम ऊर्जा होती है।
2. यदि अपूर्ण उपकोश आधे से कम भरा हो तो $J = |L - S|$ मूल अवस्था होती है और अगर वह आधे से ज़्यादा भरा हो, तो $J = L + S$ मूल अवस्था होती है।
3. S के दिए मान वाले ऊर्जा स्तरों के लिए वह अवस्था जिसके लिए L का मान अधिकतम होता है, निम्नतम ऊर्जा वाली अवस्था होती है।

आइए, इन नियमों को कार्बन परमाणु पर लागू करें। पहला नियम हमें बताता है कि निम्नतम अवस्था ${}^3P$ अवस्थाओं में से एक है। दूसरा नियम हमें बताता है कि निम्नतम ऊर्जा अवस्था $J = 0$ के संगत है। इस प्रकार कार्बन परमाणु की मूल अवस्था ${}^3P_0$ अवस्था है। तीसरे नियम का इस्तेमाल करके हम यह बता सकते हैं कि ${}^1D_2$ अवस्था की ${}^1S_0$ अवस्था से कम ऊर्जा होगी हालांकि दोनों में से कोई भी मूल अवस्था नहीं है। यहां यह बात समझ लीजिए कि हुण्ड के नियम ऐसे ही नहीं आ गए हैं, ये क्वांटम यांत्रिकीय गणनाओं के अनुसार हैं।

स्पेक्ट्रोस्कोपी में स्पेक्ट्रमी पद बहुत महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि L, S, J क्वांटम अंक उन वरण नियमों का हिस्सा होते हैं, जो परमाण्वीय अवस्थाओं के बीच संक्रमण को नियंत्रित करते हैं। यहाँ हम उनको संक्षेप में बताएंगे, लेकिन इससे पहले आप नीचे दिया गया अभ्यास करके इन अवधारणाओं को अच्छी तरह समझ लें

बोध प्रश्न 7

10 मिनट लगाएं

He, Li, Si और Sc की मूल अवस्थाओं के स्पेक्ट्रमी पदों की गणना कीजिए।

परमाणु उत्तेजन अवस्थाओं में भी रह सकते हैं। लेकिन अपनी ऊर्जाओं को न्यूनतम करने के लिए वे एक उत्तेजन अवस्था से निचली अवस्थाओं और मूल अवस्था में संक्रमण करते हैं। बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु में अनुमत संक्रमणों के वरण नियम इस प्रकार हैं:

(i) $\Delta J = 0, \pm 1$ ($J = 0$ से $J' = 0$ अनुमत नहीं है)

(ii) $\Delta L = 0, \pm 1$

(iii) $\Delta S = 0$

(iv) $\Delta l = \pm 1$ (10.18)

जहाँ l उस परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग क्वांटम अंक है जो उस संक्रमण में हिस्सा लेता है। इन्हीं नियमों का पालन तब भी होता है जब कोई परमाणु विद्युतचुम्बकीय विकिरण का अवशोषण करके एक निचली अवस्था से ऊंची उत्तेजन अवस्था में संक्रमण करता है। परमाण्वीय रेखा स्पेक्ट्रम का एक गुण यह भी है कि उत्सर्जित स्पेक्ट्रमी रेखा की परिमित चौड़ाई होती है। इस गुण को अभी तक बताई गई संकल्पनाओं के आधार पर समझा जा सकता है। ऐसा उत्तेजन अवस्थाओं के परिमित जीवन काल के कारण होता है। अब हम इसकी संक्षेप में चर्चा करेंगे।

10.6.1 उत्तेजन अवस्थाओं का जीवन काल और लाइन चौड़ाई

आइए, एक परमाणु की दो स्थायी अवस्थाएं लें जिनकी ऊर्जाएं E_1 और $E_2 (> E_1)$ हैं। अगर परमाणु ऊंची अवस्था में है तो उसकी एक स्वाभाविक प्रवृत्ति यह होगी कि वह

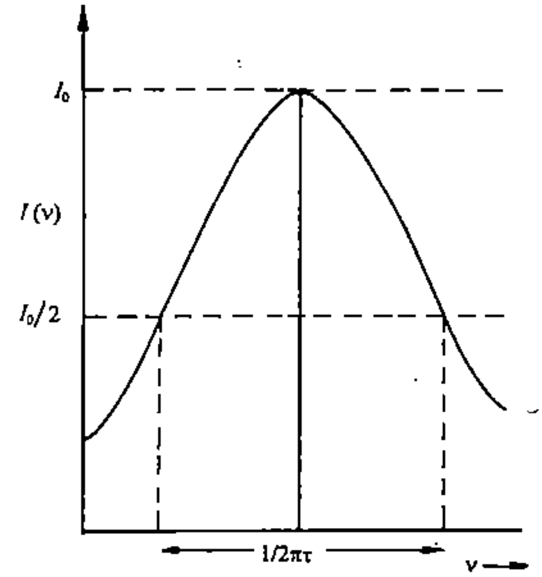
निचली अवस्था में संक्रमण करे और इस संक्रमण के कारण वह विद्युतचुम्बकीय विकिरण उत्सर्जित करेगा। संक्रमण के शुरूआत में परमाणु की ऊर्जा E_2 थी और उसके अंत में परमाण्वीय ऊर्जा E_1 है। अतः ऊर्जा समय के साथ कम हो रही है। इस ऊर्जा आधिक्य (excess energy) के बारे में देखा गया है कि वह समय के साथ चरघातांकी रूप से घटती है। क्षण t पर ऊर्जा आधिक्य का मान है:

$$E = E_0 \exp(-\gamma t) \qquad (10.19 \text{ क})$$

जहाँ $E_0 = E_2 - E_1$। अब एक उत्तेजन अवस्था का जीवन काल वह समय है जिसमें E घटकर E_0/e के बराबर रह जाती है। आप यह देख सकते हैं कि इस परिभाषा के मुताबिक

$$\tau = 1/\gamma \qquad (10.19 \text{ ख})$$

अब ऊर्जा आधिक्य E के समय के साथ घटने के कारण परमाणु द्वारा उत्सर्जित विकिरण एकवर्णी नहीं होता। प्रति एकक आवृत्ति परास उत्सर्जित ऊर्जा $I(\nu)$ का आवृत्ति ν के सापेक्ष आरेख चित्र 10.6 में दिखाया गया है।



चित्र 10.6 : उत्सर्जित विकिरण का स्पेक्ट्रमी वितरण ।

हम पाते हैं कि $I_0/2$ पर वक्र की आवृत्ति चौड़ाई जहाँ I_0, $I(\lambda)$ का अधिकतम मान है, $1/2\pi\tau$ है। अतः स्पेक्ट्रमी रेखा की ऊर्जा चौड़ाई है:

$$\Delta E = h\Delta\nu = h/2\pi\tau$$

या

$$\tau\Delta E = \hbar \qquad (10.19 \text{ ग})$$

इस तरह, जीवन काल जितना कम होता है उतना ही उत्सर्जित रेखा की चौड़ाई ज़्यादा होती है। यहाँ आप याद करें कि एक लाइन की चौड़ाई अनिश्चितता सिद्धांत का परिणाम है और τ को **प्राकृतिक जीवन काल** कहते हैं। उत्तेजन अवस्थाओं के लिए, जो कि निचली अवस्थाओं से अनुमत संक्रमणों द्वारा संबद्ध हैं, यह जीवन काल 10^{-8} s के परिमाण का होता है। अन्य उत्तेजन अवस्थाओं के लिए यह जीवन काल और भी लम्बा होता है और कई सेकंड के बराबर हो सकता है। समीकरण (10.19 ग) के मुताबिक τ में वृद्धि स्पेक्ट्रमी रेखा की चौड़ाई को कम कर देती है।

आइए, अब हम जो कुछ भी आपने इस इकाई में पढ़ा है, उसका सार यहाँ दें।

10.7 सारांश

- इस इकाई में आपने **स्टर्न-गर्लैक प्रयोग** के बारे में पढ़ा है जिसके द्वारा एक परमाणु

का चुम्बकीय आघूर्ण मापा गया और जिससे आकाशी क्वांटमीकरण का भी सत्यापन किया गया। स्टर्न–गर्लैक के प्रयोग के गुणात्मक परिणामों को केवल तीन क्वांटम अंकों, n, l और m_l की सहायता से नहीं समझाया जा सका। इसके लिए गॉडस्मिट और ऊहलेनबक ने अंतर्जात कोणीय संवेग की संकल्पना दी जिसे एक इलेक्ट्रॉन से संबद्ध **स्पिन कोणीय संवेग S** कहा जाता है। **S** से संबद्ध क्वांटम अंक का मान हमेशा ही 1/2 होता है जिससे $m_s = \pm 1/2$ मिलता है।

- कक्षीय और स्पिन कोणीय संवेगों के संयोजन से कुल कोणीय संवेग **J** मिलता है और क्वांटम अंक j और m_j मिलते हैं। LS युग्मन (LS coupling) के कारण और आपेक्षिकीय प्रभावों के कारण हाइड्रोजन-सम परमाणुओं की ऊर्जा n और j दोनों पर ही निर्भर करती है। इससे हाइड्रोजन परमाणु की बामर श्रेणी के पहले सदस्य की संरचना को समझाया जा सकता है और सोडियम लैम्प में उत्पन्न दो नज़दीकी स्पेक्ट्रमी रेखाओं (D_1 और D_2) को समझाया जा सकता है।
- जब कोई हाइड्रोजन-सम परमाणु या बहु-इलेक्ट्रॉन परमाणु एक स्थायी अवस्था से दूसरी स्थायी अवस्था में संक्रमण करता है तो कुछ **वरण नियमों** का पालन होता है।
- प्रत्येक उत्तेजन अवस्था का एक **परिमित जीवन काल** τ होता है और जब कोई परमाणु एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण करता है, तो इससे उत्पन्न स्पेक्ट्रमी रेखा की परिमित चौड़ाई होती है : $\Delta E = \hbar/\tau$ ।

10.8 अंत में कुछ प्रश्न

30 मिनट लगाएं

1. बोध प्रश्न 3 में दिए गए **S** के व्यंजक का इस्तेमाल करके सिद्ध करें कि यह निम्न संकारक समीकरण को संतुष्ट करता है

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i\hbar\mathbf{S}$$

2. दो विभिन्न परमाणुओं के लिए जो कि P और D अवस्थाओं में हैं, J के अनुमत मान एक ही हैं और 3 के बराबर हैं। इन अवस्थाओं में परमाणुओं के स्पिन कोणीय संवेग निकालिए।
3. कारण सहित बताइए कि एक बहु-इलेक्ट्रान परमाणु में निम्नलिखित संक्रमण अनुमत हैं या नहीं:

(i) ${}^3P_0 \to {}^3S_1$ (ii) ${}^3S_1 \to {}^1S_0$

(iii) ${}^1S_{1/2} \to {}^1P_{3/2}$ (iv) ${}^1S_{1/2} \to {}^1D_{3/2}$

10.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $$\mu_B = e\hbar/2\mu = \frac{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 1.054 \times 10^{-34}\ \text{Js}}{2 \times 9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg}}$$

$$= 9.27 \times 10^{-24}\ \text{JT}^{-1}\ (\text{या amp m}^2)$$

2. माना कि प्रचक्रण कर रहे इलेक्ट्रॉन की त्रिज्या और रैखिक वेग क्रमशः r और v हैं। इलेक्ट्रॉन के अपने अक्ष के इर्द-गिर्द प्रचक्रण से एक $ev/2\pi r$ के परिमाण वाली धारा उत्पन्न होती है। इसके संगत चुम्बकीय आघूर्ण है:

$$\mu_B = IA = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2$$

इस राशि को प्रायोगिक मान $e\hbar/2\mu$ के बराबर रखने पर हमें मिलता है:

$$v = \hbar/\mu r$$

अब इलेक्ट्रॉन की क्लासिकी त्रिज्या, उसकी नैज स्थिर वैद्युत ऊर्जा (self electrostatic energy) e^2/r को उसकी विराम द्रव्यमान ऊर्जा μc^2 के बराबर रखने पर मिलती है। इस प्रकार

$$\frac{v}{c} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137$$

अतः v, c से अधिक होता है और यह आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत का उल्लंघन करता है।

3. आप आसानी से मैट्रिक्स गुणन के द्वारा दिखा सकते हैं कि

$$\sigma_x\alpha = \beta, \quad \sigma_x\beta = \alpha, \quad \sigma_y\alpha = i\beta, \quad \sigma_y\beta = -i\alpha$$

$$\sigma_z\alpha = \alpha, \quad \sigma_z\beta = -\beta$$

$\sigma_x \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$

$\sigma_x \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$

$\sigma_y \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i\beta$

$\sigma_y \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i\alpha$

$\sigma_z \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$

$\sigma_z \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\beta$

अतः
$$\begin{aligned}
S^2 \alpha &= (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)\,\alpha \\
&= \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)\,\alpha \\
&= \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x\,\sigma_x + \sigma_y\,\sigma_y + \sigma_z\,\sigma_z)\,\alpha \\
&= \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x\,\beta + i\sigma_y\,\beta + \sigma_z\,\alpha) \\
&= \frac{\hbar^2}{4}(\alpha + \alpha + \alpha) \\
&= \frac{3\hbar^2}{4}\,\alpha
\end{aligned}$$

और $S_z\,\alpha = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_z\,\alpha = \frac{\hbar}{2}\,\alpha$

इसी तरह, $S^2\,\beta = (3/4)\hbar^2\,\beta$ और $S_z\,\beta = -(1/2)\,\hbar\beta$

इसके साथ-साथ

$$\alpha\beta = (\,1\;\;0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

अतः α और β लांबिक हैं।

4. $n = 2$ के लिए $l = 0, 1$ और $s = 1/2$। अतः

$L = 0$ के लिए $J = 1/2$

$L = 1$ के लिए $J = 1/2, 3/2$

अतः पद हैं $2\,^2S_{1/2}, 2\,^2P_{1/2}, 2\,^2P_{3/2}$।

$n = 3$ के लिए $l = 0, 1, 2$ और $s = 1/2$। अतः

$L = 0$ के लिए $J = 1/2$

$L = 1$ के लिए $J = 1/2, 3/2$

$L = 2$ के लिए $J = 3/2, 5/2$

अतः पद हैं: $3\,^2S_{1/2}, 3\,^2P_{1/2}, 3\,^2P_{3/2}\; 3\,^2D_{3/2}, 3\,^2D_{5/2}$.

5. $\Delta E = -\frac{RZ^4 \alpha^2}{n^3} [1/2 - 1/1]$

$= 13.6 \times \left(\frac{1}{137}\right)^2 \times \frac{1}{27} \times \frac{1}{2}\, \text{eV}$

$= 1.34 \times 10^{-5}$ eV.

6. ये हैं

$Z = 20$ (कैल्सियम) $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2$

$Z = 25$ (मैंगनीज़) $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d^5$

$Z = 31$ (गैलियम) $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d^{10}\, 4p$

$Z = 37$ (रुबिडियम) $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d^{10}\, 4p^6\, 5s$

7. हीलियम ($Z = 2$) के लिए विन्यास है $1s^2$।

चूंकि $n_1 = 1,\ l_1 = 0,\ s_1 = \frac{1}{2},\ n_2 = 1,\ l_2 = 0,\ s_2 = \frac{1}{2}$

इसलिए $L = 0$

$S = 1, 0$ जिससे $L = 0, S = 0$ के लिए $J = 0$ (क्योंकि $S = 1$ केवल L के विषम मानों के लिए होता है जो इस स्थिति में नहीं हैं।)

अतः हीलियम परमाणु ($1s^2$) की मूल अवस्था के लिए स्पेक्ट्रमी पद है: $^1S_0$

लीथियम के लिए $Z = 3$ और विन्यास है $1s^2\, 2s^1$ अतः अपूर्ण कोश में इलेक्ट्रॉन के लिए

$n = 2,\ l = 0,\ s = \frac{1}{2}$ और $J = \frac{1}{2}$

अतः मूल अवस्था स्पेक्ट्रमी पद है $2\,^2S_{1/2}$

Si($Z = 14$) के लिए विन्यास है $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^2$। अर्पूण उपकोश में दो इलेक्ट्रॉनों के लिए

$$n_1 = 3,\ l_1 = 1,\ s_1 = \frac{1}{2},\ n_2 = 3,\ l_2 = 1,\ s_2 = \frac{1}{2}$$

एक बार फिर $S = 1, 0$

$L = 2, 1, 0$

$S = 0, L = 0$ के लिए $J = 0$

$S = 1, L = 1$ के लिए $J = 2, 1, 0$

$S = 0, L = 2$ के लिए $J = 2$

अतः स्पेक्ट्रमी पद हैं $^1S_0, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2$ और $^1D_2$। मूल अवस्था है $3\,^3P_0$।

Sc ($Z = 21$) के लिए, विन्यास है $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 4s^2\, 3d_1$। संयोजकता इलेक्ट्रॉन के लिए, $n = 3,\ l = 2,\ s = 5/2$ और $J = 3/2, 1/2$। अतः स्पेक्ट्रमी पद हैं $3\,^2D_{5/2}$, $3\,^2D_{3/2}$। हुण्ड के नियम 2 के अनुसार, मूल अवस्था है: $3\,^2D_{3/2}$ क्योंकि उपकोश आधे से कम भरा है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. दिया है:

$$(\mathbf{S} \times \mathbf{S})_x = S_y S_z - S_z S_y$$

$$= \frac{1}{4} \hbar^2 (\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y)$$

$$= \frac{1}{4} \hbar^2 (2i\sigma_x) = i\frac{\hbar^2}{2} \sigma_x = i \hbar S_x \quad (\because \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x \text{ और } \sigma_z\sigma_y = -i\sigma_x)$$

इसी तरह, हम $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ के y और z घटकों के मान निकाल सकते हैं।

2. P अवस्था के लिए $L = 1$ और दिया है कि $J = 3$। अतः
$S = J - L = 2$। D अवस्था के लिए, $L = 2$ और $J = 3$। इसलिए $S = 3 - 2 = 1$।

3. i) अनुमत, क्योंकि यह समीकरण (10.18) में दिए गए वरण नियम के अनुसार है।

   ii) अनुमत नहीं है क्योंकि $\Delta S \neq 0$।

   iii) अनुमत।

   iv) अनुमत नहीं है, क्योंकि $\Delta L = 2$।

इकाई 11 X-किरण स्पेक्ट्रम

इकाई की रूपरेखा

11.1 प्रस्तावना

इकाई 10 में आपने परमाणुओं के प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम के बारे में पढ़ा। आप जानते हैं कि प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम तब उत्पन्न होता है, जबकि बाहरी विवृत उपकोशों में स्थित इलेक्ट्रॉन उत्तेजन अवस्थाओं से मूल अवस्थाओं में संक्रमण करते हैं। इस प्रक्रिया में उत्सर्जित फ़ोटॉनों की तरंग दैर्ध्य प्रकाशकीय क्षेत्र में होती है। इस तरह प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम का प्रेक्षण परमाण्वीय कोशीय संरचना (shell structure) के सिद्धांत को प्रमाणित करता है। लेकिन परमाणुओं की कोशीय सरंचना के बारे में सिर्फ़ प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम से ही जानकारी नहीं मिलती। जैसाकि हम इकाई 10 में कह चुके हैं परमाणु के अंदरूनी कोशों में इलेक्ट्रॉनों के संक्रमण के कारण X-किरण स्पेक्ट्रम भी उत्पन्न होता है।

अतः इस खंड की आखिरी इकाई में हम X-किरण स्पेक्ट्रम की चर्चा करेंगे। X-किरणों को उत्पन्न करने के लिए एक निर्वात नलिका में स्थित ऐन्टिकैथोड पर उच्च ऊर्जा इलेक्ट्रॉनों द्वारा बमबारी की जाती है। इस बमबारी के कारण दो तरह की X-किरणें उत्पन्न होती हैं। उनमें से एक का तो संतत स्पेक्ट्रम होता है और वह ऐन्टिकैथोड के अंदर आवेशित इलेक्ट्रॉनों का त्वरण कम होते जाने के कारण उत्पन्न होती हैं। ऐसी X-किरणों की अधिकतम आवृत्ति E/h होती है जहाँ E बमबारी करने वाले इलेक्ट्रॉनों की गतिज ऊर्जा है। इन X-किरणों की तीव्रता का आवृत्ति के अनुसार वितरण ऐन्टिकैथोड के पदार्थ पर निर्भर नहीं करता। इस परिघटना को **ब्रेम्स्ट्रालुंग** (bremsstrahlung) कहा जाता है।

इसी के साथ-साथ एक-दूसरे तरह की X-किरणें भी उत्पन्न होती हैं। उनकी आवृत्तियां ऐन्टिकैथोड के पदार्थ के लिए अभिलक्षणिक आवृत्तियाँ होती हैं। इसलिए इन्हें **अभिलक्षणिक X-किरणों** (characteristic X-rays) के नाम से जाना जाता है। इन्हीं अभिलक्षणिक X-किरणों के अध्ययन से हमें परमाण्वीय संरचना के बारे में जानकारी मिलती है। इस इकाई में हमारी अभिरुचि अभिलक्षणिक X-किरणों में है, जो विविक्त होती हैं और परमाणुओं के अंदरूनी कोशों में इलेक्ट्रॉनों के संक्रमणों से उत्पन्न होती हैं। शायद आप जानते होंगे कि X-किरणें विद्युतचुम्बकीय स्पेक्ट्रम में तरंग दैर्ध्य के लगभग 10^{-9} m से 6×10^{-14} m परास के संगत होती हैं; इनकी आवृत्तियां 3×10^{17} Hz और 5×10^{23} Hz के बीच में होती है। X-किरण फ़ोटॉनों की ऊर्जा 1.2×10^{3} eV से 2.4×10^{7} eV के बीच में होती है। ये ऊर्जाएं परमाणुओं के अंदरूनी कोशों की इलेक्ट्रॉन ऊर्जाओं के संगत हैं। अतः भाग 11.2 में हम X-किरण स्पेक्ट्रम के लिए ज़िम्मेदार परमाण्वीय संक्रमणों की चर्चा करेंगे और वहाँ पर लागू हो रहे वरण नियमों की भी बात करेंगे।

मोज़्ले ने कोशीय मॉडल को इस्तेमाल करके बहुत सारे तत्वों के X-किरण स्पेक्ट्रम का विश्लेषण किया और यह साबित किया कि उत्सर्जित आवृत्तियों और परमाणु संख्या के

बीच में एक संबंध होता है। इस संबंध को हम मोज़्ले नियम (Moseley's Law) के नाम से भी जानते हैं। इसके बारे में आप भाग 11.3 में पढ़ेंगे।

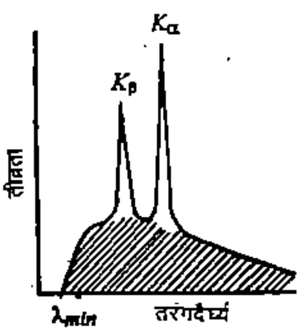
अंततः इस इकाई के आखिरी भाग में हम X-किरणों के चिकित्सा, पदार्थ विज्ञान, ख़गोल शास्त्र और उद्योग आदि क्षेत्रों में अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- X-किरण स्पेक्ट्रमी पदों का निर्धारण कर सकेंगे और अभिलक्षणिक X-किरण उत्पन्न करने वाले अनुमत परमाण्वीय संक्रमणों का निर्धारण कर सकेंगे,
- मोज़्ले नियम को लागू कर सकेंगे, और
- X-किरणों के अनुप्रयोगों की चर्चा कर सकेंगे।

11.2 X-किरण स्पेक्ट्रम और वरण नियम



चित्र 11.1 : X-किरण स्पेक्ट्रम।

X-किरण स्पेक्ट्रम बहु-इलेक्ट्रॉन वाले जटिल परमाणुओं से संबद्ध होते हैं। अभिलक्षणिक X-किरणें (चित्र 11.1) तब उत्पन्न होती हैं, जब परमाणुओं के अंदरूनी कोशों में स्थित इलेक्ट्रॉन एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण करते हैं। अपने अध्ययन को आसान बनाने के लिए, आइए, पहले X-किरण स्पेक्ट्रमी पदों के बारे में जानें। X-किरण नामावली में परमाणु के सबसे अंदर के कोश ($n = 1$) को K कोश कहा जाता है। अगला कोश यानी $n = 2$ के संगत कोश L कोश कहलाता है। लेकिन आप जानते हैं कि $n = 2$ के लिए l के दो मान 0 और 1 होते हैं। अतः $s = 1/2$ के लिए $j = 1/2$ और $3/2$ । अतः हमें तीन पद मिलते हैं $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}$ और $2^2P_{3/2}$ । इन तीनों ही पदों की कुछ भिन्न ऊर्जाएं होती हैं और X-किरण नामावली में इन्हें L_I, L_{II} और L_{III} उपकोश कहा जाता है। इसी तरह $n = 3$ कोश के लिए l के तीन मान 0, 1 और 2 होते हैं। और इनके संगत $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ । इस प्रकार इस कोश में पांच उपकोश ($3^2S_{1/2}$, $3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$, $3^2D_{3/2}$, $3^2D_{5/2}$) होते हैं, जिन्हें M_I से M_V द्वारा दर्शाया जाता है। अब आप कुछ X-किरण स्पेक्ट्रमी पदों का ख़ुद भी निर्धारण करना चाहेंगे।

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

सिद्ध करें कि $n = 4$ कोश के लिए सात उपकोश होंगे और उनके संगत स्पेक्ट्रमी पद और X-किरण नामावली में उनके नाम बताएं।

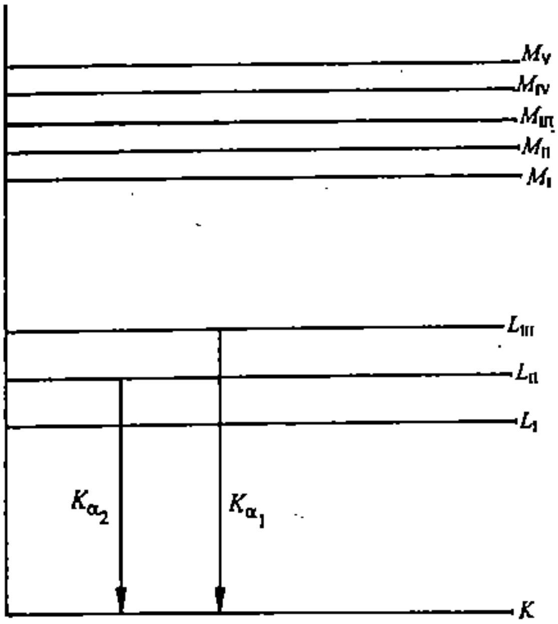
तालिका 11.1 में हमने कुछ X-किरण उपकोशों को उनके संगत n, l, j मानों और स्पेक्ट्रमी पदों के साथ लिखा है।

तालिका 11.1 : X-किरण स्पेक्ट्रमी पद

उपकोश	n	l	j	पद
K	1	0	1/2	$1\,^2S_{1/2}$
L_I	2	0	1/2	$2\,^2S_{1/2}$
L_{II}	2	1	1/2	$2\,^2P_{1/2}$
L_{III}	2	1	3/2	$2\,^2P_{3/2}$
M_I	3	0	1/2	$3\,^2S_{1/2}$
M_{II}	3	1	1/2	$3\,^2P_{1/2}$
M_{III}	3	1	3/2	$3\,^2P_{3/2}$
M_{IV}	3	2	3/2	$3\,^2D_{3/2}$
M_V	3	2	5/2	$3\,^2D_{5/2}$

इनके संगत ऊर्जा-स्तर आरेख चित्र 11.2 में दिखाया गया है।

आगे पढ़ने से पहले तालिका 11.1 और चित्र 11.2 को अच्छी तरह समझ लें।



चित्र 11.2 : कुछ X-किरण पद और K_α रेखाएं ।

अब आप पूछेंगे कि ये अभिलक्षणिक X-किरणें कैसे उत्पन्न होती हैं ? क्या अंदरूनी ऊर्जा स्तरों में सभी संक्रमण अनुमत होते हैं या प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम की तरह कुछ वरण नियम यहाँ भी लागू होते हैं ? आइए, इन सवालों के जवाब यहाँ जानें।

अपनी सामान्य अवस्था में एक परमाणु के K कोश में दो इलेक्ट्रॉन होते हैं। अब माना कि किसी प्रक्रिया द्वारा इनमें से एक K कोश इलेक्ट्रॉन को परमाणु से बाहर निकाल दिया जाता है जैसे कि X-किरण नलिका में एक लक्ष्य पर इलेक्ट्रॉनों की बमबारी द्वारा। इस तरह के संघट्टनों में K कोश से परमाण्वीय इलेक्ट्रॉन का उत्सर्जन हो जाता है। इस तरह परमाणु एकधा आयनित (singly ionised) हो जाता है। और उसके K कोश में एक होल या रिक्त स्थान बन जाता है। यह आयन तब बहुत ज़्यादा उत्तेजित अवस्था में होता है। और फिर जब बाकी बचे इलेक्ट्रॉनों में से एक, किसी बाहरी ऊर्जा अवस्था से अंदरूनी अवस्था में संक्रमण करके, उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन द्वारा छोड़े गए रिक्त स्थान को भर देता है तब आयन का व्युत्तेजन (de-excitation) होता है। इस प्रकार इस प्रक्रिया में ऊंची (या बाहरी) अवस्था से निचली (या अंदरूनी) अवस्थाओं में एक के बाद एक परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों के कई संक्रमण होते हैं, जब तक कि यह होल सबसे ज़्यादा बाहर वाली अवस्था में नहीं पहुंच जाता। इनमें से प्रत्येक संक्रमण के कारण एक अभिलक्षणिक उत्सर्जन रेखा उत्पन्न होती है और इनमें से कुछ रेखाएं X-किरण क्षेत्र में होती हैं। इस तरह से X-किरण स्पेक्ट्रम उत्पन्न होता है।

X-किरणों की K और L श्रेणियां तब उत्पन्न होती हैं, जब एक आयनित परमाणु के $n = 1$ और $n = 2$ अंदरूनी कोशों से बाहरी कोशों में संक्रमण होते हैं। L कोश और M कोश में उपस्थित होल में होने वाले संक्रमणों के कारण भी X-किरणें उत्पन्न होती हैं। प्रकाशकीय स्पेक्ट्रम की तरह ही X-किरण स्पेक्ट्रम पर भी निम्न वरण नियम लागू होते हैं:

$$\boxed{\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1} \qquad (11.1)$$

इस प्रकार एक L_I कोश वाला इलेक्ट्रॉन K कोश में संक्रमण नहीं कर सकता, लेकिन L_{II} से K और L_{III} से K में संक्रमण अनुमत हैं।

इन दोनों संक्रमणों के कारण K_{α_1} और K_{α_2} रेखाएं मिलती हैं। यह देखना आसान है कि K_{α_1} और K_{α_2} लाइनों की तीव्रता का अनुपात 2 : 1 है। इन लाइनों के तरंग दैर्घ्यों का मापन हमें उस परमाणु की पहचान भी देता है। इसी प्रकार K और M कोशों या L और M कोशों के बीच संक्रमणों के कारण ही अभिलक्षणिक X-किरण स्पेक्ट्रम उत्पन्न होता है।

अब आप इन वरण नियमों को X-किरण स्पेक्ट्रम पर लागू करना चाहेंगे।

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

L और M कोशों के लिए ऊर्जा-स्तर आरेख खींचें और उसमें सभी अनुमत संक्रमणों को दिखाएं।

अभिलक्षणिक X-किरण स्पेक्ट्रम का व्यापक अध्ययन सबसे पहले एच.जी.जे. मोज़्ले (H.G.J. Moseley) किया था। उन्होंने आवर्ती सारणी के बहुत से तत्वों के K और L स्पेक्ट्रमों का अध्ययन किया और उनके अध्ययन से उत्सर्जित आवृत्तियों और परमाणु की परमाणु संख्या के संबंध में एक पैटर्न दिखाई पड़ा। मोज़्ले द्वारा किए गए ये आनुभविक प्रेक्षण आज मोज़्ले नियम के रूप में जाने जाते हैं। आइए, हम इस मोज़्ले नियम का अध्ययन करें।

11.3 मोज़्ले नियम

जैसा कि भाग 11.2 में दिखाया गया है, एक X-किरण उपकोश की ऊर्जा n, l और j क्वांटम अंकों पर निर्भर करती है। लेकिन एक सन्निकटन के तहत हम किसी कोश के ऊर्जा मान को एक हाइड्रोजन-सम परमाणु के ऊर्जा मान से व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ परमाणु संख्या Z की जगह $Z - \sigma$ रखा जाता है। यहाँ σ को आवरणांक (screening constant) कहते हैं। इस प्रकार n कोश के लिए हम लेते हैं:

$$E_n = -\frac{R(Z-\sigma)^2}{n^2} \tag{11.2}$$

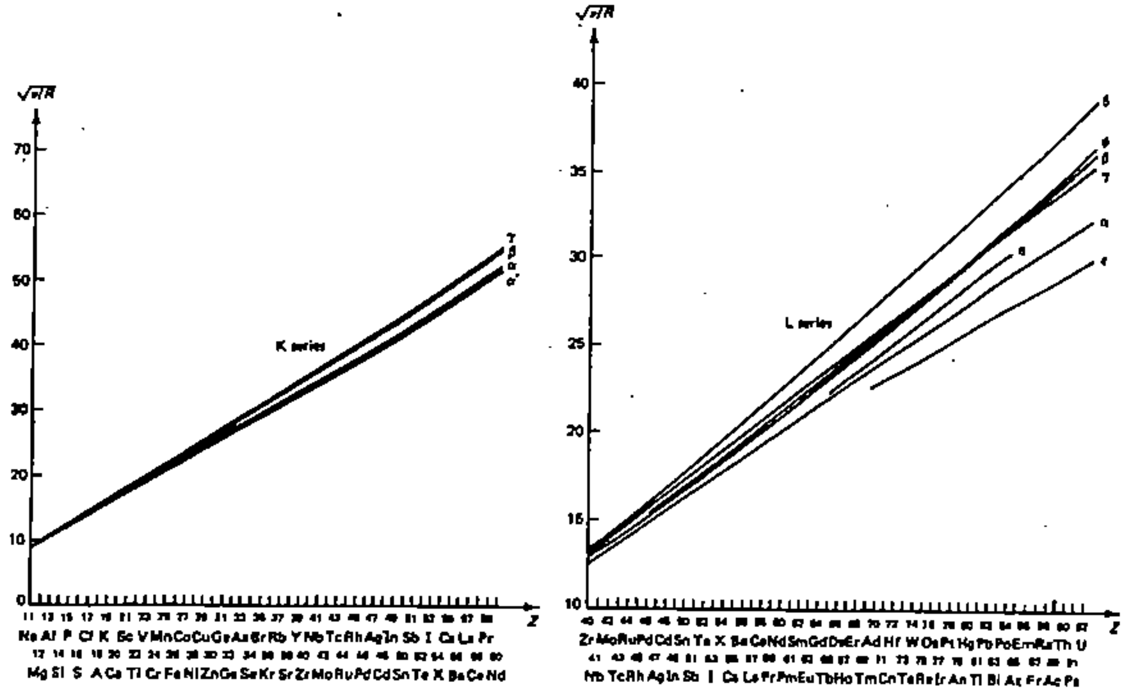
अब n_2 से n_1 का संक्रमण निम्न आवृत्ति वाली X-किरण रेखा उत्पन्न करेगा:

$$\begin{aligned}\nu_{n_2, n_1} &= \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h} \\ &= \frac{R}{h}\left[-\frac{(Z-\sigma_{n_2})^2}{n_2^2} + \frac{(Z-\sigma_{n_1})^2}{n_1^2}\right]\end{aligned} \tag{11.3}$$

यह मानते हुए कि आवरणांक σ_{n_1} और σ_{n_2} का एक ही मान σ है, हमें मिलता है:

$$\nu_{n_2, n_1} = \frac{R}{h}(Z-\sigma)^2\left[-\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_1^2}\right] \tag{11.4}$$

समीकरण (11.4) से पता चलता है कि आवृत्ति ν परमाणु संख्या Z के वर्ग के समानुपाती है। आवृत्ति ν और परमाणु संख्या Z के बीच के इस संबंध को **मोज़्ले नियम** कहते हैं (देखें चित्र 11.3)। मोज़्ले ने अपनी X-किरण नलिका में लक्ष्यों को बदलकर 40 से ज़्यादा तत्वों के X-किरणों की आवृत्तियों का प्रेक्षण किया जो आवर्ती सारणी में एल्युमिनियम और स्वर्ण के बीच स्थित हैं। उनके प्रायोगिक परिणाम समीकरण (11.4) से बहुत अच्छा मेल खाते थे। लेकिन यहाँ आपको ध्यान देना चाहिए कि σ को n पर निर्भर न मानना एक अच्छा सन्निकटन नहीं है। अतः मोज़्ले के नियम की वैधता सीमित परिस्थितियों में ही है।



चित्र 11.3 : मोज़्ले का नियम।

बोध प्रश्न 3

5 मिनट लगाएं

मोज़्ले के नियम का इस्तेमाल करके चाँदी के परमाणु के लिए L से K संक्रमण होने पर उत्पन्न X-किरण रेखा की आवृत्ति प्राप्त करें। σ = 1 लें।

आइए, अब हम X-किरणों के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करें जो मुख्यतया चिकित्सा, उद्योग, पदार्थ विज्ञान और खगोल शास्त्र में हैं।

11.4 X-किरणों के अनुप्रयोग

अपनी अधिक ऊर्जा के कारण जिन पदार्थों से होकर X-किरणें गुज़रती हैं वे उनके अणुओं और परमाणुओं को आयनित या अपघटित कर देती हैं। X-किरण अवशोषण की परिघटना वस्तुतः जाने-पहचाने प्रकाशविद्युत प्रभाव का उदाहरण है। X-किरण फ़ोटॉन के अवशोषण से परमाणु अपने आयनन स्तर से अधिक ऊर्जा स्तर तक उत्तेजित हो जाता है और बद्ध इलेक्ट्रॉन को उत्सर्जित करता है। इस फ़ोटान-परमाणु अन्योन्य-क्रिया का वर्णन करने के लिए एक क्वांटम यांत्रिकीय प्रायिकता भी प्राप्त की जा सकती है। और पदार्थ के नमूने के परमाणुओं पर आपतित X-किरण पुंज के व्यवहार की व्याख्या करने के लिए एक अवशोषण अवकली परिक्षेत्र (absorption cross section) की परिभाषा दी जा सकती है। प्रयोगशाला में हम X-किरणों का अवशोषण किसी पदार्थ की मोटाई से गुज़रते हुए X-किरण पुंज के क्षीणन (attenuation) के प्रेक्षण द्वारा करते हैं। तीव्रता में हुई आंशिक हानि dI/I का संबंध उस पदार्थ की मोटाई dx से इस प्रकार होता है:

$$-\frac{dI}{I} = \mu_x \, dx$$

जहाँ अचर μ_x उस पदार्थ का अवशोषण गुणांक होता है। इस व्यंजक का हम आसानी से समाकलन करके तीव्रता का नमूने में दूरी x के फलन के रूप में मान निकाल सकते हैं

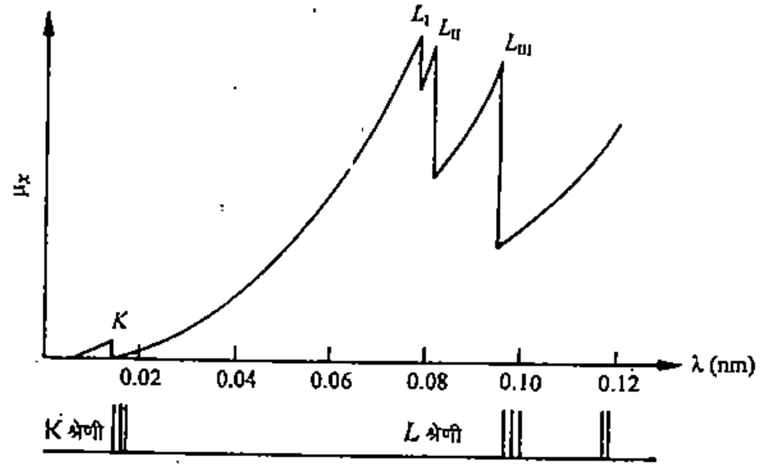
$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^x \mu_x \, dx$$

या $$\ln \frac{I}{I_0} = -\mu_x x$$

या $$I = I_0 e^{-\mu_x}$$

जहाँ I_0 प्रारंभिक तीव्रता है।

अवशोषण गुणांक पदार्थ पर और X-किरणों के तरंग दैर्घ्य पर निर्भर करता है। हम क्षीणन के मापन से इस निर्भरता को निकाल सकते हैं और तब एक दिए हुए तत्व के लिए अवशोषण अवकली परिक्षेत्र के व्यवहार की जानकारी हासिल कर सकते हैं।



चित्र 11.4: सीसे (lead) के लिए K और L अवशोषण सीमाएं। ये तरंग दैर्घ्य सीमाएं तब उत्पन्न होती हैं, जब X-किरण फ़ोटॉन की ऊर्जाएं K और L कोश के इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन करने के लिए पर्याप्त नहीं होतीं। सीसे के लिए K और L श्रेणी की उत्सर्जन रेखाओं को भी दिखाया गया है।

चित्र 11.4 में तरंग दैर्घ्य λ के फलन के रूप में μ_x का एक प्रतिरूपी ग्राफ़ दिखाया गया है। हमें सीमा $\lambda \to 0$ में शून्य अवशोषण दिखाई देता है। इस प्रेक्षण से हमें पता चलता है कि जब किरण पुंज की ऊर्जा बहुत अधिक हो जाती है तो अवशोषी माध्यम X-किरणों के प्रति पारदर्शी हो जाता है। तब जैसे-जैसे फ़ोटॉन का मान घटता जाता है और तरंग दैर्घ्य λ का मान शून्य से बढ़ता जाता है हम अवशोषण में लगातार वद्धि देखते हैं, जब तक कि हम λ के एक ऐसे मान पर नहीं पहुंचते जिसके लिए माध्यम एक बार फिर से एकाएक पारदर्शी हो जाता है। ग्राफ़ के इस लक्षण को अवशोषण कोर (absorption edge) कहते हैं। यह चित्र में बढ़ते हुए λ के साथ आने वाली अवशोषण कोरों में पहला है। K अवशोषण कोर तरंग दैर्घ्य λ_k पर उत्पन्न होती है जबकि फ़ोटॉन की ऊर्जा परमाणु के आयनन के लिए आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा के बराबर होती है जिसके कारण K कोश में एक रिक्त स्थान उत्पन्न हो जाता है। जब λ , λ_K से अधिक हो जाता है तो X किरण के फ़ोटॉन की ऊर्जा K कोश के इलेक्ट्रॉन को मुक्त करने के लिए ज़रूरी ऊर्जा के मुकाबले बहुत कम हो जाती है। लेकिन अभी भी उसका मान इतना ज़रूर रहता है कि वह L (या उससे ऊंचे) कोश के इलेक्ट्रॉन को मुक्त कर सके। एक बार फिर जैसे-जैसे तरंग दैर्घ्य का मान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे हम फ़ोटान के अवशोषण में लगातार वृद्धि देखते हैं जब तक कि हम दिखाई गई L अवशोषण कोर तक नहीं पहुंचते। इस प्रकार इन अवशोषण कोरों और अभिलक्षणिक X-किरणों की उत्सर्जित रेखाओं को मिलाकर हमें हरेक परमाणु की एक ख़ास पहचान (identity) मिलती है जिससे उस निकाय के ऊर्जा स्तर के बारे में भी जानकारी मिलती है। हमने चित्र में K और L श्रेणियों की उत्सर्जन रेखाओं को भी दिखाया है ताकि हम अवशोषण कोरों के सापेक्ष इन स्पेक्ट्रमी रेखाओं की स्थिति की भी जानकारी हासिल कर सकें।

X-किरणें पदार्थों का भेदन कर सकती हैं। उनके इस गुणधर्म के कारण वे तमाम अनुप्रयोगों के लिए काफ़ी उपयोगी साबित हुई हैं, ख़ासकर चिकित्सा संबंधी अनुप्रयोगों के लिए। मनुष्य के शरीर में ऊतकों के मुकाबले हड्डियां X-विकिरण का ज़्यादा अवशोषण करती हैं जिसके कारण हड्डियों की X-किरणों की मदद से बहुत अच्छी तस्वीर खींची जा

सकती है। आपने ज़रूर ही X-किरणों की मदद से ली गई हड्डियों की तस्वीरें देखी होंगी। X-किरणों का इस्तेमाल कैंसर के उपचार के लिए भी किया जाता है क्योंकि यह पाया गया है कि वे रोगी ऊतकों को स्वस्थ ऊतकों के मुकाबले ज़्यादा आसानी से नष्ट करती हैं। लेकिन यहाँ आप यह ज़रूर याद रखें कि X-विकिरण चाहे छोटी या बड़ी कितनी भी मात्रा में हो, निरोगी ऊतकों को नष्ट करता ही है। अतः जब भी X-किरणों से वास्ता पड़े या X-किरण प्रभावन (exposure) हो तो उसके दौरान सारी सावधानियां बरतनी चाहिए; अपनी सुरक्षा के लिए समुचित कदम लेने चाहिए।

X-किरणों की मदद से एक अपारदर्शी नमूने की तस्वीर खींची जा सकती है और वे जिस भी वस्तु का भेदन कर सकती हैं, उसकी व्यापक अंदरूनी संरचना की जानकारी हासिल की जा सकती है। यह तकनीक जिसे **रेडियोग्राफ़ी** (radiography) कहते हैं, चिकित्सा से लेकर उद्योग तक बहुत सारे क्षेत्रों में इस्तेमाल की जाती है। चाहे वह तपेदिक की जानकारी के लिए किसी मरीज़ की छाती का परीक्षण हो, या सिलिकोसिस (silicosis) हो, दिल की बीमारी हो या शरीर में घुसी हुई बाहरी वस्तुओं या हड्डियों का परीक्षण हो, चिकित्सा संबंधी अनुप्रयोगों में X-किरणों का बहुत व्यापक रूप से इस्तेमाल होता है।

एक्स-किरण रेडियोग्राफ़ी का इस्तेमाल धातु के सांचों या जोड़ो मे उपस्थित अंदरूनी कमज़ोरियों के संसूचन के लिए भी होता है। मान लीजिए कि एक दोषपूर्ण सांचे या जोड़े को किसी पुल या भवन में लगा दिया जाए तो इसके बहुत ही विनाशकारी परिणाम हो सकते हैं। तो ऐसे धातु के हिस्सों या पाइप के जोड़ों को फ़िट करने से पहले उनका X-किरणों द्वारा परीक्षण किया जाता है कि उनमें क़ोई दरार या टूटफूट या कोई रिक्त स्थान तो मौजूद नहीं है। एक्स किरण रेडियोग्राफ़ी का इस्तेमाल करके हवाई जहाज़ों, समुद्री जहाज़ों, गाड़ियों आदि की बॉडी में भी दरारों का परीक्षण किया जाता है। औद्योगिक रेडियोग्राफ़ी की मदद से हम पदार्थ की संरचना में अंदरूनी भौतिक दोषों का पता लगा सकते हैं। इसकी मदद से औद्योगिक निकायों के ऐसे अंदरूनी हिस्सों की जाँच की जाती है, जिन तक आमतौर पर पहुंचना मुश्किल होता है। और इस प्रकार उनकी स्थिति और भौतिक अवस्था की जानकारी हासिल की जाती है। मिसाल के तौर पर, ढलाई उद्योग में सांचों की जाँच-पड़ताल के लिए, उच्च दाब पर इस्तेमाल होने वाले पात्रों के जोड़ों की जांच के लिए, पाइप लाइनों, जहाज़ों, नाभिकीय रिएक्टरों के अवयवों के जोड़ों की जाँच के लिए, कि उनमें किए गए जोड़ ठीक हैं या नहीं, नाभिकीय रिएक्टरों के ईंधन अवयवों के निर्माण के समय उनके आकार की जाँच के लिए और यह परीक्षण करने के लिए कि वे ठीक हैं या नहीं, रॉकेटों के ठोस ईंधन या फिर विस्फोटों का निर्माण करने वाले उद्योगों में इस बात की जांच के लिए कि वहाँ इस्तेमाल किया जाने वाला पदार्थ परिशुद्ध है या नहीं, गाड़ियां, हवाई जहाज़ों, नाभिकीय, अंतरिक्षीय, समुद्रीय और प्रक्षेपास्त्र उद्योगों में जहाँ कहीं भी अंदरूनी अवयवों की जाँच करनी हो, वहाँ X-किरणों का इस्तेमाल किया जाता है।

रेडियोग्राफ़ी द्वारा परीक्षण की जाने वाली तमाम वस्तुओं और पदार्थों में कोयला, खनिज, रबड़ के टायर, धातुएं, गोल्फ़ की गेंदें, ऐसी बनी बनाई वस्तुएं जिनके अवयव सीलबंद हैं, वैद्युत उपकरण, एकीकृत परिपथ, रेशे, प्लास्टिक, सब तरह के बर्तन, अनाज, फल, मीट, बैटरी की प्लेटें, सूटकेस, डाक द्वारा भेजे गए पैकेज, चित्र आदि आते हैं।

सी टी क्रमवीक्षण (C T Scan) में X-किरणों को इस्तेमाल करके शरीर के अंदरूनी हिस्सों के चित्र खींचे जा सकते हैं। इस तरह X-किरणों के कारण चिकित्सा और उद्योग के क्षेत्रों में रेडियोग्राफ़ी की तकनीक का बहुत भारी प्रभाव पड़ा है।

X-किरणों के **पदार्थ विज्ञान** (materials science) में भी बहुत से अनुप्रयोग हैं। आपने कण-तरंग द्वैतवाद के संदर्भ में ब्रैग विवर्तन नियम के बारे में पढ़ा है। सबसे पहले इस नियम की खोज एक क्रिस्टल के स्तरों द्वारा X-किरणों के विवर्तन के कारण हुई। एक जाने-पहचाने क्रिस्टल के लिए जिसके लिए लैटिस अंतराल d का मान मालूम हो, हम आपतित विकिरण की तरंग दैर्घ्य λ मालूम कर सकते हैं और अगर हमें तरंग दैर्घ्य λ मालूम हो, तो हम लैटिस अंतराल d का मान मालूम कर सकते हैं। इस प्रकार क्रिस्टल संरचना और उसके दोषों के अध्ययन के लिए X-किरण विवर्तन एक मानक तकनीक के रूप में विकसित की जा चुकी है।

X-किरण विवर्तन और क्रिस्टलोग्राफ़ी से क्रिस्टल संरचना के व्यापक अध्ययन में बहुत मदद

मिली है और क्रिस्टलों, परमाण्वीय और इलेक्ट्रॉन वितरण आदि के अध्ययन में भी इनका महत्वपूर्ण योगदान रहा है। ठोस, द्रव्य और तनु फिल्मों (thin films) के रासायनिक विश्लेषण के लिए X-किरणों का इस्तेमाल किया जाता है क्योंकि ये विश्लेषण प्रक्रिया में इनसे कोई रासायनिक अभिक्रिया नहीं करतीं। X-किरण सूक्ष्मदर्शी का 10^{-12} से 10^{-14} g तक के नमूनों के बारे में गुणात्मक रासायनिक जानकारी हासिल करने के लिए इस्तेमाल किया जाता है और इसमें कुछ प्रतिशत की ही त्रुटि होती है।

आजकल ब्रह्माण्ड के अन्वेषण में X-किरणों का व्यापक प्रयोग किया जा रहा है। सभी प्रकार के खगोलीय पिण्ड, (तारों से लेकर मंदाकिनियों और क्वासर तक) X-किरणों का उत्सर्जन करते हैं जिन्हें रॉकेटों, उपग्रहों और अंतरिक्ष खोजी यानों में रखे विशेष रूप से डिज़ाइन किए गए X-किरण दूरदर्शियों द्वारा संसूचित किया जाता है। इन सभी खोजों के कारण नए-नए खगोलीय पिण्डों की खोज हुई है और इनसे आकाश में खगोलीय पिण्डों के वितरण के बारे में, मंदाकिनियों और सुपरनोवा अवशेषों के समय के साथ विकास के बारे में और एक तारे के जीवनकाल की अंतिम अवस्थाओं के बारे में (जब वह व्हाइट ड्वार्फ, न्यूट्रॉन तारे या ब्लैक होल में तबदील होता है) बहुत सी जानकारी मिली है।

X-किरण अनुप्रयोगों की इस संक्षिप्त चर्चा के साथ हम इस इकाई का अंत कर रहे हैं और अब इस इकाई में दी गई सामग्री का सार यहाँ दे रहे है।

11.5 सारांश

- X-किरणों का दो तरह से उत्पादन होता है
  - (i) जब उच्च चाल वाले इलेक्ट्रॉन परमाणुओं का भेदन करते हैं, तो वे परमाण्वीय नाभिक के नज़दीक से गुज़रते हैं और उनका मंदन हो जाता है। तब वे एक संतत विकिरण स्पेक्ट्रम उत्पन्न करते हैं। इसे **ब्रेम्स्ट्रालुंग** कहा जाता है।
  - (ii) एक और प्रक्रिया में ये ही इलेक्ट्रॉन संघट्टन द्वारा परमाणुओं के अंदरूनी कोशों से इलेक्ट्रॉन हटा देते हैं और तब बाहरी कोशों से रिक्त अंदरूनी कोशों में परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों के संक्रमण के कारण **अभिलक्षणिक X-किरणें** उत्पन्न होती हैं।
- उन परमाण्वीय संक्रमणों के लिए जो यह अभिलक्षणिक X-किरण स्पेक्ट्रम उत्पन्न करते हैं, **वरण नियम** इस प्रकार हैं:

$$\Delta l = \pm 1, \Delta j = 0, \pm 1$$

- परमाणु द्वारा उत्सर्जित अभिलक्षणिक X-किरण आवृत्तियों और उसकी परमाणु संख्या का संबंध **मोज़्ले नियम** द्वारा दिया जाता है।
- X-किरणों के लिए चिकित्सा, उद्योग, खगोल शास्त्र और पदार्थ विज्ञान में बहुत से अनुप्रयोग हैं।

11.6 अंत में कुछ प्रश्न

15 मिनट लगाएं

1. न्यूनतम तरंग दैर्घ्य 1Å की X-किरणें उत्पन्न करने के लिए एक X-किरण नलिका को किस विभवांतर पर क्रियान्वित किया जाना चाहिए ?
2. एक कोबाल्ट लक्ष्य वाली नलिका से उत्पन्न X-किरणों में कोबाल्ट की प्रबल K-श्रेणी है और उसमें उपस्थित मिलावटी तत्वों के कारण उत्पन्न दुर्बल K रेखाएं हैं। K_α रेखाओं की तरंग दैर्घ्य, कोबाल्ट के लिए 1.785Å है और मिलावटी तत्वों के लिए 1.537Å और 2.285 Å है। मोज़्ले नियम का प्रयोग करके मिलावटी तत्वों के परमाणुओं की परमाणु संख्या की गणना कीजिए और इन तत्वों को पहचानिए।

11.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $n = 4$ के लिए, $l = 0, 1, 2, 3$ और $s = 1/2$

इस तरह $l = 0$ के लिए $j = 1/2$

$l = 1$ के लिए $j = 1/2, 3/2$

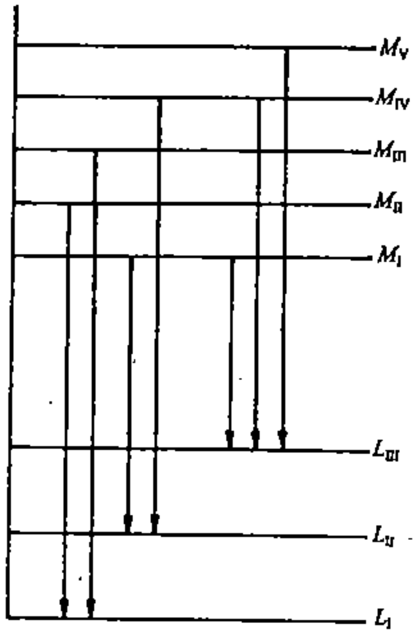
$l = 2$ के लिए $j = 3/2, 5/2$

$l = 3$ के लिए $j = 5/2, 7/2$

अतः $n = 4$ के लिए उपकोश और संगत पद हैं:

N_I	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}
$4\,^2S_{1/2}$,	$4\,^2P_{1/2}$,	$4\,^2P_{3/2}$,	$4\,^2D_{3/2}$,	$4\,^2D_{5/2}$,	$4\,^2F_{5/2}$,	$4\,^2F_{7/2}$

2. चित्र 11.5 देखें।



चित्र 11.5 : L और M कोशों के लिए ऊर्जा स्तर और L और M कोश के बीच अनुमत संक्रमण।

3. $$\nu = \frac{13.6 \times 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js}} \times (47-3)^2\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$ ($\because$ चांदी के लिए $Z = 47$; $n_1 = 1$ और $n_2 = 2$)

$$= 4.7 \times 10^{18}\ \text{Hz}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. ऊर्जा का मान है:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js} \times 3 \times 10^{8}\ \text{ms}^{-1}}{10^{-10}\ \text{m}}$$

$$= 2.0 \times 10^{-15}\ \text{J}$$

और विभवांतर है:

$$V = \frac{E}{e} = \frac{2.0 \times 10^{-15}\ \text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$

$$= 1.25 \times 10^{4}\ \text{V}$$

2. मोज़्ले नियम का इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{R}{h}(Z-\sigma)^2\left(-\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_1^2}\right)$$

K श्रेणी के लिए $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, कोबाल्ट के लिए $Z = 27$ और मोज़्ले नियम लागू करके हम लिख सकते हैं:

$$\frac{3 \times 10^{8}\ \text{ms}^{-1}}{1.785 \times 10^{-10}\ \text{m}} = \frac{13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js}} \times (27-\sigma)^2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

या

$$(27-\sigma)^2 = \frac{3 \times 10^{8} \times 6.626 \times 10^{-34} \times 4}{1.785 \times 10^{-10} \times 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3}$$

$$= 680$$

या

$$(27-\sigma) \simeq 26$$

$$\therefore \sigma = 1$$

(i) अब, पहले मिलावटी तत्व के लिए $\lambda = 1.537$ Å। अतः मोज़्ले नियम से:

$$\frac{3 \times 10^{8}\ \text{ms}^{-1}}{1.537 \times 10^{-10}\ \text{m}} = \frac{13.6 \times 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}{6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js}}(Z-1)^2 \times \frac{3}{4}$$

या

$$(Z-1)^2 = 790$$

या

$$(Z-1) \simeq 28$$

और

$Z = 29$, इसलिए मिलावटी तत्व तांबा (कॉपर), है।

(ii) दूसरे मिलावटी तत्व के लिए हमें दिया है $\lambda = 2.285$ Å । इस तरह

$$(Z-1)^2 = \frac{3 \times 10^{8}\ \text{ms}^{-1} \times 6.626 \times 10^{-34}\ \text{Js}}{2.285 \times 10^{-10} \times 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}} \times \frac{4}{3}$$

$$= 530$$

या

$$(Z-1) = 23$$

और

$Z = 24$, इसलिए, यह मिलावटी तत्व क्रोमियम है।

मूलभूत नियतांकों की तालिका

राशि	प्रतीक	मान
प्लांक नियतांक	h	6.62618×10^{-34} J s
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	1.05459×10^{-34} J s
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	2.99792×10^{8} m s^{-1}
इलेक्ट्रॉन पर आवेश (निरपेक्ष मान)	e	1.60219×10^{-19} C
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1} $\approx 1.25664 \times 10^{-6}$ H m^{-1}
मुक्त आकाश की विद्युतशीलता	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,19 \times 10^{-12}$ F m^{-1}
गुरुत्वाकर्षण नियतांक	G	6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
सूक्ष्म संरचना नियतांक	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$	$\frac{1}{137.036} = 7.297\,35 \times 10^{-3}$
आवोगाद्रो संख्या	N_A	$6.022\,05 \times 10^{23}$ mol^{-1}
फैराडे नियतांक	$F = N_A e$	$9.648\,46 \times 10^{4}$ C mol^{-1}
बोल्ट्समान नियतांक	k	$1.380\,66 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
गैस नियतांक	$R = N_A k$	$8.314\,41$ J mol^{-1} K^{-1}
परमाण्वीय द्रव्यमान एकक	$a.m.u. = \frac{1}{12} M_{12_C}$	$1.660\,57 \times 10^{-27}$ kg
इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान	m या m_e	$9.109\,53 \times 10^{-31}$ kg $= 5.485\,80 \times 10^{-4}$ a.m.u.
प्रोटॉन द्रव्यमान	M_p	$1.672\,65 \times 10^{-27}$ kg $= 1.007\,276$ a.m.u.
न्यूट्रॉन द्रव्यमान	M_n	$1.674\,92 \times 10^{-27}$ kg $= 1.008\,665$ a.m.u.
प्रोटॉन द्रव्यमान और इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान का अनुपात	M_p / m_e	1836.15
इलेक्ट्रॉन आवेश और द्रव्यमान अनुपात	$\lvert e \rvert / m_e$	$1.758\,80 \times 10^{11}$ C kg^{-1}
इलेक्ट्रॉन की क्लासिकी त्रिज्या	$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}$	2.81784×10^{-15} m
परमाण्वीय हाइड्रोजन के लिए बोर त्रिज्या	$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$	5.29177×10^{-11} m
(अनंत नाभिकीय द्रव्यमान के लिए) रिडबर्ग नियतांक	$R_\infty = \frac{m e^2}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = \frac{\alpha}{4\pi a_0}$	$1.097\,37 \times 10^{7}$ m^{-1}
परमाण्वीय हाइड्रोजन के लिए रिडबर्ग नियतांक	R_H	$1.096\,78 \times 10^{7}$ m^{-1}
बोर मैग्नेटॉन	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$	9.27408×10^{-24} J T^{-1}
नाभिकीय मैग्नेटॉन	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_P}$	5.05082×10^{-27} J T^{-1}

NOTES

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-08
आधुनिक भौतिकी

ंड

4

ाभिकीय भौतकी

खंड 4 नाभिकीय भौतिकी

खंड 3 में आपने परमाणु और उसकी संरचना के बारे में पढ़ा। आपने परमाण्वीय नाभिक के इर्द गिर्द गतिमान इलेक्ट्रॉनों की गतिकी के बारे में जाना जो कि हमें परमाण्वीय स्पेक्ट्रम के रूप में दिखाई देती है। अब वक़्त आ गया है कि हम परमाणु के रहस्यों के बारे में और ज़्यादा जानकारी हासिल करें और परमाण्वीय नाभिक पर अपना ध्यान केंद्रित करें। यही इस खंड का उद्देश्य है। इस खंड में हम आपको परमाण्वीय नाभिक की भौतिकी से परिचित कराएंगे। ज़ाहिर है कि इतने कम समय में यह अध्ययन बहुत गहराई से नहीं किया जा सकेगा, लेकिन मोटे तौर पर हम आपको परमाण्वीय नाभिक से संबंधित मूल संकल्पनाओं के बारे में बताएंगे।

नाभिक की भौतिकी को समझने की शुरुआत आज से लगभग सौ साल पहले तब हुई जब आकस्मिक रूप से रेडियोएक्टिवता की खोज हुई। इसी खोज की वजह से वैज्ञानिक उन आसान तरीक़ों को ढूंढ सके जिनका इस्तेमाल करके वे पदार्थ की संरचना का अनुसंधान कर पाए। इसके फलस्वरूप तमाम महत्वपूर्ण खोजें हुई- जैसे कि कृत्रिम तत्वांतरण (artificial transmutation), परायूरेनियम (transuranium) तत्वों और रेडियोआइसोटोपों का उत्पादन जिनका आज चिकित्सा, कृषि, रेडियो-कार्बन काल निर्धारण (radiocarbon dating) आदि में उपयोग होता है। आप इकाई 12 में रेडियोएक्टिवता की परिघटना और उससे संबद्ध भौतिकी के बारे में पढ़ेंगे।

रेडियोएक्टिव नाभिकों से उत्सर्जित अल्फ़ा कणों का इस्तेमाल करके प्रसिद्ध वैज्ञानिक रदरफ़र्ड ने परमाणु की संरचना की समझ पेश की। जैसा कि आप जानते हैं, परमाणुओं द्वारा अल्फ़ा कणों के प्रकीर्णन के इस प्रसिद्ध प्रयोग के कारण ही परमाणु के नाभिकीय मॉडल की खोज हुई। उसके बाद तो परमाण्वीय नाभिक पर अन्वेषणों का तांता ही लग गया–एक के बाद एक उसकी संरचना, संगठन, गुणों और उसके घटकों के बीच लग रहे बलों के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी हासिल की गई। इस प्रक्रिया में, इस सवाल का जवाब भी ढूंढा गया कि परमाण्वीय नाभिक के स्थायित्व का क्या रहस्य है। इकाई 13 में हम इन्हीं सब बातों के बारे में आज तक उपलब्ध जानकारी और उससे उत्पन्न परमाण्वीय नाभिक की वर्तमान समझ प्रस्तुत कर रहे हैं।

विज्ञान और उसके अनुप्रयोगों का कुछ वैसा ही नाता है जैसा कि पेड़ और उस पर लगे फलों का। लूई पाश्चर का यह कथन हमारी उस दृष्टि को सही परिप्रेक्ष्य में प्रस्तुत करता है जिसके तहत हम अपने पाठ्यक्रमों में भौतिकी पढ़ाते हैं। खंड की पहली दो इकाइयों में नाभिकीय भौतिकी की मूलभूत संकल्पनाओं की चर्चा करने के बाद, इकाई 14 में हम नाभिकीय विज्ञान के शांतिपूर्ण अनुप्रयोगों की ओर ध्यान देंगे, ख़ासकर नाभिकीय ऊर्जा, जल विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, कृषि और उद्योग आदि के क्षेत्रों में।

नाभिकीय संरचना के अनुसंधनों से हमें न सिर्फ़ नये-नये मूल कणों की जानकारी मिली है बल्कि तमाम उन मूलभूत सवालों के बारे में एक नई समझ भी मिली है जो आज मानवीय चेतना के सामने चुनौती बनकर खड़े हैं; ख़ास तौर पर ब्रह्माण्ड की उत्पत्ति और उसके विकास से जुड़े सवाल। इसलिए, इस खंड (और इस पाठ्यक्रम) की अंतिम इकाई (इकाई 15) में हम आपको मूल कणों के संसार की खोजपूर्ण यात्रा पर ले चलेंगे। इस प्रक्रिया में हम आपको कुछ ऐसे साधनों और तकनीकों का परिचय भी देंगे जिनके कारण यह नाभिकीय अन्वेषण संभव हो सका। इनमें से हम मुख्यतः कण त्वरित्रों (particle accelerators) और संसूचकों (detectors) के बारे में बताएंगे।

और अंत में पेश हैं कुछ सुझाव इस खंड को पढ़ने के बारे में। हम ये बातें कई बार दोहरा चुके हैं, फिर भी एक बार और कहना चाहेंगे। हम आपको यह याद दिलाना चाहते हैं कि इकाइयों में दिए गए बोध प्रश्नों और उनके अंत में दिए गए प्रश्नों को आप ख़ुद हल करने की कोशिश करें। उन्हें हल करने से पहले ही जवाब देख लेने के लोभ से बचें। इन इकाइयों को पढ़कर समझने में हमारे हिसाब से आपको इतना समय लगना चाहिए–इकाई 12 के लिए 5 घंटे, इकाई 13 के लिए 6 घंटे, इकाई 14 के लिए 7 घंटे, इकाई 15 के लिए 8 घंटे। असल में आपको कितना समय लगेगा यह आपकी पिछली जानकारी पर भी निर्भर करेगा।

हमें उम्मीद है कि आपके लिए परमाण्वीय नाभिक के संसार की यह खोजपूर्ण यात्रा उतनी ही आनंददायक सिद्ध होगी जितनी कि यह हमारे लिए रही है।

हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

इकाई 12 रेडियोएक्टिवता

इकाई की रूपरेखा

12.1 प्रस्तावना

उन्नीसवीं सदी के अंत तक आते-आते भौतिकीविद् यह सोचने लगे थे कि भौतिकी में रोमांचक खोजों का सिलसिला अब ख़त्म हो चला है। लेकिन 1896 में बैकेरल द्वारा रेडियोएक्टिवता की आकस्मिक खोज ने उस समय व्याप्त इस भावना को दूर किया और बहुत सी नयी खोजों के लिए मार्ग प्रशस्त किया। ऐसा इसलिए संभव हुआ क्योंकि स्वत: उत्सर्जित विकिरणों जैसे कि अल्फ़ा, बीटा और गामा किरणों को पदार्थ की संरचना के अन्वेषण के लिए आसानी से इस्तेमाल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, रेडियोएक्टिव नाभिकों से निकलने वाले अल्फ़ा कणों का इस्तेमाल करके रदरफ़र्ड ने परमाणु के नाभिकीय मॉडल की खोज की। (इसके बारे में आप अगली इकाई में पढ़ेंगे।)

इस एक महत्वपूर्ण खोज ने अन्य बहुत से अन्वेषणों के लिए द्वार खोल दिए जैसे कि कृत्रिम तत्वांतरण (artificial transmutation), परायूरेनियम (transuranic) तत्वों और रेडियोआइसोटोपों की खोज आदि। इन सभी आविष्कारों का इस्तेमाल आज चिकित्सा विज्ञान, अनुसंधान, कृषि, प्रागैतिहासिक वस्तुओं के रेडियोकार्बन काल निर्धारण आदि विविध उपयोगों के लिए होता है। बीटा क्षय के अध्ययन से न्यूट्रीनो की खोज हुई। संक्षेप में, रेडियोएक्टिवता की खोज इस सदी की शुरुआत में हुए नाभिकीय भौतिकी के मूलभूत विकास में सहायक बनी।

इस इकाई के भाग 12.3 में हमने रेडियोएक्टिव क्षय के सिद्धांत की चर्चा की है। भाग 12.4 में हमने इस सिद्धांत का इस्तेमाल करके एक दिए हुए रेडियोएक्टिव नमूने में रेडियोएक्टिवता की वृद्धि और क्षय को समझाया है। भाग 12.5 में हमने उत्तरोत्तर रेडियोएक्टिव अपघटनों और एक रेडियोएक्टिव श्रृंखला के विभिन्न सदस्यों के बीच में रेडियोएक्टिव साम्यावस्था के प्रतिबंध की चर्चा की है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- तीन प्रकार के रेडियोएक्टिव विकिरणों को पहचान सकेंगे,
- रेडियोएक्टिव रूपांतरण के नियम बता सकेंगे,
- एक रेडियोएक्टिव पदार्थ की अर्ध आयु और क्षय स्थिरांक की गणना कर सकेंगे,
- एक दिये हुये नमूने के लिए रेडियोएक्टिवता की वृद्धि और क्षय को समझा सकेंगे,
- एक रेडियोएक्टिव श्रृंखला के भिन्न सदस्यों के बीच रेडियोएक्टिव साम्यावस्था को समझा सकेंगे,
- प्रकृति में पायी जाने वाली रेडियोएक्टिव श्रृंखलाओं के भिन्न तत्वों के नाम गिना सकेंगे।

12.2 रेडियोएक्टिवता की खोज और उसका प्रारंभिक अध्ययन

रेडियोएक्टिवता की खोज की कहानी बहुत ही दिलचस्प है। 1896 में हेनरी बैकेरल, प्रतिदीप्ति (fluorescence) की परिघटना का अध्ययन कर रहे थे। यह वह परिघटना है जिसमें कि जब कुछ ख़ास किस्म के पदार्थों पर पराबैंगनी विकिरण (उदाहरणार्थ, सूरज से आने वाला पराबैंगनी विकिरण) पड़ता है, तो वे दृश्य प्रकाश उत्सर्जित करते हैं। अपनी मेज़ की एक दराज़ में हेनरी बैकेरल ने विभिन्न खनिज लवणों का एक समूह रखा था जिनमें यूरेनियम के लवण भी थे। इन्हीं के साथ-साथ उसी दराज़ में मोटे काले कागज़ में लिपटी हुई बहुत सी फ़ोटोग्राफ़ी की प्लेटें गत्तों के कई डिब्बों में रखी थीं। कुछ दिन बाद उन्होंने इनमें से एक डिब्बे में रखी फ़ोटोग्राफ़ी की प्लेटों का इस्तेमाल किया। लेकिन जब उन्होंने इन फ़ोटोग्राफ़ी की प्लेटों से फ़ोटोग्राफ़ डेवेलप किए तो वे एकदम हैरान रह गये क्योंकि उन्हें उनमें कुछ भी नज़र नहीं आया—वे फ़ोटोग्राफ़ एकदम धुंधले थे। उन्होंने बाक़ी प्लेटों को भी डेवेलप करना चाहा और देखा कि वे भी अनावरित (expose) हो चुकी हैं। इस बात से वे काफ़ी हैरान हुए क्योंकि उन सभी डिब्बों में रखी किसी भी प्लेट का तब तक इस्तेमाल नहीं किया गया था। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि इन प्लेटों के साथ क्या हुआ होगा?

बैकेरल ने बिल्कुल सही अनुमान लगाया कि इन प्लेटों के नज़दीक रखे यूरेनियम लवणों से कुछ नये किस्म के विकिरणों का उत्सर्जन हो रहा होगा। प्रयोगों के बाद बैकेरल ने यह भी साबित कर दिखाया कि अगर इन विकिरणों को किसी गैस से गुज़ारा जाये तो वे उसका आयनीकरण कर देती हैं और इस तरह उन्हें सुचालक बना देती हैं। यूरेनियम लवणों से इन आयनकारी (ionising) और वेधी (penetrating) विकिरणों के उत्सर्जन की परिघटना को रेडियोएक्टिवता (radioactivity) का नाम दिया गया।

फ्रांस की प्रसिद्ध महिला वैज्ञानिक मारी क्यूरी ने सर्वांगीण अध्ययन के बाद दिखाया कि थोरियम, पोलोनियम और रेडियम जैसे तत्व भी रेडियोएक्टिवता प्रदर्शित करते हैं। साथ ही साथ उन्होंने इस बात का ठोस प्रमाण ढूंढा कि वस्तुतः किसी तत्व की रेडियोएक्टिवता उसके नाभिक का गुण होती है और वह उस तत्व में हो रहे भौतिक या रासायनिक परिवर्तनों पर निर्भर नहीं करती।

इन विकिरणों की आयनकारी और वेधी क्षमता का अध्ययन करके रदरफ़र्ड ने दो भिन्न घटकों, अल्फ़ा किरणों और बीटा किरणों के अस्तित्व का पता लगाया। अल्फ़ा किरणें, बीटा किरणों की तुलना में पदार्थों द्वारा आसानी से अवशोषित कर ली जाती हैं मगर

उनकी आयनकारी क्षमता बीटा किरणों से ज़्यादा होती है। लेकिन बीटा किरणों की वेधी क्षमता अल्फ़ा किरणों के मुकाबले 100 गुना ज़्यादा होती है। रेडियोएक्टिव स्रोत से उत्सर्जित एक तीसरे प्रकार के विकिरण का अस्तित्व पी. विलार्स (P. Villars) द्वारा स्थापित किया गया। इन्हें गामा किरणें कहते हैं। गामा किरणें, अल्फ़ा किरणों और बीटा किरणों-दोनों से ही कहीं ज़्यादा वेधी क्षमता रखती हैं। इन सभी प्रकार के विकिरणों को चुम्बकीय क्षेत्र से गुज़ारने पर यह भी पता चला कि गामा किरणों पर विद्युत आवेश नहीं होता जबकि अल्फ़ा किरणों पर धनात्मक विद्युत आवेश और बीटा किरणों पर ऋणात्मक विद्युत आवेश होता है। और अब तो हम जान गए हैं कि अल्फ़ा किरणें दरअसल हीलियम नाभिक ही हैं और बीटा किरणें इलेक्ट्रॉन हैं। हम यह भी जानते हैं कि α-कण फ़ोटोग्राफ़ी की फ़िल्मों को प्रभावित करते हैं और बहुत से पदार्थों में प्रतिदीप्ति पैदा करते हैं। साथ ही साथ वे स्फुरदीप्ति (phosphorescence) भी उत्पन्न करते हैं और उनकी चाल प्रकाश की चाल के लगभग 100वें हिस्से के बराबर होती है। दूसरी ओर, β कणों की चाल प्रकाश की चाल के लगभग 10वें हिस्से के बराबर होती है।

गामा (γ) किरणें अल्प तरंगदैर्घ्य वाली विद्युतचुम्बकीय विकिरण हैं जो रेडियोएक्टिव पदार्थों के नाभिकों से उत्सर्जित होती हैं और प्रकाश की चाल से चलती हैं। इसी क्षेत्र में हुए अन्य अध्ययनों से पता चला कि इन रेडियोएक्टिव विकिरणों की ऊर्जाएं MeV परास में होती हैं। इन अवधारणाओं को आप बेहतर समझ सकें, इसके लिए हम रेडियोएक्टिव क्षय के कुछ ऐसे उदाहरण दे रहे हैं जिनमें अल्फ़ा और बीटा किरणों का उत्सर्जन होता है:

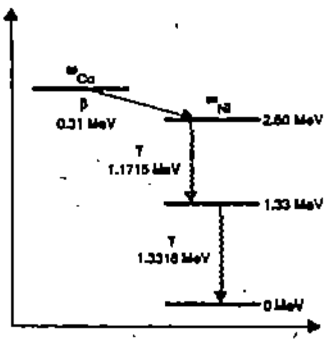
$$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + \alpha \qquad (4.20 \text{ MeV})$$

$$^{226}Ra \rightarrow {}^{222}Rn + \alpha \qquad (4.78 \text{ MeV})$$

$$^{60}Co \rightarrow {}^{60}Ni + \beta^- \qquad (0.318 \text{ MeV})$$

$$^{90}Sr \rightarrow {}^{90}Y + \beta^- \qquad (0.546 \text{ MeV})$$

(बीटा क्षय की प्रक्रिया में न्यूट्रीनो का भी उत्सर्जन होता है। लेकिन इनका संसूचन बहुत कठिन है और इस बारे में हम बाद में चर्चा करेंगे)। आप यह मानेंगे कि इन सभी अभिक्रियाओं में एक तत्व का दूसरे तत्व में तत्वांतरण (transmutation) होता है: यूरेनियम का थोरियम में क्षय होता है, रेडियम का रूथीनियम में, कोबाल्ट का निकैल में और स्ट्रांशियम का इट्रियम में। अल्फ़ा और बीटा क्षय की कई घटनाओं में क्षयजात (daughter) नाभिक उत्तेजित अवस्था में होता है और अंततः संक्रमण (transition) द्वारा मूल अवस्था (ground state) में पहुंचता है। इस प्रक्रिया में गामा किरणों का भी उत्सर्जन होता है। चित्र 12.1 में हमने कोबाल्ट के बीटा क्षय में बने निकैल नाभिक के लिए ऊर्जा अवस्था आरेख दिखाया है। उत्तेजित अवस्था में स्थित परमाण्वीय नाभिक, इलेक्ट्रॉन को अपनी उत्तेजन ऊर्जा देकर भी निचली अवस्था में संक्रमण कर सकता है। इस तरह के ऊर्जा अंतरण (transfer) को आंतरिक रूपांतरण (internal conversion) कहते हैं। जिस इलेक्ट्रॉन को यह ऊर्जा मिलती है वह बीटा किरण के रूप में इस परमाणु से उत्सर्जित हो जाता है।



चित्र 12.1: क्षय प्रक्रिया $^{60}Co \rightarrow {}^{60}Ni + \beta^-$ में बने ^{60}Ni नाभिक के लिए ऊर्जा अवस्था आरेख।

12.3 रेडियोएक्टिव क्षय

अब आप यह जान गए हैं कि जब किसी रेडियोएक्टिव तत्व का स्वतः अपघटन होता है तो उसका नाभिक या तो अल्फ़ा कण या बीटा कण उत्सर्जित करता है। इस प्रक्रिया में बने नये तत्व का नाभिक अस्थायी भी हो सकता है। इस स्थिति में पहले क्षय के बाद

एक दूसरा क्षय होता है, और फिर एक और क्षय और फिर एक और, जिसके फलस्वरूप एक अनुक्रमिक श्रेणी (sequential series) बन जाती है। उदाहरण के लिए, ^{238}U की क्षय प्रक्रिया इस प्रकार है:

$$^{238}U \xrightarrow{\alpha} {}^{234}Th \xrightarrow{\beta} {}^{234}Pa \xrightarrow{\beta} {}^{234}U \xrightarrow{\alpha} {}^{230}Th \xrightarrow{\alpha} {}^{226}Ra \ldots$$

यह क्षय प्रक्रिया तब तक चलती है जब तक कि एक स्थाई आइसोटोप न बन जाए। ऊपर दी गई ^{238}U की क्षय प्रक्रिया में अंतिम स्थाई क्षय उत्पाद Pb (सीसा) है। यहाँ ^{238}U को जनक नाभिक (parent nucleus) कहते हैं और परिणामी नाभिक ^{234}Th को क्षयजात नाभिक (daughter nucleus) कहते हैं। अब आप यह जानना चाहेंगे कि क्या ऐसी और भी श्रेणियाँ हैं? ऐसी कुल 4 श्रेणियाँ हैं: थोरियम श्रेणी, नेप्टूनियम श्रेणी, यूरेनियम श्रेणी और एक्टीनियम श्रेणी। इन श्रेणियों के सदस्यों की द्रव्यमान संख्याएं (mass numbers) क्रमशः $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ द्वारा दी जाती हैं; जहाँ n एक पूर्णांक (integer) है।

इन सभी रेडियोएक्टिव श्रेणियों में बहुत बड़ी द्रव्यमान संख्या और बहुत अधिक अर्ध आयु वाले एक रेडियोएक्टिव तत्व द्वारा उत्तरोत्तर अल्फा या बीटा कणों के उत्सर्जन के परिणामस्वरूप, रेडियोएक्टिव तत्वों की एक श्रेणी बन जाती है। हम इन रूपांतरणों को इस तरह अभिव्यक्त कर सकते हैं:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha$$

$$^{A}_{Z}P \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Q + \beta^{-}$$

अब इस प्रक्रिया में उत्पन्न क्षय उत्पाद ख़ुद भी रेडियोएक्टिव हो सकते हैं और अल्फा या बीटा कणों के उत्सर्जन से उनका फिर से क्षय हो सकता है। ये उत्तरोत्तर रेडियोएक्टिव रूपांतरण तब तक चलते हैं जब तक कि स्थाई आइसोटोप लैड नहीं बन जाता।

तालिका 12.1 में हमने यूरेनियम श्रेणी के सदस्यों को दिखाया है। साथ ही साथ हमने उनकी अर्ध आयु और इनसे उत्सर्जित कणों की जानकारी भी दी है। तालिका 12.2 में एक्टीनियम श्रेणी और तालिका 12.3 में थोरियम श्रेणी के बारे में यही जानकारी दी गई है। यूरेनियम श्रेणी में, RaA, RaC और RaF, इन सभी की परमाणु संख्या (atomic number) 84 है और ये सभी पोलोनियम के आइसोटोप हैं। इसी तरह, RaB, RaD और RaG इन सभी की परमाणु संख्या 82 है और ये लैड के आइसोटोप हैं।

तालिका 12.1 : यूरेनियम श्रेणी ($A = 4n + 2$)

रेडियोएक्टिव जाति	रासायनिक प्रतीक	Z	A	अर्ध आयु	उत्सर्जित कण
यूरेनियम I	UI	92	238	4.5×10^9 y	α
यूरेनियम X_1	UX_1	90	234	24.1d	β
यूरेनियम X_2	UX_2	91	234	1.18m	β
यूरेनियम Z	UZ	91	234	6.7 h	β
यूरेनियम II	UII	92	234	2.5×10^5 y	α
आयनियम	Io	90	230	8.0×10^4 y	α
रेडियम	Ra	88	226	1620 y	α

रेडॉन	Rn	86	222	3.82 d	α
रेडियम A	RaA	84	218	3.05 min	α, β
रेडियम B	RaB	82	214	26.8 min	β
ऐस्टेटीन-218	At-218	85	218	2s	α
रेडियम C	RaC	83	214	19.7 min	β, α
रेडियम C′	RaC′	84	214	1.64×10^{-4}s	α
रेडियम C″	RaC″	81	210	1.32 min	β
रेडियम D	RaD	82	210	19.4 y	β
रेडियम E	RaE	83	210	5.0 d	β
रेडियम F	RaF	84	210	138.3 d	α
रेडियम G	RaG	82	206	—	स्थायी

–UX_1 शाखन प्रभाव दिखाता है; UX_1 के 99.65% परमाणु β-कणों का उत्सर्जन करके UX_2 बनाते हैं, और UX_1 के 0.35% परमाणु β-कण उत्सर्जित करके UZ बनाते है। UX_1 और UZ की द्रव्यमान संख्या और परमाणु संख्या बराबर हैं–क्रमशः 234 और 91, लेकिन उनके नाभिकीय ऊर्जा स्तर भिन्न हैं। रेडियोएक्टिव जातियों के ऐसे युग्मों को नाभिकीय समावयवी (nuclear isomer) कहते हैं।

यहाँ ध्यान दीजिए कि प्रत्येक रेडियोएक्टिव श्रृंखला में कुछ आइसोटोपों का दो वैकल्पिक तरीक़ों से क्षय हो सकता है: इन न्यूक्लिआइडों का अल्फ़ा उत्सर्जन और बीटा उत्सर्जन, दोनों ही के द्वारा क्षय होता है। इस प्रकार के विघटन को शाखन क्षय (branching decay) कहते हैं। और इस प्रकार के क्षय की प्रत्येक विधा (mode) के लिए एक शाखन अनुपात परिभाषित किया जाता है जो कि इसी विधा विशेष का अभिलक्षण होता है। उदाहरण के लिए, हम यूरेनियम श्रेणी में RaA और RaC के लिए, एक्टीनियम श्रेणी में Ac, AcA और AcC के लिए, और थोरियम श्रेणी में ThA और ThC के लिए शाखन क्षय देखते हैं। ज़्यादातर स्थितियों में, क्षय की किसी एक विधा की दूसरी विधा के मुकाबले प्रायिकता कहीं अधिक होती है। इस तरह, RaA और AcA का क्षय लगभग पूरे का पूरा अल्फ़ा उत्सर्जन द्वारा होता है (शाखन अनुपात > 99%); परमाणुओं के केवल एक बहुत छोटे से हिस्से (1% से कम) का बीटा उत्सर्जन द्वारा क्षय होता है। दूसरी ओर RaC, Ac और AcC का लगभग पूरी तरह से बीटा उत्सर्जन द्वारा क्षय होता है और परमाणुओं के 1 प्रतिशत से भी कम हिस्से का अल्फ़ा उत्सर्जन द्वारा क्षय होता है। इन सबमें सिर्फ़ ThC ही अपवाद है जिसका शाखन अनुपात अल्फ़ा विघटन के लिए 66.3% है और बीटा अपघटन के लिए 33.7% है। नेप्चूनियम श्रेणी की शुरुआत प्लूटोनियम (Pu) से होती है और उसका अंतिम स्थाई उत्पाद विस्मय (Bi) का एक आइसोटोप है।

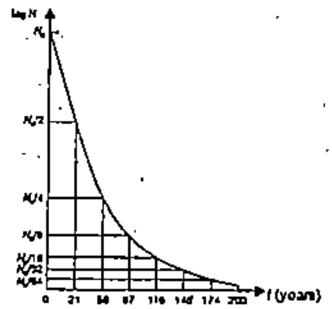
तालिका 12.2 : एक्टीनियम श्रृंखला ($A = 4n + 3$)

रेडियोएक्टिव जाति	रासायनिक प्रतीक	Z	A	अर्ध आयु	उत्सर्जित कण
एक्टिनोयूरेनियम	AcU	92	235	7.1×10^8 y	α
यूरेनियम	Y UY	90	231	25.6 h	β
प्रोटोएक्टिनियम	Pa	91	231	3.4×10^4 y	α
एक्टिनियम	Ac	89	227	22 y	β, α
रेडियोएक्टिनियम	RdAc	90	227	18.2 d	α
एक्टिनियम K	AcK	87	223	22 min	β, α
एक्टिनियम X	AcX	88	223	11.68 d	α
एक्टेटिन 219	At 219	85	219	0.9 min	α, β
एक्टिनॉन	An	86	219	3.92 s	α
बिस्मथ 215	Bi-215	83	215	8 min	β
एक्टिनियम A	AcA	84	215	1.83×10^{-3} s	α, β
एक्टिनियम B	AcB	82	211	36.1 min	β
ऐस्टेटिन 215	At 215	85	215	10^{-4} s	α
एक्टिनियम C	AcC	83	211	2.16 min	β, α
एक्टिनियम C′	AcC′	84	211	0.52 s	α
एक्टिनियम C″	AcC″	81	207	4.8 min	β
एक्टिनियम D	AcD	82	207	—	स्थायी

तालिका 12.3 : थोरियम श्रृंखला ($A = 4n$)

रेडियोएक्टिव जाति	रासायनिक प्रतीक	Z	A	अर्ध आयु	उत्सर्जित कण
थोरियम	Th	90	232	1.39×10^{10} y	α
मीसोथोरियम I	$MsTh_1$	88	228	6.7 y	β
मीसोथोरियम II	$MsTh_2$	89	228	6.13 h	β
रेडियोथोरियम	RdTh	90	228	1.9 y	α
थोरियम X	ThX	88	224	3.64 d	α
थोरॉन	Th	86	220	51.5 s	α
थोरियम A	ThA	84	216	0.16 s	α, β
थोरियम B	ThB	82	212	10.6 h	β
एस्टेटिन 216	At-126	85	216	3×10^{-4} s	α
थोरियम C	ThC	83	212	60.5 min	β, α
थोरियम C′	ThC′	84	212	3.0×10^{-7} s	α
थोरियम C″	ThC″	81	208	3.1 min	β
थोरियम D	ThD	82	208	–	स्थायी

तो अब हम जान गये हैं कि अगर हमारे पास एक निश्चित मात्रा में रेडियोआइसोटोप हो, तो समय के साथ धीरे-धीरे उसकी मात्रा घटती जायेगी। प्रयोगों से पता चलता है कि इस क्षय प्रक्रिया की गुणात्मक व्याख्या के लिए एक बहुत आसान नियम दिया जा सकता है। इसे समझने के लिए चित्र 12.2 देखें। इसमें हमने लघुगणकीय पैमाने पर रेडियोएक्टिव स्ट्रांशियम को समय के फलन के रूप में दिखाया है। इस चित्र में आप देख सकते हैं कि



चित्र 12.2: समय के फलन के रूप में रेडियोएक्टिव स्ट्रांशियम का क्षय।

- स्ट्रांशियम की प्रारंभिक मात्रा को क्षय द्वारा घटकर आधा रह जाने में 29 वर्ष लगते हैं
- अगले 29 वर्षों में बाकी बचे स्ट्रांशियम के आधे हिस्से का क्षय होता है। यानी हमारे पास $\frac{1}{2}\left(\frac{N_0}{2}\right) = \frac{N_0}{4}$ नाभिक बचते हैं।

अतः 29, 58, 87 वर्षों के बाद जनक रेडियोएक्टिव पदार्थ की आरंभिक मात्रा का क्रमशः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{8}$ वां हिस्सा बचेगा। क्या आप इस श्रेणी को पहचान रहे हैं? यह एक ज्यामितीय श्रेणी (geometric progression) है जिसमें $r = 1/2$। अतः अगर $N(t)$ उन स्ट्रांशियम नाभिकों की संख्या है जो क्षण t पर इस क्षय प्रक्रिया में बचे रहते हैं और N_0, क्षण $t = 0$ पर स्ट्रांशियम नाभिकों की संख्या है, तब हम लिख सकते हैं

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/(29\ y)} \tag{12.1}$$

पदार्थ के जनक नाभिकों के आधे भाग का क्षय होने में लगे समय को उसकी अर्ध आयु (half-life) कहा जाता है। हम इसे प्रतीक $T_{1/2}$ से व्यक्त करेंगे। तालिका 12.4 में कुछ महत्वपूर्ण रेडियोआइसोटोपों की अर्ध-आयु दी गई है। आप देखेंगे कि $T_{1/2}$ के मानों का परास बहुत अधिक है: ^{238}U के लिए यह 4.5×10^9 y है ^{212}Po के लिए 3×10^{-9} s।

तालिका 12.4: कुछ रेडियोआइसोटोपों की अर्ध-आयु

रेडियोआइसोटोप	$T_{1/2}$
^{14}C	5730 y
^{40}K	1.3×10^9 y
^{60}Co	5.24 y
^{90}Sr	28.8 y
^{131}I	8.05 d
^{212}Po	3×10^{-9} s
^{238}U	4.5×10^9 y

अर्ध-आयु के पदों में हम समीकरण (12.1) को इस तरह लिख सकते हैं:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \tag{12.2}$$

आइए अब हम थोड़ा रुक कर यह समझें कि इस परिणाम का भौतिक अभिप्राय क्या है? यह संबंध हमें बताता है कि समय बीतने के साथ-साथ रेडियोएक्टिव पदार्थ के नमूने की एक निश्चित मात्रा का किस तरह से अपघटन होता है। अब आप यह भी जानना चाहेंगे कि क्या यह फ़ार्मूला सिर्फ़ $t = 0, T_{1/2}, 2T_{1/2}$... आदि पर ही लागू होता है? इस सवाल का जवाब है कि समीकरण (12.2) समय के सभी मानों पर लागू होता है।

यहाँ हम इस बात पर ज़ोर देना चाहेंगे कि सभी रेडियोएक्टिव तत्वों के लिए क्षय वक्र अनिवार्यत: एक ही रूप का होता है। लेकिन हर तत्व को क्षय होने में जो समय लगता है वह सिर्फ़ उसी तत्व का अभिलक्षण होता है।

सर्वसमिका $2 = e^{\ln 2} \cong e^{0.693}$ का इस्तेमाल करके हम समीकरण (12.2) को एक आसान रूप में दोबारा लिख सकते हैं:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \exp(-\ln 2\ t/T_{1/2}) \\ &= N_0 \exp(-t/\tau) \end{aligned} \tag{12.3}$$

जहाँ $\tau = \dfrac{T_{1/2}}{\ln 2}$ ।

समीकरण (12.3) रेडियोएक्टिव क्षय नियम का गणितीय स्वरूप है।

यह हमें बताता है कि किसी रेडियोएक्टिव पदार्थ के नमूने में उपस्थित परमाणुओं की संख्या समय के साथ चरघातांकी फलन के रूप में घटती है और इसका एक अभिलक्षणिक समय स्थिरांक τ होता है। आइये अब हम किसी समयांतराल dt में क्षय हो रहे नाभिकों की संख्या निकालें। समीकरण (12.3) से हम तुरंत लिख सकते हैं कि

$$dN = -\frac{N_0}{\tau}\ e^{-t/\tau}\, dt$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह इसलिए लगाया गया है क्योंकि लगातार अपघटन के कारण नाभिकों की संख्या समय के साथ-साथ घटती है।

परिभाषा से, औसत जीवन काल, $\overline{t}$ है

$$\begin{aligned} \overline{t} &= \frac{\int_0^\infty t\,|dN|}{\int_0^\infty |dN|} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t\,|dN| \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^\infty \frac{t}{\tau}\ N_0\, e^{-t/\tau}\, dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t\, e^{-t/\tau}\, dt \end{aligned}$$

इसका खंडश: समाकलन (integration by parts) करने पर हमें मिलता है

$$\overline{t} = \frac{1}{\tau}\left[-t\tau\, e^{-t/\tau}\Big|_0^\infty + \tau\int_0^\infty e^{-t/\tau}\, dt\right]$$

पहला पद दोनों सीमाओं के लिए शून्य हो जाता है। अत: यह व्यंजक इस तरह सरल हो जाता है:

$$\overline{t} = \int_0^\infty e^{-t/\tau}\, dt = \left[-\tau\, e^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \tau \tag{12.4}$$

यानी, τ रेडियोएक्टिव नाभिकों की औसत आयु है। यहां हम आपको यह बताना चाहेंगे कि $T_{1/2}$ की तरह, τ के मान का परास भी बहुत अधिक है। अब इतने बड़े अंतराल पर समय के मापन के लिए इस्तेमाल होने वाली तकनीकें बहुत अलग-अलग होती हैं। लेकिन इन सभी रेडियोएक्टिव क्षय प्रक्रियाओं के लिए रेडियोएक्टिव क्षय का नियम एक ही रहता है। अब हम इन अवधारणाओं को कुछ उदाहरणों की मदद से समझायेंगे।

उदाहरण 1

रेडॉन की अर्ध-आयु 3.8 दिन है। कितने दिनों बाद रेडॉन का सिर्फ़ 5% बचा रहेगा?

हल

हम जानते हैं कि $T_{1/2} = 3.8$ दिन। इसलिए

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} = \frac{3.8 \text{ दिन}}{0.693} = 5.48 \text{ दिन}$$

अब हमें उन दिनों की संख्या निकालनी है जिनमें रेडॉन क्षय होकर सिर्फ़ 5% रह जाता है। इसके लिए हम लिख सकते हैं $\frac{N}{N_0} = 0.05$।

समीकरण (12.3) से

$$\frac{N}{N_0} = 0.05 = \exp\left(-\frac{t}{5.48 \text{ दिन}}\right)$$

इसे हम इस तरह लिख सकते हैं

$$\exp\left(\frac{t}{5.48 \text{ दिन}}\right) = 20$$

दोनों ओर का प्राकृतिक लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\frac{t}{5.48 \text{ दिन}} = \ln 20 = 2.303 \log_{10} 20 = 2.303 \times 1.3010 = 2.996$$

अत:

$$t = 2.996 \times 5.48 \text{ दिन} = 16.42 \text{ दिन}$$

उदाहरण 2

किसी अनुसंधान-शाला के एक कमरे में हुई दुर्घटना के कारण उसमें रेडियोएक्टिव पदार्थ फैल गया। इसके नतीजतन उस कमरे में विकिरण का स्तर सामान्यत: अनुमत (permissible) स्तर का 50 गुना हो गया। गणना कीजिए कि कितने दिनों के बाद इस कमरे में सुरक्षापूर्वक काम किया जा सकेगा? इस रेडियोएक्टिव पदार्थ की अर्ध-आयु 30 दिन है।

हल

यहाँ $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{50}$ और $T_{1/2} = 30$ दिन

अत: $$\tau = \frac{N}{N_0} = \frac{30 \text{ दिन}}{0.693} = 43.3 \text{ दिन}$$

इसलिए $$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{50} = \exp\,(-\,t/43.3 \text{ दिन})$$

इससे हमें मिलता है

$$\frac{t}{43.3 \text{ दिन}} = \ln 50 = 3.912$$

और

$$t = 3.912 \times 43.3 \text{ दिन} = 169.4 \text{ दिन}$$

उदाहरण 3

पिचब्लेंड (pitchblende) के एक नमूने में लैड-यूरेनियम अनुपात 9/40 है। इस नमूने की आयु की गणना कीजिए। यूरेनियम की अर्ध-आयु 4.5×10^9 y है। लैड और यूरेनियम के परमाणु भार क्रमशः 206.0 और 238.4 हैं।

हल

चूंकि नमूने में लैड और यूरेनियम के भार का अनुपात 9/40 है इसलिए हम कह सकते हैं कि अगर नमूने में 9kg लैड है तो 40kg यूरेनियम होगा। 9kg लैड में परमाणुओं की संख्या $= \frac{9}{206} \times 6 \times 10^{26} = 0.262 \times 10^{26}$ है। इसी तरह 40 kg यूरेनियम में परमाणुओं की संख्या $= \frac{40}{238.4} \times 6 \times 10^{26} = 1.007 \times 10^{26}$।

इसलिए शुरुआत में कुल यूरेनियम परमाणुओं की संख्या $= 1.269 \times 10^{26}$।

चूंकि $$T_{1/2} = 4.5 \times 10^9 \text{ y}, \; \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{4.5 \times 10^9}{0.693} = 6.494 \times 10^9 \text{ y}$$

समीकरण (12.3) से हम जानते हैं कि

$$N = N_0\, e^{-t/\tau}$$

अतः $$\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

या $$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

$$= (6.494 \times 10^9 \text{ y}) \ln\left(\frac{1.269}{1.007}\right) = (6.494 \times 10^9 \text{ y}) \times 0.2296$$

$$= 1.49 \times 10^9 \text{ y}$$

अब आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

एक रेडियोएक्टिव तत्व की औसत आयु 14.43 महीने है। इस तत्व के 75% भाग का क्षय होने में लगे समय की गणना कीजिए।

व्यवहार में, हमें ... क्षय की दर में ज़्यादा दिलचस्पी होती है न कि उसकी मात्रा ... क्योंकि इससे ... बीटा या गामा किरणों के उत्सर्जन की दर का पता चलता

है। (इसी के साथ-साथ इस जानकारी का इस्तेमाल करके हम किसी भी नमूने की आयु का अनुमान लगा सकते हैं।) ऐसा करने के लिए, हम समीकरण (12.5) से पाते हैं कि

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = -\frac{N}{\tau} \qquad (12.5)$$

यानी कि किसी भी क्षण पर क्षय की दर, उस क्षण पर उपस्थित रेडियोएक्टिव पदार्थ की मात्रा के समानुपाती होती है।

वैकल्पिक रूप में, हम समीकरण (12.5) को इस तरह लिख सकते हैं

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad (12.6)$$

जहाँ λ आनुपातिकता स्थिरांक है और इसे क्षय स्थिरांक (decay constant) कहते हैं। यह प्रत्येक रेडियोएक्टिव तत्व या क्षय प्रक्रिया का अभिलक्षणिक स्थिरांक होता है। λ के पदों में, रेडियोएक्टिव क्षय के नियम को हम इस तरह लिख सकते हैं:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \qquad (12.7)$$

अब अगर आप समीकरण (12.3) और (12.7) की तुलना करें तो पायेंगे कि $\lambda = 1/\tau$।

किसी रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता (activity) A की परिभाषा इस तरह से की जाती है: A प्रति इकाई समय में विघटित हो रहे परमाणुओं की संख्या है। गणितीय रूप में

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| \qquad (12.8)$$

समीकरणों (12.6) और (12.8) से हमें मिलता है

$$A = \lambda N \qquad (12.9)$$

यानी किसी दिए हुए रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता उसमें उपस्थित रेडियोएक्टिव परमाणुओं की संख्या के समानुपाती होती है। अगर किसी स्रोत की $t = 0$ पर प्रारंभिक सक्रियता A_0 हो तो

$$\frac{A}{A_0} = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \qquad (12.10)$$

राशि, $\frac{A}{A_0}$ को आपेक्षिक सक्रियता कहा जाता है और यह किसी भी स्रोत की रेडियोएक्टिवता की माप है। इस परिणाम से आप देख सकते हैं कि किसी भी रेडियोएक्टिव पदार्थ की आपेक्षिक सक्रियता समय के साथ चरघातांकी फलन के रूप में घटती है।

क्षय दर को अभिव्यक्त करने का सबसे सहज तरीक़ा है कि इसे विघटन प्रति सेकंड के रूप में लिखा जाए। लेकिन व्यवहार में जो सक्रियता पाई जाती है उसका मान इतना अधिक होता है कि उसके लिए एक अन्य इकाई क्यूरी (Curie) का इस्तेमाल किया जाता है और इसका प्रतीक Ci है। प्रारंभ में क्यूरी को एक ग्राम रेडियम की सक्रियता के रूप में परिभाषित किया गया लेकिन जैसे-जैसे मापन-तकनीकों में सुधार होता गया वैसे-वैसे इसका मान बदलता गया। लिहाज़ा अब क्यूरी की परिभाषा इस तरह दी जाती है:

1 curie = 1 Ci = 3.7×10^{10} विघटन प्रति सेकंड

SI प्रणाली में क्षय दर की इकाई बैकेरल है

$$1 \text{ becquerel} = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ विघटन प्रति सेकंड}$$

आपने गलगंड के बारे में सुना होगा जो थायरॉयड ग्रंथि का रोग है। क्या आप जानते हैं कि थायरॉइड ग्रंथि के इस रोग के उपचार के लिए रेडियोआइसोटोप ^{131}I का इस्तेमाल होता है? आइये अब हम उसकी क्षय दर की गणना करें।

^{131}I के एक ग्राम में नाभिकों की संख्या है

$$1\text{ g} \times \frac{1\text{ mol}}{131\text{ g}} \times 6.023 \times 10^{23} \text{ नाभिक प्रति मोल} = 4.6 \times 10^{21}$$

अतः क्षय दर है

$$-\frac{dN}{dt} = \frac{N}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N$$

तालिका (12.4) से आप देख सकते हैं $T_{1/2}\,(^{131}I) = 8.05$ दिन

$$\therefore \qquad -\frac{dN}{dt} = \frac{0.693}{8.05 \text{ दिन}} (4.6 \times 10^{21} \text{ परमाणु})$$

$$= \frac{3.188 \times 10^{21} \text{ परमाणु}}{6.955 \times 10^{5}\text{ s}}$$

$$= 4.58 \times 10^{15} \text{ विघटन प्रति सेकंड}$$

इसे क्यूरी में लिखने पर हम पाते हैं कि

$$-\frac{dN}{dt} = (4.58 \times 10^{15} \text{ विघटन प्रति सेकंड}) \times \frac{1\text{ Ci}}{(3.7 \times 10^{10} \text{ विघटन प्रति सेकंड})}$$

$$= 1.24 \times 10^{5}\text{ Ci}$$

यह काफ़ी बड़ी विघटन दर है। मानव शरीर में ^{131}I की बहुत ही थोड़ी मात्रा (10^{-9} g) इंजेक्शन द्वारा दी जाती है जिससे क्षय दर लगभग 10^{-4} Ci होती है जो कि सुरक्षा सीमा से काफ़ी कम है।

अब हम उदाहरण देकर यह समझायेंगे कि रेडियोकार्बन काल निर्धारण द्वारा हम किसी पुरातात्विक नमूने की आयु का अनुमान कैसे लगाते हैं।

उदाहरण 4

कार्बनिक पदार्थों के रेडियोकार्बन काल निर्धारण के लिए कार्बन के ^{14}C आइसोटोप का इस्तेमाल किया जाता है। पेड़ों से, जो कि वायुमंडल की CO_2 के साथ साम्यावस्था में होते हैं, लिए गए कार्बन के ताज़ा नमूने में ^{12}C बहुतायत में यानी 98.89% के बराबर होता है। ^{13}C 1.11% प्रतिशत होता है और ^{14}C मात्र 1.3×10^{-12}% होता है। पेड़ के मरने के बाद लकड़ी में ^{12}C और ^{13}C दोनों ही की मात्राएं नहीं बदलतीं लेकिन रेडियोएक्टिव क्षय के कारण ^{14}C की मात्रा बदल जाती है। मिश्र के एक पिरामिड से लकड़ी का एक टुकड़ा लिया गया है, जिसमें स्थित कार्बन के प्रत्येक ग्राम की सक्रियता का मान 3.9×10^{-12} Ci है। इस लकड़ी की आयु का अनुमान लगायें।

हल

एक ग्राम कार्बन में नाभिकों की संख्या है $1\text{ g} \times \frac{1\text{ mol}}{12\text{ g}} \times 6.02 \times 10^{23}$ नाभिक प्रति मोल $= 5.02 \times 10^{22}$। इसलिए एक ग्राम ताजा कार्बन में ^{14}C के नाभिकों की संख्या है $5.02 \times 10^{22} \times 1.3 \times 10^{-12} = 6.53 \times 10^{10}$।

समीकरण (12.4) से $t = 0$ पर सक्रियता है

$$A_0 = \left|\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0$$

तालिका 12.4 से हम देखते हैं कि $T_{1/2}$ (^{14}C) 5730 वर्ष है। अत:

$$A_0 = \frac{0.693}{5730 \times 365 \times 24 \times 3600\text{ s}} \times (6.53 \times 10^{10}\text{ नाभिक})$$

$$= \frac{4.53 \times 10^{10}\text{ नाभिक}}{1.807 \times 10^{11}\text{ s}} = 0.251 \text{ विघटन प्रति सेकंड}$$

इसे क्यूरी में व्यक्त करने के लिए हम लिखते हैं

$$A_0 = \frac{(0.251 \text{ विघटन प्रति सेकंड}) \times 1\text{ Ci}}{3.7 \times 10^{10} \text{ विघटन प्रति सेकंड}}$$

$$= 6.78 \times 10^{-12}\text{ Ci}$$

अब हमें दिया गया है कि नमूने की मापी गई सक्रियता 3.9×10^{-12} Ci है। यह प्रारंभिक सक्रियता की $\frac{3.9 \times 10^{-12}\text{ Ci}}{6.78 \times 10^{-12}\text{ Ci}} = 0.575$ गुना है।

चूंकि रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता उसकी मात्रा के समानुपाती होती है अत: समीकरण (12.10) से हम लिख सकते हैं

$$\frac{A}{A_0} = \frac{N}{N_0} = e^{-(\ln 2)\, t/T_{1/2}} = 0.575$$

इस तरह दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln(0.575) = -\frac{5730\text{ y}}{0.693} \times (-0.553)$$

$$= 4572.4\text{ y}$$

बोध प्रश्न 2

10 मिनट लगाएं

^{238}U की अर्ध-आयु 4.51×10^9 y है। इसके विघटन स्थिरांक की गणना (s^{-1}) में करें। इसके साथ-साथ 1g यूरेनियम के लिए प्रति सेकंड विघटनों की संख्या की गणना करें। आवोगाद्रो संख्या $= 6.03 \times 10^{23}$।

12.4 रेडियोएक्टिवता की वृद्धि और क्षय

अब आप जान गए हैं कि प्रकृति में पाये जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्व लगातार अपघटित होते रहते हैं और उनका क्षय एक ख़ास अभिलक्षणिक क्षय स्थिरांक द्वारा नियंत्रित होता है। भौतिक तौर पर इसका मतलब यह है कि रेडियोएक्टिव नमूने में मौजूद परमाणुओं (या जनक नाभिकों) की संख्या समीकरणों (12.3) और (12.7) के अनुसार लगातार घटती जायेगी। लेकिन ऐसा भी तो हो सकता है कि क्षयजात नाभिक खुद भी रेडियोएक्टिव हों। अब उनकी सक्रियता भी समय के साथ-साथ बढ़ती जायेगी (और इस तरह वह जनक नाभिकों के क्षय की भरपाई करेगी)। लेकिन यह प्रक्रिया अनिश्चित काल तक तो जारी नहीं रह सकती। तो फिर क्या होता है? इसका जवाब जानने के लिए आइये हम क्षयजात नाभिकों की प्रेक्षित वृद्धि और क्षय की सक्रियता के बारे में और पता लगायें।

आइये हम ^{238}U के क्षय का उदाहरण लें। अब हम जान गए हैं कि इसका क्षय अल्फ़ा कण उत्सर्जन द्वारा होता है और इसकी अर्ध आयु 4.5×10^9 y है। लेकिन ^{234}Th का भी β कण उत्सर्जन द्वारा क्षय होता है और उनकी अर्ध-आयु सिर्फ़ 24.1 दिन है। इसका मतलब यह है कि यूरेनियम के प्रारंभिक नमूने में ^{234}Th परमाणु कहीं ज़्यादा तेज़ दर से अपघटित होंगे और नमूने की आभासी सक्रियता मुख्यत: उन्हीं के कारण होगी। लेकिन अगर ^{234}Th को यूरेनियम से अलग कर दिया जाए तो उसकी सक्रियता में चरघातांकी दर से क्षय होगा और वह 24.1 दिन में अपने प्रारंभिक मान की आधी रह जाएगी।

यह जानने के लिए कि एक ताज़ा अलग किए गए यूरेनियम के नमूने में ^{234}Th की वृद्धि कैसे होती है हम यह नोट करते हैं कि अगर किसी क्षण t पर ^{238}U और ^{234}Th में परमाणुओं की संख्या N_U और N_{Th} है तो जनक तत्व N_U के अपघटन की दर है

$$\frac{dN_U}{dt} = -\lambda_U N_U$$

भौतिक तौर पर इसका मतलब यह भी है कि ^{238}Th परमाणु, $\lambda_U N_U$ की दर से उत्पन्न होते हैं, जहाँ λ_U यूरेनियम का क्षय स्थिरांक है। लेकिन ^{238}Th परमाणु $\lambda_U N_{Th}$ की दर से अपघटित होंगे, जहाँ N_{Th} समय t पर उपस्थित ^{234}Th परमाणुओं की संख्या है और λ_{Th}, उनका अभिलक्षणिक क्षय स्थिरांक है। अत: यूरेनियम में ^{234}Th परमाणुओं की नेट वृद्धि दर है

$$\frac{dN_{Th}}{dt} = \lambda_U N_U - \lambda_{Th} N_{Th}$$

या
$$\frac{dN_{Th}}{dt} + \lambda_{Th} N_{Th} = \lambda_U N_U \tag{12.11}$$

N_{Th} के लिए इस साधारण अवकल समीकरण को हल करने लिए हमें उसके बाएं पक्ष को यथातथ अवकल में बदलना पड़ेगा। ऐसा हम पूरे समीकरण में $\exp(\lambda_{Th} t)$ से गुणा करके कर सकते हैं जो समाकलन गुणक है। इससे हमें मिलता है

$$\exp(\lambda_{Th} t) \frac{dN_{Th}}{dt} + \lambda_{Th} N_{Th} \exp(\lambda_{Th} t) = \lambda_U N_U \exp(\lambda_{Th} t)$$

जिससे

$$\frac{d}{dt}\left[N_{Th} \exp(\lambda_{Th} t)\right] = \lambda_U N_U \exp(\lambda_{Th} t)$$

इसका समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$N_{Th} \exp(\lambda_{Th} t) = \frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}} N_U \exp(\lambda_{Th} t) + K$$

या

$$N_{Th} = \frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}} N_U + K \exp(-\lambda_{Th} t) \tag{12.12}$$

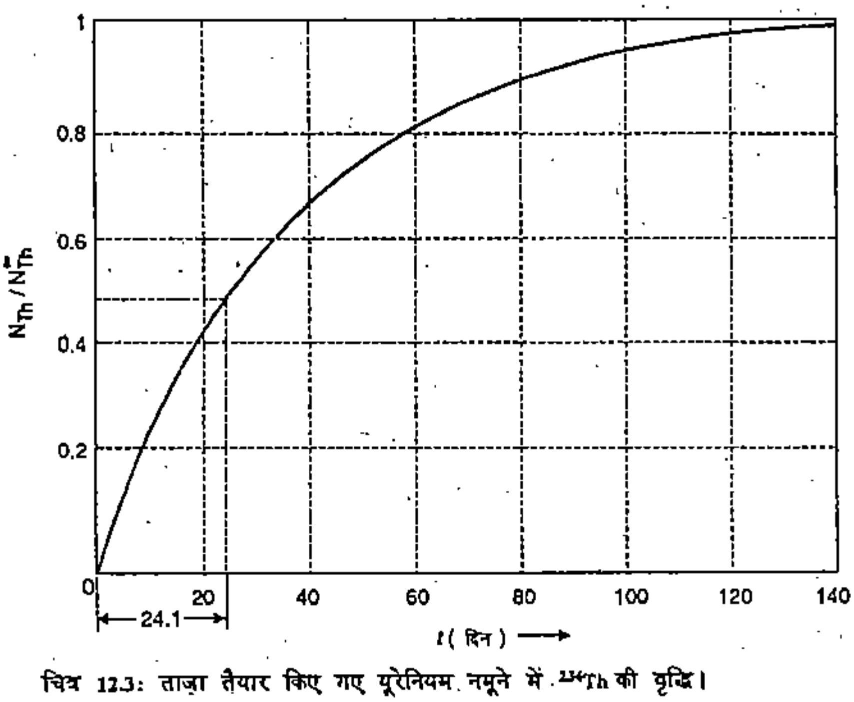
जहाँ K समाकलन अचर है। इसका मान निकालने के लिए हम ध्यान देते हैं कि $t = 0$ पर, यानी एक ताज़ा तैयार किए गए यूरेनियम नमूने में $N_{Th} = 0$। इससे हमें मिलता है $K = -\frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}} N_U$। इसलिए समीकरण (12.12) का स्वरूप हो जाता है

$$N_{Th} = \frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}} N_U [1 - \exp(-\lambda_{Th} t)] \qquad (12.13\ क)$$

इस परिणाम से पता चलता है कि अलग किए गए यूरेनियम के अंश में ^{234}Th परमाणुओं की संख्या अंततः एक अचर साम्य मान तक पहुंचती है: $N_{Th}^{\infty} (\lambda_U/\lambda_{Th}) N_U$। इस परिणाम को समीकरण (12.13 क) के साथ लिखने पर हमें मिलता है

$$N_{Th} = N_{Th}^{\infty} [1 - \exp(-\lambda_{Th} t)] \qquad (12.13\ ख)$$

^{234}Th की वृद्धि को चित्र 12.3 में दिखाया गया है।



चित्र 12.3: ताज़ा तैयार किए गए यूरेनियम नमूने में ^{234}Th की वृद्धि।

12.5 उत्तरोत्तर रेडियोएक्टिव रूपांतरण

पिछले भाग में हमने रेडियोएक्टिवता की वृद्धि और क्षय की उस स्थिति में जानकारी हासिल की जब जनक नाभिक क्षयजात नाभिकों में अपघटित होते हैं और क्षयजात नाभिकों का भी अपघटन होता है। अब आप जान गये हैं कि प्राकृतिक रूप से पाए जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्वों का तब तक उत्तरोत्तर क्षय होता है जब तक एक स्थाई तत्व नहीं मिल जाता। किसी ख़ास रेडियोएक्टिव श्रेणी का अध्ययन करते हुए हमें अक्सर यह ज़रूरत महसूस होती है कि हम श्रेणी के प्रत्येक सदस्य के परमाणुओं की संख्या के

एक ख़ास क्षण पर मान का पता लगाएं। इस समस्या को हम इस तरह भी पेश कर सकते हैं:

माना कि प्रारंभ में जनक तत्व A के N_{A0} परमाणु हैं। उसका तत्व B में क्षय होता है जिसका फिर से तत्व C में क्षय होता है आदि आदि। अगर λ_A, λ_B, λ_C क्रमशः A, B, C के अपघटन स्थिरांक हों तो किसी दिए हुए समय t पर परमाणुओं की संख्या N_A, N_B, N_C क्या होगी। आइये इसकी गणना करें। समीकरण (12.7) से हम देखते हैं क्षण t पर उपस्थित, A के परमाणुओं की संख्या है

$$N_A = N_{A0} \exp\ (-\lambda_A\, t) \tag{12.14}$$

तत्व B के परमाणु दर $\lambda_A N_A$ से उत्पन्न होते हैं और उनका क्षय दर $\lambda_B N_B$ से होता है। B के परमाणुओं की संख्या की नेट वृद्धि दर है

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A\, N_A - \lambda_B\, N_B \tag{12.15}$$

इसी तरह तत्व C के लिए हम लिख सकते हैं

$$\frac{dN_C}{dt} = \lambda_B\, N_B - \lambda_C\, N_C \tag{12.16}$$

समीकरण (12.14) से N_A का मान समीकरण (12.15) में रखने पर और उन्हें व्यवस्थित करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B\, N_B = \lambda_A\, N_{A0} \exp\ (-\lambda_A\, t) \tag{12.17}$$

समीकरण के दोनों तरफ $\exp\ (-\lambda_A\, t)$ से गुणा करके और पिछले भाग में दिये गये चरणों का दोहरा करके आप आसानी से दिखा सकते हैं कि

$$N_B = \frac{\lambda_A N_{A0}}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \tag{12.18}$$

आप इस परिणाम को ख़ुद ही क्यों नहीं निकालते ?

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 3

समीकरण (12.17) से शुरू करके समीकरण (12.18) व्युत्पन्न कीजिए। इसके लिए प्रारंभिक प्रतिबंध यह है कि क्षण $t = 0$ पर केवल जनक तत्व उपस्थित थे यानी क्षण $t = 0$ पर $N_B = 0$।

अब अगर आप N_B का व्यंजक समीकरण (12.16) में रखें और पूरे समीकरण को $\exp\ (\lambda_C\, t)$ से गुणा करें तो आपको हल करने पर निम्न व्यंजक मिलेगा

$$\frac{d}{dt} \exp\ (\lambda_C\, t) = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \left[e^{(\lambda_C - \lambda_A)t} - e^{(\lambda_C - \lambda_B)t} \right]$$

इसका हम आसानी से समाकलन कर सकते हैं

$$\exp(\lambda_C t)\, N_C = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \left[\frac{e^{(\lambda_C - \lambda_A)t}}{(\lambda_C - \lambda_A)} - \frac{e^{(\lambda_C - \lambda_B)t}}{(\lambda_C - \lambda_B)}\right] + K$$

$$N_C = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \left[\frac{e^{-\lambda_A t}}{(\lambda_C - \lambda_A)} - \frac{e^{-\lambda_B t}}{(\lambda_C - \lambda_B)}\right] + K \exp(-\lambda_C t) \quad (12.19)$$

जहाँ K समाकलन अचर है। इसका मान निकालने के लिए हम इस तथ्य का इस्तेमाल करते हैं कि $t = 0$ पर $N_C = 0$। इससे हमें मिलता है

$$K = -\frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \left[\frac{1}{(\lambda_C - \lambda_A)} - \frac{1}{(\lambda_C - \lambda_B)}\right]$$

$$= \frac{\lambda_A \lambda_B N_{A0}}{(\lambda_C - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_B)}$$

अत:

$$N_C = \lambda_A \lambda_B N_{A0} \left[\frac{\exp(-\lambda_A t)}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)} + \frac{\exp(-\lambda_B t)}{(\lambda_C - \lambda_B)(\lambda_A - \lambda_B)} + \frac{\exp(-\lambda_C t)}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)}\right] \quad (12.20)$$

संक्षिप्त रूप में इसे हम फिर ऐसे लिख सकते हैं

$$N_C = N_{A0}\,(a_1 e^{-\lambda_A t} + a_2 e^{-\lambda_B t} + a_3 e^{-\lambda_C t}) \quad (12.21)$$

जहाँ $$a_1 = \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)}$$

$$a_2 = \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)}$$

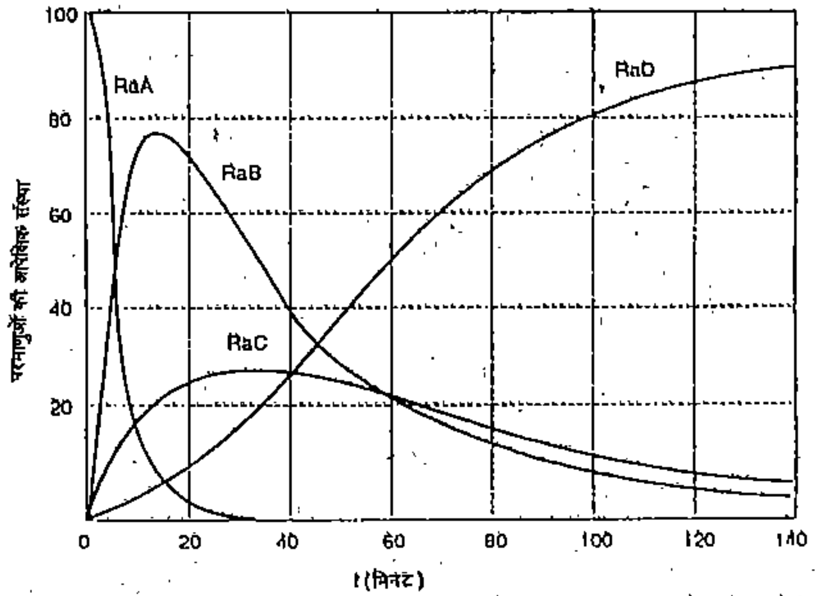
और $$a_3 = \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A - \lambda_C)(\lambda_B - \lambda_C)} \quad (12.22)$$

अब आप ऊपर दी गई प्रक्रिया का इस्तेमाल करके आसानी से इसे रेडियोएक्टिव तत्वों की एक श्रृंखला पर लागू कर सकते हैं। इसे हम आपके लिए अभ्यास के तौर पर छोड़ रहे हैं।

आइये इन समीकरणों को उत्तरोत्तर रेडियोएक्टिव रूपांतरणों के ख़ास उदाहरण पर लागू करें। अगर एक धातु के तार को कुछ सेकंड के लिए रेडियोएक्टिव रेडॉन गैस के संपर्क में लाया जाए तो RaA की एक पतली फ़िल्म उस धातु पर बन जाती है। RaA रेडॉन का क्षय उत्पाद है; उसकी अर्ध-आयु 3.05 मिनट है और इसका क्षय RaB में होता है जिसकी अर्ध-आयु 27 मिनट है। RaC का क्षय RaD में 20 मिनट की अर्ध-आयु से होता है। RaD की अर्ध-आयु 22 वर्ष है और हर लिहाज से प्रयोग के दौरान RaD परमाणुओं की संख्या अचर मानी जा सकती है।

RaA, RaB, RaC और RaD परमाणुओं की संख्या को समय के फलन के रूप में चित्र 12.4 में दिखाया गया है। RaA परमाणुओं की संख्या जिसका प्रारंभिक मान माना कि 100 है, समय के साथ चरघातांकी रूप से घटकर 3.05 मिनट में 50 ही रह जाती है। क्षण $t = 0$ पर RaB, RaC और RaD के परमाणु उपस्थित नहीं हैं। लेकिन RaB

परमाणुओं की संख्या समय के साथ बढ़ती जाती है। इसका महत्तम लगभग 11 मिनट बाद होता है और फिर यह समय के साथ घट जाती है। RaC परमाणुओं की संख्या का महत्तम लगभग 35 मिनट बाद होता है। RaD परमाणुओं की संख्या लगातार बढ़ती जाती है और इसका महत्तम तब होता है जब RaB, RaC लगभग शून्य हो जाते हैं। अंततः RaD चरघातांकी रूप से क्षय होता है और इसकी अर्ध-आयु 22 साल है।



चित्र 12.4: एक रेडियोएक्टिव नमूने में RaA, RaB, RaC और RaD के परमाणुओं की आपेक्षिक संख्या का समय के साथ परिवर्तन।

---

10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 4

ऊपर दिये गये उदाहरण में उस क्षण की गणना करें जबकि RaB परमाणुओं की संख्या महत्तम है।

12.5.1 रेडियोएक्टिव साम्यावस्था

अब आप जान गये हैं कि या तो प्राकृतिक रूप से पाए जाने वाले या क्षय श्रृंखला में उत्पन्न हुए विभिन्न रेडियोएक्टिव तत्वों की एक अभिलक्षणिक अर्ध-आयु होती है। उत्तरोत्तर अपघटनों को निर्धारित करने वाला नियम किसी दिए गए समय पर उपस्थित रेडियोएक्टिव आइसोटोप की मात्रा के बारे में होता है। किसी क्षय श्रृंखला में उपस्थित विभिन्न नाभिकों की अर्ध-आयु के आपेक्षिक परिणामों के अनुसार हमें एक ऐसी स्थिति भी मिल सकती है जिसमें जनक और/या क्षयजात परमाणुओं की संख्या अचर हो या उनका अनुपात अचर हो। इस अवस्था को **रेडियोएक्टिव साम्यावस्था** (radioactive equilibrium) कहते हैं। इसमें दो संभावनाएं हो सकती हैं। हम इन्हें बारी-बारी से लेंगे।

आइए फिर से ^{238}U का क्षय लें। याद कीजिए कि इसकी अर्ध-आयु इसके क्षयजात तत्व ^{234}Th के परमाणुओं की अर्ध-आयु से कहीं ज़्यादा है। अब माना कि प्रारंभिक नमूना एकदम शुद्ध है यानी उसमें सिर्फ ^{238}U परमाणु हैं। तब समीकरण (12.7) और (12.13 क) से हमें मिलता है

$$N_U \cong N_{U0} \tag{12.23}$$

और
$$N_{Th} = N_{U0}\frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}}[1 - \exp(-\lambda_{Th}\, t)] \tag{12.24}$$

चूंकि $\exp(-\lambda_U t) \cong 1$.

अब आइये कुछ देर ठहरें और यह समझें कि हमने अभी तक क्या सीखा। समीकरण (12.23) और (12.24) से पता चलता है कि भले ही यूरेनियम (जनक) नाभिकों की संख्या अचर रहती है, क्षयजात परमाणुओं की संख्या समय के साथ चरघातांकी रूप से बढ़ती है। क्षयजात नाभिक की अर्ध-आयु की तुलना में कहीं अधिक समय t के बाद $\exp(-\lambda_{Th} t)$ नगण्य रूप से छोटा हो जाता है और N_{Th} अपने साम्यावस्था मान तक पहुंचता है

$$N_{Th} = N_U \frac{\lambda_U}{\lambda_{Th}}$$

या
$$N_{Th}\,\lambda_{Th} = N_U\,\lambda_U \tag{12.25}$$

इस परिणाम से हमें पता चलता है कि साम्यावस्था की स्थिति में क्षयजात परमाणुओं की क्षय दर उनके उत्पन्न होने की दर के बराबर है जिससे यह नतीजा निकलता है कि जनक और क्षयजात परमाणुओं की संख्या अचर रहती है। इस तरह की लम्बे काल वाली साम्यावस्था जनक और क्षयजात परमाणुओं के बीच सेक्यूलर साम्यावस्था के नाम से जानी जाती है। इस तरह की साम्यावस्था रेडियम ($T_{1/2}$ = 2300 y) से रेडॉन ($T_{1/2}$ = 5.5 days) के बनने में भी पायी जाती है।

बोध प्रश्न 5 — 5 मिनट लगाएं

ऐसे यूरेनियम तत्वों में जिनमें सेक्यूलर साम्यावस्था प्राप्त कर ली गई है हर 2.8×10^6 यूरेनियम परमाणुओं के समूह के लिए रेडियम का एक परमाणु मिलता है। अगर रेडियम की अर्ध-आयु 1620 साल है तो यूरेनियम की अर्ध-आयु की गणना करें।

अब आप जान गए हैं कि उत्तरोत्तर रेडियोएक्टिव क्षय के लिए सेक्यूलर साम्यावस्था तब मिलती है जब जनक नाभिकों की आयु क्षयजात तत्वों की अपेक्षा ज़्यादा होती है। अब आप यह जानना चाहेंगे कि तब क्या होगा जब जनक नाभिक क्षयजात नाभिकों की तुलना में ज़्यादा देर रहते हैं ($\lambda_A < \lambda_B$) लेकिन जनक नाभिकों की अर्ध-आयु ज़्यादा लंबी नहीं होती, यानी जनक की अर्ध-आयु क्षयजात के मुकाबले कुछ ही ज़्यादा होती है? ऐसी स्थिति हमें यूरेनियम और एक्टिनियम दोनों ही श्रेणियों के लिए मिलती है। इस स्थिति के लिए हम सन्निकटन $\exp(-\lambda_A t) \approx 1$ का इस्तेमाल नहीं कर सकते। अगर शुरुआत में जनक और क्षयजात परमाणु अलग-अलग हों तो उनके परमाणुओं की संख्या क्रमश: समीकरण (12.14) और (12.18) से दी जाती है। साथ ही अगर $\lambda_B t >> 1$ तो समीकरण (12.14) में $e^{-\lambda_A t}$ पद की तुलना में $e^{-\lambda_B t}$ नगण्य हो जाता है। तब क्षयजात परमाणुओं की संख्या होती है

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \exp(-\lambda_A t) \tag{12.26}$$

यानी क्षयजात परमाणु अंततः जनक परमाणु की अर्ध-आयु से क्षय होता है। इस परिणाम को समीकरण (12.14) के साथ संयोजित करने पर हमें मिलता है

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} = \text{अचर} \tag{12.27}$$

शब्दों में हम इस समीकरण को ऐसे व्यक्त कर सकते हैं: जनक परमाणुओं की संख्या और क्षयजात परमाणुओं की संख्या का अनुपात अंततः अचर हो जाता है। इस तरह की स्थिति को हम ट्रांज़िएंट साम्यावस्था (transient equilibrium) कहते हैं।

जब जनक की अर्ध-आयु क्षयजात से कम होती है ($\lambda_A > \lambda_B$) तो साम्यावस्था नहीं प्राप्त होती। अगर जनक और क्षयजात शुरुआत में अलग-अलग हों तो जैसे जैसे जनक का क्षय होता है वैसे-वैसे क्षयजात परमाणुओं की संख्या होती है

$$N_B = N_0 \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \exp(-\lambda_B t) \tag{12.28}$$

यानी जनक पदार्थ पूरी तरह ग़ायब हो जाता है और क्षयजात परमाणु अंततः अपनी अर्ध-आयु से क्षय होता है।

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

दो रेडियोएक्टिव तत्वों A और B के लिए जो ट्रांजिएंट साम्यावस्था में हैं, सिद्ध कीजिए कि क्षयजात सक्रियता, जनक सक्रियता से $\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}$ गुना ज्यादा है।

अब हम इस इकाई की सामग्री का सार दे रहे हैं।

12.6 सारांश

- एक रेडियोएक्टिव नाभिक का स्वतः अपघटन होता है जिसमें वह या तो अल्फ़ा कण या बीटा कण उत्सर्जित करता है, और इसके साथ-साथ अक्सर गामा विकिरण भी उत्सर्जित होता है।
- प्रति एकक समय में विघटित हो रहे परमाणुओं की संख्या होती है $N = N_0 e^{-\lambda t}$ जहाँ N_0 प्रारंभ में उपस्थित परमाणुओं की संख्या है और λ रेडियोएक्टिव तत्व का अपघटन नियतांक है।
- किसी रेडियोएक्टिव तत्व की अर्ध-आयु उसके आधे रेडियोएक्टिव परमाणुओं को अपघटित होने में लगा समय है। यह अपघटन स्थिरांक λ और औसत जीवनकाल τ से इन संबंधों द्वारा संबंधित है: $T_{1/2} = 0.693/\lambda = 0.693\ \tau$।
- रेडियोएक्टिवता की मानक इकाई क्यूरी है जो परिभाषा से रेडियोएक्टिव पदार्थ की उतनी मात्रा है जितनी मात्रा के 3.7×10^{10} अपघटन प्रति सेकंड होते हैं। रेडियोएक्टिवता की SI इकाई रदरफ़र्ड है। परिभाषा से ! रदरफ़र्ड रेडियोएक्टिव तत्व की उतनी मात्रा है जिससे 10^6 ds^{-1} मिलते हैं।
- प्राकृतिक तौर पर पाए जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्वों की तीन रेडियोएक्टिव श्रेणियाँ होती हैं जिन्हें हम यूरेनियम, एक्टीनियम और थोरियम श्रेणियों के नाम से जानते हैं। प्रत्येक श्रेणी में शुरुआत में एक ऐसा तत्व होता है जिसकी अर्ध-आयु काफ़ी अधिक होती है और वह अंततः लैड के स्थाई आइसोटोप में बदल जाता है। परायूरेनियम तत्वों की खोज के बाद एक चौथी रेडियोएक्टिव श्रेणी का पता लगा है जिसे नेप्टूनियम श्रेणी कहते हैं। यह प्लूटोनियम से शुरू होती है और अंततः बिस्मथ के स्थायी आइसोटोप में बदल जाती है।

- अगर जनक परमाणुओं की अर्ध-आयु उसके किसी भी क्षय उत्पाद की तुलना में बहुत अधिक हो तो हमें लम्बी अवधि की साम्यावस्था मिलती है जिसे जनक और क्षयजात परमाणुओं के बीच सेक्यूलर साम्यावस्था के नाम से जाना जाता है। इस स्थिति में प्रत्येक सदस्य उसी दर पर अपघटित होता है जिस पर वह उत्पन्न होता है यानी $\lambda_A N_A = \lambda_B N_B = \lambda_C N_C$। लेकिन अगर जनक A की आयु क्षयजात B से अधिक है, मगर $T_{1/2}$ बहुत बड़ा नहीं है तो हमें ट्रांजिएंट साम्यावस्था मिलती है जिसमें किसी क्षण पर A और B के परमाणुओं का अनुपात अचर होता है।

12.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. यह दिया है कि रेडियम और रेडॉन की अर्ध-आयु क्रमश: 1620 वर्ष और 3.82d हैं। N.T.P पर एक क्यूरी के तुल्य रेडॉन गैस के आयतन की गणना करें।
2. एक नमूने में जिसमें ^{230}Th की 0.1mg मात्रा है, प्रति मिनट में 4.32×10^6 अपघटन होते हैं। इस न्यूक्लिआइड की अर्ध-आयु क्या है?

12.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. यहाँ $\tau = 14.43$ महीने

$$\therefore\ T_{1/2} = \tau \ln 2$$
$$= (14.43 \text{ महीने}) \times 0.693$$
$$= 10 \text{ महीने}$$

क्योंकि पदार्थ का 75% अपघटित होता है इसलिए सिर्फ 25% बचा रहता है।

$$\therefore \qquad N = \frac{N_0}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 N_0$$

समीकरण (12.2) का इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

जिससे

$$\frac{t}{T_{1/2}} = 2$$

या $\qquad t = 10 \times 2$ महीने $= 20$ महीने

2. अर्ध-आयु $T_{1/2} = 4.51 \times 10^9$ वर्ष $= 4.51 \times 365 \times 86400$ s

अपघटन स्थिरांक $\lambda = \dfrac{0.693}{T_{1/2}}$

$$= \frac{0.693}{4.51 \times 10^9 \times 365 \times 86400}\ \text{s}^{-1} = 4.87 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$$

यूरेनियम के प्रति ग्राम में परमाणुओं की संख्या है

$$N = \frac{6.03 \times 10^{23}}{238}$$

$\therefore$ अपघटन दर $\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N$

$$= \frac{6.03 \times 10^{23}}{238} \; 4.87 \times 10^{-18}\, s^{-1}$$

$$= 1.234 \times 10^{4}\, s^{-1}$$

3. समीकरण (12.17) से हम जानते हैं

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \lambda_A N_0 \exp(-\lambda_A t)$$

समीकरण में $\exp(\lambda_B t)$ से गुणा करने और पदों को फिर से रखने पर हमें मिलता है

$$\frac{d}{dt}[N_B \exp(\lambda_B t)] = [\lambda_A N_0 \exp(\lambda_B - \lambda_A)t]$$

इसका हम समाकलन करके निकाल सकते हैं

$$N_B e^{\lambda_B t} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0 \exp[(\lambda_B - \lambda_A)t] + K$$

जहाँ K समाकलन अचर है। इसका मान निकालने के लिए हम प्रतिबंध $t = 0$ पर $N_B = 0$ का प्रयोग करते हैं। इससे मिलता है

$$K = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0 = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0$$

K के इस मान को ऊपर दिये व्यंजक में रखने पर हमें निम्न परिणाम मिलता है

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 [\exp(-\lambda_A t) - \exp(-\lambda_B t)]$$

4. हम समीकरण (12.18) से जानते हैं कि RaB के परमाणुओं की संख्या है

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_0 [e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}]$$

अगर N_B का अधिकतम $t = t_m$ पर हो तो $t = t_m$ पर $\frac{dN_B}{dt} = 0$ और $\frac{d^2N_B}{\partial t^2} < 0$। अतः N_B के व्यंजक को t के सापेक्ष एक बार अवकलित करने पर और शून्य के बराबर रखने पर हमें मिलता है

$$-\lambda_A e^{-\lambda_A t_m} = \lambda_B e^{-\lambda_B t_m} = 0$$

या $$\lambda_B e^{-\lambda_B t_m} = \lambda_A e^{-\lambda_A t_m}$$

$\therefore$ $$e^{(\lambda_A - \lambda_B) t_m} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$$

और $$t_m = \frac{\ln(\lambda_A/\lambda_B)}{\lambda_A - \lambda_B}$$

$\lambda_A = 3.8 \times 10^{-3}\ s^{-1}$ और $\lambda_B = 4.3 \times 10^{-4}\ s^{-1}$ रखने पर हमें मिलता है

$$t_m = \frac{\ln\left(\dfrac{3.8 \times 10^{-3}\ s^{-1}}{4.3 \times 10^{-4} s^{-1}}\right)}{(3.8 \times 10^{-3} - 4.3 \times 10^{-4})\ s^{-1}} = \frac{\ln(8.837)}{33.7 \times 10^{-4} s^{-1}} = \frac{2.179\ s}{33.7 \times 10^{-4}}$$

$$= 674s = 10\text{min } 47s$$

5. चूंकि यूरेनियम रेडियम के साथ सेक्यूलर साम्यावस्था में है इसलिए

$$\frac{N_1}{\tau_1} = \frac{N_2}{\tau_2}$$

या $$\tau_1 = \frac{N_1}{N_2}\tau_2 = 2.8 \times 10^6 \times 1620\ y = 4.5 \times 10^9\ y$$

6. तत्व A और B के ट्रांज़िएंट साम्यावस्था में होने की स्थिति में हमें समीकरण (12.27) से मिलता है

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}$$

अत: साम्यावस्था पर मापी गई सक्रियता का अनुपात है

$$\frac{A_B}{A_A} = \frac{\lambda_A N_B}{\lambda_B N_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}$$

$$\therefore \quad A_B = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} A_A$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. एक क्यूरी रेडॉन की उस मात्रा के तुल्य है, जो रेडियम के एक ग्राम से साम्यावस्था में है। अगर N_{Rn} एक ग्राम रेडियम के साथ साम्यावस्था में स्थित रेडॉन परमाणुओं की संख्या है और N_{Ra} एक ग्राम रेडियम में परमाणुओं की संख्या है तब $\lambda_{Rn} N_{Rn} = \lambda_{Ra} N_{Ra}$ ।

$$\therefore \quad N_{Rn} = N_{Ra}\frac{\lambda_{Ra}}{\lambda_{Rn}} = N_{Ra}\frac{\tau_{Rn}}{\tau_{Ra}} = \frac{3.82\ d}{1620\ y} \times N_{Ra}$$

$$= \frac{3.82\ d}{1620 \times 365} \times \frac{N}{226}$$

जहाँ N आवोगाद्रो संख्या है।

इसलिए STP पर N_{Rn} परमाणुओं द्वारा घेरा गया आयतन है

$$= \frac{N_{Rn}}{N} \times 22.4 \times 10^3\ cm^3$$

$$= \frac{3.82}{1620 \times 365 \times 226} \times 22.4 \times 10^3\ cm^3$$

$$= 6.4 \times 10^{-4}\ cm^3$$

2. 230_{Th} के 0.1 mg में परमाणुओं की संख्या है

$$N = \frac{6.02 \times 10^{23}}{230\ g} \times (10^{-4}\ g) = 2.62 \times 10^{17}$$

अपघटन दर $\frac{dN}{dt} = 4.32 \times 10^6 \text{ min}^{-1}$

$$= 7.2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

$\therefore$ क्षय नियतांक $\lambda = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$

$$= \frac{7.2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}}{2.62 \times 10^{17}} = 2.75 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$$

$$\therefore \qquad T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} = \frac{0.693}{2.75 \times 10^{-13}} \text{ s}$$

$$= 7.99 \times 10^4 \text{ y}$$

समीकरण (12.13 ख) से

$$\frac{N_2(t)}{N_2(\infty)} = 1 - e^{-\lambda_2 t} = \frac{90}{100} \text{ (दिया है)}$$

$\therefore \qquad e^{-\lambda_2 t} = \frac{1}{10}$ या $t = \frac{\log_e 10}{\lambda_2} = \tau_2 \frac{\log_e 10}{\log_e 2}$

अतः $\qquad \frac{t}{\tau_2} = \frac{\log_e 10}{\log_e 2} = 3.32$

इकाई 13 परमाण्वीय नाभिक

इकाई की रूपरेखा

13.1 प्रस्तावना

आपने बारहवीं कक्षा के भौतिकी पाठ्यक्रम में परमाणु के बारे में तो पढ़ा ही होगा। आप जानते होंगे कि परमाणु इतने सूक्ष्म होते हैं कि उन्हें सबसे शक्तिशाली प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी से नहीं देखा जा सकता। साथ ही उन्हें सबसे अधिक सुग्राही तुला पर तोला नहीं जा सकता। परमाणुओं के अस्तित्व को प्रारंभ में डाल्टन ने रासायनिक संरचना के नियमों की व्याख्या के लिए प्रस्तावित किया था। बाद में जब टॉमसन ने इलेक्ट्रॉन की खोज की और यह स्थापित किया कि वे सभी पदार्थों के मूल घटक हैं तो यह सवाल उठना लाजमी था: परमाणु के अंदर इलेक्ट्रॉन होते हैं तो उनमें धनात्मक आवेश भी होने चाहिए क्योंकि इलेक्ट्रॉन पर ऋणात्मक आवेश होता है जबकि परमाणु अनावेशित होते हैं। यानी परमाणु में इलेक्ट्रॉन होते हैं, इसका यह भी अर्थ निकलता है कि उसमें धनात्मक आवेश भी होने चाहिए। इन बातों के आधार पर, टॉमसन ने परमाणु का प्लम पुडिंग मॉडल (plum pudding model) दिया। उन्होंने सुझाया कि परमाणु (लगभग 10^{-10} m त्रिज्या के) एकसमान धनावेशित गोले का बना होता है जिसमें इलेक्ट्रॉन इस तरह जड़े होते हैं कि परमाणु स्थायी बना रहे। (इस मॉडल के अनुसार, इलेक्ट्रॉन इस धनात्मक आवेशयुक्त गोलाकार बादल में ऐसे जड़े होते हैं मानो तरबूज़ में बीज)। इस मॉडल से यह लगता था कि परमाणु का द्रव्यमान उसके कुल आयतन में एकसमान रूप से फैला है। यह परिकल्पना काफी हद तक सही मालूम होती थी लेकिन यह प्रयोगों की कसौटी पर खरी न उतरी।

जब गाइगर और मार्सडिन ने धातु की पतली पन्नियों पर प्राकृतिक रूप से पाए जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्वों से उत्सर्जित अल्फ़ा कणों की बमबारी की तो कुछ अलग ही परिणाम मिले। इन प्रयोगों से परमाणु की जो तस्वीर उभरी उससे हमें यह पता चला

कि परमाणु के केन्द्र में धनावेश की क्रोड (core) होती है जिसे नाभिक कहते हैं और उससे कुछ दूर पर ऋणात्मक आवेश वाले इलेक्ट्रॉन होते हैं। इस बात की हम भाग 13.2 में विस्तार से चर्चा करेंगे। इसके बाद की खोजों से पता चला कि परमाण्वीय नाभिक ख़ुद भी प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों से मिलकर बना है। प्रोटॉन पर लगभग 1.6×10^{-19} eV के बराबर धनात्मक आवेश होता है जो इलेक्ट्रॉन के आवेश के बराबर है लेकिन चिन्ह में विपरीत है। न्यूट्रॉन आवेशहीन कण हैं जिनका द्रव्यमान प्रोटॉन से कुछ ज़्यादा है। यह भी पाया गया कि परमाणु का लगभग सारा द्रव्यमान उसके नाभिक में होता है। साथ ही साथ अपनी सामान्य आवेशहीन अवस्था में एक परमाणु में उतने ही इलेक्ट्रॉन होते हैं जितने कि उसके नाभिक में प्रोटॉन।

अब आप जानना चाहेंगे कि नाभिक के अंदर ये प्रोटॉन और न्यूटॉन एक दूसरे के साथ इकट्ठे कैसे रहते हैं क्योंकि प्रोटॉन के बीच का विद्युत प्रतिकर्षण बल तो उन्हें एक दूसरे से दूर फेंक देगा। इनके बीच में गुरुत्वाकर्षण बल बहुत कम होता है - इतना कम कि वह इन्हें इकट्ठा नहीं रख सकता। न्यूक्लिऑनों को जो बल जोड़ कर रखता है उसे **नाभिकीय बल** कहते हैं और हमने भाग 13.3 में उसकी चर्चा की है। इसी भाग में आप यह भी जानेंगे कि नाभिक का स्थायित्व प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा पर निर्भर करता है। इस बात का एक महत्वपूर्ण परिणाम है कि बहुत हल्के और बहुत भारी तत्व कम स्थायी होते हैं और उपयुक्त परिस्थितियों में या तो उनका संगलन होता है या विखंडन। विखंडन के संदर्भ में भारी नाभिकों के अस्थायित्व को समझने के लिए हमने भाग 13.4 में द्रव बूंद मॉडल (liquid drop model) की चर्चा की है। भाग 13.5 में हमने विभिन्न नाभिकीय मॉडलों की जानकारी दी है। हम जानते हैं कि आप इनमें से कुछ धारणाओं से पहले से ही परिचित हैं। यहां हमने संक्षेप में आपको याद दिलाने के लिए इन्हें दोहराया है।

उद्देश्य

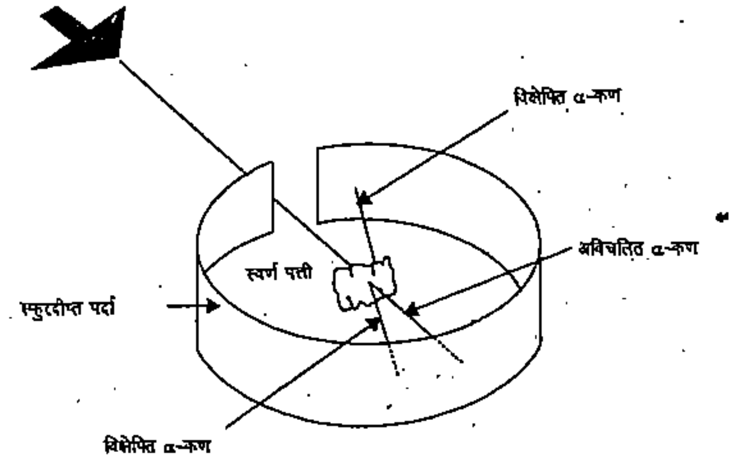
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- रदरफ़र्ड प्रकीर्णन प्रयोग का महत्व समझा सकेंगे,
- सामि-आनुभविक संहति समीकरण (semi-empirical mass formula) पर आधारित न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा की गणना कर सकेंगे,
- यह समझा सकेंगे कि नाभिकीय बल किस प्रकार न्यूक्लिऑनों को बांधे रखते हैं,
- नाभिकों के द्रव बूंद मॉडल और कोश मॉडल का वर्णन कर सकेंगे,
- नाभिकों के स्थायित्व की चर्चा कर सकेंगे।

13.2 अल्फ़ा कण प्रयोग

Ernest Rutherford

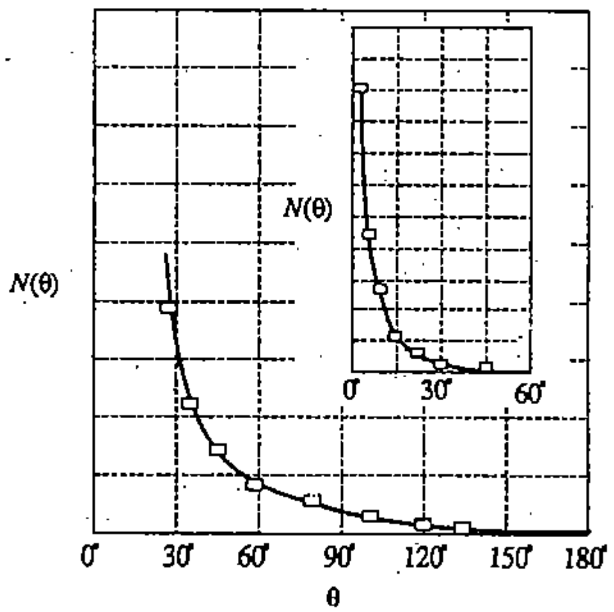
एक परमाणु के अंदर क्या है यह देखने के लिए रदरफ़र्ड ने सुझाया कि प्राकृतिक तौर पर पाये जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्वों पोलोनियम, रेडियम आदि से निकलने वाले अल्फ़ा कणों और परमाणु का संघट्टन किया जाए और प्रकीर्णित अल्फ़ा कणों से परमाणु के बारे में जानकारी हासिल की जाए। उनके निर्देशन में गाइगर और मार्सडेन ने कई अल्फ़ा कण प्रकीर्णन प्रयोग किए। चित्र 13.1 में आप उनके द्वारा इस्तेमाल किये गये उपकरण की रूपरेखा देख सकते हैं।



चित्र 13.1: अल्फ़ा कण प्रयोग के उपकरण की रूपरेखा।

एक प्रयोग में ^{214}Bi स्रोत से निकलने वाले 5.5 MeV अल्फ़ा कणों ($v \cong 1.63 \times 10^7$ m s^{-1}) को एक कक्ष में (जिसमें निर्वात था) रखी एक पतली स्वर्ण पट्टी पर आपतित किया गया। इस पट्टी की मोटाई सिर्फ़ कुछ माईक्रो-मीटर (2.1×10^{-7} m) थी। पिछली इकाई में आपने पढ़ा है कि वायु अल्फ़ा कणों का अवशोषण करती है। इसीलिए इस प्रयोग को निर्वात में किया गया। यह उम्मीद की गई कि अल्फ़ा कण एक प्रतिदीप्तिशील (fluorescent) ज़िंक सल्फाइड के पर्दे पर आपतित होंगे और हर बार उनके टकराने पर प्रकाश निकलेगा। प्लम पुडिंग मॉडल के आधार पर यह सोचा गया कि इस प्रयोग में अल्फ़ा कण सीधे पन्नी के पार चले जायेंगे और उनमें से कुछ का ही थोड़ा सा विक्षेपण होगा। लेकिन असलियत में जो हुआ और जो देखा गया वह कुछ इस तरह था:

- लगभग सभी अल्फ़ा कण बिना ज़्यादा विक्षेपण के ($\theta < 1°$) प्रकीर्णित हुए। इससे यह पता चला कि परमाणुओं में ज़्यादातर खाली स्थान होता है।
- कुछ अल्फ़ा कण (9000 में 1) बहुत बड़े कोणों पर विक्षेपित हुए ($\theta \approx 90°$)।
- कुछ अल्फ़ा कण (20,000 में 1) वापस स्रोत की ओर भी विक्षेपित हुए ($\theta \to 180°$)।



चित्र 13.2: गाईगर और मार्सडेन अल्फ़ा कण प्रयोग के लिए $N(\theta)$ बनाम θ वक्र।

ये सभी परिणाम हमने चित्र 13.2 में दिखाए हैं। इस चित्र में, प्रकीर्णित अल्फ़ा कणों की संख्या $N(\theta)$ का प्रकीर्णन कोण θ के साथ परिवर्तन दिखाया गया है।

अल्फ़ा कणों का बड़े कोणों पर विक्षेपण, ख़ास तौर से पश्च-प्रकीर्णन, काफ़ी आश्चर्यजनक परिणाम था। वास्तव में इसकी तो बिल्कुल कल्पना भी नहीं की गई थी। रदरफ़र्ड के शब्दों में

> "यह मेरे जीवन में घटने वाली घटनाओं में सबसे अधिक अविश्वसनीय घटना थी। यह तो कुछ ऐसा था मानों आप एक टिशू पेपर पर 15 इंच का बम फेंकें और वह वापस आप पर आकर लगे।"

इससे यही समझा जा सकता था कि स्रोत की ओर वापस लौटने वाले अल्फ़ा कणों का किसी अचल चीज से प्रत्यक्ष (head-on) संघट्टन हुआ है। यह पश्चप्रकीर्णन तभी हो सकता था जबकि इन अल्फ़ा कणों पर बहुत प्रबल प्रतिकर्षण बल लग रहा हो। क्या आप अंदाजा लगा सकते हैं कि यह किस तरह का बल रहा होगा? चूंकि अल्फ़ा कण धनात्मक आवेश रखते हैं तो ऐसा लगता है कि परमाणुओं और अल्फ़ा कणों के बीच लग रहा बल स्थिरवैद्युत बल है। आपतित अल्फ़ा कणों में गतिज ऊर्जा भी होती है, जो धीमे-धीमे स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। परमाणु के निकटतम उपगमन (closest approach) के बिंदु पर अल्फ़ा कण की ऊर्जा पूरी तरह स्थितिज ऊर्जा के रूप में होती है। इसलिए एक क्षण के लिए अल्फ़ा कण को विरामावस्था में आ जाना चाहिए। अगर b सबसे निकटतम उपगमन की दूरी (distance of closest approach) हो तो ऊर्जा संरक्षण नियम से हम लिख सकते हैं

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Ze^2}{b}$$

या

$$b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4Ze^2}{mv^2} \qquad (13.1)$$

जहाँ v, द्रव्यमान m वाले अल्फ़ा कणों की चाल है, Z पन्नी के परमाणुओं की परमाणु संख्या है और e इलेक्ट्रॉन आवेश है।

इस संबंध से यह पता चलता है कि उस वस्तु पर धनात्मक आवेश है। इस वस्तु की त्रिज्या का क्या मान होगा इसका अंदाज़ा लगाने के लिए आइए हम यह गणना करें कि 5.5 MeV ऊर्जा वाले आपतित अल्फ़ा कण, जो कि 180° से प्रकीर्णित होते हैं, परमाणु के कितने नज़दीक पहुंच पाते हैं। यहां

$$Z = 79,\ e = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C},\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{Nm^2\,C^{-2}}$$

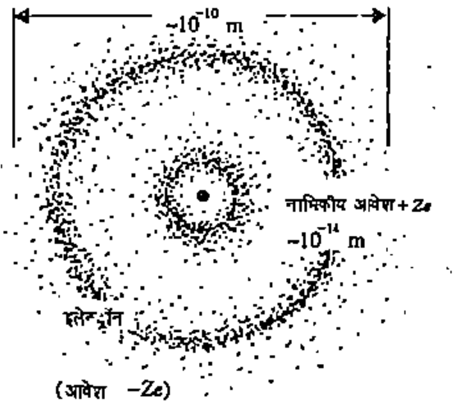
और
$$E = 5.5\ \mathrm{MeV} = (5.5 \times 10^6\ \mathrm{eV})\ (1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{JeV^{-1}}) = 8.8 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

अतः
$$b = \frac{(9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2c^{-2}}) \times 2 \times 79\ (1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{8.8 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}}$$

$$= 4.14 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}$$

यानी स्वर्ण के लिए निकटतम उपगमन की दूरी 4.14×10^{-14} m है और लक्ष्य वस्तु में धनात्मक आवेश उतनी ही जगह में स्थित है जिसकी त्रिज्या का मान इससे कम है।

परमाणु की त्रिज्या इसकी 10^4 गुना है। यानी अगर परमाणु का नाभिक टेनिस या गोल्फ की गेंद के बराबर हो तो परमाणु एक विशाल फ़ुटबॉल स्टेडियम में फ़िट हो सकता है।



चित्र 13.3: परमाणु का नाभिकीय मॉडल।

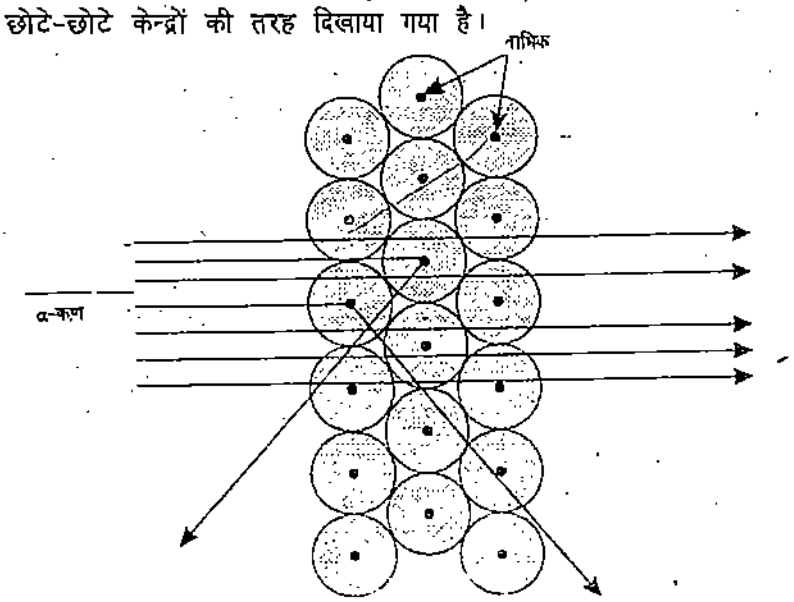
बहुत से प्रयोगों के आधार पर रदरफ़र्ड ने परमाणु का नाभिकीय मॉडल दिया जिसे हमने चित्र 13.3 में दिखाया है। यह रदरफ़र्ड की अपार बुद्धिमता थी कि उन्होंने इस परिणाम से यह अर्थ निकाला कि अल्फ़ा कणों का पश्च प्रकीर्णन उनके धनात्मक आवेश और परमाणु में स्थित किसी धनात्मक आवेश के बीच लगे प्रतिकर्षण बल के कारण हुआ होगा। यह बल परिमाण में बहुत अधिक हो, इसके लिए उन्होंने यह अनुमान लगाया कि परमाणु में धनात्मक आवेश बहुत ही छोटी सी जगह में स्थित होगा और इस धन-आवेशित केन्द्र में परमाणु का लगभग सारा द्रव्यमान स्थित होगा। आप अपने दिमाग में इस प्रकीर्णन प्रयोग के परिणाम की तस्वीर कंचे के खेल से तुलना करके बैठा सकते हैं। बचपन में आपने कंचों से या गोलियों से ज़रूर खेला होगा। अपने अनुभव से आप जानते हैं कि जब एक हल्का कंचा, एक भारी कंचे से टकराता है तो भारी कंचे पर कोई ख़ास प्रभाव नहीं पड़ता। (यहाँ स्वर्ण परमाणु भारी कंचे की तरह है, और अल्फ़ा कण हल्के कंचे की तरह है।)

इसी विचार का अनुसरण करते हुए रदरफ़र्ड ने यह मॉडल दिया कि

- परमाणु में उसका समस्त द्रव्यमान और धनात्मक आवेश एक छोटे से नाभिक में संकेन्द्रित है,
- नाभिक की त्रिज्या कुछ फर्मी (fermi) की कोटि की है (1 fm = 10^{-15} m), और
- इलेक्ट्रॉन नाभिक के बाहर होते हैं।

परमाणु का यह नाभिकीय मॉडल इस्तेमाल करके यह समझना काफ़ी आसान हो जाता है कि बहुत से कण क्यों उस पतली पन्नी से गुज़र जाते हैं। चित्र 13.4 में परमाणुओं के नाभिकों को छोटे-छोटे केन्द्रों की तरह दिखाया गया है।

रदरफ़र्ड का यह मॉडल काफ़ी हद तक सौर मंडल से मिलता जुलता है। जैसे ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं, वैसे ही इलेक्ट्रॉन नाभिक की। जिस तरह हमारे सौर मंडल में ज़्यादातर स्थान खाली है वैसे ही परमाणु में भी है।



चित्र 13.4: रदरफ़र्ड के नाभिकीय मॉडल के आधार पर परमाण्वीय नाभिकों द्वारा अल्फ़ा कणों का प्रकीर्णन।

रदरफ़र्ड का मॉडल काफ़ी सरल है और अल्फ़ा कणों के प्रकीर्णन की अच्छी तरह व्याख्या करता है। लेकिन इन खोजों का असली महत्व इस बात में है कि इनके कारण बहुत से नये और बहुत ही व्यापक क्षेत्रों में अनुसंधान संभव हुआ। इस अध्ययन से परमाणु की भौतिकी के बारे में बहुत सी नयी जानकारी मिली।

हम सभी जानते हैं कि कूलॉम बलों के लिए दो आवेशों के परिमाण और उनके बीच की दूरी महत्वपूर्ण होती है। (जैसे कि रदरफ़र्ड प्रयोग में अल्फ़ा कण और स्वर्ण नाभिक)। 1920 में रदरफ़र्ड के एक छात्र चेडविक (Chadwick) ने कई तत्वों के नाभिकों के आवेश का पता लगाने के लिए बहुत से प्रयोग किये। उन्होंने पता लगाया कि परमाणु पर आवेश का मान इलेक्ट्रॉन के आवेश के ठीक पूर्णांकीय गुणज के बराबर था। लेकिन उन पर आवेश का चिन्ह विपरीत था। जिस स्वर्ण पन्नी का उन्होंने इस्तेमाल किया उसमें करोड़ों की संख्या में नाभिक थे जिनमें से हरेक पर 79 इकाई का धनात्मक आवेश था। तो इससे यह सवाल उठा कि पन्नी पर नेट विद्युत आवेश शून्य कैसे है? इसकी एक ही संभव व्याख्या थी: हर नाभिक पर धनावेश, इलेक्ट्रॉन के ऋणावेश के बराबर है यानी हर परमाणु अनावेशित है और उसमें 79 इलेक्ट्रॉन हैं। इससे यह नतीजा निकलता है कि हर तत्व के परमाणु को एक अभिलक्षणिक संख्या से पहचाना जा सकता है जिसे हम **परमाणु संख्या** (atomic number) कहते हैं और जिसका प्रतीक Z है। अब आप जानना चाहेंगे: क्या सभी नाभिकों में सिर्फ़ प्रोटॉन ही होते हैं? किसी नाभिक की संरचना क्या होती है? इसका जवाब जानने के लिए आइए हम सबसे सरल तत्व हाइड्रोजन को लें। इसके नाभिक में एक प्रोटॉन और उसके बाहर एक इलेक्ट्रॉन होता है। क्या इसका मतलब यह है कि सभी तत्वों के नाभिकों में सिर्फ़ प्रोटॉन ही होते हैं? हरगिज़ नहीं। हाइड्रोजन के दो और जाने माने रूपों ड्यूटीरियम (deuterium) और ट्राइटियम (tritium) के द्रव्यमानों में भी ख़ास अंतर पाया जाता है। काफ़ी समय तक यह बात सभी भौतिकीविदों के लिए पहेली बनी रही।

हाइड्रोजन के भारी आइसोटोप ड्यूटीरियम की खोज यूरे और उनके साथियों ने 1931 में स्पेक्ट्रोग्राफ़ी की विधियों द्वारा की। इसका पूर्वानुमान रदरफ़र्ड 1920 में ही लगा चुके थे।

इस समस्या से पार पाने के लिए पहलेपहल यह धारणा दी गई कि इलेक्ट्रॉन भी नाभिक के अंदर होते हैं। और वे प्रोटॉनों के धनात्मक आवेश को संतुलित करते हैं। लेकिन जल्द ही इस परिकल्पना को नकार दिया गया क्योंकि यह हाइज़ेनबर्ग अनिश्चितता सिद्धांत (Heisenberg's uncertainty principle) के संगत नहीं थी। क्योंकि उसके मुताबिक ऐसा होने के लिए तत्वों से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा लगभग 50 MeV होनी चाहिए। इस बात का प्रयोगों से समर्थन नहीं मिला। लेकिन इससे यह ज़रूर पता लगा कि नाभिक के अंदर ऐसे कण थे जो उसके द्रव्यमान को तो बढ़ाते थे लेकिन उसके आवेश पर कोई असर नहीं डालते थे।

रदरफ़र्ड ने ही फिर कल्पना की एक ऐसे कण के अस्तित्व की, जिस पर कोई आवेश नहीं था लेकिन जो नाभिक में प्रोटॉन से ज़रा सा ज़्यादा द्रव्यमान रखता था। 1920 में रॉयल सोसायटी में व्याख्यान देते हुए रदरफ़र्ड ने कहा :

> "इस बात की काफ़ी संभावना है कि एक इलेक्ट्रॉन दो हाइड्रोजन नाभिक को जोड़ सकता है और शायद एक हाइड्रोजन नाभिक को भी। एक स्थिति में, इससे एक ऐसे परमाणु के अस्तित्व की संभावना निकलती है जिसका द्रव्यमान लगभग दो है और जिस पर इकाई आवेश है, और जिसे हाइड्रोजन का आइसोटोप माना जाना चाहिए।
>
> दूसरी स्थिति में एक ऐसे परमाणु के अस्तित्व की संभावना बनती है जिसका द्रव्यमान एक हो और जिस पर शून्य आवेश हो। ऐसी परमाण्वीय संरचना कतई असंभव नहीं मानी जा सकती। ऐसे परमाणु के बिल्कुल ही नये गुणधर्म होंगे। उसका बाह्य क्षेत्र लगभग शून्य होगा सिवाय नाभिक के बहुत नज़दीक की स्थितियों में। और इसके फलस्वरूप वह द्रव्य में मुक्त रूप से चल सकेगा।

उसके अस्तित्व का स्पेक्ट्रोस्कोप द्वारा पता लगा पाना भी बहुत मुश्किल होगा। और उसे एक सीलबंद डिब्बे में रख पाना असंभव होगा। दूसरी ओर, यह परमाणु के अंदर आराम से घुस सकेगा और या तो नाभिकों से जुड़ जायेगा या फिर उसके क्षेत्र की तीव्रता के कारण विघटित हो जायेगा जिससे कि एक आवेशित हाइड्रोजन परमाणु या एक इलेक्ट्रॉन या दोनों का ही पलायन होगा.......।"

रदरफ़ोर्ड ने इस 'परमाणु' का नाम रखा न्यूट्रॉन।

न्यूट्रॉनों के अस्तित्व का प्रायोगिक प्रमाण पहले-पहल 1932 में मिला। न्यूट्रॉनों की खोज से नाभिक की संरचना के बारे में वैज्ञानिकों के विचार और सुदृढ़ हुए। यह साफ़ हो गया कि सभी नाभिक प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों (हाइड्रोजन नाभिक को छोड़ कर) से मिलकर बने हैं। नाभिकों में न्यूट्रॉनों और प्रोटॉनों की कुल संख्या को द्रव्यमान संख्या (mass number) कहते हैं, और इसका प्रतीक है A। न्यूट्रॉनों और प्रोटॉनों को सामूहिक तौर पर न्यूक्लिऑन (nucleons) भी कहा जाता है।

अक्सर हमारा सामना ऐसे तत्वों से होता है जिनके परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों की संख्या तो एक जैसी होती है लेकिन उनके नाभिकीय द्रव्यमान अलग-अलग होते हैं। इन्हें आइसोटोप (isotopes) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, ड्यूटीरियम नाभिक में एक प्रोटॉन और एक न्यूट्रॉन होता है और ट्राइटियम नाभिक में एक प्रोटॉन और दो न्यूट्रॉन होते हैं। चूंकि इनमें हाइड्रोजन की ही तरह, एक ही इलेक्ट्रॉन होता है, इसलिए ये हाइड्रोजन के ही विभिन्न रूप हैं और इन्हें हाइड्रोजन का आइसोटोप कहा जाता है। इनके प्रतीक क्रमश: ^1H, ^2H और ^3H हैं। इसी तरह लीथियम के दो स्थायी आइसोटोप हैं ^6Li और ^7Li। और यूरेनियम के तीन आइसोटोप हैं ^{233}U, ^{235}U और ^{238}U आदि.. आदि।

नाभिकीय घनत्व

अल्फ़ा कण प्रयोग से सबसे पहले इस बात का प्रमाण मिला कि नाभिकों का आकार परिमित होता है (लगभग 10^{-15} m की कोटि का)। तबसे आज तक नाभिकीय त्रिज्या का पता लगाने के लिए उच्च ऊर्जा इलेक्ट्रॉनों और न्यूट्रॉनों का इस्तेमाल करके बहुत से प्रयोग किए गये हैं। इन प्रयोगों से पता चला है कि

- नाभिकों की बहुत स्पष्ट सीमांए नहीं होती।
- नाभिकीय पदार्थ का घनत्व नाभिक के केन्द्र पर अधिकतम होता है और धीरे धीरे केन्द्र से दूरी बढ़ने के साथ-साथ शून्य हो जाता है।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि नाभिकीय पदार्थ के घनत्व का क्या परिमाण है। इसके लिए आइये हम सबसे हल्के नाभिक यानी हाइड्रोजन नाभिक का उदाहरण लें जिसका द्रव्यमान 1.673×10^{-27} kg है और त्रिज्या 1.2×10^{-15} m। अगर हम इसे गोलाकार मानें तो नाभिकीय पदार्थ का घनत्व इस तरह से निकाल सकते हैं:

$$d_H = \frac{M_H}{\frac{4\pi}{3} R_H^3} = \frac{1.673 \times 10^{-27}\,\text{kg}}{\frac{4\pi}{3}(1.2 \times 10^{-15}\,\text{kg m})^3} = 2.3 \times 10^{17}\,\text{kg m}^{-3}$$

यह मान काफ़ी ज़्यादा है। इसकी तुलना कीजिए पानी के घनत्व ($= 10^3$ kg m^{-3}) या पारे के घनत्व ($= 13.6 \times 10^3$ kg m^{-3}) से। हमें यह पता चलता है कि नाभिकीय पदार्थ का बहुत ज़्यादा घनत्व है। अब इस परिणाम को समझने के लिए कल्पना कीजिए कि पृथ्वी को इतना संकुचित किया जाता है कि उसका घनत्व इतना ही हो जाए। तब पृथ्वी के कुल द्रव्यमान ($= 6 \times 10^{24}$ kg^{-3}) को 184 m की त्रिज्या वाले गोले में फ़िट करना पड़ेगा।

1930 में, बोथे और बेकर ने एक पोलोनियम स्रोत से प्राप्त α-कणों की बेरीलियम और कुछ अन्य हल्के तत्वों (Li, B, Mg, Al) पर बमबारी की। उन्होंने गाइगर-मुलर गणित्रों का इस्तेमाल करके वेधी विकिरणों का प्रेक्षण किया जिनकी ऊर्जा प्राकृतिक γ-किरणों की ऊर्जा के बराबर थी। बेरीलियम द्वारा उत्सर्जित इन वेधी विकिरणों का अध्ययन आइरीन क्यूरी और उनके पति फ्रेडरिक जॉलिअट ने भी किया और बोथे और बेकर के परिणामों की पुष्टि की। साथ ही उन्होंने एक ऐसे वेधी विकिरण का प्रेक्षण किया जो मोम जैसे पदार्थों से लगभग 5 MeV वाले प्रोटॉनों का आयनीकरण कर सकता था। उन्होंने सुझाया कि ये प्रोटॉन उच्च ऊर्जा (50 MeV) γ किरणों के कॉम्पटन प्रकीर्णन द्वारा उत्सर्जित हुए। लेकिन सैद्धांतिक तौर पर, α-कणों की Be के साथ अभिक्रिया में उच्च ऊर्जा γ किरण उत्सर्जन समझाना मुश्किल था। इस बात ने चैडविक को अपना प्रयोग दोहराने पर मजबूर किया। चैडविक ने 1932 में कैवेन्डिश प्रयोगशाला में किए गए प्रयोगों में एक अनावेशित कण का अस्तित्व प्रमाणित किया जिसका विराम द्रव्यमान प्रोटॉन के बराबर था। यह न्यूट्रॉन था जिसका पूर्वानुमान 12 वर्ष पहले रदरफ़ोर्ड ने लगाया था। अब हम जानते हैं कि जब α कण Be नाभिक से टकराता है तो निम्न अभिक्रिया होती है।

$$^9Be + \alpha \rightarrow [^{12}C]^* + n$$

जिसे अक्सर $^9Be\,(\alpha, n)^{12}C$ के रूप में लिखा जाता है।

* का यहाँ मतलब है कि अभिक्रिया में उत्पन्न कार्बन नाभिक उत्तेजित अवस्था में है और आदि अवस्था में कुछ MeV की γ-किरणें उत्सर्जित करके पहुंचता है। यही वे γ-किरणें हैं जिनका बोथे और बेकर ने प्रेक्षण किया था।

आप यह गणना ख़ुद करके इस बात की पुष्टि करें। साथ ही साथ उस नाभिकीय गोले की गणना करें जिसका द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान के बराबर हो। आपका उत्तर होना चाहिए **10 km** !

आइये अब हम ऑक्सजीन के आंकड़ों से, नाभिकीय पदार्थ का घनत्व निकालें। हमें यह पता है कि $R_O = 3 \times 10^{15}$ m और $M_O = 2.68 \times 10^{26}$ kg। इसलिए

$$d_O = \frac{2.68 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{\frac{4\pi}{3}\,(3 \times 10^{-15}\ \text{m})^3} = 2.39 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}$$

आप क्या देखते हैं? हाइड्रोजन और ऑक्सजीन नाभिकों के घनत्व लगभग बराबर हैं। क्या यह महज़ इत्तेफ़ाक़ है? इस बात का जवाब पाने के लिए नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

---

5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

कार्बन और सीसे (lead) के घनत्व की गणना करें। इसके लिए नीचे दिये गये आंकड़ों का इस्तेमाल करें:

$M_C = 19.92 \times 10^{-27}$ kg	$R_C = 2.7 \times 10^{-15}$ m
$M_{Pb} = 3.4 \times 10^{-25}$ kg	$R_{Pb} = 2.39 \times 10^{-15}$ m

---

इस बोध प्रश्न को हल करने पर आप इस नतीजे पर पहुंचे होंगे कि सभी तत्वों के नाभिकों का घनत्व एक ही होता है। इससे यह समझा जा सकता है कि

- नाभिक द्रव की बूंद की तरह होता है और
- नाभिक की त्रिज्या R, और उसकी द्रव्यमान संख्या A में एक आनुभविक (empirical) संबंध होता है। वस्तुत: प्रयोगों से पता चलता है कि R और A में यह संबंध होता है: $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m.

इस बात को जल्दी से समझने के लिए आइये हम कार्बन और सीसे के नाभिकों की त्रिज्याओं की गणना करें। इसके लिए हम ध्यान देते हैं कि

$$M_C = M_H A_C = \frac{4\pi}{3} R_C^3\, d_C$$

$$R_C = \left[\frac{3}{4\pi}\left(\frac{M_H}{d_C}\right)\right]^{1/3} A_C^{1/3}$$

इसी तरह,

$$R_{Pb} = \left[\frac{3}{4\pi}\left(\frac{M_H}{d_{Pb}}\right)\right]^{1/3} A_{Pb}^{1/3}$$

बोध प्रश्न 1 में गणना किये हुये या दिये हुए मानों को रखने पर हमें मिलता है,

$$R_C = \left[\frac{3}{4 \times 3.1417}\left(\frac{1.673 \times 10^{-27}\ \text{kg}}{2.42 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}}\right)\right]^{1/3} A_C^{1/3}$$

$$= \left(\frac{16.73 \times 0.2387}{2.42}\right)^{1/3} \times 10^{-15} A_C^{1/3} \text{ m}$$

$$= \left(\frac{3.993}{2.42}\right)^{1/3} \times 10^{-15} A_C^{1/3} \text{ m}$$

$$= (1.6502)^{1/3} \times 10^{-15} A_C^{1/3} \text{m}$$

$$= 1.1181 \times 10^{-15} A_C^{1/3} \text{m}$$

$$= 1.12 \times 10^{-15} A_C^{1/3} \text{ m}$$

इसी तरह सीसे के लिए

$$R_{Pb} = \left[\frac{3}{4 \times 3.1416}\left(\frac{1.673 \times 10^{-27}\text{kg}}{2.37 \times 10^{17}\text{kg m}^{-3}}\right)\right]^{1/3} A_{Pb}^{1/3}$$

$$= \left(\frac{16.73 \times 0.2387}{2.37}\right)^{1/3} \times 10^{-15} A_{Pb}^{1/3} \text{ m}$$

$$= \left(\frac{3.993}{2.37}\right)^{1/3} \times 10^{-15} A_{Pb}^{1/3} \text{ m}$$

$$= (1.685)^{1/3} \times 10^{-15} A_{Pb}^{1/3} \text{ m}$$

$$= 1.1190 \times 10^{-15} A_{Pb}^{1/3} \text{ m}$$

$$= 1.12 \times 10^{-15} A_{Pb}^{1/3} \text{ m}$$

13.3 नाभिकों की बंधन ऊर्जा

अब हम जान गए हैं कि ड्यूटीरियम के नाभिक में एक प्रोटॉन और एक न्यूट्रॉन होता है। प्रोटॉन और न्यूट्रॉन के मापे गये (विराम) द्रव्यमान हैं क्रमशः 1.6723×10^{-27} kg और 1.6747×10^{-27} kg। इसका मतलब यह हुआ कि एक न्यूट्रॉन और एक प्रोटॉन का कुल द्रव्यमान है 3.34709×10^{-27} kg। लेकिन ड्यूटीरियम नाभिक का विराम द्रव्यमान है 3.34313×10^{-27} kg यानी कि ड्यूटीरियम नाभिक का मापा हुआ द्रव्यमान, न्यूट्रॉन और प्रोटॉन के मापे हुए कुल द्रव्यमान के योग से 3.96242×10^{-30} kg कम है। वस्तुतः यह बात अब तो हमें काफ़ी अच्छी तरह मालूम है कि किसी नाभिक का विराम द्रव्यमान उसके घटक न्यूक्लिऑनों के विराम द्रव्यमानों के योग से हमेशा कम होता है। इस अंतर को **द्रव्यमान क्षति** (mass defect) कहा जाता है। आइये इसे Δm से दिखायें। गणितीय तौर पर हम लिख सकते हैं :

$$\Delta m = (Z\, m_p + N\, m_n) - (M - Z\, m_e)$$
$$= Z\, m_H + N\, m_n - M \qquad (13.2)$$

जहाँ M, Z प्रोटॉनों और N न्यूट्रॉनों वाले अनावेशित परमाणु का वास्तविक द्रव्यमान है। यहाँ $m_H = (m_p + m_e)$, m_p, m_n और m_e क्रमशः हाइड्रोजन परमाणु, प्रोटॉन, न्यूट्रॉन और इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान हैं। द्रव्यमान क्षति को व्यक्त करने का एक आसान तरीक़ा होता है कि उसे आइंस्टीन के द्रव्यमान ऊर्जा तुल्यता संबंध का इस्तेमाल करके ऊर्जा के पदों में लिखा जाए। इस ऊर्जा को बंधन ऊर्जा (binding energy, BE) कहते हैं

आजकल, परमाण्वीय द्रव्यमान को कार्बन के ^{12}C आइसोटोप के द्रव्यमान के पदों में व्यक्त किया जाता है। परमाण्वीय द्रव्यमान की इकाई, जिसे संक्षेप में u कहते है ^{12}C के वास्तविक द्रव्यमान का (1/12) वां हिस्सा है। इसका मान 1.66×10^{-27} kg है। 1u के तुल्य ऊर्जा है:

$$1u = (1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1})^2$$
$$= 14.92 \times 10^{-11} \text{ J}$$
$$= 931.3 \times 10^6 \text{ eV}$$
$$= 931.3 \text{ MeV}$$

$$BE = \Delta m\, c^2$$

ड्यूटीरियम के लिए

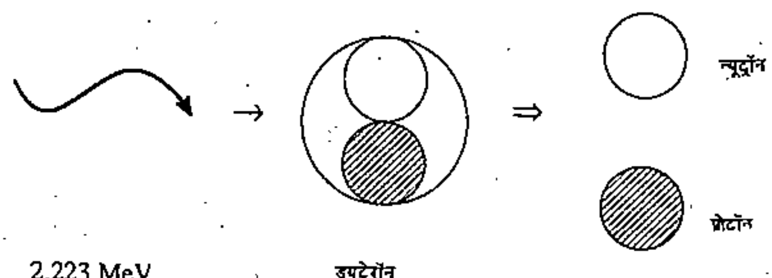
$$BE = (3.96242 \times 10^{-30} \text{ kg}) \times (2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1})^2$$
$$= 35.614 \times 10^{-14} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$
$$= 3.5614 \times 10^{-13} \text{ J}$$
$$= 2.223 \times 10^{-6} \text{ eV} \quad (\because 1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J})$$

इसका मतलब यह हुआ कि हमें ड्यूटीरियम नाभिक के घटक न्यूक्लिऑनों, (प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों) को मुक्त करने के लिए कम से कम 2.223 MeV ऊर्जा देनी पड़ेगी। इस परिणाम को व्यापक रूप में हम इस तरह कह सकते हैं कि द्रव्यमान क्षति उस ऊर्जा के रूप में दिखाई देती है जो न्यूक्लिऑनों को एक दूसरे से जोड़ती है। इसका इस्तेमाल उन बलों के विरुद्ध कार्य करने में होता है जो न्यूक्लिऑनों को बांधे रखते हैं।

अगर हम इस नाभिक को 2.223 MeV से अधिक ऊर्जा देंगे तो यह अतिरिक्त ऊर्जा मुक्त न्यूक्लिऑनों की गतिज ऊर्जा में रूपांतरित होगी। इस परिणाम का प्रमाण ड्यूटीरियम के फोटोनज विघटन (photo-disintegration) पर किये गये प्रेक्षणों से मिलता है। जब ड्यूटीरियम पर गामा-किरण फ़ोटॉन आपतित होते हैं तो वह कम से कम अपनी बंधन ऊर्जा के बराबर ऊर्जा वाले फ़ोटॉन का अवशोषण करके एक प्रोटॉन और एक न्यूट्रॉन में विखंडित हो जाता है :

$$E_\gamma = (m_p + m_n - m_d)\, c^2$$

इसे हमने चित्र 13.5 में दिखाया है।



चित्र 13.5: जब ड्यूटीरियम पर 2.223 MeV का गामा किरण फ़ोटॉन आपतित होता है तो वह एक न्यूट्रॉन और एक प्रोटॉन में टूट जाता है।

ऊपर दिये गये तर्क को दोहरा कर हम यह कहते हैं कि जब एक न्यूट्रॉन और एक प्रोटॉन मिलकर ड्यूटेरॉन बनाते हैं तो एक अल्प द्रव्यमान नष्ट हो जाता है। क्या इससे हम यह नहीं कह सकते कि बंधन ऊर्जा नाभिक के स्थायित्व की सीधी-सीधी माप है? इस सवाल का जवाब जानने के लिए हम चाहेंगे कि आप बोध प्रश्न 2 करें।

---

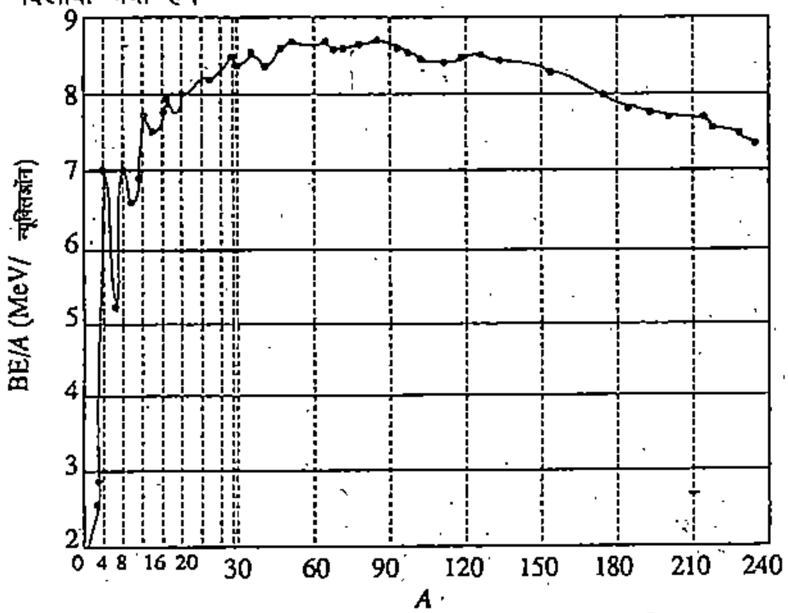
10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

^4_2He, $^{35}_{17}Cl$, $^{56}_{26}Fe$ और $^{235}_{92}U$ की बंधन ऊर्जा की गणना करें। दिया है कि

$m_n = 1.008665u$, $M(^1H) = 1.007825u$, $M(^4He) = 4.002604u$, $M(^{35}Cl) = 34.96885u$
$M(^{56}Fe) = 55.934932u$ और $M(^{235}U) = 235.043933u$ ।

इस बोध प्रश्न को हल करके आपने पाया कि नाभिक की बंधन ऊर्जा उसकी द्रव्यमान संख्या के साथ बढ़ती है (^{4}He के लिए 28.3 MeV, ^{35}Cl के लिए 298 MeV, ^{56}Fe के लिए 492 MeV और ^{235}U के लिए 1784 MeV)। अब आइये हम इन नाभिकों के लिए, इनकी बंधन ऊर्जाओं को इनकी द्रव्यमान संख्याओं से भाग दें। तब हमें इनके लिए प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा का मान मिलता है क्रमशः 7.1 MeV, 8.5 MeV, 8.8 MeV और 7.6 MeV। चित्र 13.6 में प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा को द्रव्यमान संख्या के फलन के रूप में दिखाया गया है।



चित्र 13.6: द्रव्यमान संख्या के फलन के रूप में प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा।

ध्यान दीजिए कि:

- बंधन ऊर्जा वक्र में कुछ तीक्ष्ण शिखर हैं ख़ास कर ^{4}He, ^{9}Be, ^{12}C, ^{16}O और ^{20}Ne के लिए।
- हल्के नाभिकों ($A \le 20$) को छोड़कर बाकी सभी नाभिकों के लिए ये मान एक निष्कोण (smooth) वक्र पर स्थित हैं।
- प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा (BE/A) एकदिष्टतः (monotonically) बढ़ती है और उसमें $A = 56$ के निकट (जो लोहे के नाभिक के संगत है) उतार चढ़ाव दिखते हैं। बंधन ऊर्जा का अधिकतम मान 8.8 MeV है।
- $A = 56$ के बाद BE/A का मान धीरे धीरे घटता है और $A = 238$ के लिए 7.6 MeV होता है।

इसका मतलब यह है कि आवर्त तालिका के दोनों सिरों पर स्थित नाभिक, उसके बीच में स्थित नाभिकों की तुलना में कम स्थायी हैं। यानी परमाण्वीय नाभिक के स्थायित्व की माप हमें BE/A से करनी चाहिए न कि बंधन ऊर्जा (BE) से।

द्रव्यमान संख्या पर प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा की निर्भरता से हमें यह भी सुझाई देता है कि नाभिक की ऊर्जा का इस्तेमाल कैसे किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, जब दो हल्के नाभिक संगलित होकर एक ज़्यादा स्थायी नाभिक बनाते हैं तो इस प्रक्रिया में ऊर्जा का उत्सर्जन होता है। ऐसी अभिक्रिया को संगलन (fusion) अभिक्रिया कहते हैं, और यही प्रक्रिया तारों में निकलने वाली ऊर्जा के लिए ज़िम्मेदार है। आजकल बड़े ज़ोर शोर से किसी तरह संगलन अभिक्रिया को नियंत्रित करके भविष्य के लिए हमारी ऊर्जा समस्या का समाधान करने के प्रयास चल रहे हैं।

इसी तरह जब एक बहुत भारी नाभिक दो हिस्सों में बंटता है तो उसकी प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा बढ़ जाती है जिससे ऊर्जा का उत्सर्जन होता है। इस प्रक्रिया को **नाभिकीय विखंडन** (nuclear fission) कहते हैं। विखंडन प्रक्रिया में निकली ऊर्जा की मात्रा न्यूक्लिऑनों की संख्या और अभिकारकों और उत्पादों की प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा के अंतर के गुणनफल के बराबर होती है। उदाहरण के लिए, ^{235}U की प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा लगभग 7.6 MeV है जबकि यह लगभग 120 द्रव्यमान संख्या वाले नाभिकों के लिए 8.5 MeV है। यानी अगर एक ^{235}U नाभिक दो लगभग बराबर हिस्सों में बंट जाये तो प्रति न्यूक्लिऑन 0.9 MeV ऊर्जा, निकाय की बंधन ऊर्जा में जुड़ जायेगी। इस तरह एक विखंडन घटना में उत्सर्जित ऊर्जा लगभग $235 \times 0.9 = 212$ MeV होगी। एक कार्बन परमाणु की ज्वलन की ऊष्मा सिर्फ़ 4 eV होती है। इसलिए जब नाभिक के 1 kg द्रव्यमान का विखंडन किया जाता है तो उत्सर्जित ऊर्जा लगभग उतनी होती है, जितनी 2700 मीट्रिक टन कोयला जलाने पर पैदा की जा सकती है।

वीज़सैकर (Wiezsacker) ने नाभिकों की बंधन ऊर्जा के लिए एक सामि-आनुभविक (semi-empirical) समीकरण दिया जिसमें उन्होंने नाभिक को तरल की बूंद की तरह माना और यह कहा कि नाभिक के अंदर न्यूक्लिऑनों को बांधने वाले बल लगभग उसी तरह के होते हैं जैसे कि तरल की बूंद में अणुओं को बांधने वाले बल। किसी नाभिक के लिए, जिसमें Z प्रोटॉन हों और A न्यूक्लिऑन हों, बंधन ऊर्जा का व्यंजक इस तरह है:

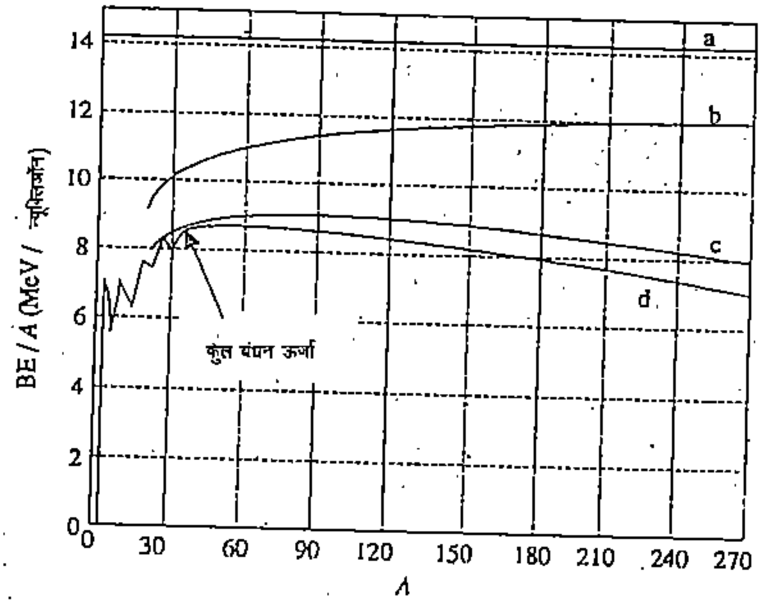
$$\mathrm{BE(MeV)} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{\delta Z(Z-1)}{A^{1/3}} \pm \frac{\varepsilon}{A^{3/4}} \qquad (13.3)$$

जहाँ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ और ε अचर संख्याएं हैं जिनके मान हैं $\alpha = 15.8$, $\beta = 17.8$, $\gamma = 23.7$ और $\delta = 0.71$ और

$$\varepsilon = \begin{cases} 34, & \text{सम-सम या विषम-विषम नाभिकों के लिए} \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

इस फ़ार्मूले का पहला पद न्यूक्लिऑनों की आकर्षण ऊर्जा (आयतन ऊर्जा) के बराबर है; दूसरा पद सतह के नज़दीक न्यूक्लिऑनों के कमज़ोर बंधन के कारण हुई ऊर्जा के मान में अधिकता का संशोधन करता है और पृष्ठ के समानुपाती होता है (जिसे पृष्ठीय प्रभाव, surface effect, कहते हैं); तीसरा पद न्यूट्रॉनों के आधिक्य के कारण ऋणात्मक संशोधन करता है (जिसे असममिति प्रभाव कहते हैं) और चौथा पद प्रोटॉनों की स्थिरवैद्युत ऊर्जा के कारण है (कूलॉम प्रभाव)। चूंकि नाभिक में मौजूद हर आवेशित कण बाकी सभी आवेशित कणों को प्रतिकर्षित करता है इसलिए यह ऊर्जा ऋणात्मक होती है और प्रोटॉन युग्मों की संख्या के समानुपाती होती है, जो $Z(Z-1)/2$ के बराबर है।

इस फ़ार्मूले का आखिरी पद स्पिन के कारण होता है। यह सम-सम नाभिक के लिए (यानी जिनके लिए दोनों ही Z और N सम हों) धनात्मक होता है, विषम-विषम नाभिकों के लिए ऋणात्मक होता है और सम-विषम या विषम-सम नाभिकों के लिए शून्य होता है। वीज़सैकर फार्मूले में द्रव्यमान संख्या के फलन के रूप में बंधन ऊर्जा में विभिन्न पदों का योगदान चित्र 13.7 में दिखाया गया है। अब हम एक उदाहरण से यह समझायेंगे कि वीज़सैकर फार्मूले की मदद से BE/A की गणना कैसे की जा सकती है।



चित्र 13.7: द्रव्यमान संख्या के फलन के रूप में प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा का आरेख। वक्र a आयतन ऊर्जा दिखाता है। वक्र b आयतन और पृष्ठ ऊर्जाएं दिखाता है। वक्र c वीज़सैकर फार्मूले में, पहले, दूसरे और चौथे पदों का मिला जुला प्रभाव दिखाता है। और जब हम असममिति और स्पिन के पदों को जोड़ते हैं तो प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा के लिए वक्र d मिलता है।

उदाहरण 1

वीज़सैकर फ़ार्मूले का इस्तेमाल करके ^{235}U के लिए प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा की गणना करें। जब इसका विखंडन होता है तो, मान लीजिए कि $^{149}_{60}Nd$ और $^{85}_{32}Ge$ दो विखंडन उत्पाद हैं। इन न्यूक्लिऑनों के लिए भी BE/A निकालें।

हल

^{235}U के लिए, $A = 235$, $Z = 92$ और $N = 143$। साथ ही क्योंकि यह एक सम-विषम नाभिक है, इसलिए स्पिन पद का योगदान शून्य होगा। इसलिए समीकरण (13.3) का इस्तेमाल करके हमें मिलता है

$$\text{BE(MeV)} = 15.8 \times 235 - 17.8 \times (235)^{2/3} - \frac{23.7 \times (51)^2}{235} - \frac{0.7 \times 92 \times 91}{235^{1/3}}$$

$$= 3713.00 - 677.85 - 263.31 - 963.25 = 1808.6$$

आपने यहाँ ध्यान दिया होगा कि (चौथे) कूलॉम पद का मान (दूसरे) पृष्ठ पद से कहीं अधिक है। ऐसा इसलिए है कि ^{235}U के नाभिक में प्रोटॉनों की संख्या बहुत ज्यादा है।

$$\text{प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा} = \frac{1808.6}{235} \simeq 7.7 \text{ MeV}$$

$^{149}_{60}Nd$ के लिए दिया है $A = 149$, $Z = 60$ और $N = 89$। पहले ही की तरह स्पिन पद का योगदान शून्य है। इसलिए

$$\text{BE(MeV)} = 15.8 \times 149 - 17.8 \times (149)^{2/3} - \frac{23.7 \times (29)^2}{149} - \frac{0.71 \times 60 \times 59}{(149)^{1/3}}$$

$$= 2354.20 - 500.28 - 133.77 - 474.18$$

$$= 1245.0$$

आप क्या पाते हैं? कूलॉम पद और पृष्ठ पद लगभग बराबर हैं। इस स्थिति में प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा का मान 8.4 MeV होता है, जिससे यह पता लगता है कि विखंडन उत्पाद नाभिक ^{149}Nd, ^{235}U के मुकाबले ज़्यादा स्थायी है।

$^{85}_{32}$Ge के लिए $A = 85$, $Z = 32$ और $N = 53$। स्पिन पद का योगदान फिर से शून्य है। अतः

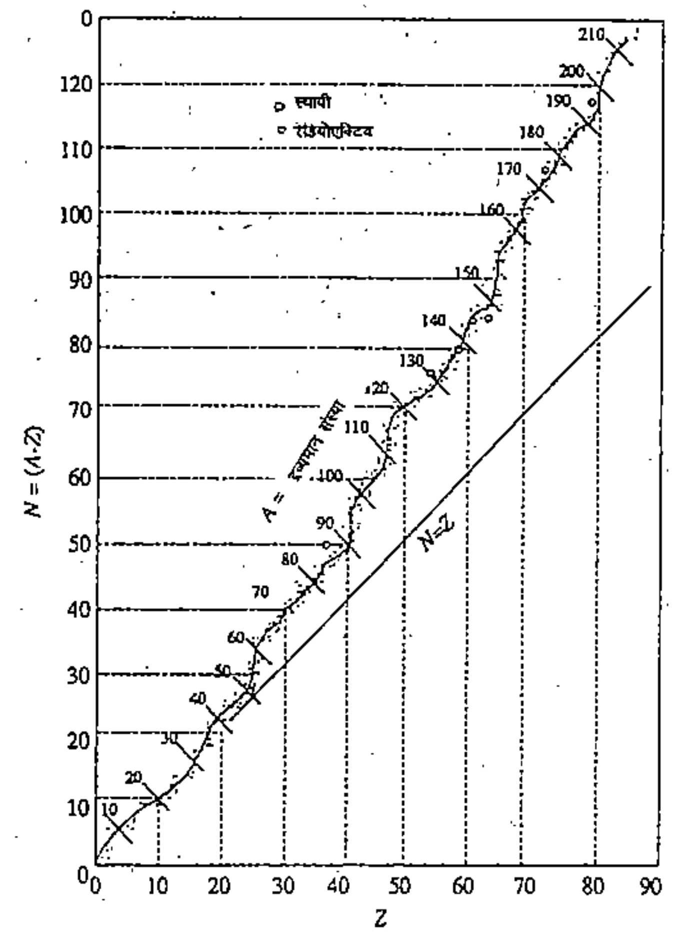
$$\text{BE(MeV)} = 15.8 \times 85 - 17.8 \times (85)^{2/3} - \frac{27.3 \times (21)^2}{85} - \frac{0.71 \times 32 \times 71}{(85)^{1/3}}$$

$$= 1343.00 - 344.11 - 122.96 - 160.19$$

$$= 715.7$$

अतः प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा है 8.4 MeV।

यहाँ आपने ध्यान दिया होगा कि इस स्थिति में पृष्ठ ऊर्जा कूलॉम ऊर्जा से अधिक है और उसके दो नाभिकीय उत्पादों में $^{85}_{32}$Ge ज़्यादा स्थायी है।



चित्र 13.8: प्राकृतिक रूप से पाये जाने वाले नाभिकों के लिए न्यूट्रॉन संख्या बनाम प्रोटॉन संख्या का वक्र।

ऊपर दिये गये उदाहरण में आपने देखा कि जैसे-जैसे न्यूट्रॉनों और प्रोटॉनों की संख्या के बीच अंतर बढ़ता है, नाभिक का स्थायित्व घटता जाता है। अब यह एक जानी मानी बात है कि हल्के स्थायी नाभिकों में न्यूट्रॉनों की संख्या लगभग प्रोटॉन संख्या के बराबर होती है। जैसे-जैसे हम भारी नाभिकों की ओर बढ़ते हैं, प्रोटॉन संख्या के मुकाबले न्यूट्रॉन संख्या बढ़ती जाती है। और यह वृद्धि भी, बढ़ते हुए A के साथ धीरे-धीरे बढ़ती

जाती है। प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों के कुछ ही संयोजन ऐसे हैं जिनसे स्थायी नाभिक मिलते हैं। यह बात हमने चित्र 13.8 में दिखाई है जहाँ हमने स्थायी नाभिकों के लिए (जिन्हें ठोस वृत्तों द्वारा दिखाया गया है) न्यूट्रॉनों की संख्या की प्रोटॉनों की संख्या पर निर्भरता दिखायी है। यहाँ ध्यान दीजिए कि $Z \leq 20$ के लिए, स्थायित्व वक्र एक सीधी रेखा है जिसके लिए $Z \leq N$। $Z > 20$ के लिए स्थायित्व वक्र $N > Z$ की ओर झुकता है। इस बात को आप और अच्छी तरह से सामि-आनुभविक द्रव्यमान फार्मूले के आधार पर समझ सकते हैं अगर आप नीचे दिया गया बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 3

2 मिनट लगाएं

दिखाइये कि हल्के नाभिकों के लिए, $Z = N$ का तथ्य सामि-आनुभविक द्रव्यमान फ़ार्मूले द्वारा अच्छी तरह से समझा जा सकता है।

यह प्रेक्षण भी कई बार किया गया है कि ${}^{58}_{28}\mathrm{Ni}, {}^{50}_{22}\mathrm{Ti}, {}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ आदि जैसे नाभिकों के जिनमें N या Z या दोनों लगभग 2, 8, 20, 28, 50, 82 और 126 के बराबर हैं, कुछ बहुत ख़ास गुणधर्म होते हैं जो कि अन्य नाभिकों से काफ़ी अलग हटकर हैं:

- वे प्रकृति में बहुतायत में मिलते हैं,
- वे अन्य नाभिकों के मुकाबले कहीं ज़्यादा स्थायी होते हैं।

ये संख्याएं मैजिक संख्याएं या स्थायित्व संख्याएं (magic numbers) कहलाती हैं। इनसे हमें परमाण्वीय नाभिकों की संरचना के बारे में क़यास लगाने में काफ़ी मदद मिली है।

न्यूक्लिऑन एक दूसरे से कैसे बंधे रहते हैं – नाभिकीय बल

एक बार जब भौतिकीविदों ने नाभिक की न्यूट्रॉन, प्रोटॉन परिकल्पना को स्वीकार कर लिया तो एक महत्वपूर्ण सवाल यह उठा कि ये न्यूक्लिऑन एक दूसरे से कैसे बंधे रहते हैं। दूसरे शब्दों में, एक नाभिक में न्यूक्लिऑनों को बांधे रखने के लिए ज़िम्मेदार बल की क्या प्रकृति होती है? चूंकि प्रकृति में प्रेक्षित बहुत से तथ्यों को गुरुत्वाकर्षण और विद्युतचुंबकीय बलों के आधार पर समझाया जा सकता है, तो आप शायद इस बात को मानना चाहेंगे कि इन्हीं में से एक बल, वह बल है जो न्यूक्लिऑनों को बांधे रखता है। नाभिक का बहुत ही छोटा आकार, जिसमें प्रोटॉन और न्यूट्रॉन बहुत ही नज़दीकी रूप से बंधे हुए हैं, हमें यह सुझाता है कि इन्हें बांधे रखने वाला बल बहुत प्रबल लघु परासी (short range) आकर्षण बल है। ये आकर्षण बल स्थिरवैद्युत बल नहीं हो सकते। ऐसा क्यों है? क्योंकि प्रोटॉनों के बीच में लग रहे स्थिरवैद्युत बल प्रतिकर्षण बल होते हैं। और अगर उनके बीच सिर्फ़ यही बल लग रहे होते तो ये न्यूक्लिऑन एक दूसरे से अलग ही रहते। लेकिन ऐसा नहीं है। बजाय इसके, न्यूक्लिऑनों के बीच इन बलों के कारण नाभिक में न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा का मान बहुत अधिक होता है (लगभग 8 MeV)।

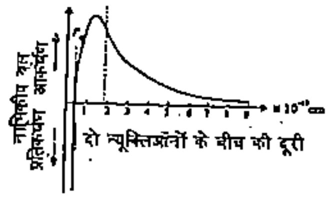
अब आइये दूसरे विकल्प को लें। इसके मुताबिक न्यूक्लिऑनों के बीच का बल गुरुत्वाकर्षण बल हो सकता है क्योंकि यह न्यूक्लिऑनों के प्रत्येक युग्म के बीच आकर्षण बल है। लेकिन यह बहुत ही दुर्बल बल है और इससे न्यूक्लिऑनों के बीच शक्तिशाली आकर्षण बलों की व्याख्या नहीं की जा सकती। अगर न्यूक्लिऑन, न्यूक्लिऑन बल को इकाई मान लिया जाए तो गुरुत्वाकर्षण बल का परिमाण 10^{-39} की कोटि का होगा। इससे हम यह नतीजा निकाल सकते हैं कि न्यूक्लिऑनों के बीच यह विशुद्ध आकर्षण बल एक बिल्कुल ही नई किस्म का बल है और क्लासिकी भौतिकी के क्षेत्र में इसकी किसी और जाने माने बल से अनुरूपता नहीं है। इस नये आकर्षण बल को नाभिकीय बल (nuclear force) कहते हैं

हाल ही के प्रयोग सुझाते हैं कि नाभिकीय बलों में आवेश निर्भरता भी होती है लेकिन यह बहुत अल्प होती है (<1%)।

आप जानते हैं कि गुरुत्वाकर्षण और स्थिरवैद्युत बल व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं। नाभिक के लिए यह स्थिति बिल्कुल अलग है। नन्हें से नाभिक में सभी न्यूक्लिऑन बहुत कसकर नज़दीकी से बंधे रहते हैं जैसे कि एक डिब्बे में रखे कंचे। वह बल जो न्यूक्लिऑनों को बांधे रखता है, नाभिक के अंदर सभी पड़ोसी न्यूक्लिऑनों के बीच लगना चाहिए। इसलिए न्यूक्लिऑनों के बीच नाभिकीय बल एक लघु परासी बल है जो बहुत छोटी दूरियों ($\sim 10^{-15}$ m) पर कार्य करता है। अधिक दूरियों पर नाभिकीय बल नगण्य होता है। इससे यह कहा जा सकता है कि प्रत्येक न्यूक्लिऑन अपने निकटतम पड़ोसी न्यूक्लिऑनों पर ही यह बल लगाता है।

इन नाभिकीय बलों से हमें निम्न न्यूक्लिऑनों के बीच में आकर्षण बल की व्याख्या कर सकनी चाहिए:

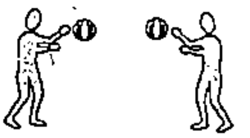
- एक प्रोटॉन और एक न्यूट्रॉन के बीच,
- दो प्रोटॉनों के बीच, और
- दो न्यूट्रॉनों के बीच।



चित्र 13.9: नाभिकीय बल की दूरी पर प्रतिरूपी निर्भरता।

चूंकि प्रति परमाणु संख्या बंधन ऊर्जा (BE/A) सबके लिए एक ही है, भले ही नाभिक में न्यूट्रॉनों और प्रोटॉनों की संख्या कुछ भी हो, इसलिए, अगर हम यह कहें कि उनके बीच के बल समकक्ष हैं तो यह सही होगा। यानि नाभिकीय बल आवेश पर निर्भर नहीं करते।

अगर नाभिकीय बल केवल आकर्षण बल है तो क्या उनके अधीन न्यूक्लिऑनों का संगलन नहीं हो जाना चाहिए? लेकिन हम सभी यह जानते हैं कि न्यूक्लिऑनों के बीच औसत दूरी नियत होती है, जिसके कारण, नाभिकीय आयतन, न्यूक्लिऑनों की कुल संख्या के समानुपाती होता है। इसकी एक संभव व्याख्या यह है कि नाभिकीय बल तभी तक आकर्षण बल होते हैं, जब तक कि न्यूक्लिऑनों के बीच की दूरी एक क्रांतिक मान से अधिक होती है। इस क्रांतिक दूरी से कम दूरी पर नाभिकीय बलों का चरित्र यकबयक बदल जाना चाहिए। यह आकर्षण प्रतिकर्षण में बदल जाना चाहिए (यहाँ ध्यान दें कि आप इस प्रतिकर्षण को स्थिरवैद्युत प्रतिकर्षण जैसा न समझें)। नाभिकीय बलों के ये गुणात्मक आयान चित्र 13.9 में दिखाये गये हैं।



कण विनिमय के कारण आकर्षण बल

कण विनिमय के कारण प्रतिकर्षण बल

चित्र 13.10: कण विनिमय के कारण आकर्षण और प्रतिकर्षण दानों की तरह के बल संभव हैं।

आइये, अब कुछ रुकें और पूछें: न्यूक्लिऑनों के बीच यह नाभिकीय बल किस तरह काम करते हैं? 1932 में हाइज़ेनबर्ग (Heisenberg) ने यह सुझाव दिया कि न्यूक्लिऑनों के बीच इलेक्ट्रॉनों और पॉज़ीट्रॉनों का स्थानांतरण होता रहता है। उदाहरण के लिए, एक न्यूट्रॉन, एक इलेक्ट्रॉन का उत्सर्जन करके प्रोटॉन बन जाता है जबकि प्रोटॉन, इलेक्ट्रॉन अवशोषित करके न्यूट्रॉन बन जाता है। लेकिन गणनाओं से पता चला कि न्यूक्लिऑनों में इलेक्ट्रॉन और पॉज़ीट्रॉनों के स्थानांतरण से उत्पन्न होने वाले बल बहुत कम परिमाण के होते हैं (लगभग 10^{-14} गुना कम)। नाभिकीय संरचना में उनका मान नगण्य है। 1935 में, जापान के भौतकीविद् हिदेकी यूकावा (Hideki Yukawa) ने यह प्रस्ताव दिया कि ये नाभिकीय बल इलेक्ट्रॉनों और न्यूक्लिऑनों के द्रव्यमानों के बीच के द्रव्यमान वाले कणों के कारण लगते हैं। आजकल ये कण पायॉन (pions) कहलाते हैं। पायॉन आवेशित भी हो सकते हैं। (π^+, π^-) या आवेशहीन (π^0) भी हो सकते हैं दरअसल पायॉन, अपने मौलिक नाम पाई-मीसॉन (pi-meson) का ही संक्षिप्त स्वरूप है।

यूकावा के सिद्धांत के अनुसार हरेक न्यूक्लिऑन लगातार पायॉन उत्सर्जित और पुन: अवशोषित करता रहता है। एक उत्सर्जित पायॉन दूसरे न्यूक्लिऑन द्वारा भी अवशोषित किया जा सकता है। इससे जुड़ा संवेग स्थानांतरण एक बल की क्रिया के तुल्य है। नाभिकीय बलों के लिए यूकावा के सिद्धांत का सबसे महत्वपूर्ण आयाम यह है कि यह

उनके आकर्षण और प्रतिकर्षण को एक साथ समझा सकता है। इस बात को पूरी तरह समझने के लिए कोई आसान तरीक़ा नहीं है लेकिन मौटे तौर पर इसके अनुरूप हम यह उदाहरण दे सकते हैं। कल्पना कीजिए कि दो लड़के वॉलीबाल बदल रहे हैं (चित्र 13.10)।

अब आप पूछेंगे कि अगर न्यूक्लिऑन लगातार पायॉन उत्सर्जित और अवशोषित करते हैं तो उनके द्रव्यमानों के अपने आम मानों के अलावा और मान क्यों नहीं मिलते? इस बात का जवाब हाइज़ेनबर्ग के अनिश्चितता सिद्धांत से मिलता है। हम यह जानते हैं कि भौतिकी के नियम उन्हीं राशियों के बारे में होते हैं जिनका मापन हो सकता है; और मापन के कुछ चरों के युग्मों का कितनी सार्थकता तक मापन किया जा सकता है यह अनिश्चितता सिद्धांत से तय होता है। एक न्यूक्लिऑन द्वारा पायॉन के उत्सर्जन में उसके द्रव्यमान का न बदलना – जो कि ऊर्जा सरंक्षण नियम के विरुद्ध है- तभी हो सकता है जब न्यूक्लिऑन उसी या किसी दूसरे पायॉन को इतनी जल्दी अवशोषित कर ले कि सैद्धांतिक रूप से भी द्रव्यमान परिवर्तन न मापा जा सके। अनिश्चितता नियम के हिसाब से ऐसी कोई घटना अपरिहार्य नहीं है जिसमें $\hbar/(2\,\Delta E)$ समय से कम समय के अंदर ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती।

इस प्रतिबंध से हम पायॉन द्रव्यमान का अनुमान लगा सकते हैं। यह नीचे दिए गए उदाहरण में किया गया है।

उदाहरण 2

मान लीजिए कि एक पायॉन चाल $v \sim c$ से न्यूक्लिऑनों के बीच चलता है। द्रव्यमान m_π के पायॉन का उत्सर्जन थोड़ी देर के लिए ऊर्जा के मान में $E \sim mc^2$ की अनिश्चितता ले आता है। m_π की गणना करे

हल

नाभिकीय बलों का अधिकतम परास लगभग 1.7 fm है। और पायॉन द्वारा इतनी दूरी तय करने में लिया गया समय Δt है

$$\Delta t = \frac{r}{v} \sim \frac{r}{c}$$

अतः
$$m_\pi c^2 = \frac{\hbar}{\Delta t} \sim \frac{\hbar c}{r}$$

जिससे
$$m_\pi \sim \frac{\hbar}{rc}$$

सभी संख्याओं के मान रखने पर हमें मिलता है।

$$m_\pi = \frac{1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{(1.7 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}) \times (3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}})} \simeq 2.1 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg}$$

यह इलेक्ट्रॉन के विराम द्रव्यमान का 230 गुना है। यूकावा के मिसॉन की खोज 1946 में हुई जब पॉवेल (Powell) ने कॉस्मिक किरणों में इन्हें संसूचित किया। आवेशित पायॉनों का विराम द्रव्यमान है 273 m_e और आवेशरहित पायॉनों का विराम द्रव्यमान है 264 m_e।

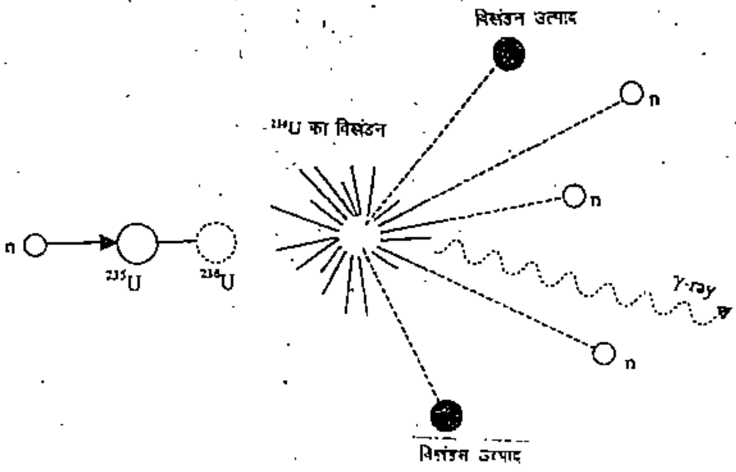
13.4 नाभिकीय विखंडन

अब आप जान गये हैं कि बीच के द्रव्यमान वाले कुछ नाभिकों जैसे कि बेरियम, क्रिप्टॉन और लोहे के लिए प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा का मान भारी नाभिकों जैसे यूरेनियम, प्लूटोनियम और थोरियम के मुकाबले ज़्यादा होता है। यह दरअसल स्थिर वैद्युत प्रतिकर्षण की बढ़ती हुई भूमिका के कारण होता है। इससे इस बात को समझा जा सकता है कि एक कम कस कर बंधे हुए नाभिक के टूटने से ज़्यादा कस कर बंधे हुए नाभिक क्यों बनते हैं। इस प्रक्रिया को नाभिकीय विखंडन कहते हैं। इस प्रक्रिया को यह नाम लिज़ मीतनर (Lise Meitner) और ऑटो फ्रिश (Otto Frisch) ने प्राणी विज्ञान में हो रही कोशिका विभाजन प्रक्रिया से तुलना करके दिया था। 1938 में ऑटो हॉह्न (Otto Hahn) और फ्रिट्ज स्ट्रॉसमान (Fritz Strassmann) ने यह स्थापित किया कि जब यूरेनियम पर धीमी गति के न्यट्रॉनों की बमबारी की जाती थी तो इस प्रक्रिया में एक उत्पाद बेरियम भी होता था। इस परिणाम को उस वक्त प्रचलित नाभिकीय भौतिकी की धारणाओं की मदद से नहीं समझाया जा सका। लेकिन, इस खोज को दिसम्बर 1938 में नेचर (Nature) नामक पत्रिका में रिपोर्ट किया गया। बाद में अन्य विखंडन उत्पादों–सेलेनियम से लेकर लेंथेनम तक-को भी रासायनिक तौर पर पहचाना गया।

कई भौतिकीविदों ने यह क़यास लगाया कि इनमें से कुछ विखंडन उत्पादों का न्यूट्रॉन उत्सर्जन द्वारा क्षय संभव है और इस तरीके के न्यूट्रॉनों के उत्पादन के प्रायोगिक प्रमाण मार्च 1939 में मिले। और जैसा कि हम अब जानते हैं, औसतन हर विखंडन घटना में दो से तीन न्यूट्रॉनों का उत्सर्जन होता है। साथ ही साथ इस प्रक्रिया में बहुत बड़ी तादाद में ऊर्जा उत्सर्जित होती है। इससे तुरंत ही यह संभावना सामने आई कि न्यूट्रॉन श्रृंखला अभिक्रिया स्थापित की जा सकती है। और इसमें विद्युत उत्पादन के लिए बहुत ही व्यावहारिक व्यवस्था बनने की क्षमता थी।

चित्र 13.11 देखें। इसमें धीमी गति से चल रहे न्यूट्रॉनों द्वारा ^{235}U के नाभिकीय विखंडन को रेखाचित्र बनाकर समझाया गया है। आप देखेंगे कि (प्राथमिक) विखंडन उत्पादों में दो (मध्यम द्रव्यमान के) नाभिक होते हैं जिनके द्रव्यमान बराबर नहीं होते, दो या तीन न्यूट्रॉन होते हैं, कुछ γ-किरणें होती हैं और लगभग 200 MeV ऊर्जा उत्सर्जित होती है। इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं

$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} + 200\ \mathrm{MeV} $$



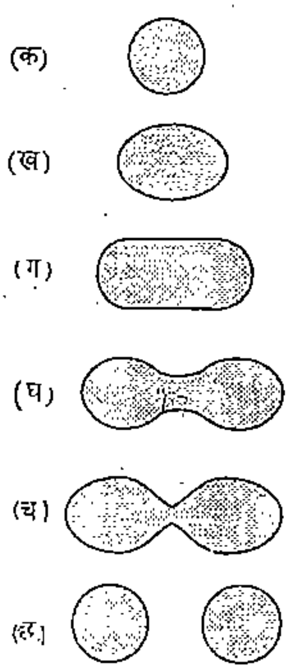
चित्र 13.11: तापीय न्यूट्रॉन द्वारा नाभिकीय विखंडन का आरेख।

अन्वेषणों से पता चला है कि विखंडन की घटना न्यूट्रॉन प्रग्रहण (neutron capture) के 10^{-17} s के अंदर होने लगती है और विखंडित न्यूट्रॉन घटना के 10^{-14} s के भीतर ही उत्सर्जित होते हैं।

लिज़ मीतनर और ऑटो फ्रिश ने हॉह्न और स्ट्रॉसमान के इन परिणामों की नाभिक के द्रव बूंद मॉडल के आधार पर व्याख्या की।

लेकिन विखंडन का व्यापक सिद्धांत बोर (Bohr) और व्हीलर (Wheeler) ने विकसित किया जिसमें उन्होंने अणुओं को जोड़कर तरल का रूप देने वाले बलों और नाभिकीय बलों के बीच अनुरूपता का इस्तेमाल किया। इस मॉडल का इस्तेमाल करके उन्होंने स्वतः विखंडन की खोज की और ^{238}U के मुकाबले ^{235}U के जल्दी विखंडित हो जाने की क्षमता का पूर्वानुमान लगाया। उन्होंने यह भी दिखाया कि अगर विखंडन में उत्पन्न हुए न्यूट्रॉनों की ऊर्जा घटा कर 0.025 eV कर दी जाए तो ज़्यादा प्रभावी तरीके से ^{235}U का विखंडन किया जा सकता है - यह प्रायिकता लगभग सौ गुना ज़्यादा हो जाती है। इससे पहले कि हम विखंडन के द्रव बूंद मॉडल पर चर्चा करें, हम इस बात की ओर आपका ध्यान दिलाना चाहेंगे कि अक्सर ही विखंडन उत्पाद बराबर द्रव्यमान के नहीं होते; उनमें से एक, दूसरे के मुकाबले काफ़ी अधिक भारी होता है। ऐसा विखंडन असममित कहलाता है। अध्ययनों से पता चला कि ^{235}U का विखंडन 40 से अधिक अलग-अलग तरीकों से हो सकता है। इसका मतलब यह हुआ कि 80 विभिन्न प्रकार के नाभिक सीधे तौर पर विखंडन प्रक्रिया में उत्पन्न होते हैं। सबसे भारी उत्पादों का द्रव्यमान परास 125-150 होता है और इसका अधिकतम मान 140 के करीब होता है। हल्के विखंडन उत्पादों का द्रव्यमान परास 80-110 होता है जिसका अधिकतम 95 के करीब होता है।

उदाहरण के लिए, हम यहां $^{147}_{57}L$, $^{140}_{54}Xe$, $^{135}_{52}Te$, $^{149}_{60}Nd$, $^{87}_{35}Br$, $^{94}_{38}Sr$, $^{99}_{40}Zr$, $^{85}_{32}Ge$ के नाम ले सकते हैं। ^{235}U के अलावा, ^{233}U और ^{239}Pu भी इसी तरह के तापीय न्यूट्रॉनों द्वारा विखंडित किये जा सकते हैं।



चित्र 13.12: द्रव बूंद मॉडल के मुताबिक एक नाभिक का विखंडन।

13.4.1 विखंडन का द्रव बूंद मॉडल

एक बड़े नाभिक में जिसमें कई न्यूक्लिऑन हों मुख्यतः दो बल लग रहे होते हैं : प्रोटॉनों के बीच कूलॉम प्रतिकर्षण बल और न्यूक्लिऑनों के बीच नाभिकीय बल। नाभिकीय बल लघु परासी होते हैं और आवेश पर निर्भर नहीं करते। इसलिए, नाभिक के एकदम भीतर एक न्यूक्लिऑन अपने चारों ओर दूसरे न्यूक्लिऑनों से घिरा होता है और उस पर काम करने वाला औसत बल शून्य होगा। लेकिन नाभिक की सतह पर स्थित न्यूक्लिऑन केवल उन्हीं न्यूक्लिऑनों द्वारा आकर्षित किया जाता है जो नाभिक के अंदर हैं और नाभिकीय बलों के परास में हैं। इसलिए इस न्यूक्लिऑन पर एक नेट असंतुलित बल अंदर की दिशा की ओर लगता है। (यह बल तरल में पृष्ठ तनाव के बल के जैसा है।) अतः अगर हम नाभिक को एक आवेशित तरल बूंद की तरह मानें तो वह अपनी निम्नतम अवस्था में गोलाकार सममिति का होगा, जैसा कि चित्र 13.12 (क) में दिखाया गया है।

जब कोई नाभिक एक न्यूट्रॉन का प्रग्रहण (capture) करता है तो नाभिक के अंदर न्यूक्लिऑनों का पुनर्युग्मन (repairing) होता है। इस संयुक्त नाभिक की, जो कि उत्तेजित (excited) अवस्था में है, ऊर्जा आपतित न्यूट्रॉन की गतिज ऊर्जा और न्यूक्लिऑनों के पुनर्युग्मन में उत्सर्जित ऊर्जा के योग के बराबर होती है। परिणामस्वरूप इसमें प्रबल दोलन होते हैं जो इसके गोल आकार को विकृत (distort) कर देते हैं। यानी कि इस अधिक ऊर्जा वाले संयुक्त नाभिक का आकार कुछ लंबा हो जाता है (चित्र 13.12 ख)।

पृष्ठीय तनाव बल यह प्रयास करता है कि उसका मूल आकार वापस लौट आये जबकि कूलॉम बल इसे और भी बदलने की कोशिश करता है। जब उत्तेजन (excitation) ऊर्जा कम होती है, तो नाभिक में हो रही विकृति भी कम होती है और नाभिक γ किरणें उत्सर्जित करके निम्नतम अवस्था (ground state) में लौट आता है। लेकिन अगर नाभिक को मिली ऊर्जा का मान अधिक है, तो नाभिक धीरे-धीरे लंबा होकर (चित्र 13.12 ग और घ की तरह) डम्बल के आकार का हो जाता है जिसके सिरों पर दो बड़े-बड़े आवेश के गोले होते हैं जो कमर पर पतली सी पट्टी से जुड़े होते हैं। जब एक बार दोनों आवेशित केन्द्रों के बीच की दूरी किसी क्रांतिक मान से अधिक हो जाती है तो नाभिकीय पृष्ठ तनाव बल स्थिरवैद्युत प्रतिकर्षण बल से कम हो जाता है और ये दोनों टुकड़े अलग हो जाते हैं। और तब नाभिक विखंडित हो जाता है यानी वह फिर से अपनी मूल अवस्था में नहीं पहुंच सकता। भाग (च) में दिखाई गई यह अवस्था (जब दोनों आवेश केन्द्र एक दूसरे से संपर्क में हैं लेकिन कभी भी टूट कर अलग हो सकते हैं), सिशन अवस्था (scission state) कहलाती है। अवस्था (च) में कूलॉम क्षेत्र की ऊर्जा विखंडित उत्पादों की गतिज ऊर्जा में बदल जाती है। और वे बहुत अधिक चाल से एक दूसरे से दूर पलायन कर जाते हैं।

13.4.2 विखंडन की क्रांतिक ऊर्जा : स्वत: विखंडन

अवस्था (च) में निकाय की ऊर्जा और निम्नतम अवस्था में नाभिक की ऊर्जा के अंतर को विखंडन की क्रांतिक ऊर्जा (critical energy of fission) कहते हैं और इसका प्रतीक E_c है। E_c की गणना करने के लिए हम यह मानते हैं कि

- निम्नतम अवस्था में नाभिक का आकार गोले जैसा है,
- एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण करने पर निकाय का कुल आयतन बदलता नहीं और
- उत्तेजित अवस्था में संयुक्त नाभिक के दोलन केवल पृष्ठ का विरूपण करते हैं।

जब स्वत: विखंडन होता है तो अक्सर ही यह असममित होता है। लेकिन आसानी के लिए हम सममित विखंडन की स्थिति लेंगे, जिसमें दोनों विखंडन अंशों के आवेश और द्रव्यमान एकदम बराबर हैं। इसलिए अगर मूल नाभिक के आवेश और द्रव्यमान क्रमश: Z और A हैं तब दोनों अंशों के आवेश और द्रव्यमान क्रमश: $Z/2$ और $A/2$ होंगे (जहां हम यह मान लेते हैं कि Z और A दोनों ही सम हैं)। तब मूल गोलाकार बूंद की पृष्ठ ऊर्जा होगी

$$E_{si} = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma \tag{13.4}$$

जहाँ σ, S और R क्रमश: पृष्ठ तनाव, पृष्ठ क्षेत्रफल और नाभिकीय त्रिज्या हैं।

मूल गोलाकार नाभिक की कूलॉम ऊर्जा है

$$E_{ci} = \frac{3}{5}\,\frac{(Ze)^2}{R} \tag{13.5}$$

अगर हम संबंध $R = r_o A^{1/3}$ ($r_o = 1.2 \times 10^{-15}$ m) का इस्तेमाल करते हैं तो अपनी निम्नतम अवस्था में नाभिक की ऊर्जा ऊपर दी गई दोनों प्रकार की ऊर्जाओं को जोड़ने से मिलेगी

$$E_i = E_{si} + E_{ci} = 4\pi\sigma\, r_0^2\, A_0^{2/3} + \frac{3}{5}\,\frac{(Ze)^2}{r_o A^{1/3}} \tag{13.6}$$

अवस्था च में दोनों खंडों की पृष्ठ ऊर्जा है

$$E_{se} = 2 \times 4\pi\left(\frac{R}{2^{1/3}}\right)^2 \sigma = 8\pi\, r_0^2\left(\frac{A}{2}\right)^{2/3}\sigma \qquad (13.7)$$

जहां $(R/2^{1/3})$ प्रत्येक सममित टुकड़े की त्रिज्या है (यह हमारी दूसरी मान्यता का नतीजा है)।

अवस्था च में इन खंडों की कूलॉम ऊर्जा दो पदों का योग है: एक तो दो अविकृत खंडों की (कूलॉम) ऊर्जा और दूसरी उनके बीच प्रतिकर्षण ऊर्जा:

$$E_{cc} = 2 \times \frac{3}{5}\,\frac{(Ze/2)^2}{(R/2^{1/3})} + \frac{(Ze/2)^2}{2 \times (R/2^{1/3})}$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{Z^2 e^2}{2\, r_0 (A/2)^{1/3}} + \frac{Z^2 e^2}{8\, r_0 (A/2)^{1/3}} \qquad (13.8)$$

इसलिए विखंडित टुकड़ों की ऊर्जा है

$$E_f = E_{se} + E_{cc} = 8\,\pi\,\sigma\, r_0^2\,(A/2)^{2/3} + \frac{3}{5}\,\frac{Z^2 e^2}{2\, r_0 (A/2)^{1/3}} + \frac{Z^2 e^2}{8\, r_0 (A/2)^{1/3}} \qquad (13.9)$$

परिभाषा से, मूल नाभिक की ऊर्जा और दो बराबर द्रव्यमान और आवेश के टुकड़ों की ऊर्जा के अंतर को विखंडन की क्रांतिक ऊर्जा कहते हैं:

$$E_c = E_f - E_i = 4\,\pi\, r_0^2\, A^{2/3}\left[(2^{1/3} - 1) - \frac{3}{40\,\pi}\,\frac{Z^2 e^2}{r_0^3 A\sigma}\left(2 - 2^{1/3} - \frac{5}{12} \times 2^{1/3}\right)\right]$$

$$= \pi\,\sigma\, r_0^2 A^{2/3}\left[1 - \frac{3}{40\,\pi}\,\frac{Z^2 e^2}{2\, r_0^3 A\sigma}\right] \qquad (13.10)$$

चूंकि $(2^{1/3} - 1) = 0.260$ और $\left(2 - 2^{1/3} - \frac{5}{12} \times 2^{1/3}\right) \quad (2^{1/3} - 1)^{-1} \approx 1$ ।

आइये, अब स्वत: विखंडन के विरुद्ध नाभिक के स्थायित्व के प्रतिबंधों पर बातचीत करें। स्वत: विखंडन होने के लिए, E_c को शून्य होना चाहिए। तब समीकरण (13.10) का स्वरूप हो जाता है

$$1 = \frac{3}{40\,\pi}\,\frac{Z^2 e^2}{r_0^3 A\sigma}$$

या

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{SF} = \frac{40\,\pi\, r_0^3\,\sigma}{3\, e^2} = 2 \times \frac{4\,\pi\, r_0^2\,\sigma}{(3/5)\,(e^2/r_0)} \qquad (13.11)$$

यह समीकरण स्वत: विखंडन के विरुद्ध नाभिकों के स्थायित्व के लिए Z^2/A का सीमांत मान परिभाषित करती है। वीज़सैकर संबंध से याद करें कि $4\pi\, r_0^2\,\sigma = \beta \simeq 17.8$ और $\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} = \delta \simeq 0.71$ । इन मानों को समीकरण (13.11) में रखने पर हमें मिलता है

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{SF} = 50.1 \tag{13.12}$$

आम तौर पर $(Z^2/A)_{SF}$ का स्वीकृत मान है 47.8। ^{238}U के लिए, $Z^2/A = 35.56$ और ^{239}Pu के लिए यह 36.97 है। इससे आप इस नतीजे पर पहुंच सकते हैं कि इस सिद्धांत के अनुसार प्राकृतिक तौर पर पाये जाने वाले सबसे भारी तत्व के लिए भी स्वत: विखंडन की प्रायिकता बहुत कम (दस लाख में एक) है।

अब तक की विखंडन के द्रव बूंद मॉडल की चर्चा में, गणना को आसान बनाने के लिए हमने कुछ बातें पहले से ही मान ली थीं। यह ज़रूरी नहीं कि ये सभी बातें सही हों। इसीलिए इस सिद्धांत का प्रयोग करके अक्सर विखंडन के सभी प्रेक्षित गुणधर्मों को समझ पाना मुश्किल होता है। इसलिए इस सिद्धांत में कई बदलाव किये गये और अब हम विखंडन की प्रक्रिया को कहीं बेहतर समझ सकते हैं।

13.5 नाभिकीय मॉडल

परमाण्वीय नाभिक की संरचना के बारे में कुछ अंदाज़ा लगाने के लिए भौतिकीविदों को अलग-अलग संकल्पनाओं का सहारा लेना पड़ा। इनमें से किसी में तो नाभिक को गैस के जैसा माना गया, किसी में तरल की बूंद जैसा और किसी में ठोस पदार्थ जैसा। ठोस की तरह मानते हुए भी उन्होंने उसके कई आकार सोचे। उदाहरण के लिए, उन्होंने यह माना कि नाभिक एक ढीली-ढाली संरचना है या वह एक बहुत कस कर बंधी संरचना है, या ऐसी संरचना है जिसमें (कुछ) न्यूक्लिऑनों के समूह बनते रहते हैं। उन्होंने उसके आकार के बारे में भी अलग-अलग अटकलें लगाई: कभी गोलाकार, कभी दीर्घवृत्तजीय (ellipsoidal) और कभी नाशपाती जैसा, वगैरह वगैरह। इन तरह-तरह की संकल्पनाओं के कारण अलग-अलग नाभिकीय मॉडल दिये गये जैसे फर्मी गैस मॉडल (Fermi Gas model), सामूहिक मॉडल (collective model), द्रव बूंद मॉडल (liquid drop model), कोश मॉडल (shell model) और गुच्छ मॉडल (cluster model) आदि, और भी कई मॉडल।

परमाण्वीय नाभिक के गुणधर्मों की व्याख्या करने या उनका पूर्वानुमान लगाने में विभिन्न मॉडल अलग-अलग हद तक सफल हुए हैं। इस मामले में द्रव बूंद मॉडल की सफलता बहुत सीमित रही है- यह केवल नाभिकों की बंधन ऊर्जा की और नाभिकीय विखंडन की व्याख्या कर सका है, (जिसमें भारी नाभिक टूट कर दो लगभग बराबर के टुकड़ों में बंट जाते हैं)। इसकी सीमित सफलता के कारण हम इसकी चर्चा विस्तार से नहीं करेंगे। अभी तक जो कुछ भी हम इसके बारे में कह चुके हैं उतना ही काफ़ी है। लेकिन यहां हम दो अन्य मॉडलों के बारे में बताने जा रहे हैं।

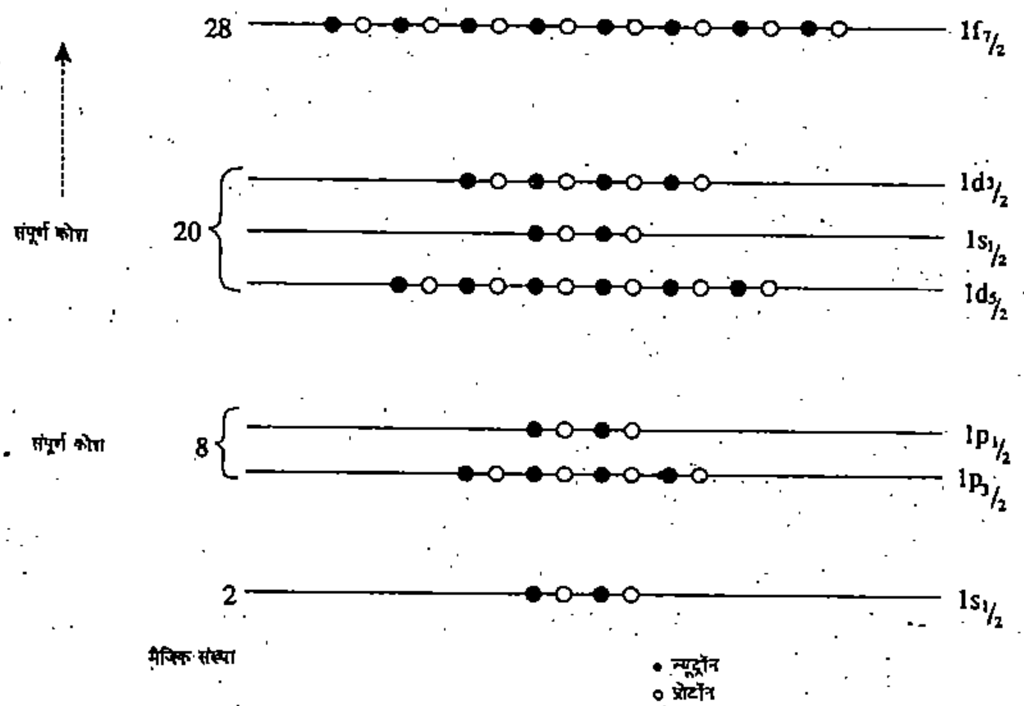
13.5.1 कोश मॉडल

नाभिकों में स्थायित्व संख्याओं के अस्तित्व से जुड़ा है कोश मॉडल का विकास। इस मॉडल के अनुसार नाभिक के अंदर न्यूट्रॉनों और प्रोटॉनों का निर्दिष्ट कक्षाओं (या पथों) में वितरण होता है जैसे कि परमाणु में इलेक्ट्रॉनों का। किसी कक्षा या पथ में न्यूक्लिऑनों की अधिकतम संख्या पर एक प्रतिबंध होता है जो पाउली के अपवर्जन नियम से दिया जाता है, (जैसा कि इकाई 10 में परमाणु के लिए समझाया गया है)।

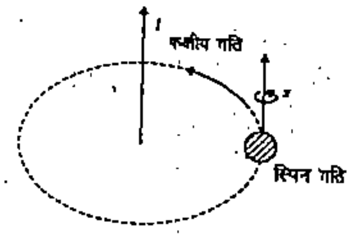
किसी दी हुई कक्षा में बराबर संख्या में न्यूट्रॉन और प्रोटॉन हो सकते हैं क्योंकि पाउली के इस नियम को इन दोनों पर अलग-अलग लागू किया जाता है (चित्र 13.13)। इन कक्षाओं को हम उनके nlj मानों से निर्दिष्ट करते हैं। यहां n कक्षा का मुख्य क्वांटम अंक (principal quantum number) है, l उसका कक्षीय कोणीय संवेग क्वांटम अंक है और

j न्यूक्लिऑन का कुल कोणीय संवेग क्वांटम अंक है। किसी कक्षा में अनुमत न्यूट्रॉनों या प्रोटॉनों की संख्या $2j + 1$ के बराबर है।

कक्षाओं का एक समूह जो ऐसे किसी अन्य समूह से काफ़ी ज़्यादा दूरी पर स्थित होता है आम तौर पर कोश (shell) कहलाता है। नाभिक के अंदर बहुत सारे कोश मिलकर उसे कोश जैसी संरचना प्रदान करते हैं। जब भी एक कोश अपनी अधिकतम अनुमत क्षमता (allowed capacity) तक भरा होता है, तो वह निष्क्रिय हो जाता है (यानी नाभिकीय गुणधर्मों में उसका कोई योगदान नहीं होता)। और वह एक स्थायित्व संख्या को जन्म देता है।



चित्र 13.13: नाभिक की कोश संरचना का चित्रण। यहां सीधी रेखाएं कक्षाओं को दिखाती हैं जो आकार में वृत्ताकार या लगभग वृत्ताकार हो सकती हैं।

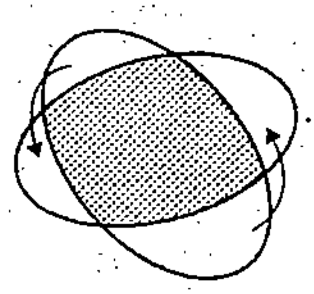


चित्र 13.14: न्यूक्लिऑन की दो प्रकार की गतियां। त्रिज्या r की कक्षा में वेग v से गतिमान, m द्रव्यमान के न्यूक्लिऑन का कोणीय संवेग है $m\,(r \times v)$। नाभिक के न्यूक्लिऑन के दो तरह के कोणीय संवेग होते हैं: कक्षीय (l) और स्पिन (s)। न्यूक्लिऑन का कुल कोणीय संवेग इनका सदिश योग है।

कक्षाओं में स्थित न्यूट्रॉन और प्रोटॉन की दो प्रकार की गतियां मानी जाती हैं। एक तो किसी उभयनिष्ठ बल केन्द्र के चारों ओर घूर्णन गति और एक स्पिन गति। यह चित्र. 13.14 में दिखाई गई है।

नाभिक की संरचना एक परमाणु के जैसी ही होती है। इसमें सिर्फ़ एक फ़र्क है कि परमाणु में इलेक्ट्रॉन एक उभयनिष्ठ बल केन्द्र के चारों ओर गति करता है जो नाभिक होता है जबकि नाभिक में ऐसा कोई उभयनिष्ठ बल केन्द्र नहीं होता।

यह देखा गया है कि जिन नाभिकों के लिए N और/या Z मैजिक संख्या के बराबर होते हैं वे गोलाकार होते हैं। जो नाभिक गोलाकार होते हैं या लगभग गोल आकार के होते हैं, यह कोश मॉडल उनके गुणधर्मों को समझाने और पूर्वानुमान लगाने में काफ़ी सफल रहा है।



चित्र 13.15: दीर्घवृत्तजीय नाभिक का घूर्णन। छायांकित भाग में स्थित नाभिकीय पदार्थ को घूर्णन नहीं करना होता। तीर के निशान दिखाते हैं कि किस प्रकार नाभिकीय पदार्थ की गति नाभिक का घूर्णन करती है।

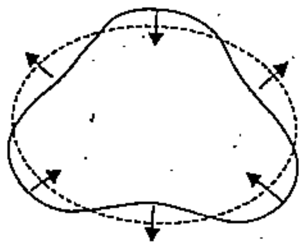
13.5.2 सामूहिक मॉडल

मैजिक संख्याओं से काफ़ी अलग संख्याओं के लिए नाभिक गोलाकार नहीं रह जाते। अक्सर वे आकार में दीर्घवृत्तजीय हो जाते हैं। ऐसे नाभिकों में अंतिम अपूर्ण कोश के न्यूक्लिऑन गुच्छ (cluster) बना लेते हैं और नाभिकीय आकार को विकृत कर देते हैं। इस विकृति से नाभिक का आकाश में समय के फलन के रूप में अभिविन्यास बदल जाता है जिसके कारण संपूर्ण नाभिक का घूर्णन हो जाता है (चित्र 13.15)। नाभिकों का घूर्णन न्यूक्लिऑनों के सामूहिक व्यवहार का द्योतक है।

मैजिक संख्याओं से कुछ कम हटने पर, अपनी साम्यावस्था के आकारों के इर्द गिर्द नाभिकों के पृष्ठों का दोलन होता है (चित्र 13.16)। इन दोलनों की नियत आवृत्ति होती है और यह सरल आवर्त गति करते हैं। यह दोलन गुच्छों के लगातार बनने और बिगड़ने के कारण होते हैं। इन दोलनों से भी यह पता लगता है कि न्यूक्लिऑन सामूहिक रूप से व्यवहार कर रहे हैं।

यह सामूहिक मॉडल मैजिक संख्याओं से अलग हटकर नाभिक के गुणधर्मों की व्याख्या करने और उनका पूर्वानुमान लगाने में काफ़ी सफल रहा है, विशेष तौर पर नाभिकों के चतुर्ध्रुव आघूर्ण (quadrupole moments) की व्याख्या करने में।

कोश मॉडल में यह माना जाता है कि नाभिकों के अंदर न्यूक्लिऑन लगभग एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से क्रिया करते हैं। दूसरी ओर सामूहिक मॉडल में यह माना जाता है कि ये न्यूक्लिऑन सामूहिक क्रिया करते हैं। इनमें से कोई भी मॉडल आवर्त सारणी के सभी तत्वों के नाभिकों की संरचना की व्याख्या नहीं कर पाता। कोश मॉडल मैजिक संख्याओं के नज़दीकी N और/या Z मान रखने वाले नाभिकों की सफलतापूर्वक व्याख्या करता है और सामूहिक मॉडल मैजिक संख्याओं से अलग हटकर N और/या Z मान रखने वाले नाभिकों की सफलतापूर्वक व्याख्या करता है।



चित्र 13.16: एक कम विकृत नाभिक के कंपन। डैशदार रेखा साम्यावस्था आकार को दिखाती है। तीर दिखाते हैं कि किस प्रकार समय के साथ शिखर और गर्त गति करते हैं जिससे नाभिक कंपन करता है।

चूंकि कोई भी मॉडल आवर्त सारणी के सभी नाभिकों की संरचना को नहीं समझा पाया है, इसलिए यह प्रयास लगातार चल रहा है कि इन दोनों मॉडलों की संकल्पनाओं को मिलाकर इन से एक मॉडल बनाया जाए। हालांकि इसमें कुछ सफलता मिली है लेकिन अभी तक ऐसा कोई भी मॉडल नहीं दिया गया है जो सभी नाभिकों की संरचना की व्याख्या कर सके और उनके गुणधर्मों को समझा सके या उनका पूर्वानुमान लगा सके।

इस इकाई में जो कुछ भी आपने पढ़ा है, अब हम उसका सार यहां दे रहे हैं।

13.6 सारांश

- गाइगर और मार्सडेन के अल्फ़ा कण प्रयोग से पता चला कि i) लगभग सभी अल्फ़ा कण प्रकीर्णन के बाद बिना विचलित हुए निकलते थे जिससे यह अनुमान लगाया जा सकता था कि परमाणुओं में ज्यादातर रिक्त स्थान होता है। ii) अल्फ़ा कणों के बड़े कोणों पर प्रकीर्णन का यह अर्थ था कि वे किसी अचल चीज से सीधे-सीधे टकरा रहे हैं। यह और कुछ नहीं, नाभिक ही था।
- अल्फ़ा कणों के लिए परमाणुओं के नाभिक की निकटतम दूरी इस संबंध से दी जाती है

$$b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Ze^2}{mv^2}$$

- रदरफ़र्ड ने गाइगर और मार्सडिन के प्रेक्षणों की व्याख्या की। उन्होंने सुझाया कि परमाणु का संपूर्ण द्रव्यमान और धनात्मक आवेश एक छोटे से नाभिक में केन्द्रित हैं और इलेक्ट्रॉन इस नाभिक के बाहर रहते हैं।
- सभी तत्वों के नाभिकों का घनत्व लगभग बराबर होता है और उसका मान 10^{17} kg m^{-3} की कोटि का होता है।
- किसी नाभिक और उसके घटक न्यूक्लिऑनों के प्रेक्षित द्रव्यमान के बीच अंतर को **द्रव्यमान** क्षति कहते हैं:

$$\Delta m = Zm_H + Nm_n - M$$

द्रव्यमान क्षति के तुल्य ऊर्जा को **बंधन ऊर्जा** कहते हैं :

$$BE = \Delta mc^2$$

- नाभिक की बंधन ऊर्जा द्रव्यमान संख्या का वर्धमान फलन होती है। प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा और द्रव्यमान संख्या का चक्र दिखाता है कि i) ^{4}He, ^{9}Be, ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne आदि के लिए बहुत अधिक परिवर्तन होता है; ii) $A = 20$ के बाद लगातार एकदिष्ट वृद्धि और लोहे के नाभिक के लिए BE/A का अधिकतम मान होता है 8.8 MeV; iii) लोहे से भारी नाभिकों के लिए BE/A का मान धीरे-धीरे घटता है और यूरेनियम के लिए 7.6 MeV रह जाता है। नाभिक के स्थायित्व की माप BE नहीं है बल्कि BE/A है।

- न्यूक्लिऑन एक दूसरे से नाभिकीय बलों के कारण बंधे रहते हैं जो आवेश पर निर्भर नहीं करते। ये आकर्षण बल होते हैं और संतृप्ति (saturation) दिखाते हैं। लेकिन जब दो न्यूक्लिऑनों के बीच की दूरी एक क्रांतिक मान से कम हो जाती हैं तो वे प्रतिकर्षण बल बन जाते हैं।

- यूकावा के मुताबिक पाई-मीसॉन, जिन्हें अब पायॉन कहा जाता है, हरेक न्यूक्लिऑन से लगातार उत्सर्जित और अवशोषित होते रहते हैं। इस प्रक्रिया में कुछ संवेग स्थानांतरण होता है जो नाभिकीय बलों की क्रिया के लिए ज़िम्मेदार है।

- जब एक भारी नाभिक पर धीमी गति वाले न्यूट्रॉनों से बमबारी की जाती है तो उसके आकार में एक के बाद एक परिवर्तन होते हैं और अंततः वह असमान द्रव्यमान वाले नाभिकों में विखंडित हो जाता है। हरेक विखंडन घटना में दो या तीन न्यूट्रॉन और लगभग 200 MeV ऊर्जा निकलती है, जो उसे घेरने वाले माध्यम को ऊष्मा देती है।

- नाभिक का कोश मॉडल परमाणु के इलेक्ट्रॉनों के कोश मॉडल के अनुरूप है। इसके अनुसार नाभिक के अंदर न्यूक्लिऑन कुछ निर्दिष्ट कक्षाओं में वितरित होते हैं। किसी कक्षा में न्यूक्लिऑनों की अधिकतम संख्या पाउली नियम द्वारा दी जाती है। संपूर्ण रूप से भरे हुए नाभिकीय कोश वाले नाभिक मैजिक नाभिक कहलाते हैं और ज्यादा स्थायी होते हैं।

- मैजिक संख्याओं से हट कर नाभिकों में अंतिम अपूर्ण कोश के न्यूक्लिऑन समूह बनाते हैं और दिक्-काल में इनका अभिविन्यास बदल जाता है, जिसके कारण संपूर्ण नाभिक का घूर्णन हो जाता है।

13.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. 5.3 MeV ऊर्जा वाले अल्फा कण की स्वर्ण नाभिक ($Z = 79$) से निकटतम दूरी की गणना कीजिए। दिया है स्वर्ण नाभिक का द्रव्यमान $M = 6.7 \times 10^{-27}$ kg, इलेक्ट्रॉन का आवेश $= 1.6 \times 10^{-19}$ C, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}।

2. जब दो $^2_1$H नाभिक संगलित होकर एक $^4_2$He नाभिक बनाते हैं तो कितनी ऊर्जा निकलती है? ^{2}H के लिए प्रति न्यूक्लिऑन बंधन ऊर्जा है 1.1 MeV और ^{4}He के लिए 7.0 MeV।

3. ^{4}He नाभिक की सामि-आनुभविक संहति समीकरण के आधार पर बंधन ऊर्जा की गणना कीजिए और द्रव्यमान क्षति के आधार पर मिले इसके मान से इसकी तुलना कीजिए (बोध प्रश्न 2)।

4. समीकरण (13.3) में दिये गये सामि-आनुभविक संहति समीकरण से किसी दी हुई द्रव्यमान संख्या पर सबसे ज़्यादा स्थायी नाभिक के लिए परमाणु संख्या (Z) का मान निकालें। $A = 56$ के लिए Z_0 की गणना करें।

13.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. $$d_C = \frac{M_C}{\frac{4\pi}{3} R_C^3} = \frac{19.92 \times 10^{-27}\,\text{kg}}{\frac{4}{3} \times 3.1416 \times (2.7 \times 10^{-15}\,\text{m})^3}$$

$$= \frac{19.92}{82.45} \times 10^{18}\ \text{kg m}^{-3}$$

$$= 2.42 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}$$

$$d_{Pb} = \frac{M_{Pb}}{\frac{4\pi}{3} R_{Pb}^3} = \frac{3.4 \times 10^{-25}\,\text{kg}}{\frac{4\pi}{3} (7 \times 10^{-15}\,\text{m})^3}$$

$$= \frac{3.4 \times 10^{20}\,\text{kg}}{\frac{4\pi}{3} (7)^3}$$

$$= 2.37 \times 10^{17}\ \text{kg m}^{-3}$$

2. समीकरण (13.2) से हम जानते हैं कि

$$\text{BE} = \Delta mc^2$$

जहां $\Delta m = Zm_H + Nm_n - M$

${}^4_2$He के लिए, $Z = 2$ और $N = 2$। इन मानों का प्रतिस्थापन करने पर हमें मिलता है

$$\Delta m\,(^4\text{He}) = 2 \times (1.007825\,\text{u}) + 2 \times (1.008665\,\text{u}) - 4.002604\,\text{u}$$

$$= 4.03298\,\text{u} - 4.002604\,\text{u} = 0.030376\,\text{u}$$

और

$$\text{BE} = 0.030376 \times (1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}) \times (2.998 \times 10^8\,\text{ms}^{-1})^2$$

$$= 0.030376 \times 14.92 \times 10^{-11}\,\text{J}$$

$$= 0.030376 \times (14.92 \times 10^{-11}\,\text{J})/(1.602 \times 10^{19}\,\text{JeV}^{-1})$$

$$= 0.030376 \times 9.313 \times 10^8\,\text{eV}$$

$$= 2.829 \times 10^7\,\text{eV} = 28.3\ \text{MeV}$$

${}^{35}_{17}$Cl के लिए, $Z = 17$ और $N = 18$। अत:

$$\Delta m\,(^{35}\text{Cl}) = 17 \times (1.007825\,\text{u}) + 18 \times (1.008665\,\text{u}) - 34.96885\,\text{u}$$

$$= 17.133025\,\text{u} + 18.15597\,\text{u} - 34.96885\,\text{u}$$

$$= 0.320145\,\text{u}$$

चूंकि $1\text{u} = 931.3$ MeV, हम पाते हैं कि

$BE(^{35}Cl) = 298.2$ MeV

$^{56}_{26}Fe$ के लिए, $Z = 26$ और $N = 30$। अत:

$$\Delta m\ (^{56}Fe) = 26 \times (1.007825\,u) + 30 \times (1.008665\,u) - 55.934932\,u$$
$$= 26.20345\,u + 30.25995\,u - 55.934932\,u$$
$$= 0.528468\,u$$

और

$BE(^{56}Fe) = 492.2$ MeV

^{235}U के लिए, $Z = 92$ और $N = 143$ जिससे

$$\Delta m = 92 \times (1.007825\,u) + 143 \times (1.008665\,u) - 235.043933\,u$$
$$= 92.7199\,u + 144.239095\,u - 235.043933\,u$$
$$= 1.915062\,u$$

अत:

$BE(^{235}U) = 1783.5$ MeV

3. एक दिए हुए A के लिए अनुपात N/Z ऐसा होगा कि कुल ऊर्जा E अपने अल्पतम मान की ओर प्रवृत्त हो। चूंकि $m_p \approx m_n$, इसलिए किसी ख़ास A के निम्नतम मान के लिए जो पद हमें लेने हैं वे हैं $\frac{(N-Z)^2}{A}$ और $\frac{Z^2}{A^{1/3}}$। पहले पद से $N = Z$ जबकि दूसरे पद से Z को बहुत ही छोटा होना चाहिए। यह इस तथ्य के संगत है कि हल्के नाभिकों के लिए $Z \simeq N$ होता है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. निकटतम दूरी है

$$b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{4Ze^2}{mv^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2Ze^2}{E}$$

जहाँ E, α-कण की ऊर्जा है।

यहां $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2\,C^{-2}$, $Z = 79$, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C और

$E = 5.3$ MeV $= 5.3 \times 1.6 \times 10^{-13}$ J

इन मानों को ऊपर दिए व्यंजक में रखने पर हमें मिलता है।

$$b = \frac{9 \times 10^9\,Nm^2\,C^{-2} \times 2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{19}\,C)^2}{5.3 \times 1.6 \times 10^{-13}\,J}$$

$$= 4.3 \times 10^{-14}\,m$$

2. ^4_2He नाभिक की बंधन ऊर्जा $= 7.0 \times 4 = 28$ MeV

^2_1H नाभिक की बंधन ऊर्जा $= 1.1 \times 2 = 2.2$ MeV

$\therefore$ ^4_2He नाभिक का द्रव्यमान $= 2\,m_p + m_n - 28.0$ MeV

^2_1Hc नाभिक का द्रव्यमान $= m_p + m_n - 2.2$ MeV

संगलन अभिक्रिया में उत्सर्जित ऊर्जा

$$E = 2 \times {}_1^2\text{H का द्रव्यमान} - {}_2^4\text{He का द्रव्यमान}$$

$$= 2\,(m_p + m_n - 2.2) - (2\,m_p + 2\,m_n - 28.0)$$

$$= 23.6 \text{ MeV}$$

3. ${}_2^4\text{He}$ के लिए $A = 4$ और $Z = 2$ और $\varepsilon = 34$

अत: समीकरण (13.3) से हमें मिलता है

$$\text{BE (MeV)} = 15.8 \times 4 - 17.8 \times 4^{2/3} - 0.71 \times \frac{2}{4^{1/3}} + \frac{34}{4^{3/4}}$$

$$= 63.2 - 44.9 - 0.895 + 12.02 = 29.43$$

यह हीलियम नाभिक के द्रव्यमान अंतर के आधार पर परिकलित मान से कुछ ज़्यादा है।

4. किसी दी हुई द्रव्यमान संख्या A पर सर्वाधिक स्थायी नाभिक के लिए प्रतिबंध है

$$\left(\frac{\mathrm{d\,BE}}{\mathrm{d}Z}\right)_A = 0 \quad Z = Z_0 \text{ के लिए}$$

अत: समीकरण (13.3) से हमें मिलता है

$$-2\gamma\,\frac{(A - 2Z_0)}{A}(-2) - \frac{\delta}{A^{1/3}}\,2Z_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\gamma\,(A - 2Z_0) - \delta A^{2/3}\,(2Z_0) = 0$$

या $\quad 4\gamma A - 8\gamma Z_0 - 2\,\delta A^{2/3} Z_0 + \delta A^{2/3} = 0$

या $\quad Z_0\,(8\gamma + 2\delta A^{2/3}) = 4\,\gamma A + \delta A^{2/3}$

$$\Rightarrow \quad Z_0 = \frac{4\gamma A + \delta A^{2/3}}{8\gamma + 2\delta A^{2/3}}$$

$$= \frac{23.7 \times 4A + 8A^{2/3}}{8 \times 23.7 + 2 \times 0.71\,A^{2/3}}$$

$$= \frac{94.8A + A^{2/3}}{1.42\,A^{2/3} + 189.6}$$

$A = 56$ के लिए

$$Z_0 = \frac{94.8 \times 56 + 0.71 \times 56^{2/3}}{1.42 \times 56^{2/3} + 189.6}$$

$$= \frac{5319.2}{210.4}$$

$$= 25.3 \Rightarrow 26$$

इकाई 14 नाभिकीय विज्ञान के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

14.1 प्रस्तावना

इकाई 13 में आपने पढ़ा कि 1919 में तत्वांतरण पर रदरफ़र्ड के अन्वेषणों के कारण किस तरह भौतिकी में नयीं खोजों के रास्ते खुले जिनसे अंततः एक नई भौतिकी - नाभिकीय भौतिकी का जन्म हुआ। अगले 50 सालों में इस क्षेत्र में बड़ी तेज़ी से विकास हुए। और इन नाना प्रकार के शोध कार्यों का एक परिणाम यह भी हुआ कि समाज़ में नाभिकीय विकिरणों और रेडियोआइसोटोपों के बहुत से अनुप्रयोग किए जा सके। अब हम इस इकाई में इनकी चर्चा करेंगे। लेकिन इस चर्चा को हम कुछ विशेष अनुप्रयोगों तक ही सीमित रखेंगे जिसमें नाभिकीय ऊर्जा उत्पादन, चिकित्सा, कृषि, उद्योग और शोध के क्षेत्रों में इनके अनुप्रयोग शामिल हैं। नाभिकीय ऊर्जा, ऊर्जा न होने जितनी ही महंगी पड़ती है। 1964 में परमाण्वीय ऊर्जा के शांतिपूर्ण अनुप्रयोगों पर हुई तीसरी संयुक्त राष्ट्र कांफ्रेंस में कहे गये होमी भाभा के ये उद्गार बहुत साफ़ तौर पर हमें विकासशील राष्ट्रों के लिए ऊर्जा की अहमियत के बारे में बताते हैं। आप जानते होंगे कि होमी भाभा ने ही भारतीय नाभिकीय कार्यक्रम का सृजन किया।

ऊर्जा हमारे अस्तित्व के लिए बेहद ज़रूरी है। खाना बनाने से लेकर मशीनें चलाने तक या एक जगह से दूसरी जगह जाने के लिए हमें ऊर्जा चाहिए। ऊर्जा की ज़रूरत हमें कृषि, उद्योग, संचार, बेहतर जीवन स्तर और आर्थिक विकास के लिए भी पड़ती है। इसके साथ-साथ बढ़ती हुई जनसंख्या, बेहतर और आरामदेह जीवन की खोज और सुरक्षा के दबावों के कारण भविष्य में ऊर्जा की मांग बहुत अधिक बढ़ने वाली है। यह तो हम

सभी जानते हैं कि ऊर्जा शून्य से पैदा नहीं की जा सकती। ऊर्जा उत्पन्न करने के लिए हमें या तो लकड़ी जलानी पड़ती है या कोयला या गैस या तेल। और आज ऊर्जा की खपत की जो दर है, उसके चलते तो ऊर्जा के ऐसे स्रोत जल्दी ही ख़त्म हो जाएंगे। अगर हम इन्हीं पारंपरिक स्रोतों पर ऊर्जा उत्पादन का सारा दारोमदार रखते हैं तो इनसे पर्यावरण पर भी बुरा प्रभाव पड़ता है जैसे कि ग्रीन हाउस प्रभाव, वायु प्रदूषण, ओज़ोन परत का ख़ात्मा और अम्लीय वर्षा आदि। इसीलिए पिछले कुछ सालों में जीवाश्मीय ईंधनों के अलावा भी अन्य ऊर्जा स्रोतों को इस्तेमाल करने का प्रचलन बढ़ा है। इनमें सबसे प्रमुख है जलीय ऊर्जा। सौर ऊर्जा का अभी भी बड़े पैमाने पर प्रयोग नहीं किया जा सका है। लेकिन नाभिकीय ऊर्जा एक व्यावहारिक विकल्प है जो हमारी अभी की और आने वाले लम्बे समय तक की ऊर्जा की तमाम ज़रूरतों को पूरा कर सकता है।

अभी तो हमारी ज़्यादातर नाभिकीय ऊर्जा विखंडन रिएक्टरों से मिलती है जिसमें ^{235}U, ^{233}U और ^{239}Pu का इस्तेमाल किया जाता है। लेकिन जनसामान्य के बीच में इस तरह के रिएक्टरों को ज़्यादा स्वीकृति नहीं मिल पाई है। और अब हमें यह एहसास हो रहा है कि 21वीं सदी के दौरान बढ़ी हुई विद्युत ऊर्जा ज़रूरतों को केवल संगलन ऊर्जा से पूरा किया जा सकेगा। लेकिन संभावित ऊर्जा स्रोतों के रूप में नाभिकीय संगलन और विखंडन में चुनाव करना शायद इस बात पर ज़्यादा निर्भर करेगा कि जनसामान्य की निगाह में इनमें से कौन-सा तरीक़ा ज़्यादा सुरक्षित है और पर्यावरण को प्रदूषित नहीं करता।

जब दो हल्के नाभिक प्लाज़्मा में संघट्टन के बाद जुड़ कर एक भारी नाभिक बनाते हैं तो बड़ी मात्रा में ऊर्जा उत्पन्न होती है। इस प्रक्रिया को नाभिकीय संगलन (nuclear fusion) कहते हैं। वह युक्ति जिसमें नियंत्रित रूप से तापीय नाभिक अभिक्रियाएं होती हैं, नियंत्रित तापीय-नाभिकीय रिएक्टर (CTR) या संगलन रिएक्टर कहलाती है। यहां ध्यान देने वाली बात यह है कि जहां नाभिकीय विखंडन रिएक्टर में इस्तेमाल होने वाला नाभिकीय ईंधन सीमित है वहां नाभिकीय संगलन के लिए काम आने वाले तत्व जैसे ड्यूटीरियम, लीथियम, ^{3}He आदि प्रकृति में बहुत बड़ी मात्रा में पाए जाते हैं। इसलिए अगर हम CTR को सफलतापूर्वक चलाएंगे तो हमें दुनिया में कभी भी न ख़त्म होने वाला ऊर्जा स्रोत मिल जाएगा। और तो और, नाभिकीय संगलन का एक आकर्षण यह भी है कि नाभिकीय विखंडन से जुड़ी सुरक्षा की तमाम समस्याएं इसमें आती ही नहीं हैं। यह ऊर्जा का एक सुरक्षित स्रोत इसलिए भी है क्योंकि इस प्रक्रिया में हानिकारक रेडियोएक्टिव अपशिष्ट नहीं बचे रहते। इसी के साथ-साथ इस अभिक्रिया में अभिक्रिया कर रहे पदार्थ के प्रति इकाई द्रव्यमान से उत्पन्न ऊर्जा भारी नाभिकों के विखंडन की प्रक्रिया में निकली ऊर्जा से कहीं ज़्यादा होती है। उदाहरण के लिए, D-T संगलन प्रक्रिया में उत्पन्न हुई प्रति न्यूक्लिऑन ऊर्जा, विखंडन प्रक्रिया में उत्पन्न प्रति न्यूक्लिऑन ऊर्जा से पांच गुना ज़्यादा होती है (हांलाकि इसका मान (17.6 MeV) किसी विखंडन अभिक्रिया में मिली ऊर्जा, जो लगभग 200 MeV होती है, से कम होता है)।

पिछली इकाई में हमने विखंडन प्रक्रिया की कुछ विस्तार से चर्चा की। आपने जाना कि प्रत्येक विखंडन घटना में उत्सर्जित न्यूट्रॉनों की संख्या 2 से ज़्यादा होती है और ये न्यूट्रॉन आगे भी विखंडन कर सकते हैं। इस बात से तुरंत ही एक विखंडन श्रृंखला अभिक्रिया (chain reaction) को बरकरार रखने की संभावना निकली। इसमें हर विखंडन घटना में एक न्यूट्रॉन कम हो जाता है और उसकी जगह दो से ज़्यादा न्यूट्रॉन आ जाते हैं। जब न्यूट्रॉन उत्पादन की दर न्यूट्रॉन हानि दर के बराबर हो जाती है तो अभिक्रिया को स्वपोषी (self- sustained) अभिक्रिया कहा जाता है। ऐसी स्वपोषी और नियंत्रित श्रृंखला अभिक्रिया को बनाए रखने के लिए जो युक्ति डिज़ाइन की जाती है उसे नाभिकीय रिएक्टर (nuclear reactor) कहा जाता है। भाग 14.2 में आप सीखेंगे कि एक स्वपोषी श्रृंखला अभिक्रिया किस प्रकार प्राप्त की जा सकती है और एक नाभिकीय रिएक्टर के प्रमुख अवयव क्या हैं।

न्यूक्लियर रिएक्टरों का वर्गीकरण अपने अनुप्रयोगों के हिसाब से या विखंडनकारी न्यूट्रॉनों की औसत ऊर्जा के मुताबिक होता है। एक रिएक्टर का इस्तेमाल ऊर्जा उत्पन्न करने के लिए, मूलभूत शोध के लिए और एक पदार्थ को दूसरे पदार्थ में बदलने के लिए हो सकता है। आपको ऊर्जा रिएक्टरों की कुछ जानकारी देने के लिए हमने भाग 14.3 में भारतीय नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम पर संक्षेप में चर्चा की है। शोध-रिएक्टरों का रेडियोआइसोटोप उत्पादन में भी इस्तेमाल हो सकता है जिनके हमारे जीवन में बहुत से उपयोग हैं। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण अनुप्रयोगों के बारे में, जो उद्योग, कृषि चिकित्सा विज्ञान और उपचार में किए जा रहे हैं, आप इस इकाई में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- स्वपोषी शृंखला अभिक्रिया का अर्थ समझा सकेंगे,
- जीवाश्मीय ईंधन संयंत्रों और नाभिकीय ऊर्जा संयंत्रों के बीच में समानताएं पहचान सकेंगे,
- एक नाभिकीय रिएक्टर के विभिन्न अवयवों की कार्यविधि को समझा सकेंगे,
- शोध रिएक्टर और ऊर्जा रिएक्टर के बीच मूल अंतर बता सकेंगे और
- उद्योग, कृषि और चिकित्सा में रेडियोआइसोटोपों के अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकेंगे।

14.2 स्वपोषी शृंखला अभिक्रिया

जब फ़र्मी ने पहले-पहले विखंडन शृंखला अभिक्रिया स्थापित करने का प्रयास किया तब उन्होंने यूरेनियम को ईंधन के तौर पर इस्तेमाल किया। लेकिन तुरंत ही उन्हें मुश्किलों का सामना करना पड़ा। प्राकृतिक यूरेनियम में ^{238}U 99.7% होता है जबकि ^{235}U केवल 0.3%। इनमें से ^{238}U, न्यूट्रॉन अवशोषित कर लेता है और ज़्यादातर स्थितियों में उसका विखंडन नहीं होता (सिवाय उच्च ऊर्जा न्यूट्रॉनों के द्वारा)। प्रयोगों में यह पाया गया कि ^{238}U का इस्तेमाल करने पर औसतन, निकाय से ज़्यादा न्यूट्रॉन हट जाते हैं और विखंडन प्रक्रिया में कम न्यूट्रॉन उत्सर्जित होते हैं यानी अगर किसी बाहरी न्यूट्रॉन – स्रोत की मदद से विखंडन अभिक्रिया शुरू की भी जाए तो जैसे ही स्रोत को हटा दिया जाएगा वैसे ही निकाय में न्यूट्रानों की संख्या तेज़ी से घट जाएगी और शृंखला अभिक्रिया रुक जाएगी। दूसरी ओर ^{235}U के विखंडन की प्रायिकता बहुत अधिक है। अतः फ़र्मी ने यह सुझाव दिया कि इस आइसोटोप का अल्प ऊर्जा न्यूट्रॉनों के लिए ज़्यादा प्रभावी इस्तेमाल किया जा सकता है, यानी विखंडन से निकले न्यूट्रॉनों की ऊर्जा कम कर दी जानी चाहिए। ऐसा करने के लिए इससे पहले कि न्यूट्रॉन दूसरे यूरेनियम नाभिकों के द्वारा अवशोषित कर लिए जाएं उन्होंने न्यूट्रॉनों को एक विमन्दक (moderating) माध्यम से गुज़ारा। फ़र्मी और उनके साथियों ने सुझाया कि

- विखंडन में उत्पन्न न्यूट्रॉनों को धीमा करने के लिए विमंदक के रूप में ग्रेफ़ाइट का इस्तेमाल किया जाना चाहिए,
- विमन्दक माध्यम में यूरेनियम छड़ों का एकसमान वितरण होना चाहिए।

इन दोनों नवीनताओं का इस्तेमाल करके फ़र्मी ने संयुक्त राज्य अमरीका में, शिकागो विश्वविद्यालय में 2 दिसम्बर, 1942 को सबसे पहली बार स्वपोषी शृंखला अभिक्रिया स्थापित की।

विखंडन शृंखला अभिक्रिया के स्वपोषी होने के लिए न्यूट्रॉन उत्पादन दर उनकी ह्रास दर के बराबर होनी चाहिए। विखंडन शृंखला अभिक्रिया में न्यूट्रॉनों का क्षरण द्वारा ह्रास दो प्रक्रियाओं द्वारा हो सकता है : या तो वे माध्यम के नाभिकों द्वारा अवशोषित कर लिए जाते हैं या वे निकाय से पलायन कर जाते हैं। इस तरह के पलायन से हुए ह्रास की

दर प्रायोगिक व्यवस्था के आकार और आमाप पर निर्भर करती है। सबसे ज्यादा दक्षता वाला आकार गोले का होता है। गोलाकार प्रायोगिक व्यवस्था के लिए क्षरण दर (leakage rate) क्षेत्रफल के समानुपाती होती है और उत्पादन दर आयतन के समानुपाती होती है (यहां हमने यह मान लिया है कि यूरेनियम, इस व्यवस्था में एकसमान रूप से वितरित है)। इसलिए जिन न्यूट्रॉनों का क्षरण होता है उनकी तादाद गोले का आमाप बढ़ने के साथ-साथ घटेगी। यानी अगर हम एक छोटी प्रायोगिक व्यवस्था से शुरुआत करें तो ह्रास दर, उत्पादन दर से अधिक हो जाती है और एक स्वपोषी शृंखला अभिक्रिया स्थापित नहीं हो पाती। धीरे-धीरे आकार को बढ़ा कर, एक ऐसे आकार तक पहुंचा जा सकता है कि स्वपोषी शृंखला अभिक्रिया शुरू हो जाए। विखंडनीय पदार्थ के इस आकार को क्रांतिक आकार (critical size) कहते हैं। इसके संगत ईंधन के द्रव्यमान को क्रांतिक द्रव्यमान कहते हैं। ^{235}U के लिए क्रांतिक गोले का व्यास 18 cm होता है और संगत क्रांतिक द्रव्यमान 53 kg होता है। ^{239}Pu के लिए, क्रांतिक द्रव्यमान इसका एक तिहाई होता है।

शृंखला अभिक्रिया का व्यवहार गुणात्मक रूप से एक अचर k के पदों में व्यक्त किया जाता है जिसे गुणन कारक (multiplication factor) कहते हैं। परिभाषा से,

$$\text{गुणन कारक, } k = \frac{(n+1) \text{ वीं पीढ़ी में न्यूट्रॉनों की संख्या}}{n\text{वीं पीढ़ी में न्यूट्रॉनों की संख्या}}$$

अगर $k > 1$, तब न्यूट्रॉनों की संख्या समय के साथ लगातार बढ़ती जाएगी और शृंखला अभिक्रिया अनियंत्रित हो जाएगी। अगर $k < 1$, तब न्यूट्रॉनों की संख्या समय के साथ घटती जाएगी और शृंखला अभिक्रिया रुक जाएगी। उसी विशेष परिस्थिति में जब $k = 1$ होता है तब उत्तरोतर पीढ़ियों में न्यूट्रॉनों की संख्या बराबर रहती है और शृंखला अभिक्रिया अचर दर से चलती है; वह समय पर निर्भर नहीं करती।

अगर $k > 1$ हो तो रिएक्टर को **अतिक्रांतिक** (super critical), $k = 1$ हो तो **क्रांतिक** और $k < 1$ हो तो **उपक्रांतिक** (sub critical) कहा जाता है। इसी कारण से k को अक्सर ही **क्रांतिकता कारक** (criticality factor) कहा जाता है। किसी भी रिएक्टर के नियंत्रण के लिए उसके गुणन कारक की जानकारी होना बहुत ज़रूरी है।

एक न्यूट्रॉन शृंखला अभिक्रिया का समय के साथ आचरण व्यक्त करने के लिए सन्निकटित व्यंजक हम इस तरह से निकाल सकते हैं। माना कि समय के किसी क्षण पर प्रक्रिया में N_1 न्यूट्रॉन उपस्थित हैं। इसे हम पहली पीढ़ी मानेंगे। nवीं पीढ़ी में न्यूट्रॉनों की संख्या होगी

$$N_n = N_1 k^{n-1} \tag{14.1}$$

अब माना कि न्यूट्रॉन के उत्पादन और उसके अंततः अवशोषण या क्षरण द्वारा, हटने के बीच में औसत समयांतराल l है। तब पहली पीढ़ी, (जो हमारे समय के पैमाने पर शून्य के संगत है) के शुरू होने और n वीं पीढ़ी के न्यूट्रॉनों का उत्पादन होने के बीच लगा समय है $t = (n-1)\,l$। इस व्यंजक से $(n-1)$ का मान समीकरण (14.1) में रखने पर हमें मिलता है

$$N(t) = N(0)\, k^{t/l} = N(0) \exp\left(\frac{t}{l} \ln k\right) \tag{14.2}$$

जहां हमने N_n की जगह $N(t)$ और N_1 की जगह $N(0)$ रखा है। k का मान लगभग 1 लेने पर और $\ln k \approx k - 1$ लेने पर हमें मिलता है

$$N(t) \approx N(0) \exp\left[(k-1)\,\frac{t}{l}\right] \tag{14.3}$$

यह हमें बताता है कि न्यूट्रॉनों की संख्या $k > 1$ के लिए समय के साथ चरघातांकी रूप से बढ़ती और $k < 1$ के लिए समय के साथ चरघातांकी रूप से घटती है। $k = 1$ के लिए हमें एक स्थाई स्थिति मिलती है।

तुरंत उत्पन्न होने वाले तात्कालिक न्यूट्रॉनों (prompt neutrons) के लिए औसत जीवन काल लगभग 10^{-3} s होता है। $k = 1.01$ के लिए, प्रति सेकंड न्यूट्रॉन संख्या में वृद्धि है $N(t)/N(0) = \exp(0.01/0.001) = e^{10} \approx 22000$। ऐसे किसी भी रिएक्टर को किसी यांत्रिक साधन द्वारा नियंत्रित कर पाना असंभव होगा। इसलिए अगर सिर्फ़ यही बातें ध्यान देने योग्य होतीं तो k के मान में 1 के ऊपर ज़रा सी वृद्धि यानी 0.01 (1%) की वृद्धि भी रिएक्टर में विस्फोट करने के लिए काफ़ी होती है। लेकिन सौभाग्यवश विलम्बित न्यूट्रॉनों (delayed neutrons) की उपस्थिति, न्यूट्रॉन जीवनकाल को काफ़ी बढ़ा देती है (लगभग 0.1 s तक) जिसके कारण नाभिकीय रिएक्टर पर नियंत्रण किया जा सकता है।

विखंडन घटना होने के 10^{-14} s के भीतर उत्पन्न हुए न्यूट्रॉनों को तात्कालिक न्यूट्रॉन कहते हैं। लेकिन कुछ न्यूट्रॉनों का उत्सर्जन काफ़ी देर बाद विखंडन उत्पादों द्वारा होता है। इन्हें विलंबित न्यूट्रॉन कहते हैं।

14.3 नाभिकीय रिएक्टर

पहले पहले 1942 में अमेरिका में शिकागो विश्वविद्यालय में फ़र्मी और उनके साथियों ने दुनिया का सबसे पहला नाभिकीय रिएक्टर बनाया। और तब से आज तक मुख्य रूप से हमारी ऊर्जा की बढ़ती हुई मांग को पूरा करने के लिए तरह-तरह के नाभिकीय रिएक्टर बनाए जा चुके हैं। नाभिकीय रिएक्टर बहुत जटिल होते हैं और उन्हें बनाने में बहुत सावधानी बरतनी पड़ती है, इस बात के बावजूद कि वे बहुत सरल नियमों पर आधारित हैं। विखंडन में पैदा हुई ऊष्मा को ईंधन के चारों ओर एक तरल पदार्थ (जिसे शीतलक, coolant) कहते हैं प्रवाहित करके हटाया जाता है। और तदुपरांत इस ऊष्मा का इस्तेमाल उच्च ताप और उच्च दाब वाली भाप पैदा करने के लिए किया जाता है। इस भाप को एक टर्बाइन जेनरेटर पर चलाया जाता है और इससे बिजली का उत्पादन होता है। शोध के लिए बनाए गए रिएक्टरों में उत्पन्न ऊष्मा नदी या समुद्र में छोड़ दी जाती है।

14.3.1 नाभिकीय रिएक्टरों का वर्गीकरण

रिएक्टरों को बहुत तरह के अनुप्रयोगों के लिए बनाया गया है जिनमें ऊर्जा उत्पादन से लेकर नये रिएक्टर अवयवों के परीक्षण आदि शामिल हैं। प्रत्येक अनुप्रयोग के मुताबिक रिएक्टर के डिज़ाइन विनिर्देश (specifications) अलग-अलग होते हैं। इसलिए रिएक्टर का वर्गीकरण कई तरह से किया जा सकता है। लेकिन इसके लिए ध्यान में रखी जाने वाली दो सबसे महत्वपूर्ण बातें हैं:

- अधिकतर विखंडन करने वाले न्यूट्रॉनों की औसत ऊर्जा और
- वह उद्देश्य जिसके लिए रिएक्टर बनाया जा रहा है।

सबसे ज़्यादा विखंडन करने वाले न्यूट्रॉनों की औसत ऊर्जा के मुताबिक रिएक्टरों का वर्गीकरण मुख्यत: दो वर्गों में किया जाता है: द्रुत रिएक्टर और तापीय रिएक्टर। द्रुत रिएक्टरों में ज़्यादातर विखंडन ऐसे न्यूट्रॉनों द्वारा होते हैं जिनकी ऊर्जा कुछ सौ KeV है जबकि तापीय रिएक्टर में 0.253 eV की ऊर्जा वाले न्यूट्रॉन विखंडन में हिस्सा लेते हैं। भारत में विद्युत शक्ति के उत्पादन के लिए अभी तक केवल तापीय रिएक्टर बनाए गए हैं। भविष्य में भारतीय नाभिकीय कार्यक्रम के तीसरे चरण में द्रुत रिएक्टर बनाने की योजना है।

जिस भी काम के लिए वे बनाए जाते हैं, उसके मुताबिक रिएक्टरों को दो वर्गों में रखा जाता है– अनुसंधान रिएक्टर और शक्ति रिएक्टर।

अनुसंधान रिएक्टर वे रिएक्टर हैं, जो विज्ञान के विभिन्न क्षेत्रों में मूलभूत अनुसंधान के लिए, नए रिएक्टरों के डिज़ाइन या उनके अवयवों के परीक्षण के लिए, रेडियो आइसोटोपों के उत्पादन के लिए और चिकित्सा (न्यूट्रॉन चिकित्सा) के लिए बनाए जाते हैं। साइरस (Cirus), अपसरा (Apsara), पूर्णिमा (Purnima) और ध्रुव (Dhruva) ट्रॉम्बे में हमारे कुछ अनुसंधान रिएक्टर हैं। और कलपक्कम में इंदिरा गांधी परमाण्विक ऊर्जा अनुसंधान केन्द्र में EFBR एक ब्रीडर अनुसंधान रिएक्टर है। यहां हम आपको यह बताना चाहेंगे कि आम तौर पर एक ही अनुसंधान रिएक्टर से एक ही साथ इनमें से कई काम किए जा सकते हैं।

विद्युत ऊर्जा के उत्पादन के लिए बने रिएक्टरों को **शक्ति रिएक्टर** (power reactor) कहते हैं। अभी तक भारत में संपूर्ण परमाण्वीय ऊर्जा (~ 2000 MW) तापीय रिएक्टरों से मिलती है जो ^{235}U के विखंडन पर आधारित हैं।

एक आइसोटोप (^{232}Th को या ^{235}U) को दूसरे ज़्यादा उपयोगी आइसोटोप में बदलने के लिए डिजाइन किए गए रिएक्टर को **परिवर्तक रिएक्टर** (convertor reactor) कहते हैं। अगर उत्पादित विखंडनीय आइसोटोप उस आइसोटोप से अधिक मात्रा में है, जिसे शृंखला अभिक्रिया बनाए रखने के लिए इस्तेमाल किया जाता है, तो उन्हें ब्रीडर (breeder) कहते हैं।

ऊपर दी गई बातें पढ़ते हुए शायद आपके मन में यह सवाल आया हो क्या इन अलग-अलग तरह के रिएक्टरों में कुछ समानताएं भी हैं। आइए, देखें कि इन सभी रिएक्टरों में कौन सी बातें एक सी हैं। फिर हम अलग-अलग तरह के रिएक्टरों की चर्चा करेंगे।

14.3.2 रिएक्टर के सामान्य लक्षण

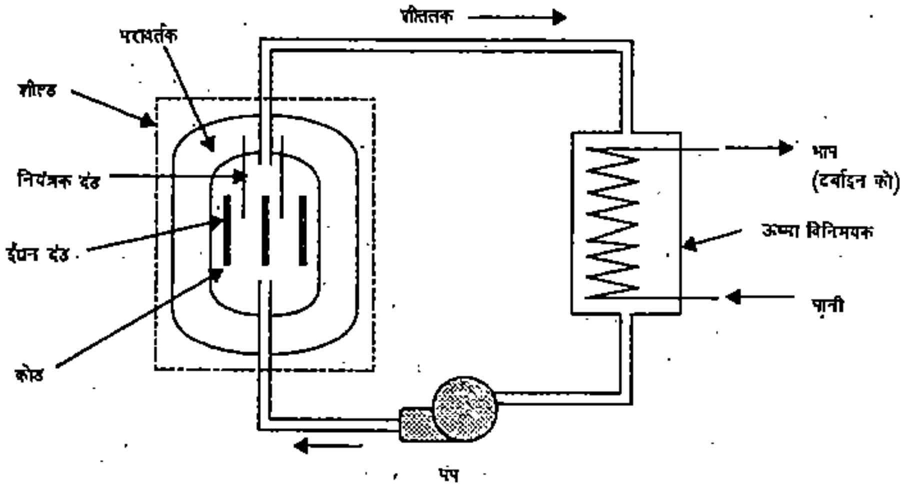
सभी नाभिकीय रिएक्टरों में निम्न मूलभूत अवयव होते हैं: रिएक्टर क्रोड (reactor core), परावर्तक (reflector), रिएक्टर कक्ष (reactor vessel), विकिरण शील्ड (radiation shield), इसे बनाने वाले पदार्थ (structural materials), शीतलक लूप (coolant loops), ऊष्मा विनिमय के लिए उपकरण (heat exchangers) आदि। इन्हें चित्र 14.1 में एक आरेख द्वारा दिखाया गया है। एक द्रुत रिएक्टर में क्रोड और परावर्तक के बीच एक समाच्छद (blanket) खड़ा कर दिया जाता है। आइए इन सबके बारे में विस्तृत जानकारी हासिल करें।

क्रोड

रिएक्टर का वह केन्द्रीय क्षेत्र जहां विखंडन होता है और उसके परिणामस्वरूप ऊर्जा उत्सर्जित होती है, क्रोड कहलाता है। द्रुत रिएक्टरों में इस भाग में नाभिकीय ईंधन होता है, शीतलक होता है, नियंत्रक दंड होते हैं और इसके निर्माण के लिए पदार्थ होते हैं। तापीय रिएक्टरों में इनके साथ-साथ एक विमंदक (moderator) भी होता है। आदर्श ईंधन में उच्च तापीय चालकता होनी चाहिए और उसका गलनांक ऊंचा होना चाहिए। विकिरण से हानि के प्रति उसका प्रतिरोध ऊंचा होना चाहिए और रासायनिक रूप से वह अक्रिय होना चाहिए। साथ ही साथ उसे आसानी से बनाया जा सकना चाहिए और उसमें उच्च संक्षारण प्रतिरोध (corrosion resistance) होना चाहिए। आम तौर पर नाभिकीय ईंधन सेरेमिक (ceramic) के रूप का होता है यानी या तो यह ऑक्साइड होता है या कार्बाइड या नाइट्राइड। (यूरेनियम के ऑक्सी-कार्बाइडों और नाइट्राइडों को भी नाभिकीय ईंधन के रूप में इस्तेमाल करने का प्रस्ताव किया गया है।)

विखंडन के बाद, विखंडन टुकड़े शीतलक या विमंदक (अगर हो तो) में न जाएं और साथ ही साथ विखंडनीय पदार्थ का संक्षारण रोका जा सके, इसके लिए इंधन दंडों को ढक दिया जाता है या इन्हें किसी पात्र में रखा जाता है। एक आदर्श ईंधन परिनिधान

(cladding) का संक्षारण प्रतिरोध बहुत अधिक होता है। वह न्यूट्रॉनों का अवशोषण नहीं के बराबर करता है, सस्ता होता है और आसानी से उपलब्ध होता है। साथ ही साथ, उसकी यांत्रिक शक्ति भी अधिक होनी चाहिए और गलनांक ऊंचा होना चाहिए। इस काम के लिए ज़र्कोनियम, स्टील, मैग्नीशियम, एल्युमीनियम, निकैल और ऐसे ही कुछ और पदार्थों का इस्तेमाल होता है। इन सबमें ज़र्कोनियम सबसे अच्छा होता है। और आजकल, आम तौर पर, तापीय विद्युत रिएक्टरों में ज़र्कोनियम के मिश्रधातु का जिसे ज़र्कअलॉय-2 (Zr-2) कहते हैं, इस्तेमाल होता है। द्रुत रिएक्टरों में स्टेनलेस स्टील का इस्तेमाल होता है। एल्युमिनियम का इस्तेमाल मुख्यतः अनुसंधान रिएक्टरों में होता है। ईंधन की एक परिनिधानित इकाई को **ईंधन अवयव** (fuel assembly) कहते हैं। (द्रुत रिएक्टर में ईंधन अवयव तापीय रिएक्टर में इस्तेमाल होने वाले ईंधन अवयव से पतला होता है और इसे **ईंधन पिन** (fuel pin) कहते है।) जब ऐसे बहुत से अवयवों को एक साथ रखा जाता है तो इनसे मिलकर **ईंधन असेम्बली** (fuel assembly) बनती है। (यही वह इकाई है जिसे रिएक्टरों में डाला जाता है या निकाला जाता है।) रिएक्टर क्रोड में ऐसी बहुत सी ईंधन असेम्बिलयां होती हैं, जिन्हें एक नियमित लैटिस के रूप में लगाया जाता है। यह लैटिस वर्गाकार या षट्कोणीय होती है।



चित्र 14.1: नाभिकीय रिएक्टर के सामान्य लक्षण दिखाते हुए उसका आरेख।

क्रोड से विखंडन ऊर्जा हटाने के लिए (और साथ ही साथ रिएक्टर के किसी भाग से ऊर्जा हटाने के लिए) यह ज़रूरी है कि रिएक्टर में किसी तरल, द्रव या गैस को प्रवाहित किया जाए। इस तरल को **शीतलक** (coolant) कहते हैं। रिएक्टर शीतलक में उच्च ऊष्मा धारिता होनी चाहिए, उसका दाम कम होना चाहिए, उसका न्यूट्रॉन अवशोषण अवकली परिक्षेत्र कम होना चाहिए, उसका विकिरण और तापीय स्थायित्व अच्छा होना चाहिए और उसका ईंधन और परिनिधान से अच्छा सामंजस्य होना चाहिए। रिएक्टरों में शीतलक को एक अल्प विमंदक की तरह भी काम करना चाहिए। इन रिएक्टरों में द्रव सोडियम या हीलियम का शीतलक के रूप में इस्तेमाल किया जाता है। तापीय रिएक्टरों में साधारण पानी, भाप, भारी पानी (heavy water), कार्बन डाइआक्साइड या हीलियम या कुछ कार्बनिक गैसों का शीतलक के तौर पर इस्तेमाल होता है।

विखंडन में उत्पन्न न्यूट्रॉनों को धीमा करने के लिए तापीय रिएक्टरों के क्रोड में एक विमंदक भी रखा जाता है। यह ऐसे पदार्थ का बना होता है जिसकी द्रव्यमान संख्या कम होती है, प्रकीर्णन परिक्षेत्र बड़ा होता है और अवशोषण परिक्षेत्र छोटा होता है। विमंदक के लिए बाकी सब प्रतिबंध वही हैं जो शीतलक के लिए हैं। भारी पानी, पानी और ग्रेफ़ाइट सबसे अच्छे विमंदक हैं। इनमें से भारी पानी और ग्रेफ़ाइट तो इतने अच्छे हैं कि उनकी उपस्थिति में प्राकृतिक यूरेनियम भी शृंखला अभिक्रिया को कायम रख सकता

है। इच्छित ऊर्जा स्तरों पर रिएक्टर के सुरक्षित संचालन को बनाए रखने के लिए, रिएक्टर को (आम तौर पर या आपात स्थिति में) चलाए रखने या बंद करने के लिए और साथ ही साथ विषैले पदार्थों और ईंधन जलने से निकले अपशिष्टों को समुचित रूप से नियंत्रित रखने के लिए, रिएक्टर के क्रोड में गुणन कारक को नियंत्रित करने के लिए भी व्यवस्था की जानी चाहिए। ऐसा क्रोड में नियंत्रक दंड (control rods) रखकर किया जाता है। ये नियंत्रक दंड ऐसे पदार्थों के बने होते हैं, जिनका न्यूट्रॉन अवशोषण परिक्षेत्र बहुत अधिक होता है जैसे कि– बोरॉन, कैडमियम, हैफनियम, गैडोलिनियम, या उनके मिश्रधातु। उदाहरण के लिए, स्टेनलेस स्टील के नियंत्रण दंडों में भरे गए बोरॉन कार्बाइड (B_4C) के रूप में बोरॉन का इस्तेमाल होता है। ये चार ईंधन असेम्बलियों के बीच में ऊपर और नीचे गति करते हैं। कभी-कभी क्रोड के भीतर खाली नलियां बनाई जाती हैं और द्रव के रूप में अवशोषक को, उदाहरणार्थ गैडोलिनियम नाइट्रेट को, उनमें डाला और निकाला जाता है। इसी तरह पानी या भारी पानी का इस्तेमाल करने वाले विमंदकों में अक्सर बोरिक अम्ल (H_3BO_3) मिला दिया जाता है। इसे रासायनिक शिम (chemical shim) के नाम से भी जाना जाता है। बहुत सी बार ^{10}B या ^{155}Gd की एक छोटी सी मात्रा ईंधन में मिला दी जाती है। इन सभी आइसोटोपों का एक महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि न्यूट्रॉन अवशोषण के बाद वे ऐसे आइसोटोपों (^{11}B और ^{156}Gd) में बदल जाते हैं जिनकी न्यूट्रॉन अवशोषण क्षमता कम होती है। इस तरह जैसे-जैसे ईंधन ख़त्म होता है, उसके विखंडन से उत्पन्न विष भी खत्म हो जाता है जिसके कारण ईंधन जलने के कारण गुणन कारक में जो भी हानि होती है उसकी आपूर्ति हो जाती है। ऐसे विषैले पदार्थों को दाह्य विष (burnable poison) कहा जाता है। इसका एक सबसे आम उदाहरण है UO_2 पाउडर के साथ गैडोलिनियम ऑक्साइड पाउडर (GD_2O_3)।

द्रुत रिएक्टरों में ^{10}B की अधिक मात्रा के साथ बोरॉन का इस्तेमाल होता है। प्रायोगिक द्रुत रिएक्टरों में रिएक्टर बंद करने के लिए या गुणन कारक को नियंत्रित करने के लिए, समय समय पर परावर्तक को निकालने या अंदर रखने और ईंधन (या क्रोड) को निकालने या अंदर रखने जैसी विधियों का इस्तेमाल भी किया गया है।

नियंत्रक दंडों को निम्न तरह के दंडों में वर्गीकृत किया जा सकता है– शिम दंड, नियंत्रक या सुरक्षात्मक दंड। इनका वर्गीकरण इस बात पर निर्भर करता है कि वे किस तरह का काम करते हैं। शिम नियंत्रक दंड का इस्तेमाल रिएक्टर चालू करते समय तंत्र की प्रारंभिक अवस्था में रिएक्टर को इच्छित ऊर्जा स्तर तक लाने के लिए और कभी-कभी ऊर्जा स्तर में संशोधन करने के लिए किया जाता है। रिएक्टर शुरू करने से पहले इन दंडों को रिएक्टर क्रोड में पूरी तरह डाल दिया जाता है। फिर उन्हें धीरे-धीरे उठाया जाता है जब तक कि रिएक्टर क्रांतिक अवस्था में नहीं आ जाता। जब रिएक्टर अपनी उच्चतम क्षमता पर काम कर रहा होता है, तो सामान्यत: ये दंड क्रोड से पूरी तरह बाहर होते हैं। नियंत्रक दंडों का इस्तेमाल ऊर्जा स्तर में सूक्ष्म संशोधन करने के लिए किया जाता है और ताप या दाब में परिवर्तन, ईंधन की कमी और उत्पादित विषैले पदार्थों के प्रभावों की आपूर्ति करने के लिए किया जाता है। सुरक्षात्मक दंडों का इस्तेमाल श्रृंखला अभिक्रिया को तेज़ी से रोकने के लिए किया जाता है और रिएक्टर के असफल होने पर उसे आपातकालीन रूप से बंद करने के लिए किया जाता है। जब रिएक्टर क्रांतिक हो जाता है, तो इन छड़ों को तैयार अवस्था में क्रोड के बाहर रखा जाता है और रिएक्टर को बंद करने के लिए इन्हें तेज़ी से क्रोड के अंदर कर दिया जाता है। क्रोड के अंदर ये एकसमान रूप से वितरित रहती हैं।

क्रोड के अंदर बहुत से संरचनात्मक पदार्थों का इस्तेमाल करना ज़रूरी होता है क्योंकि उनकी मदद से ईंधन अवयवों को आधार दिया जाता है, शीतलक के लिए नालियाँ बनाई जाती हैं और बहुत से काम किए जाते हैं। ऐसे पदार्थों में इच्छित गुणधर्म वही हैं, जो परिनिधान (cladding) में होते हैं और आम तौर पर इन दोनों उपयोगों के लिए एक

ही से पदार्थ का इस्तेमाल होता है। उदाहरण के लिए, स्टेनलेस स्टील का इस्तेमाल स्पेसर ग्रिड (spacer grid) के लिए होता है। यह वह संरचना है जो असेम्बली में ईंधन छड़ों के बीच स्थान बनाए रखती है। इसी तरह शीतलक नलिगाँ और ईंधन नलिकाओं के लिए ज़र्कोनियम-2 (Zr-2)का इस्तेमाल होता है।

समाच्छद

द्रुत रिएक्टरों में, जो आम तौर पर छोटे होते हैं, क्रोड में उत्पन्न न्यूट्रॉनों के एक महत्वपूर्ण हिस्से का तंत्र से क्षरण (leak) हो जाता है। इसको रोकने के लिए और न्यूट्रॉनों के समुचित उपयोग के लिए ऐसे रिएक्टरों में क्रोड को एक ख़ास पदार्थ से (^{232}Th या ^{238}U) घेर दिया जाता है। इस पदार्थ को समाच्छद (blanket) कहते हैं। (यह न केवल अतिरिक्त न्यूट्रॉन परावर्तक का काम करता है, बल्कि एक कवच की तरह भी काम करता है।) इस समाच्छद द्वारा अवशोषित न्यूट्रॉनों से अंततः विखंडनीय नाभिक ^{232}U या ^{239}Pu बनते हैं।

परावर्तक

क्रोड (या समाच्छद) से न्यूट्रॉनों के क्षरण को रोकने के लिए एक अविमंदक अनवशोषी पदार्थ का इस्तेमाल किया जाता है। इसे क्रोड या समाच्छद के साथ रखा जाता है। द्रुत रिएक्टरों में इस काम के लिए उच्च द्रव्यमान संख्या वाला पदार्थ इस्तेमाल होता है ताकि इस क्षेत्र से लौटने वाले न्यूट्रॉन की औसत ऊर्जा इसमें जा रहे न्यूट्रॉनों से ज़्यादा भिन्न न हो। Ni, Cu और Mo का अक्सर परावर्तक के तौर पर इस्तेमाल होता है। तापीय रिएक्टरों में कोई भी अच्छा विमंदक पदार्थ परार्वतक का काम कर सकता है।

रिएक्टर कक्ष

इस पूरी असेम्बली को एक कक्ष के अंदर रखा जाता है जिसे दाब कक्ष (pressure vessel) कहते हैं। यह कुछ इंच मोटाई वाले स्टेनलेस स्टीज का बना होता है।

परिरक्षक

रिएक्टर में काम कर रहे वैज्ञानिकों और अन्य कर्मचारियों की सुरक्षा और उनके चारों ओर रखे उपकरण की सुरक्षा के लिए रिएक्टर कक्ष को बहुत मोटी कंकरीट की दीवारों के अंदर रखा जाता है। कुछ स्थितियों में एक के बाद एक भारी और हल्के अवयवों, जैसे कंकरीट और पॉलिएथिलीन या कंकरीट और पानी के स्तरों का भी इस्तेमाल किया जाता है। इसे जैविक शील्ड या परिरक्षक या विकिरण परिरक्षक (radiation shield) कहा जाता है।

रिएक्टर कक्ष की दीवारों से और जैविक शील्ड के द्वारा मुक्त हो रहे विकिरण के लगातार अवशोषण से ऊष्मा का उत्पादन होता रहता है जिसके कारण उसमें तापीय विकृतियां आ जाती हैं। नाभिकीय विकिरण के इस ऊष्मीय प्रभाव को घटाकर दाब कक्ष को हो रही विकिरण हानि को कम करने के लिए एक तापीय शील्ड, जिसे आम तौर पर स्टेनलेस स्टील का बनाया जाता है, परावर्तक के नज़दीक रखी जाती है।

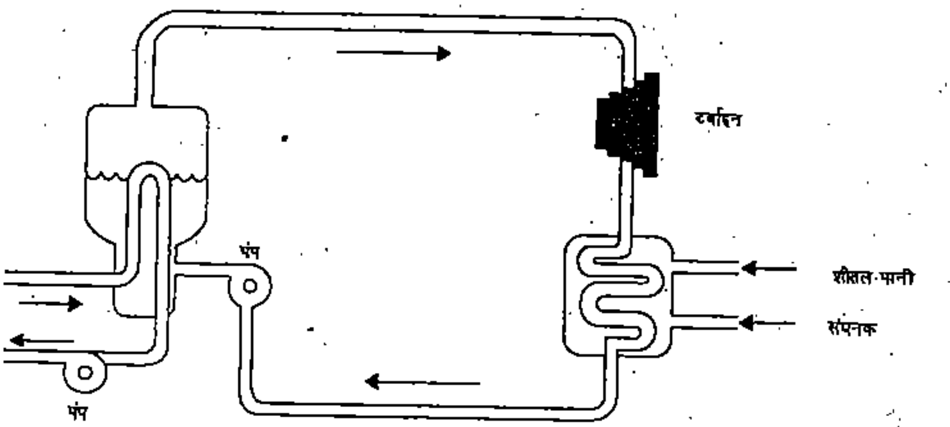
रिएक्टर भवन

यह पूरा का पूरा ढांचा एक रिएक्टर भवन में रखा जाता है, जिसमें हवा नहीं आ-जा सकती। और इसे वायुमंडलीय दाब से कुछ कम दाब पर रखा जाता है ताकि इस भवन से हवा बाहर न जा सके, सिवाय उसके लिए ख़ास तौर पर बनी नलिकाओं से। जब कोई दुर्घटना हो जाती है तो यह भवन रेडियोएक्टिव पदार्थों को अपने अंदर समेटे रखता है और वातावरण में इन्हें जाने से रोकता है।

शीतलक लूप, ऊष्मा विनिमयक और विद्युत जनेरेटर

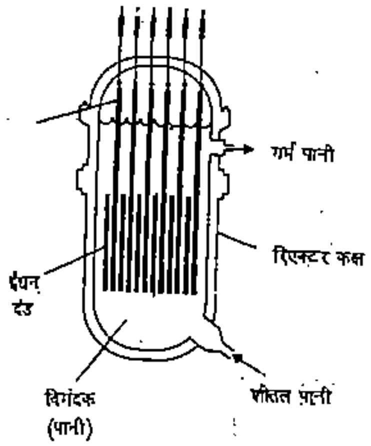
रिएक्टर क्रोड में विखंडन के कारण उत्पन्न ऊष्मा को उसमें से एक शीतलक प्रवाहित करके हटाया जा सकता है। आम तौर पर यह शीतलक एक बंद लूप में प्रवाहित होता है, जिसे प्रारंभिक या रिएक्टर क्रोड लूप कहते हैं। यह गर्म हो रहा शीतलक जिसमें विखंडन ऊष्मा होती है, जब क्रोड से बाहर आता है, तब बहुत अधिक रेडियोएक्टिव हो सकता है। इस रेडियोएक्टिवता को फैलने से रोकने के लिए यह ज़रूरी हो जाता है कि एक द्वितीयक (या भाप उत्पादक) लूप भी रखा जाए जिसे खोला या बंद किया जा सकता हो। इनमें से प्राथमिक तरल अपनी ऊष्मा द्वितीयक तरल को (जो आम तौर पर पानी होता है) एक ऊष्मा विनिमयक में दे देता है। इसके कारण भाप का उत्पादन होता है और इसी कारण इसे भाप जेनेरेटर भी कहते हैं।

शोध रिएक्टरों में द्वितीयक लूप को खुला रखा जाता है ताकि क्रोड के अंदर उत्पन्न ऊष्मा को किसी नदी या समुद्र में छोड दिया जाए। विद्युत ऊर्जा रिएक्टरों में, द्वितीयक लूप द्वारा एक इलेक्ट्रिक जेनेरेटर को ऊर्जा दी जाती है लेकिन कुछ रिएक्टरों में क्रोड में ही उच्च दाब पर भाप उत्पन्न होता है और इसे सीधे जेनेरेटर में पहुंचा दिया जाता है यानी ऊष्मा विनिमयक की ज़रूरत नहीं होती। ऐसे रिएक्टरों को क्वथन जल रिएक्टर कहते हैं। ऐसे रिएक्टर का आरेख चित्र 14.3 में दिखाया गया है।



चित्र 14.2

दूसरी ओर, तरल सोडियम का इस्तेमाल करने वाले द्रुत रिएक्टरों में एक मध्यवर्ती शीतलक लूप और इसलिए ऊर्जा विनिमयक की ज़रूरत होती है। इसके द्वारा प्राथमिक सोडियम लूप से द्वितीयक लूप में ऊर्जा का स्थानांतरण किया जा सकता है।



चित्र 14.3

भाप जेनेरेटर (या क्रोड) से उत्पन्न उच्च ताप और दाब वाली भाप को एक टरबाइन के गिर्द फैलने दिया जाता है जो एक विशाल विद्युत जेनेरेटर से जुड़ी होती है। टरबाइन के इर्द गिर्द घूम कर निकलने वाली कम दाब की भाप का एक भाप संघनक में वापस पानी में संघनन हो जाता है।

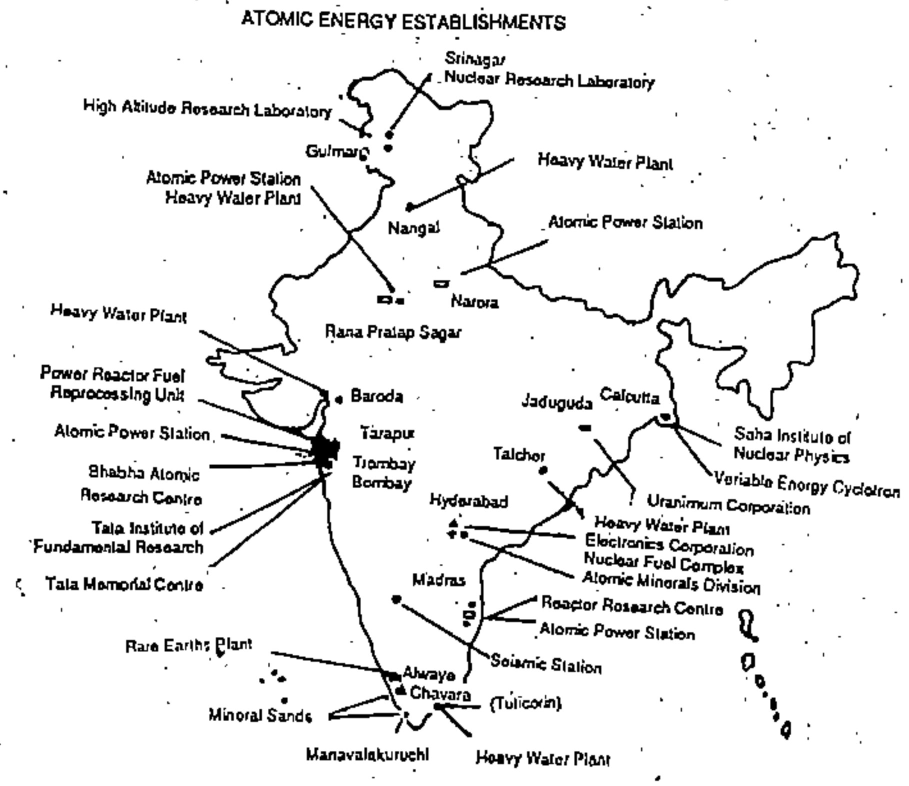
संघनित पानी को फिर से संपीडित किया जाता है और वापस भाप जेनरेटर में भेज दिया जाता है।

नाभिकीय संयंत्रों की दक्षता (33%) जीवाश्मीय संयंत्रों की दक्षता (40%) से कम है। ऐसा इसलिए है क्योंकि नाभिकीय ईंधन का तापमान (और इसलिए भाप का तापमान) जीवाश्मीय ईंधन के मुकाबले कम रखा जाता है ताकि नाभिकीय रिएक्टर गल न जाए। लेकिन यह उम्मीद की जाती है कि इस दक्षता का मान आने वाले समय में जल्दी ही 40 प्रतिशत तक हो जाएगा।

14.3.3 नाभिकीय ऊर्जा: भारतीय कार्यक्रम

पंडित जवाहर लाल नेहरू का सपना था कि स्वतंत्रता के बाद भारत प्रौद्योगिक तौर पर ख़ूब विकास करे। इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए प्रधान मंत्री बनते ही उन्होंने बहुत सी योजनाएं शुरू कीं। यह बात वे अच्छी तरह समझते थे कि हमारे देश में ऊर्जा की आवश्यकताएं समय के साथ बढ़ती ही जाएंगी। ऊर्जा विकल्पों के सवाल पर उनकी यह समझ थी कि विद्युत ऊर्जा उत्पादन के लिए पन बिजली, कोयला या तेल पर आधारित तकनीकें या प्रौद्योगिकी काफ़ी नहीं हैं और इसके लिए नाभिकीय ऊर्जा की भी मदद लेनी पड़ेगी।

इसके लिए उन्होंने डॉ. होमी भाभा को यह ज़िम्मेदारी सौंपी कि वे राष्ट्र के नाभिकीय कार्यक्रम का विकास करें जिसे डा. भाभा ने बखूबी निभाया। 1948 में शांतिपूर्ण और कल्याणकारी उद्देश्यों जैसे कि विद्युत उत्पादन, शोध, कृषि, उद्योग, चिकित्सा और अन्य क्षेत्रों में नाभिकीय अनुप्रयोगों के विकास के लिए परमाण्वीय ऊर्जा के विकास, नियंत्रण और उपयोग के लिए परमाण्वीय ऊर्जा अधिनियम बनाया गया। इस उद्देश्य के लिए डा. भाभा नें शोध सुविधाओं को विकसित किया, वैज्ञानिक और तकनीकी कर्मचारियों के प्रशिक्षण की व्यवस्था की, कच्चे माल के संसाधन केन्द्र और परमाण्वीय ऊर्जा कार्यक्रम में इस्तेमाल होने वाले नाभिकीय और इलेक्ट्रॉनिक उपकरण के उत्पादन के कई केन्द्र खोले ताकि भारत इस क्षेत्र में आत्मनिर्भर हो सके। आज हमारे देश में तरह-तरह के संयंत्र अलग-अलग जगहों पर लगाए गए हैं (चित्र 14.4)।



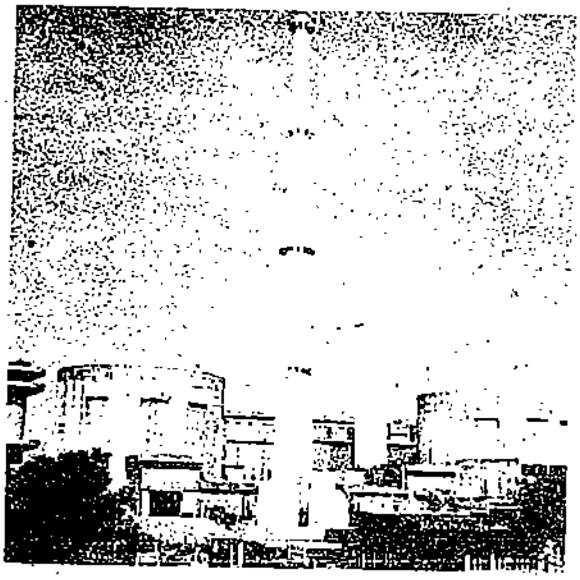
चित्र 14.4

भारतीय नाभिकीय कार्यक्रम तीन चरणों में चल रहा है:

- प्राकृतिक यूरेनियम ईंधन वाले दाबीकृत भारी पानी वाले शक्ति रिएक्टर जिनमें प्लूटोनियम एक सह-उत्पाद है (प्रथम चरण)।

- प्लूटोनियम का ईंधन के तौर पर इस्तेमाल करने वाले द्रुत ब्रीडर विद्युत रिएक्टर जिनमें थोरियम से प्लूटोनियम और यूरेनियम-233 का उत्पादन होता है (दूसरा चरण)।
- थोरियम चक्र पर आधारित रिएक्टरों का डिज़ाइन और निर्माण जिनमें यूरेनियम के मुकाबले कहीं अधिक प्लूटोनियम का उत्पादन होता है (तीसरा चरण)।

हालांकि कार्यक्रम के पहले चरण में भारतीय नीति यह रही है कि प्राकृतिक यूरेनियम का इस्तेमाल करके बहुत सारे नाभिकीय विद्युत संयंत्र बनाए जाएं फिर भी सुविधाओं के अभाव में और प्रशिक्षित कर्मियों के अभाव में हमारे वैज्ञानिकों को अपने कार्यक्रम में कुछ परिवर्तन करने पड़े। भारत ने 1964 में संयुक्त राज्य अमरीका से 200 MW के दो सामान्य पानी के रिएक्टर खरीदे। इन्हें मुंबई में, तारापुर में लगाया गया। इनमें समृद्धित (enriched) यूरेनियम का इस्तेमाल होता था। इन रिएक्टरों से मिले अनुभव से प्रेरणा लेकर भारत ने कोटा (राजस्थान) में कैनेडियन डिज़ाइन पर आधारित दो 200 MW रिएक्टर बनाए और उन्हें चलाया। कनाडा से आए पहले रिएक्टर का अधिकतर उपकरण कनाडा से ही आया। लेकिन कोटा में बने दूसरे संयंत्र के लिए ज़्यादातर काम भारत में ही हुआ।



चित्र 14.5: काकरापाड़ा परमाणु ऊर्जा केन्द्र।

मद्रास से 100 किलोमीटर दूर कलपक्कम में तीसरे परमाण्वीय शक्ति संयंत्र के बनने से जिसमें 235 MW की दो इकाइयां हैं, भारतीय नाभिकीय ऊर्जा अनुसंधान कार्यक्रम आत्मनिर्भरता की पहली मंज़िल पर पहुंचा। इस परियोजना के संचालन की पूरी ज़िम्मेदारी, जिसमें इसका डिज़ाइन, निर्माण, क्रियान्वयन और संक्रिया आदि शामिल थे भारत सरकार के परमाण्वीय ऊर्जा विभाग की ज़िम्मेदारी थी। इनमें राजस्थान के रिएक्टर के डिज़ाइन को बरकरार रखते हुए अन्य कारकों में महत्वपूर्ण बदलाव किए गए। इसके ज़्यादातर उपकरण और अवयव भारत में ही बनाए गए थे और इस पर विदेशी पूंजी का केवल 20 प्रतिशत हिस्सा लगा था।

इस सफलता से भारतीय वैज्ञानिक बहुत उत्साहित हुए। उन्होंने उत्तर प्रदेश में नरौरा में एक और नाभिकीय संयंत्र बनाना शुरू किया। लेकिन यह शहर उत्तर प्रदेश के भूकंप वाले इलाके में है और इस संयंत्र को डिज़ाइन करना एक बहुत बड़ी चुनौती थी। पर भारतीय वैज्ञानिकों और इंजीनियरों ने इस चुनौती को स्वीकार किया और रिएक्टर के डिज़ाइन को पूरी तरह बदल डाला। अब वहां दो संयंत्र काम कर रहे हैं। इस तेज़ी से बढ़ते हुए नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम का संचालन करने के लिए 1991 में नाभिकीय शक्ति

कार्पोरेशन की स्थापना हुई। उसके अधीन कर्नाटक में काइगा और गुजरात में काकरापाड़ा में संयंत्र बनाना शुरू किया गया। इन दोनों परियोजनाओं में 235 MW के दो-दो संयंत्र लगाए गए हैं। इनमें से काकरापाड़ा स्थित संयंत्र आज पूरी तरह काम कर रहे हैं (चित्र 14.5)।

अभी-अभी गठित नाभिकीय ऊर्जा कार्पोरेशन की योजना है कि वह 440 MW के दो और 220 MW के दो संयंत्र बनाए। इसके बाद संसाधनों की उपलब्धता के हिसाब से और रिएक्टर बनाए जाएंगे। 70 के दशक में परमाण्वीय ऊर्जा विभाग ने यह सोचा था कि सन् 2000 तक भारत में 10000 MW तक की क्षमता हो जाएगी। लेकिन अब ऐसा लगता है कि इस लक्ष्य को पाना मुश्किल है। अभी तक मिली जानकारी के अनुसार इस सदी के अंत तक नाभिकीय स्रोतों से भारत 3000 से 4000 MW विद्युत शक्ति ही उत्पादित कर पाएगा।

भारत में नाभिकीय ऊर्जा उत्पादन

वर्तमान में क्रियान्वित (2170 MWe)		
तारापुर परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन	—	2 × 160 MWe (TAPS)
राजस्थान परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन	—	2 × 220 MWe (RAPS)
कलपक्कम परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन	—	2 × 235 MWe
नरौरा परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन	—	2 × 235 MWe (NAPS)
काकरापाड़ा परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन	—	2 × 235 MWe
निर्माणाधीन (470 MWe)		
काइगा परमाण्वीय ऊर्जा परियोजना	—	2 × 235 MWe
प्रस्तावित (1350 MWe)		
तारापुर परमाण्वीय ऊर्जा परियोजना	—	2 × 440 MWe
राजस्थान परमाण्वीय ऊर्जा परियोजना	—	2 × 235 MWe

द्वितीय चरण

तमिलनाडू में कलपक्कम में इंदिरा गांधी परमाण्वीय शोध केन्द्र में द्रुत ब्रीडर परीक्षण रिएक्टर (FBTR) का 1985 में बनाना जिसकी क्षमता 40 MW तापीय और 13 MW विद्युतीय थी, भारतीय नाभिकीय कार्यक्रम के दूसरे चरण की शुरुआत थी। इसके बाद अगला चरण होगा 500 MW क्षमता वाला प्रोटोटाइप द्रुत ब्रीडर रिएक्टर बनाना।

तृतीय चरण

नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम के तीसरे चरण में देश में मौजूद थोरियम के विशाल भंडारों का इस्तेमाल करके $^{233}U - ^{228}Th$ चक्र के प्रयोग की योजना है। भारत में दुनियाभर में सबसे ज़्यादा थोरियम के भंडार हैं। यह प्रस्तावित किया जा रहा है कि पहले दो चरणों से प्राप्त ^{239}U का इस्तेमाल करके थोरियम से ^{233}U बनाया जाए।

14.3.4 आत्मनिर्भरता की ओर अग्रसर नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम

नाभिकीय उद्योग बहुत जटिल है और उसके संचालन के लिए हमें तरह-तरह के साधनों की ज़रूरत पड़ती है: ईंधन, शीतलक, विमंदक आदि और इसके साथ ऊर्जा उत्पादन के लिए भी भारी उपकरण की ज़रूरत पड़ती है। अभी तक की बातें पढ़ते हुए आपको समझ आया होगा कि नाभिकीय ऊर्जा उत्पादन में बहुत बड़ी मात्रा में रेडियोएक्टिव

अपशिष्ट बनता है। उसके प्रबंधन के लिए और भी सहूलियतों की ज़रूरत पड़ती है। इस सिलसिले में ईंधन प्रबंधन संस्थान, भारी पानी का उत्पादन संयंत्र, रेडियोएक्टिव अपशिष्ट प्रबंधन संस्थान आदि का ज़िक्र किया जा सकता है। अब हम अपने नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम के दायरे में इन सभी बातों पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

क) भारी पानी उत्पादन

भारी पानी का अधिकतर भारतीय नाभिकीय रिएक्टरों में विमंदक और शीतलक दोनों की तरह इस्तेमाल होता है। इसका चुनाव मुख्यतः इसलिए किया गया था क्योंकि एक रिएक्टर को प्राकृतिक यूरेनियम द्वारा भी क्रांतिक अवस्था में लाया जा सकता है। आज ऐसे कई संयंत्र सक्रिय हैं: क्रमशः गुजरात (वदोदरा), पंजाब (नांगल), राजस्थान (कोटा), तमिलनाड (ट्यूटीकोरिन), उड़ीसा (तलचर) और महाराष्ट्र (थाल) में एक-एक।

ईंधन का पुनर्संसाधन

ट्रॉम्बे में मिले अनुभव के आधार पर तारापुर में प्रति वर्ष रिएक्टर संयंत्र के ईंधन के 100 टनों के पुनर्संसाधान के लिए एक संयंत्र लगाया गया है जो तारापुर परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन से प्राप्त ज़र्कालॉय-परिनिधानित यूरेनियम ऑक्साइड ईंधन अवयवों का पुनर्संसाधन करेगा। इस संयंत्र में द्रुत ब्रीडर रिएक्टर से मिले ईंधन के पुनर्संसाधन की भी सुविधा होगी। भारत दुनिया में पांचवां देश है जो इस तरह का पुनर्संसाधन कर रहा है।

भारतीय नाभिकीय कार्यक्रम पर एक नज़र

10 अगस्त, 1948	:	भारतीय परमाण्वीय ऊर्जा आयोग (Atomic Energy Commission) की स्थापना
3 अगस्त, 1954	:	परमाण्वीय ऊर्जा विभाग (Department of Atomic Energy) की स्थापना
4 अगस्त, 1956	:	ट्राम्बे, मुम्बई में एशिया का पहला शोध रिएक्टर अप्सरा काम के लिए तैयार
20 जनवरी, 1957	:	पं. जवाहर लाल नेहरू द्वारा परमाण्वीय ऊर्जा संस्थान (Atomic Energy Establishment), ट्रॉम्बे का उद्घाटन
30 जनवरी, 1959	:	ट्रॉम्बे स्थित ए.ई.ई. में नाभिकीय ग्रेड यूरेनियम धातु का उत्पादन
10 जुलाई 1960	:	40 मेगावाट का शोध रिएक्टर साइरस (CIRUS) काम करने लगता है
14 जनवरी, 1961	:	शोध रिएक्टर ज़रलीना (ZERLINA) काम करने लगता है
22 जनवरी, 1965	:	बार्क (BARC) में स्थित प्लूटोनियम संयंत्र काम करने लगता है
22 जनवरी, 1967	:	ट्रॉम्बे स्थित परमाणु ऊर्जा व्यवस्था का फिर से नाम रखा जाता है भाभा परमाण्वीय शोध केन्द्र (Bhabha Atomic Research Centre, BARC)
31 दिसम्बर, 1968	:	हैदराबाद में नाभिकीय ईंधन व्यवस्था बनाई जाती है
12 मार्च, 1969	:	कलपक्कम में रिएक्टर शोध केन्द्र की स्थापना
2 अक्टूबर, 1969	:	तारापुर परमाणु ऊर्जा स्टेशन विद्युत शक्ति सप्लाई का काम करने लगता है

18 मई, 1972	:	प्लूटोनियम ईंधन द्रुत रिएक्टर (पूर्णिमा-1, PURNIMA-I) कार्य करने लगता है
30 नवम्बर, 1972	:	कोटा, राजस्थान में पहला रिएक्टर काम करने लगता है
1 नवम्बर, 1980	:	कोटा का दूसरा संयंत्र काम करने लगता है
19 नवम्बर, 1982	:	तारापुर में शक्ति रिएक्टर ईंधन पुनर्संसाधन संयंत्र काम करने लगता है
15 नवम्बर, 1983	:	परमाणु ऊर्जा नियंत्रण बोर्ड की स्थापना की जाती है
27 जनवरी, 1984	:	कलपक्कम में मद्रास परमाण्वीय ऊर्जा स्टेशन की इकाई-1 काम करने लगती है
10 मई, 1984	:	पूर्णिमा-1 को पूर्णिमा-2 में बदल दिया जाता है ताकि ^{233}U ईंधन इस्तेमाल हो सके
8 अगस्त, 1985	:	शोध रिएक्टर ध्रुव (DHRUVA) (100 MW) काम करने लगता है
18 अक्तूबर, 1985	:	कलपक्कम में स्थित फास्ट ब्रीडर परीक्षण रिएक्टर काम करने लगता है
21 मार्च, 1986	:	कलपक्कम में स्थित इकाई-2 काम करने लगती है
12 मार्च, 1989	:	नरौरा शक्ति परियोजना की पहली इकाई काम करने लगती है
24 अक्तूबर, 1991	:	नरौरा शक्ति परियोजना की दूसरी इकाई काम करने लगाती हैं
3 सितम्बर, 1992	:	काकरापाड़ा परमाणु ऊर्जा स्टेशन की पहली इकाई काम करने लगती है
8 जनवरी, 1995	:	काकरापाड़ा परमाणु ऊर्जा स्टेशन की दूसरी इकाई काम करने लगती है

रेडियोएक्टिव अपशिष्ट का प्रबंधन

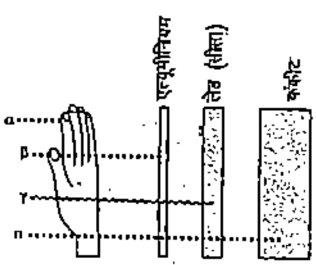
संपूर्ण नाभिकीय ईंधन चक्र में कुल रेडियोएक्टिवता का 99 प्रतिशत ईंधन प्रबंधन संयंत्र में उत्पन्न होता है। नाभिकीय अपशिष्ट के प्रबंधन के लिए भारत में तीन अवस्थाओं में काम करना तय किया गया:

- इस अपशिष्ट को स्थायी और अक्रिय ठोस आव्यूहों में रख दिया जाएगा,
- इस तरीके से प्रबंधित अपशिष्ट को कनस्तरों में बंद करके ऐसी जगह में रखा जाएगा जहां इसका शीतलन किया जा सके और लगातार निगरानी की जा सके,
- इन कनस्तरों को समुचित भूगोलीय माध्यमों में रखा जाएगा।

तारापुर में ईंधन संसाधन संयंत्र से निकलने वाले उच्च स्तरीय रेडियोएक्टिव अपशिष्टों के प्रबंधन के लिए एक संयंत्र लगाया गया है और साथ ही साथ ठोस अवयवों के भंडारण के निरीक्षण की सुविधाएं भी रखी गई हैं।

14.4 हमारे पर्यावरण में नाभिकीय विकिरण

मनुष्य हमेशा से प्रकृति के निकट संपर्क में रहा है। प्रागैतिहासिक मनुष्य गुफ़ाओं में रहते थे और अपनी ज़रूरतों के लिए प्रकृति और उसके संसाधनों जैसे पेड़-पौधों, जानवरों या समुद्री जीवों पर निर्भर थे। पाषाण और लौह युग से गुज़रते हुए मनुष्य ने औद्योगिक युग में कदम रखा। विकास की इस प्रक्रिया में मनुष्य बहुत से मारक रोगों पर काबू पाने में सफल हुआ, जिसके कारण मृत्यु-दर कम हुई और दुनिया की जनसंख्या में चरघातांकी रूप से वृद्धि हुई। इस विशाल जनसंख्या की आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए मनुष्य ने संसाधनों का दुरुपयोग भी किया जिसके कारण पर्यावरण पर प्रतिकूल प्रभाव पड़े। इसके अलावा उद्योगों के प्रबंधन में बढ़ती हुई असावधानी और पर्याप्त तकनीकी सुरक्षा के अभाव में बहुत सी दुर्घटनाएं भी घटीं। इस प्रक्रिया में हमारे पर्यावरण में बहुत से रासायनिक और नाभिकीय प्रदूषणकारी तत्व जा मिले हैं। इसके कुछ जाने-माने उदाहरण हैं–भोपाल गैस दुर्घटना, चेरनोबिल और थ्री-माइल द्वीप दुर्घटना, कुवैत के तेल के कुओं में आग आदि। घटते हुए जंगल, बरबाद हो रही ओज़ोन स्तर, ग्रीन हाउस प्रभाव का संकट और पृथ्वी का तापमान बढ़ना आदि अनियंत्रित रूप से औद्योगीकरण के कुछ दुष्परिणाम हैं जिसमें प्रकृति और उसकी रचनाओं के लिए ज़रा भी ध्यान नहीं दिया गया है। इस पर हमें काबू पाना होगा और प्रदूषणकारी तत्वों को नियंत्रित करना होगा नहीं तो इस ख़ूबसूरत ग्रह पर रहने वाले सभी जीवों के लिए इसके परिणाम घातक होंगे।



चित्र 14.6: विकिरण के प्रकार और उनसे संबंधित वेधन ऊर्जाएं।

हम सभी जानते हैं कि बड़े नगरों जैसे दिल्ली, कलकत्ता, बम्बई, मद्रास, और बंगलौर में वायु प्रदूषण बहुत अधिक बढ़ गया है। तापीय विद्युत संयंत्रों, औद्योगिक इकाइयों, जीवाश्मीय ईंधनों को जलाने और यातायात के साधनों के कारण कई रासायनिक प्रदूषक तत्व जैसे कि कार्बन-मोनो-ऑक्साइड, सल्फर डाइऑक्साइड, हाइड्रोकार्बन और नाइट्रोजन के ऑक्साइड हमारे पर्यावरण में मिल जाते हैं। इन सभी प्रदूषक तत्वों से तो हम कुछ हद तक परिचित हैं। लेकिन 1940 से नाभिकीय विकिरण एक ख़तरनाक प्रदूषक के रूप में सामने आया है। इसे न तो देखा जा सकता है न महसूस किया जा सकता है और न ही सूंघा जा सकता है। दुर्भाग्य तो यह है कि हमारे देश में लोगों को इसके बारे में बहुत ही कम जानकारी है। और क्योंकि हमारे देश के कार्यक्रम में जीवाश्मीय ईंधनों से हटकर ऊर्जा के दूसरे साधनों और नाभिकीय ऊर्जा उत्पादन पर बहुत ज़ोर दिया जा रहा है इसलिए हमारे पर्यावरण में नाभिकीय विकिरण के स्तर के बढ़ने की बहुत अधिक संभावनाएं उभर रही हैं।

नाभिकीय विकिरण क्या है?

विकिरण बहुत ही व्यापक शब्द है और इसके दायरे में प्रकाश और रेडियो तरंगें भी आती हैं। लेकिन सिर्फ़ वे ही विकिरण जो परमाणुओं के नाभिक से उत्सर्जित होते हैं, नाभिकीय विकिरण कहलाते हैं। इनमें रेडियोएक्टिव उत्सर्जन जैसे-अल्फ़ा, बीटा और गामा किरणें, कॉस्मिक किरणें, न्यूट्रॉन और हल्के तत्वों के नाभिक शामिल हैं।

आप जानते हैं कि यूरेनियम और रेडियम जैसे तत्वों के परमाणुओं से अल्फ़ा कणों का उत्सर्जन होता है। अल्फ़ा विकिरण की भेदन क्षमता कम होती है और इसे कागज़ के एक टुकड़े से भी रोका जा सकता है। हमारी त्वचा की बहुत ही पतली सतह भी इसे रोक सकती है। लेकिन अगर अल्फ़ा कणों को उत्सर्जित करने वाले नाभिक श्वसन, भोजन या पेय पदार्थों द्वारा शरीर के अंदर पहुंच जाते हैं तो वे आंतरिक ऊतकों को हानि पहुंचाते हैं और घातक भी हो सकते हैं। बीटा विकिरण, पानी की एक-दो सेंटीमीटर मोटाई वाली सतह से गुज़र सकता है लेकिन एल्युमिनियम की कुछ मिली-मीटर वाली पन्नी इन विकिरणों को रोक सकती है। गामा किरणें मनुष्य के शरीर में से गुज़र सकती हैं लेकिन इन्हें कंकरीट या सीसे (lead) की एक मोटी पट्टी से रोका जा सकता है। इन सभी बातों को हमने चित्र 14.6 में दिखाया है।

कास्मिक किरणें बाहरी अंतरिक्ष से आने वाले उच्च ऊर्जा कणों की बनी होती हैं और पृथ्वी की सतह पर प्रति मिनट आने वाले कॉस्मिक कणों की संख्या लगभग सात हजार होती है। इनमें से कुछ कणों की ऊर्जा 10^9 MeV भी हो सकती है।

न्यूट्रॉन आवेशहीन कण हैं और बहुत अधिक दूरियों का बिना किसी रोक के भेदन कर सकते हैं। ये इलेक्ट्रॉनों के साथ कोई प्रतिक्रिया नहीं करते। इस कारण से वे द्वारा आयनीकरण नहीं करते। इसी कारण से इनका पता लगाना बहुत कठिन होता है। ये केवल कंकरीट की बहुत मोटी दीवारों से ही रोके जा सकते हैं।

रेडियोएक्टिवता मनुष्य के लिए नई नहीं है। जब से हमारी पृथ्वी अस्तित्व में आई है, यह तभी से उसका एक हिस्सा है। वास्तव में हमारे ग्रह पर तमाम जैविक विकास इसी के साथ-साथ हुआ है। नाभिकीय विकिरणों के प्राकृतिक स्रोत इस प्रकार हैं:

- पृथ्वी की ऊपरी सतह में, हमारे घरों, स्कूलों, दफ्तरों आदि की दीवारों और फर्शों में और जो खाना हम खाते हैं, उसमें मौजूद रेडियोएक्टिव तत्व।
- वायु में उपस्थित रेडियोएक्टिव न्यूक्लिआइड, जिन्हें हम सांस के द्वारा अपने शरीर में ले जाते हैं। हमारे अपने शरीर में मांसपेशियों, हड्डियों और ऊतकों में प्राकृतिक तौर पर पाए जाने वाले रेडियोएक्टिव तत्व मौजूद हैं।
- बाह्य अंतरिक्ष से आने वाली कास्मिक किरणें।

^{40}K, ^{238}U और ^{232}Th जैसे रेडियोएक्टिव तत्व पृथ्वी की सतह में काफी बड़ी मात्रा में विसरित हैं, जिनके कारण पार्थिव (terrestrial) रेडियोएक्टिवता होती है। मृदा में इन तत्वों की उपस्थिति से किसी विशिष्ट जगह पर नाभिकीय विकिरणों की तीव्रता का पता लगाया जा सकता है। भारत में, केरल और बिहार में ये तत्व प्रचुर मात्रा में उपलब्ध हैं। पार्थिव रेडियोएक्टिवता के समान ही पृथ्वी पर पहुंचने वाली कॉस्मिक विकिरणों की तीव्रता पृथ्वी पर किसी भी जगह के अक्षांश, ऊंचाई, विस्फोटों, सौर प्रज्वाल आदि पर निर्भर करती है। ध्रुवों पर इनकी संख्या अधिकतम होती है और भूमध्य रेखा पर न्यूनतम। समुद्र की सतह पर ज़्यादातर म्यू-मेसॉन और इलेक्ट्रॉन-पाज़िट्रॉन युग्म पाए जाते हैं। समुद्र की सतह से लगभग 15 किलोमीटर की ऊंचाई पर कॉस्मिक विकिरण में ज़्यादातर प्रोटॉन और अल्फ़ा कण होते हैं। अगर पृथ्वी पर चुम्बकीय क्षेत्र नहीं होता और वातावरण नहीं होता तो हम तक पहुंचने वाली कॉस्मिक किरणों की संख्या कहीं ज़्यादा रही होती। हवाई जहाज़ों से चलने वाले यात्रियों को कॉस्मिक विकिरणों का ज़्यादा अनुभव होता है और वे इसके दुष्प्रभावों को ज़्यादा झेलते हैं। वायुमंडल में उपस्थित रेडियोएक्टिवता मुख्यतः ^{222}Rn और ^{14}C के कारण है। नाईट्रोजन पर कॉस्मिक किरणों की प्रतिक्रिया के कारण वातावरण में लगातार ^{14}C उत्पन्न होती रहती है। अगर हम इनको सांस के ज़रिये अपने शरीर में ले लेते हैं तो ये न्यूक्लिआइड हमें जीवन भर प्रभावित करते हैं।

यह सत्य है कि जैविक तंत्रों का विकास प्राकृतिक विकिरण के साथ बिना किसी ख़ास दुष्प्रभाव के होता आया है। लेकिन अब मनुष्य द्वारा निर्मित कृत्रिम स्रोतों के कारण प्रकृति में उपस्थित रेडियोएक्टिवता में बड़े पैमाने पर नाभिकीय विकिरण मिलने लगा है। भारत और इंग्लैण्ड में किसी आम व्यक्ति के औसत विकिरण प्रभावन (radiation exposure) से संबंधित आंकड़े तालिका 14.2 में दिए गए हैं:

तालिका 14.2: कुल जनसंख्या का विकिरण प्रभावन (%)

स्रोत	देश	
	भारत	इंग्लैण्ड
प्राकृतिक	79.7	87
चिकित्सात्मक	16.2	11
कृत्रिम	4.1	1.5

संसार में 1000 से अधिक नाभिकीय विस्फोट हुए हैं और उनमें से दो ने 100,000 लोगों की जान ली है। दुनिया भर की आलोचना के बावजूद फ्रांस द्वारा हाल ही में दक्षिण प्रशांत सागर में किया गया नाभिकीय परीक्षण विशेष रूप से इस क्षेत्र के लोगों के लिए चिन्ता का विषय है।

आजकल इस्तेमाल होने वाले प्रमुख कृत्रिम रेडियोएक्टिव स्रोत हैं– रेडियोआइसोटोप, नाभिकीय संयंत्र, रेडियोएक्टिव अपशिष्ट उत्पाद और रेडियोएक्टिव अस्त्रों के लिए किए गए परीक्षण। नाभिकीय विस्फोट या रिएक्टर दुर्घटना में लम्बी आयु वाले रेडियो न्यूक्लिआइडों की एक बड़ी मात्रा वातावरण में मिल जाती है और वह वायु प्रवाह के द्वारा पूरी दुनिया में फैल जाती है। चेरनोबिल रिएक्टर दुर्घटना अभी भी हमारी याद में उतनी ही ताज़ा है। ये रेडियो न्यूक्लिआइड अक्सर बारिश के साथ नीचे आ जाते हैं और मिट्टी, पानी और पेड़-पौधों में मिल जाते हैं। खाने के ज़रिये जब ये एक बार मनुष्य के शरीर में पहुंच जाते हैं तो फिर वे उस मनुष्य के अंदर जीवन भर विकिरण उत्पन्न करते रहते हैं। किसी नाभिकीय विस्फोट में उत्पन्न विकिरण, उसके विस्फोट और ऊष्मा के विघटनकारी प्रभाव के मुकाबले नगण्य हैं लेकिन लम्बे दौर में उनके प्रभाव विनाशकारी हो जाते हैं।

आपने दूसरे विश्व युद्ध में परमाणु बम के फेंके जाने के बारे में तो पढ़ा ही होगा। 6 अगस्त, 1945 में अमेरिका ने जापान के हिरोशिमा नामक शहर में परमाणु बम गिराया। इस विस्फोट में उत्पन्न हुई ऊष्मा से 3,43,000 की आबादी वाले इस शहर का 10 वर्ग किलोमीटर हिस्सा तहस-नहस हो गया था। लगभग 66,000 लोग तो उससे उत्पन्न ऊर्जा और नाभिकीय चोटों के कारण उसी क्षण मारे गये। इसके अलावा 69,000 लोगों को भीषण चोटें आईं। इस नाभिकीय विकिरण का यह घातक प्रभाव एक हफ़्ते से कम समय के अंदर ही, 9 अगस्त, 1945 को फिर से मानवता ने महसूस किया, जब जापान में नागासाकी पर दूसरा परमाणु बम गिराया गया।

मरीज़ों को दिए जाने वाले आइसोटोप जिनका विकिरण उपचार और वैज्ञानिक शोध में इस्तेमाल होता है, अब नाभिकीय प्रभावन के महत्वपूर्ण स्रोत बनते जा रहे हैं। बीमार कोशिकाओं को मारने की क्षमता के कारण कुछ घातक रोगों के उपचार में इनका बहुत इस्तेमाल होने लगा है। लेकिन अगर इनका सही इस्तेमाल नहीं किया जाए और मरीज़ों को आवश्यकता से अधिक मात्रा में इन्हें दिया जाए या इन्हें ठीक से न रखा जाए तो इनके बहुत से घातक दुष्परिणाम हो सकते हैं। और यह गहरी चिन्ता का विषय है।

नाभिकीय रिएक्टरों और नाभिकीय प्रयोगशालाओं से नाभिकीय विकिरणों का क्षरण इन सुविधाओं के बढ़ने के साथ-साथ बढ़ेगा। भले ही रेडियोएक्टिव तत्वों का इस्तेमाल कितनी भी सावधानी से किया जाए और ढाल या परिरक्षण की कैसी भी तकनीक का इस्तेमाल किया जाए, इनमें से कुछ विकिरणों जैसे - रेडियोएक्टिव उत्सर्जन और न्यूट्रॉन आदि का इन प्रयोगशालाओं और रिएक्टर क्रोडों से क्षरण होता ही है। इन स्रोतों से उत्सर्जित विकिरण स्तर भविष्य में वैसे वैसे बढ़ते ही जाएंगे जैसे-जैसे हम अपनी बढ़ती हुई ऊर्जा आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए नाभिकीय रिएक्टरों को लगाएंगे। ऐसे किसी रिएक्टर के क्रोड के गलने से हुई नाभिकीय दुर्घटना से क्या हो सकता है, इसके बारे में अब अनुमान लगाने की ज़रूरत ही नहीं है। भूतपूर्व यू.एस.एस.आर. में हुए चेरनोबिल के परिणाम बहुत ही डरावने हैं। इनसे सभी तरह के जीवों को बहुत नुकसान पहुंचा और वह नुकसान केवल भूतपूर्व यू.एस.एस.आर. तक ही सीमित नहीं रहा, बल्कि उसके कारण यूरोप और एशिया तक के प्राणियों को यह नुकसान पहुंचा।

नाभिकीय रिएक्टरों के इस्तेमाल किए जा चुके ईंधन में, जिसे रेडियोऐक्टिव अपशिष्ट भी कहते हैं, भी दीर्घ आयु वाले रेडियो न्यूक्लिआइड बड़ी मात्रा में मौजूद होते हैं। इन अपशिष्टों का सही सही भंडारण आज एक बहुत भीषण समस्या बन गई है। अगर इन्हें सही तरीक़े से न रखा जाए तो ये अपशिष्ट भी नाभिकीय विकिरणों के बढ़ते हुए स्रोत बन सकते हैं।

आम तौर पर, भवन निर्माण सामग्री के अभाव में और सस्ते घरों को बनाने की प्रक्रिया में कई बार भवनों के निर्माण में औद्योगिक अपशिष्टों का इस्तेमाल होता है। इनमें

नाभिकीय संयंत्रों से निकलने वाली राख और स्टील संयंत्रों से निकलने वाले स्लैग प्रमुख उदाहरण हैं। इनके कारण हमारा नाभिकीय विकिरण प्रभावन बढ़ जाता है। नार्वे में किए गए एक वैज्ञानिक अनुसंधान में यह पाया गया कि कंकरीट और ईंट से बने घरों में रह रहे लोगों को, लकड़ी से बने घरों में रह रहे लोगों की तुलना में 30 प्रतिशत अधिक विकिरण का सामना करना पड़ता है।

जैविक प्रभाव

जब तक नाभिकीय विकिरणों को बड़ी मात्रा में अवशोषित न किया जाए तब तक उनका पता ही नहीं लगता। बहुत सी स्थितियों में उनके परिणाम बीस से तीस सालों के बाद सामने आते हैं। नाभिकीय विकिरणों के दो तरह के जैविक प्रभाव होते हैं– आनुवंशिकीय (genetic) प्रभाव और कायिक (somatic) प्रभाव। कायिक प्रभाव केवल उन्हीं व्यक्तियों तक सीमित रहते हैं जिनका नाभिकीय विकिरणों से प्रभावन होता है। लेकिन आनुवंशिकीय प्रभाव मनुष्यों की आने वाली कई पीढ़ियों को प्रभावित कर सकते हैं।

नाभिकीय विकिरण जीवित ऊतकों के जटिल अणुओं का आयनन द्वारा अपघटन कर देते हैं और कोशिकाओं को मार देते हैं। इनके कारण कैंसर हो सकता है, बंध्यता (sterility) हो सकती है, त्वचा जल सकती है और ये रोगों के विरुद्ध शरीर का प्रतिरोध घटा सकते हैं। ये आनुवंशिक प्रक्रिया में बाधा डालते हैं। उन बच्चों को जो पैदा नहीं हुए हैं, अपंग बना सकते हैं और पांच पीढ़ियों तक इनके दुष्प्रभावों को महसूस किया जा सकता है।

नाभिकीय विकिरण हमारे चारों ओर उपस्थित पेड़ पौधों, जीव जन्तुओं और समुद्री जीवन के माध्यम से भी हम पर असर डाल सकते हैं। ये पेड़-पौधों, मछलियों और जानवरों के लिए भी घातक होते हैं और उन्हें अपंग बना सकते हैं। उस प्राकृतिक विकिरण पर हमारा कोई नियंत्रण नहीं है। लेकिन हम व्यक्तिगत, सामूहिक, सामुदायिक, राष्ट्रीय और अंतर्राष्ट्रीय स्तरों पर यह कोशिश ज़रूर कर सकते हैं कि कृत्रिम स्रोतों से आने वाले विकिरण के स्तर कम से कम किए जा सकें। नहीं तो इन नाभिकीय विकिरणों के दूरगामी और अप्रत्यक्ष प्रभावों के चलते उनसे मिल रहे लाभों का कोई उपयोग नहीं रहेगा। आगे आने वाले समय में ये मानव के लिए भयंकर साबित हो सकते हैं।

नाभिकीय विकिरण से हो रही हानि न केवल इस बात पर निर्भर करती है कि शरीर के कितने हिस्से पर वह पड़ा, बल्कि उस विकिरण की ऊर्जा, तीव्रता और प्रकृति पर भी निर्भर करती है। मनुष्य के शरीर के अलग-अलग अवयवों की विकिरण के प्रति अलग-अलग प्रतिक्रिया होती है। आम तौर पर, अन्य अवयवों की तुलना में हाथों और पैरों पर, उन्हें नुकसान पहुंचाए बिना ज़्यादा विकिरण डाला जा सकता है। ये विकिरण अगर ज़्यादा ऊर्जा या तीव्रता वाले होते हैं, तो कहीं ज़्यादा नुकसानदेह होते हैं। नियमत: अल्फ़ा कण अपनी उच्च आयनन क्षमता के कारण ज़्यादा नुकसानदेह होते हैं। विभिन्न विकिरणों की हानिकारक क्षमता की तुलना उनकी आपेक्षिक जैविक प्रभाविता के पदों में जिसे RBE (relative biological effectiveness) कहा जाता है, की जाती है। तालिका 14.3 में विभिन्न कणों और किरणों के लिए इनके मान दिए गए हैं:

तालिका 14.3: विभिन्न विकिरणों के RBE कारक

कण/किरण	RBE कारक
γ-किरणें, β-कण	1
तापीय न्यूट्रॉन	2 से 5
द्रुत न्यूट्रॉन	10
अल्फ़ा कण, O, N आदि के उच्च ऊर्जा आयन	10 से 20

मनुष्य का शरीर जितने विकिरण का अवशोषण करता है उसे डोज़ (dose) कहा जाता है। इस डोज़ को मापने की इकाई रेम (rem) है जो (Roentgen Equivalent Man) का संक्षिप्त रूप है। एक (rem) = RBM कारक × रैड, जहां रैड (Rad) अवशोषक पदार्थ के प्रति एकक ग्राम द्वारा अवशोषित 100 erg ऊर्जा के समतुल्य अवशोषित ऊर्जा है। किसी व्यक्ति के लिए विकिरण की सुरक्षा सीमा लगभग 500 millirem प्रति वर्ष होती है। इसकी तुलना प्रकृति से मिल रही 130 rem प्रति वर्ष की डोज़ से करें।

यह भी देखा गया है कि ज़्यादा विकसित प्राणी कुछ ख़ास बैक्टीरिया के मुकाबले जिनकी सुरक्षा सीमा लगभग 5×10^5 rem प्रति वर्ष होती है, नाभिकीय विकिरण के दुष्प्रभावों से ज़्यादा प्रभावित होते हैं।

भूमध्य रेखा के निकट समुद्र की सतह पर स्थित नगरों में प्रतिवर्ष 35 millirem के बराबर कॉस्मिक किरणें पड़ती हैं जबकि 50° उत्तरी अक्षांश पर स्थित नगरों को औसतन 50 millirem प्रतिवर्ष कॉस्मिक विकिरण मिलता है। समुद्र की सतह से 1850 m ऊँचाई पर स्थित स्थानों पर पड़ रहे कॉस्मिक विकिरण का मान 90 millirem प्रतिवर्ष होता है जो 4600 m की ऊँचाई पर लगभग 300 millirem प्रतिवर्ष हो जाता है। इससे यह परिणाम निकलता है कि पहाड़ी इलाकों में रहने वाले लोगों को नाभिकीय विकिरण के दुष्परिणाम ज़्यादा झेलने पड़ते हैं।

हमारे शरीर में भोजन के ज़रिए जो प्राकृतिक आइसोटोप पहुंचते हैं, उनमें सबसे ज़्यादा विकिरण उत्सर्जित करने वाला आइसोटोप ^{40}K है। यह लगभग प्रतिवर्ष 20 millirem विकिरण उत्पन्न करता है।

14.5 दैनिक जीवन में रेडियोआइसोटोप

विद्युत ऊर्जा उत्पादन के अलावा शांतिपूर्ण नाभिकीय कार्यक्रम के और भी कई योगदान हैं जिनमें एक है रेडियोआइसोटोपों का उत्पादन। जैसा कि नाम से ही ज़ाहिर है, प्रकृति में पाए जाने वाले वे आइसोटोप, जो रेडियोएक्टिव भी होते हैं, रेडियोआइसोटोप कहलाते हैं। दैनिक जीवन में इनके विविध और बहुत सारे इस्तेमाल हैं। ये इस्तेमाल इन रेडियोआइसोटोपों से उत्सर्जित विकिरणों पर आधारित हैं। आप शायद इनके बारे में जानने के लिए उत्सुक हों। लेकिन इनके इस्तेमाल की चर्चा करने से पहले यह जानना बेहतर रहेगा कि इनका उत्पादन कैसे होता है।

14.5.1 रेडियोआइसोटोपों का उत्पादन

प्राकृतिक रूप से पाए जाने वाले रेडियोआइसोटोप तो 1896 से ही जाने जाते हैं, जब रेडियोएक्टिवता की ख़ोज हुई (इकाई 12)। लेकिन तब वे बहुत ही अल्प मात्रा में उपलब्ध थे और उनमें भी केवल कुछ ही तत्वों के आइसोटोप उपलब्ध थे (जैसे- रेडियम, पोलोनियम, थोरियम, यूरेनियम आदि)। सन् 1934 में कृत्रिम रेडियोएक्टिवता की खोज के बाद (जिसमें आवेशित कण नाभिकीय अभिक्रियाओं का इस्तेमाल किया गया था), बहुत से तत्वों के रेडियोआइसोटोपों का उत्पादन संभव हो सका। लेकिन तब भी इनकी सीमित मात्रा ही उपलब्ध हुई और वह भी बहुत महंगे दामों पर। सन् 1950 के दशक में नाभिकीय रिएक्टरों के बनने पर रेडियोआइसोटोपों की बहुत विविध और बड़ी मात्रा उपलब्ध हो सकी। आज विभिन्न कामों के लिए लगभग 170 रेडियोआइसोटोपों का इस्तेमाल होता है। इनमें से लगभग 120 शोध रिएक्टरों में उत्पन्न होते हैं और बाकी त्वरकों में उत्पन्न होते हैं (इकाई 15)।

[illegible] में रेडियोआइसोटोपों के उत्पादन के लिए अब विशेष व्यवस्था की गई है। जब [illegible]57 में अप्सरा रिऐक्टर काम करने लगा तब से इसकी शुरुआत हुई। अप्सरा से मिले

अनुभव के ज़रिए रेडियोआइसोटोप उत्पादन का कार्यक्रम आगे बढ़ा और 1960 में साइरस के बनने के बाद इसे विशेष बढ़ावा मिला। सन् 70 के दशक में ट्रॉम्बे में रेडियोआइसोटोपों का बड़े पैमाने पर उत्पादन करने के लिए सुविधाएं बनाई गईं। और इसी दशक में बड़ी मात्रा में ^{60}Co का उत्पादन किया जाने लगा। सन् 80 के दशक में ट्रॉम्बे में ध्रुव रिएक्टर को केवल आइसोटोपों के उत्पादन के लिए ही बनाया गया।

रेडियोआइसोटोपों के अनुप्रयोग,

- ट्रेसर (tracer) अध्ययनों,
- उत्सर्जित विकिरणों पर विभिन्न पदार्थों के प्रभाव,
- उत्सर्जित विकिरण की ऊर्जा।

पर आधारित हैं।

इनमें से रेडियोआइसोटोप ट्रेसर के सबसे ज़्यादा– एक-कोशीय प्राणियों के अध्ययन से लेकर समुद्र के तल पर तलछट की गति के अध्ययन तक– अनुप्रयोग हैं। रेडियो ट्रेसर के महत्वपूर्ण औद्योगिक अनुप्रयोग इस प्रकार हैं: ज़मीन के नीचे दबी हुई पाइप लाइनों में क्षरण का संसूचन, बांधों और नहरों में अवस्राव (seepage) का पता लगाना, तरल पदार्थों के प्रवाह का मापन आदि। विकिरण पर पदार्थों के प्रभाव पर आधारित रेडियोआइसोटोपों के अनुप्रयोग उद्योगों में बहुत प्रचलित हैं। इनमें शामिल हैं– अविनाशी परीक्षण (गामा रेडियोग्राफ़ के इस्तेमाल से) धात्विक पट्टियों की मोटाई का मापन आदि। विकिरण ऊर्जा के प्रमुख अनुप्रयोग हैं– चिकित्सा से जुड़े उत्पादों का रोगाणुनाशन, विकिरण उपचार और खाद्य पदार्थों का संरक्षण। अब हम इनके बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे।

14.5.2 ट्रेसर के रूप में आइसोटोप

इससे पहले कि हम रेडियोएक्टिव ट्रेसर के अनुप्रयोगों की चर्चा करें, यह जानना ज़रूरी है कि ट्रेसर क्या होता है। किसी भी वस्तु के अंदर गहराई में स्थित किसी भी चीज़ का पता लगाने के लिए जो पदार्थ हमारी मदद करता है, उसे ट्रेसर कहते हैं। हम ट्रेसर को कुछ उसी तरह की युक्तियों से मिलता जुलता मान सकते हैं जिनका इस्तेमाल चिड़ियों के प्रवास और अभिगमन से संबंधित अध्ययनों में किया जाता है। ट्रेसर एक ऐसा पदार्थ होना चाहिए जिसका संसूचन किया जा सके और जो उस तंत्र में पहले से ही मौजूद न हो जिस पर अध्ययन किया जा रहा है। साथ ही साथ इसे तंत्र के कार्यकलापों में किसी प्रकार का नुकसान नहीं पहुंचाना चाहिए। यहां हम संक्षेप में चर्चा करेंगे कि रेडियोआइसोटोपों का जानवरों और मनुष्यों के शरीर में रक्त प्रवाह के अध्ययन में, प्रकाश संश्लेषण में, तेल के प्रवाह में, धातुओं में स्व-विसरण में, जीर्णन अध्ययनों में, क्षरण संसूचन आदि में ट्रेसर के रूप में कैसे इस्तेमाल किया जाता है। ऐसा इसलिए संभव होता है क्योंकि भौतिक और रासायनिक अभिक्रियाओं में रेडियोआइसोटोप अपना अस्तित्व बनाए रखता है और सुग्राही संसूचकों की मदद से समय के हर क्षण पर उसके पथ का अनुसरण किया जा सकता है।

(क) रक्त प्रवाह का अध्ययन

मान लीजिए कि हम खाने के ज़रिए किसी भी प्राणी के शरीर में पहुंचे लोहे के पथ का अनुसरण करना चाहते हैं। इसे आप भोजन में मिले लोहे के साथ ^{59}Fe रेडियोआइसोटोप का लेबल लगा कर कर सकते हैं। शरीर का ज़्यादातर लोहा हीमोग्लोबिन में होता है (जिसके कारण लाल रक्त कोशिकाओं का रंग लाल होता है।) अब लोहे के साथ ^{59}Fe का लेबल लगा कर हम यह आशा करेंगे कि ^{59}Fe हीमोग्लोबिन में प्रवेश कर जाएगा और अपनी बीटा या गामा सक्रियता के ज़रिए नज़र आएगा। लेकिन ऐसा नहीं होता। यह

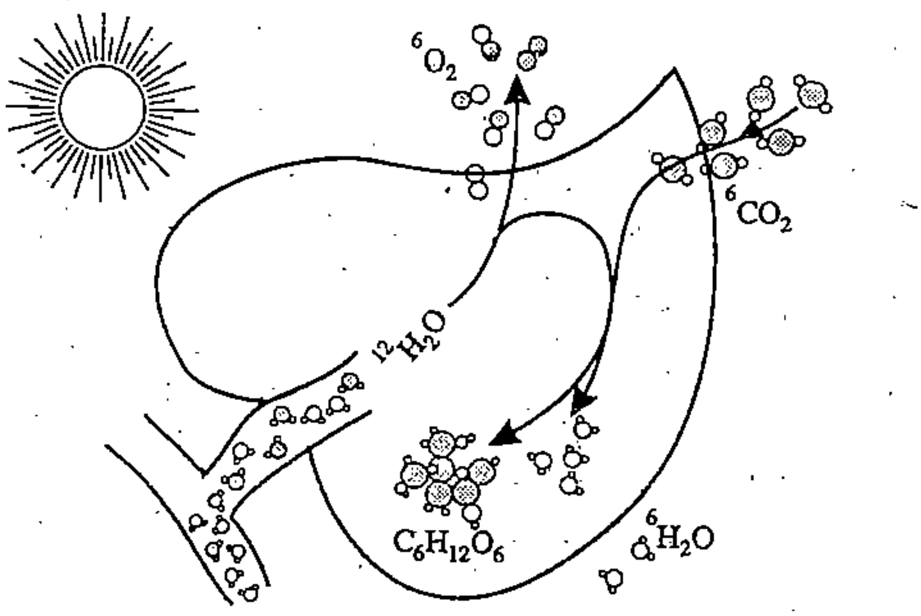
लोहा लौह-प्रोटीन संयोजन के रूप में (जिसे फेरिटिन कहते हैं) संचित हो जाता है। जब भी कभी शरीर से रक्त की हानि होती है, या तेज़ी से वृद्धि होती है या गर्भावस्था की स्थिति में, मह भंडारित लोहा इस्तेमाल होता है, तब फेरिटिन की मात्रा घट जाती है और तब शरीर भोजन से अपना लोहे का भंडार पूरा करने के लिए लोहा लेता है।

(ख) प्रकाशसंश्लेषण

यह सभी को पता है कि हरे पौधे सूर्य से प्रकाश की मौजूदगी में कार्बन-डाइ-आक्साइड और पानी से कार्बोहाइड्रेट्स बनाते हैं और इस प्रक्रिया में ऑक्सीजन छोड़ते हैं। इनमें से एक अभिक्रिया इस प्रकार है:

$$6CO_2 + 12H_2O + \text{सौर ऊर्जा} \xrightarrow{\text{क्लोरोफिल}} C_6H_{12}O_6 + 6H_2O + 6O_2$$

अब आप पूछ सकते हैं कि उत्सर्जित ऑक्सीजन का स्रोत क्या है–(CO_2 या पानी) या कार्बोहाइड्रेट में पाई जाने वाली कार्बन का स्रोत क्या है (CO_2 या ख़ुद पौधा)? इसका जवाब पाने के लिए हमें ऑक्सीजन के साथ स्थायी आइसोटोप ^{18}O और CO_2 में कार्बन के साथ रेडियो कार्बन ^{14}C का लेबल जोड़ना पड़ता है जैसा कि चित्र 14.7 में दिखाया गया है।



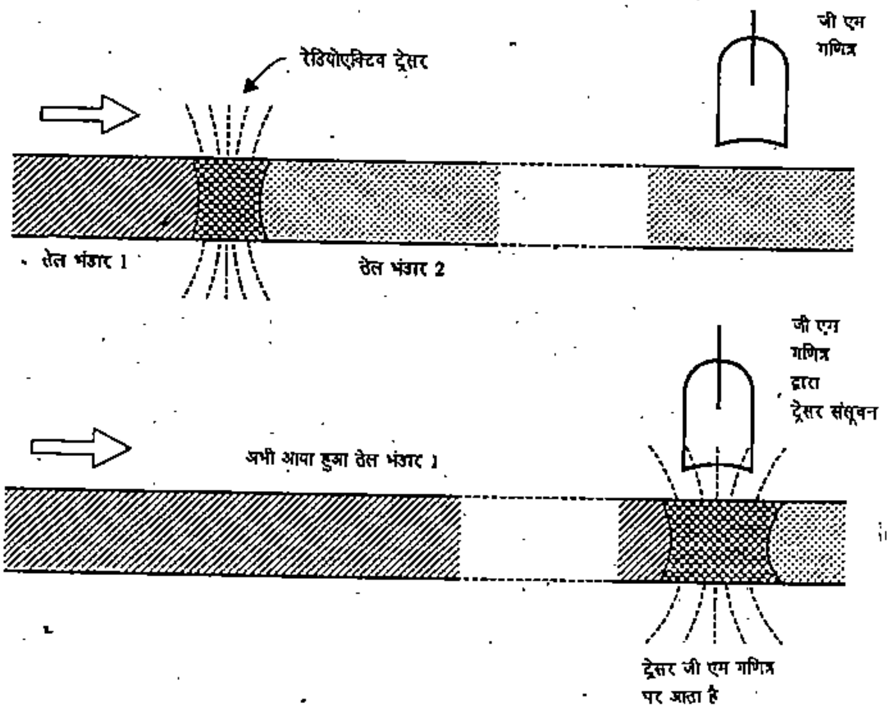
चित्र 14.7: प्रकाशसंश्लेषण में ट्रेसर का इस्तेमाल।

साधारण ऑक्सीजन में ^{18}O का केवल 0.2% होती है। जब ^{18}O से समृद्धित ऑक्सीजन पानी में मौजूद रहती है और पौधे द्वारा शोषित की जाती है तो प्रकाशसंश्लेषण में उत्सर्जित ऑक्सीजन भी ^{18}O में उतनी ही समृद्ध पाई जाती है। इसका मतलब यह हुआ कि पौधे द्वारा उत्सर्जित ऑक्सीजन तब बनती है, जब वह पानी के अणुओं का अपघटन करता है।

कार्बन के साथ अध्ययन के लिए प्रयोग में एक पोषक तरल माध्यम में रखी काई (एक-कोशीय हरे पौधे) में कार्बन-डाई-आक्साइड के बुलबुले भेजे गए। जब प्रकाशसंश्लेषण की प्रक्रिया हो रही थी तब ^{14}C मिला कुछ बाइकार्बोनेट विलयन उस माध्यम में मिला दिया गया। इस रेडियोकार्बन को मिलाने के 30 सेकंड के अंदर कोई 20, 30 यौगिक बन गये जिसमें यह आइसोटोप मौजूद था। इससे पता चला कि प्रकाशसंश्लेषण के दौरान पौधे CO_2 में मौजूद कार्बन का प्रयोग करते हैं और यह प्रक्रिया लगभग तात्क्षणिक होती है।

(ग) तेल प्रवाह

जब एक लम्बी पाइप-लाइन में विभिन्न तेल भंडारों से आ रहा तेल एक के बाद एक प्रवाहित किया जाता है तब यह ज़रूरी होता है कि उनके बीच के पृथक्कारी पृष्ठों (surface of separation) का पता लगाया जा सके और यह पता लगाया जा सके कि वे किस हद तक एक-दूसरे से मिल गये हैं। इस समस्या का निराकरण बहुत आसानी से तेल के दो भंडारों के बीच गामा-उत्सर्जक ट्रेसर डाल कर किया जा सकता है। इसमें आमतौर पर एन्टीमनी (^{124}Sb) का इस्तेमाल किया जाता है जिसकी अर्ध आयु 60 दिन है और वह स्थायी ^{124}Te में परिवर्तित हो जाता है। इस प्रक्रिया में वह 1.69 MeV ऊर्जा तक की बीटा और गामा किरणें उत्सर्जित करता है। जैसे-जैसे तेल प्रवाहित होता है, उसमें डाला गया ट्रेसर भी उसके साथ चलता है। और इस तरह वह दो तरह के तेलों के बीच में अंतः पृष्ठ को चिन्हित कर देता है। अगर ये तेल एक-दूसरे से मिल जाते हैं तो ये ट्रेसर उन्हीं के साथ कुछ फैल जाता है। ट्रेसर से उत्सर्जित गामा किरणें पाइप लाइन की दीवार का भेदन कर सकती हैं और पाइप लाइन के दूसरी ओर एक गणित्र रख दिया जाए तो इनका संसूचन भी किया जा सकता है। जब गणित्र गिनती शुरू कर दे तब तेल के नये भंडार के आगमन की सूचना मिलती है।



चित्र 14.8: पाइप लाइन में तेल का प्रवाह।

(घ) धातुओं में स्व-विसरण

ट्रेसर तकनीक की सहायता से अब हम इस बात का अध्ययन कर सकते हैं कि धातु के क्रिस्टल लैटिस में परमाणु किस तरह गति करते हैं। उदाहरण के लिए, तांबे (कॉपर) के एक खंड में आम तौर पर ^{63}Cu और ^{65}Cu परमाणु होते हैं। तांबे के परमाणुओं के स्व-विसरण पर शोध करने के लिए इस खंड में हम ^{67}Cu (अर्ध आयु = 59 घंटे) मिली हुई कॉपर की एक सतह शामिल कर देते हैं। कॉपर खंड पर हम जिस भी प्रभाव का चाहें अध्ययन कर सकते हैं। फिर हम खंड पर से कॉपर की सतहें खुरच लेते हैं। और इन सतहों में ^{67}Cu की सक्रियता से पता लगता है कि खंड में कॉपर का कितना स्व-विसरण (self diffusion) हुआ।

(च) जीर्णन अध्ययन

किसी इंजन की जीर्णन दर (wear rate) के या भिन्न परिस्थितियों में कार्यरत मशीन के

भागों या काटने वाले औज़ारों के जीर्णन के मापन के पुराने तरीक़ों में बहुत समय और बहुत मेहनत लगती थी। रेडियो ट्रेसर की मदद से इस दर को न केवल परिशुद्धता के साथ लगातार मापा जा सकता है बल्कि इसमें समय और पैसे दोनों की बचत होती है। जिस अवयव के जीर्णन का मापन करना है, उसमें किसी नाभिकीय रिएक्टर से प्राप्त न्यूट्रॉनों को डालकर या फिर साइक्लोट्रॉन से प्राप्त प्रोटॉनों या ड्यूटरॉनों जैसे आवेशित कणों का इस्तेमाल करके उसे रेडियोएक्टिव बना दिया जाता है। इस तरह से विकिरित अवयव को एक परीक्षण कक्ष में रखा जाता है। और फिर उस कक्ष में रखे स्नेहक तेल में स्थित उस घटक के मलबे की रेडियोएक्टिवता को एक स्फुरण संसूचक द्वारा मापा जाता है। पुणे में इस तकनीक पर आधारित किए गए अध्ययनों में अलग-अलग तरह के पिस्टन वलयों की टूट-फूट का जल्दी से पता लगाया जा सका है। और साथ ही साथ पिस्टन वलय की संरचना के साथ उसकी टूट-फूट के सहसंबंध का भी पता लगाया जा सका है।

(छ) हाइड्रोलॉजी

हाइड्रोलॉजी और जल प्रबंधन में भी रेडियोआइसोटोपों का इस्तेमाल किया जाता है। भूमिगत जल में पुनः पूरण (recharge) का मापन करने में भी ये काफ़ी महत्वपूर्ण रहे हैं। इसमें ट्राइटियम ट्रेसर की मदद से नमी की सतह को चिन्हित किया जाता है। इसके साथ ही साथ नहरों और बांधों में रिसन का पता लगाने तथा नदियों और नहरों के प्रवाह के मापन में भी रेडियोआइसोटोपों का काफ़ी इस्तेमाल होता है। इन सभी अनुप्रयोगों के लिए या तो तकनीकें उपलब्ध ही नहीं हैं या फिर उपलब्ध तकनीकें इतनी परिशुद्धता से मापन के लिए इस्तेमाल नहीं की जा सकतीं। भारत में रेडियोआइसोटोप का इस्तेमाल करके सूखे इलाकों में भूमिगत जल में पुनः पूरण की माप की गई है। बांधों और जलागारों (जैसे श्रीशैलम बांध, अलियार बांध) से रिसन की माप की गई है और ताप्ती और व्यास जैसी प्रक्षुब्ध (turbulent) नदियों में पानी के विसर्जन की माप की गई है। पर्यावरणीय आइसोटोप तकनीकों से जल प्रबंधन कार्यक्रमों के लिए बहुत मूल्यवान जानकारियां मिली हैं। और इनका इस्तेमाल करके महाराष्ट्र में अंतः स्रवण (percolation) टैंकों की दक्षता, तमिलनाडु में तटीय जलभरों में नमकीन पानी के अंतर्वेधन (intrusion) आदि का मापन किया जा सका है।

(ज) क्षरण संसूचन

ज़मीन के नीचे दबी हुई पाइप-लाइनों से क्षरण (leakage) का पता लगाने के लिए और रासायनिक संयंत्रों में रखे उपकरणों से रसायनों के क्षरण का पता लगाने के लिए भी रेडियोआइसोटोपों का इस्तेमाल किया जाता है। ज़मीन के नीचे दबी पाइप-लाइनों से क्षरण का पता आम तौर पर इस तरह लगाया जाता है: पूरी की पूरी पाइप-लाइन के ऊपर से मिट्टी हटाई जाती है और फिर जहां भी यह शक हो कि पाइप-लाइन का यह हिस्सा टूटा है, उस हिस्से को देखकर पता लगाया जाता है कि पाइप-लाइन कहां पर टूटी है। यह तरीक़ा बहुत ज़्यादा वक्त लेता है और बहुत महंगा भी पड़ता है। लेकिन ट्रेसर तकनीक के इस्तेमाल से इस क्षरण का पता पाइप-लाइन के ऊपर से मिट्टी हटाए बिना लगाया जा सकता है। इसके लिए इस्तेमाल की जाने वाली एक तकनीक में, पाइप-लाइन में एक रेडियोट्रेसर विलयन भर दिया जाता है, जो कि ऊंचे दाब पर होता है। अब जहां भी जिस बिन्दु पर क्षरण हो रहा है वहां से इस रेडियो ट्रेसर का एक छोटा सा हिस्सा निकलकर मिट्टी में पहुंच जाता है। इसके बाद पाइप-लाइन में पानी बहाया जाता है और फिर पाइप-लाइन के अनुदिश विकिरण संसूचक चलाकर उस बिन्दु का पता लगा लिया जाता है जहां पर कि क्षरण हो रहा है। इस तकनीक का इस्तेमाल करके 140 किलोमीटर लम्बी विरामगांव कोयाली पाइप-लाइन में क्षरण का पता लगाया गया। छः हफ़्ते के अंदर पांच जगह छोटी मात्रा वाले क्षरण का पता लगाया गया और इस तरह से इस पाइप-लाइन को समय से काम में लाया जा सका। पारंपरिक विधियों से

अगर इस काम को किया जाता तो इसे समाप्त करने में एक साल लगता और लगभग 10 गुना ज़्यादा पैसे लगते। इसी तरह बम्बई में तेल परिशोधन संयंत्र और पुणे के निकट स्थित पेट्रोलियम भंडारण और वितरण केन्द्र के बीच पड़ी पाइप-लाइन पर यही तकनीक लगाकर उसे शुरू करने से पहले उसमें छोटी मात्रा वाले क्षरण का पता लगाया जा सका।

ये सभी उदाहरण हमने अलग अलग क्षेत्रों से लिए हैं ताकि आप समझ सकें कि ट्रेसर तकनीक इतनी उपयोगी क्यों है। ऐसे ही तमाम और भी अनुप्रयोग किए जा चुके हैं और इसके और भी नये नये उपयोग (जैसे-जैसे ज़रूरत पड़े), सोचे जा सकते हैं। अगर आप इस बारे में और ज़्यादा जानकारी चाहते हैं तो मुम्बई स्थित बार्क द्वारा प्रकाशित पत्रिका न्यूक्लिअर इंडिया देखें।

14.5.3 आइसोटोपों से नाभिकीय विकिरण

अब आप जान गऐ हैं कि नाभिकीय विकिरण की ज़्यादा मात्रा घातक हो सकती है लेकिन हमें इनसे डरना नहीं चाहिए। आज ये मानवीय गतिविधियों में बहुत सारे उपयोगों के लिए इस्तेमाल होती हैं। आप न्यूट्रॉनों द्वारा नाभिकीय विखंडनों की घटना से परिचित हैं और जानते हैं कि विद्युत ऊर्जा उत्पादन के लिए इसका कैसे इस्तेमाल किया जा सकता है। इसके और भी महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं– चिकित्सा, कृषि, उद्योग और अनुसंधान के क्षेत्रों में। अब हम इनमें से कुछ का अध्ययन करेंगे।

(क) रेडियोग्राफ़ी

आप एक्स-किरणों के चिकित्सा संबंधी उपयोगों से तो परिचित हैं। एक्स-किरणों का इस्तेमाल करके हड्डियों की तस्वीरें और शरीर के आंतरिक अवयवों की भी तस्वीरें खींची जाती हैं। धातुओं में जोड़ों का और उनसे बने सांचों का परीक्षण करना हो तो भी एक्स-किरणों का इस्तेमाल किया जाता है। लेकिन इनके साथ एक कमी यह है कि एक्स-किरणों का उत्पादन करने वाले उपकरणों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर नहीं ले जाया जा सकता। इसके साथ ही साथ यह ज़रूरी नहीं कि ये हर स्थिति या हर अवयव तक पहुंच सकें। इनके मुकाबले रेडियोएक्टिव गामा स्रोत ज़्यादा छोटे होते हैं और इस कारण से ज़्यादा उपयोगी होते हैं।

मान लीजिए कि हम एक धातु के सांचे में कुछ दरारों या बुलबुलों जैसी खामियों का परीक्षण करना चाहते हैं। इस नमूने पर हम एक गामा स्रोत से निकली गामा किरणें डालते हैं और नमूने से निकलने वाली किरणों को ग्रहण करने के लिए उसके पीछे एक फ़ोटोग्राफ़ी की प्लेट रखते हैं। तब अगर सांचे में कोई भी असमानताएं हैं, तो उनकी तस्वीर इस फ़ोटोग्राफ़ी की प्लेट पर बन जाएगी। इस तरह उद्योगों में सांचों के नियमन के लिए और जोड़ लगे हुए पाइप या इसी तरीक़े से बनाए गए मशीन के अवयवों के परीक्षण के लिए रेडियोग्राफ़ी की काफ़ी महत्वपूर्ण भूमिका है।

गामा स्रोत का चयन कैसे किया जाता है? यह इस बात पर निर्भर करता है कि गामा किरणों की भेदन क्षमता (या ऊर्जा) कितनी है और उनकी अर्द्ध आयु कितनी है? आम तौर पर, जो गामा स्रोत इस्तेमाल किए जाते हैं वे हैं ^{60}Co (1.33, 1.17 MeV), ^{137}Cs (0.662 MeV), ^{192}Ir (0.47 MeV), ^{145}Sm (0.061 MeV) और ^{125}I (0.035 MeV)। ब्रैकेट में दी गई राशियां गामा किरणों की ऊर्जाएं दिखाती हैं। भारतीय उद्योगों में लगभग 600 से ज़्यादा γ रेडियोग्राफ़ी कैमरे, ^{192}Ir की 100Ci का और ^{60}Co की 20Ci का इस्तेमाल करते हैं और उनकी मदद से उच्च दाब पात्रों (vessels), समुद्री जहाज़ों, हवाई जहाज़ों, नाभिकीय और तापीय विद्युत संयंत्रों, रासायनिक खाद और पेट्रोलियम उत्पाद बनाने वाले संयंत्रों आदि का परीक्षण किया जाता है। विकिरण के स्रोत और गामा रेडियोग्राफी का उपकरण बार्क (BARC) देता है।

(ख) विद्युत ऊर्जा उत्पादन

रेडियोआइसोटोपों का लघु और स्वयंपूर्ण (self contained) ऊर्जा स्रोतों के रूप में भी इस्तेमाल हो सकता है। जब उनसे निकले विकिरण पदार्थ द्वारा अवशोषित किए जाते हैं तो उनकी ऊर्जा अंततः ऊष्मा में बदल जाती है। हम एक ताप वैद्युत युग्म या एक तापीय उत्सर्जन युक्ति का इस्तेमाल करके इस ऊष्मा से विद्युत उत्पादन कर सकते हैं। इसके लिए बीटा उत्सर्जन करने वाले स्रोत ज़्यादा बेहतर समझे जाते हैं क्योंकि ये कण पदार्थ की कम मोटाई वाली पन्नियों द्वारा अवशोषित किए जा सकते हैं और इनकी मदद से ज़्यादा बड़ी तापमान वृद्धि हासिल की जा सकती है।

इसके लिए आम तौर पर ^{90}Sr, ^{137}Cs, ^{210}Po, ^{238}Pu आदि स्रोत इस्तेमाल किए जाते हैं। SNAP-3 (SNAP = Systems for Nuclear Auxiliary Power) इनमें से एक प्रतिरूपी ऊर्जा स्रोत है जिसमें एक ^{210}Po स्रोत रहता है, जिसके चारों ओर श्रेणी में ताप वैद्युत युग्म की तप्त संधियां रखी होती हैं। इनकी तप्त संधि और शीत संधि क्रमशः 550°C और 150°C पर रखी जाती हैं और इनमें से प्रत्येक युग्म 5 W विद्युत शक्ति उत्पन्न करता है।

इस किस्म के आइसोटोप ऊर्जा स्रोतों का उपग्रहों में, मौसम के ऐसे स्टेशनों में जहां मानव उपस्थित नहीं होते और लाइट हाउस आदि में इस्तेमाल किया जाता है। उनके कार्यकारी जीवन काल का मान इन रेडियोआइसोटोपों की अर्द्ध आयु पर निर्भर करता है। 1969 में पहला मौसम उपग्रह, जिसमें PuO_2 का ईंधन के रूप में इस्तेमाल किया गया था छोड़ा गया।

चंद्रमा पर भेजे गऐ अपोलो अंतरिक्ष यानों में रेडियो आइसोटोप विद्युत उत्पादन यंत्रों के अभूतपूर्व अनुप्रयोगों का इस्तेमाल किया गया। पहली बार ^{238}Pu से चल रहे हीटर का इस्तेमाल अपोलो 11 के भूकंपमापी यंत्र में उसे गर्म रखने के लिए किया गया। अपोलो 12 अंतरिक्ष यान ने चन्द्रमा पर एक SNAP-27 जेनेरेटर छोड़ा। उसकी मदद से 63 W विद्युत शक्ति का उत्पादन किया जा सका। उसका ईंधन स्रोत भी ^{238}Pu था।

(ग) विकिरण रसायन

हम नाभिकीय विकिरण का इस्तेमाल बहुत सी अभिक्रियाओं में उत्प्रेरक के रूप में कर सकते हैं और इसका एक फ़ायदा यह होता है कि इसके कोई सह-उत्पाद नहीं होते। इसका सबसे आम उदाहरण है– बहुलक (polymer) बनाने की प्रक्रिया में बीटा और गामा विकिरण का इस्तेमाल। इस प्रक्रिया में एकलक (monomer) के छोटे-छोटे अणुओं की लम्बी श्रृंखला जिसे बहुलक कहते हैं, बनाई जाती है।

एक नाभिकीय रिएक्टर में विखंडन अवयवों से घटकों की प्रतिक्रिया करवा कर बहुत से रासायनिक यौगिक बनाए गए हैं। इस प्रक्रिया का इस्तेमाल करके पानी से हाइड्रोजन पेरॉक्साइड, ऑक्सीजन से ओज़ोन, अमोनिया से हाइड्राज़ीन (hydrazine) आदि बनाए गए हैं।

(घ) रोगाणुनाशन और खाद्य संरक्षण

विकिरण की मदद से बैक्टीरिया और अन्य सूक्ष्म जीवों को नष्ट किया जा सकता है। दो से पांच millirad विकिरण सभी तरह के बैक्टीरिया को मार सकता है जबकि इसका 10% मात्र पास्तेरीकरण (pasteurization) कर सकता है यानी इतने बैक्टीरिया को नष्ट कर सकता है कि खाद्य पदार्थ काफ़ी समय तक संरक्षित रहे। इस प्रकार मछली, मांस, फल या सब्ज़ी आदि के संरक्षण का एक आसान तरीक़ा है कि उन पर कम ताप पर विकिरण डाला जाए। इसी तरीक़े से ^{60}Co से उत्सर्जित गामा किरणों का इस्तेमाल करके शल्य क्रिया में काम आने वाली पट्टियों, इंजेक्शन की सुइयों आदि को रोगाणुरहित किया जा सकता है।

(च) उद्योग

रेडियो आइसोटोपों के उद्योग में तरह तरह के अनुप्रयोग हैं। कागज़, प्लास्टिक फिल्में, धातु या रबर की शीट बनाने वाली फैक्टरियों में विकिरण की मदद से पट्टियों की मोटाई मापी जा सकती है। इसके लिए आपको विकिरण के स्रोत और संसूचक के बीच उस पदार्थ की शीट को रखना होगा जिसकी मोटाई मापनी है, धातुओं के लिए γ-स्रोत का और कम अवशोषण करने वाले पदार्थों के लिए β-स्रोत का इस्तेमाल करना पड़ेगा। शीट की मोटाई में अगर कोई असमानताएं हैं तो वे संसूचक द्वारा गणित्र में आ रही विकिरण गणना दर में अंतर के द्वारा पता लग जाती हैं। एल पी जी सिलिंडर के भरने का परीक्षण करने के लिए भी रेडियो आइसोटोप प्रमापी (gaugc) का इस्तेमाल किया जाता है। आज की तारीख में भारतीय उद्योग में ऐसे 1500 से ज़्यादा प्रमापी इस्तेमाल होते हैं।

आपने कुछ घड़ियों में चमकने वाले अंकों को देखा होगा। ये अंधेरे में भी कैसे चमकते रहते हैं? इनके ऊपर एक ख़ास तरह का पेंट किया जाता है। कुछ स्फुरदीप्त पदार्थों जैसे कि ज़िंक सल्फाइड में कुछ बीटा कणों का उत्सर्जन करने वाले आइसोटोपों को मिलाकर इन रंगों को बनाया जाता है। बीटा कण स्फुरदीप्ति उत्पन्न करते हैं और इस प्रकार अंधेरे में भी वह पेंट चमकता हुआ दिखता है।

(छ) सक्रियण विश्लेषण

कभी-कभी किसी पदार्थ में किसी दूसरे पदार्थ की गौण मात्राएं मिली होती हैं और उस मिलावट का रासायनिक विधियों से पता लगाना बहुत मुश्किल होता है। लेकिन अगर आप मिलावट मिले हुए पदार्थ पर उपयुक्त विकिरण डालें जैसे--न्यूट्रॉन या कोई आवेशित कण तो वह उन मिलावटी नाभिकों को रेडियो आइसोटोपों में बदल सकता है। फिर इन आइसोटोपों द्वारा उत्सर्जित विकिरण और उनकी अर्द्ध आयु से पता लगाया जा सकता है कि उस पदार्थ में किस चीज की मिलावट की गई है। इस विधि से पदार्थों में बहुत गौण मात्रा में हुई मिलावट (10^{-6} g से 10^{-12} g तक) का भी संसूचन किया जा सकता है। सक्रियण विधि किन्हीं दो नमूनों में किसी तत्व की आइसोटोपी संरचना में भिन्नता का पता लगाने के भी काम आती है। और इस काम को रासायनिक विश्लेषण से तो किया ही नहीं जा सकता।

14.5.4 कृषि में रेडियोआइसोटोप

हाल के कुछ सालों में रेडियोआइसोटोपों का कृषि अनुसंधान में भी बहुत उपयोग हुआ है। इस अनुसंधान से कृषि और मृदा प्रबंधन के बेहतर तरीक़ों का विकास मुमकिन हुआ है। मृदा में फ़ॉस्फ़ोरस, कैल्सियम, सल्फ़र आदि जैसे ज़रूरी पोषण तत्वों की क्या भूमिका होती है, इसकी जानकारी हासिल करने के लिए रेडियोआइसोटोप मिले रासायनिक खाद का इस्तेमाल किया गया है।

पौधों की वृद्धि बढ़ाने के लिए फ़ॉस्फ़ोरस मृदा में मिलाया जाता है। आजकल तरह-तरह के फ़ास्फ़ेट वाली रासायनिक खाद मिलती है। और तब किसानों के लिए यह जानकारी उपयोगी रहती है कि किसी खास तरीक़े की भूमि के लिए इनमें से कौन सी रासायनिक खाद सबसे ज़्यादा उपयोगी है। वास्तव में हम अलग-अलग मौसम, अलग-अलग भौगोलिक स्थितियों में पाए जाने वाली, अलग-अलग किस्म की मृदा में इस्तेमाल की जाने वाली रासायनिक खाद का प्रयोग इनकी मदद से नियंत्रित कर सकते हैं। एक ऐसी रासायनिक खाद का इस्तेमाल करके, जिसमें रेडियो फ़ॉस्फ़ोरस भी मिलाया गया है, यह जानकारी हासिल की जा सकती है कि उस विशेष रासायनिक खाद से कोई पौधा कितना फ़ॉस्फ़ोरस अवशोषित करता है। इस प्रकार उस मृदा के लिए सबसे ज़्यादा उपयुक्त रासायनिक खाद का चुनाव आसान हो जाता है। अगर रेडियो फ़ॉस्फ़ोरस का इस्तेमाल न किया जाए तो

फिर मिट्टी से आये फ़ॉस्फ़ोरस और रासायनिक खाद से आये फ़ॉस्फ़ोरस में अंतर करना मुश्किल हो जाएगा।

(क) फ़सल उत्परिवर्तन

पादप आनुवंशिकी अध्ययनों द्वारा यह संभव हुआ है कि ऐसी फसलें और सब्ज़ियां आदि लगाई जा सकें जिनका बड़ी मात्रा में उत्पादन होता हो, जिनमें रोगों के लिए प्रतिरोध शक्ति हो, जिन्हें आसानी से उगाया जा सके और जो किसी भी नई परिस्थिति में आसानी से अनुशीलन करती हों। आम तौर पर तो यह होता है कि एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी में पौधों या फसलों में कुछ प्राकृतिक परिवर्तन होते हैं लेकिन उन परिवर्तनों में ज़रूरी नहीं कि हम जिन गुणों की अपेक्षा करते हैं, पौधों में वे गुण आ ही जाएं। इसलिए एक ज़्यादा सस्ता और सुलभ विकल्प यह है कि अलग-अलग तरीकों और तीव्रताओं के विकिरण को बीजों और पूरे-पूरे पौधों पर डाला जाए। इस तरह गामा किरणों या न्यूट्रॉनों को बीजों पर डाल कर उनके पौधों में इच्छित गुणधर्म पाए जा सकते हैं। इस तरह से उच्च कोटि के गेहूं, बाजरा और चावल और पटसन आदि के बीज जिनमें कुछ विशेष प्रकार के रोगों के प्रति प्रतिरोधक क्षमता है जुटाए जा सकते हैं। भारत में बीजों, मसालों और सब्जियों आदि के लिए बहुत से बेहतर गुणधर्मों वाले बीज विकसित किए जा चुके हैं।

चित्र 14.9 : BARC में विकसित उन्नत मूंगफली

(ख) कीट नियंत्रण

कुछ किस्म के कीड़ों पर एक ख़ास तकनीक के इस्तेमाल से काबू पाया जा सकता है। इस तकनीक में प्रयोगशाला में बहुत बड़ी तादाद में नर कीड़ों का उत्पादन किया जाता है और उन पर विकिरण डाला जाता है और फिर उन्हें छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार विकिरण से उपचारित ये नर कीड़े आम स्वस्थ कीड़ों से तादाद में कहीं ज़्यादा होते हैं और वे उनसे स्पर्धा में जीतकर मादा कीड़ों से सम्भोग करते हैं। इसके परिणामस्वरूप इनमें से ज़्यादातर मादा कीड़े ऐसे अंडे देती हैं जिनसे और कीड़े पैदा नहीं होते। इस प्रकार कीड़ों की आबादी बहुत तेज़ी से ख़त्म हो जाती है। संयुक्त राज्य अमरीका के कुछ हिस्सों में एक प्रकार का कीड़ा, जो जानवरों को बहुत नुकसान पहुंचाता है, इसी प्रक्रिया से नष्ट किया जा सका।

इतने विविध उपयोगों के चलते रेडियोआइसोटोप से मानवता को काफी लाभ पहुंचा है। लेकिन यह तो सिर्फ़ शुरुआत है; इनका पूरा पूरा, फ़ायदा उठाने में तो बहुत समय बाकी है।

इस इकाई में आपने जो कुछ भी पढ़ा है, अब हम उसका सार दे रहे हैं।

14.6 सारांश

- एक विखंडन श्रृंखला अभिक्रिया में जब न्यूट्रॉन की उत्पादन दर उनकी हानि की दर के बराबर हो जाती है, तो उस प्रक्रिया को स्वपोषी (self-sustained) कहते हैं। इस तरह की पहली प्रक्रिया सन् 1942 में ई. फ़र्मी द्वारा प्राप्त की गई। उन्होंने ग्रेफ़ाइट का इस्तेमाल करके न्यूट्रॉनों की गति को कम किया और फिर उनकी मदद से एकसमान दूरी पर रखी हुई यूरेनियम छड़ों में विखंडन किया।
- एक श्रृंखला अभिक्रिया में न्यूट्रॉनों का समय के साथ व्यवहार इस संबंध से सन्निकटित किया जाता है:

$$N(t) = N(0) \exp[(k-1)\, t/l]$$

- अभी तक उत्पन्न नाभिकीय ऊर्जा, तापीय रिएक्टरों की मदद से आई है, जहां 0.0253 eV न्यूट्रॉनों के द्वारा विखंडन किया जाता है।
- भारतीय नाभिकीय ऊर्जा कार्यक्रम के तीन चरण हैं। पहले चरण में कनाडा द्वारा डिज़ाइन किए गए नाभिकीय रिएक्टरों का, जिनमें न्यूट्रॉनों की गति को धीमा करने के लिए भारी पानी का इस्तेमाल होता था, निर्माण किया गया। दूसरे चरण में, प्लूटोनियम ईंधन का इस्तेमाल करके द्रुत ब्रीडर रिएक्टर बनाए गए, जो ^{232}Th से ^{233}U बनाते हैं और ऊर्जा का उत्पादन करते हैं। तीसरे चरण में, हम थोरियम ईंधन का इस्तेमाल करे ऊर्जा रिएक्टर बनाने जा रहे हैं।
- आजकल भारत में 10 रिएक्टर हैं जो 2170 MWe की ऊर्जा उत्पादित करते हैं और यह उम्मीद की जाती है कि इस सदी के अंत तक हम 3000 MWe से 40000 MWe ऊर्जा का उत्पादन करेंगे।
- नाभिकीय विकिरण इस ग्रह पर जीवन के विकास का एक अभिन्न अंग रहा है और अभी तक उसका जीवन पर कोई प्रतिकूल प्रभाव नहीं पड़ा है। लेकिन मानव द्वारा निर्मित कृत्रिम स्रोतों के कारण पर्यावरण में विकिरण स्तर के बढ़ जाने से अब बहुत सारे ख़तरे पैदा हो गए हैं।
- नाभिकीय विकिरण के दो तरह के जैविक प्रभाव होते हैं: कायिक और आनुवंशिक। इनमें भी तेज़ गति से चलने वाले न्यूट्रॉनों के सबसे अधिक ख़तरनाक प्रभाव होते हैं।
- रेडियोआइसोटोपों और इनसे उत्पन्न विकिरणों का ट्रेसर के तौर पर रेडियाग्राफ़ी में, उपग्रहों में और उन मौसम के स्टेशनों पर जहां मनुष्य नहीं होते विद्युत उत्पादन के लिए इस्तेमाल किया जा रहा है। इनकी मदद से खाद्य भंडारों के संरक्षण के लिए भी कई उपाय किए गए हैं। उद्योग और कृषि में भी इनके महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं।

14.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. ढले हुए लोहे का बना एक पानी का पाइप गीली मिट्टी के नीचे दबा है और शायद उसमें से क्षरण हो रहा है। कोई तरीक़ा सुझाइए कि ट्रेसर की मदद से इस क्षरण का पता लगाया जा सके।
2. एक पदार्थ X का बीटा उत्सर्जन द्वारा क्षय उत्पाद Y में क्षय होता है। अपनी उत्पत्ति के समय पर एक पत्थर में X की कुछ मात्रा थी लेकिन Y की बिल्कुल नहीं। Y और X की मात्राओं का क्या अनुपात होगा जब उस पत्थर की आयु क्रमशः $T/20$, T और $20\ T$ हो जहाँ T, X की अर्धआयु है। इस समस्या के परिणाम से यह भी व्याख्या करें कि काल निर्धारण में किसी ऐसे आइसोटोप का इस्तेमाल करना क्यों ज़रूरी है जिसकी अर्द्ध आयु मापे जाने वाले काल के तुलनीय हो।
3. लकड़ी के एक मृत नमूने से एक घंटे में 36 β कण उत्सर्जित होते हैं। यह मालूम है कि लकड़ी द्वारा β कणों का स्वशोषण 40 प्रतिशत है। इस नमूने की आयु की गणना करें।

14.8 हल और उत्तर

अंत में कुछ प्रश्न

1. इस क्षरण का पता लगाने के लिए जहां शक है कि क्षरण हो रहा है, वहां पानी में β कण उत्सर्जित करने वाला एक पदार्थ मिला दिया जाता है जो पानी में घुलनशील है। और फिर पाइप के किनारे-किनारे β उत्सर्जन की सक्रियता का संसूचन किया जाता है। पाइप बाकी सभी जगहों पर उत्सर्जित β कणों को अपने अंदर रोक लेगा। उत्सर्जन की सक्रियता केवल क्षरण वाली जगह पर ही संसूचित की जा सकती है। और इस तरह से यह पता लगाया जा सकता है कि पाइप में कहां से रिसाव हो रहा है।

2. Y की मात्रा/X की मात्रा = क्रमशः 0.0353,1 और 1.048×10^6। जब मापी जाने वाली आयु अर्द्ध आयु की तुलना में बहुत छोटी होती है तो क्षय उत्पाद की मात्रा बहुत कम होती है और उसका यथार्थता से मापन नहीं किया जा सकता। दूसरी ओर जब यह आयु बहुत लम्बी होती है, तो लगभग सारे के सारे जनक आइसोटोप का क्षय हो चुका होता है और तब जनक की मात्रा का सही-सही मापन नहीं किया जा सकता। इस तरह यह ज़रूरी है कि जिस भी समयांतराल का निर्धारण करना हो, आइसोटोप की अर्द्ध आयु लगभग उसके बराबर ली जाए।

3. प्रति मिनट प्रति ग्राम यथार्थ उत्सर्जनों की संख्या $= \dfrac{360}{0.6 \times (60\ \text{min}) \times (25\ \text{g})}$

$$= 4.0/\text{min/g}$$

अत: अपेक्षित आयु $= \dfrac{1}{1.21 \times 10^{-4}} \ln\left(\dfrac{15.3}{4.0}\right)$

$$= 11100\text{y}$$

इकाई 15 मूल कण

इकाई की रूपरेखा

15.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने नाभिकों की संरचना के बारे में और न्यूक्लिऑनों को बांधे रखने वाले बलों के बारे में जानकारी हासिल की है। नाभिकों के गुणधर्मों का अध्ययन करने के लिए डिज़ाइन किए गए प्रयोगों से नए नए कणों की खोज भी हुई। आप इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन, न्यूट्रॉन और फ़ोटॉन के बारे में तो जानते ही हैं। मुक्त न्यूट्रॉन और शायद प्रोटॉन को छोड़कर ये सभी कण स्थायी होते हैं: अगर उनकी किसी से अभिक्रिया न हो, तो वे हमेशा ही वैसे ही बने रहेंगे। उच्च ऊर्जा संघट्टनों में, ऊर्जा के द्रव्यमान में बदलने के कारण बहुत से अस्थायी कणों का जन्म होता है।

इनमें से एक कण पॉज़िट्रॉन (positron) के अस्तित्व की भविष्यवाणी डिराक ने 1928 में की जब उन्होंने इलेक्ट्रॉन के गुणधर्मों का वर्णन करने के लिए अपना गणितीय सिद्धांत दिया। पॉज़िट्रॉन के बारे में, जो तब एकदम अनजान कण था यह माना जाता था कि वह ठीक इलेक्ट्रॉन के जैसा है लेकिन उसका विद्युत आवेश धनात्मक है। डिराक के सिद्धांत के इस परिणाम का प्रायोगिक प्रमाण 1932 में मिला जब एंडरसन कॉस्मिक किरणों पर काम कर रहे थे। यह घटना इस बात की एक बहुत ही ख़ूबसूरत मिसाल है कि तर्क का सहारा लेकर इंसानी दिमाग प्रकृति के रहस्यों की कितनी गहराई तक खोजबीन तक कर सकता है। आप इन बातों के बारे में भाग 15.2 में पढ़ेंगे। हां, इन्हें समझने के लिए हम गणित की भाषा का प्रयोग नहीं करेंगे।

इस खोज के बाद जल्दी ही पॉज़िट्रॉन को कृत्रिम रूप से प्रयोगशाला में भी उत्पादित किया जा सका। ऐसा करने के लिए, और त्वरित्रों से मिले उच्च ऊर्जा वाले आवेशित कणों – प्रोटॉन या इलेक्ट्रॉन के किरण-पुंजों – द्वारा कुछ पदार्थों की बमबारी की गई जिनके फलस्वरूप पॉज़िट्रॉन उत्पन्न हुए। मूल कणों की खोजबीन के शुरुआती दौर के बारे में हमने भाग 15.3 में चर्चा की है। भाग 15.4 में हमने कण त्वरित्रों के सिद्धांतों के बारे में बताया है जिनके द्वारा इन कणों का उत्पादन होता है। साथ ही साथ हमने कण संसूचकों के बारे में (जिनकी मदद से इन्हें देखा जाता है) कुछ सामान्य जानकारी

दी है। इस भाग को पढ़कर आप यह समझ सकेंगे कि नाभिकीय अनुसंधान के लिए त्वरित्र कितने बेहतरीन यंत्र साबित हुए हैं। इनकी मदद से प्रयोगों को पूरी तरह नियंत्रित और प्रभावी तरीके से किया जा सकता है। इस सबका नतीजा यह हुआ कि भौतिकीविदों ने और भी शक्तिशाली त्वरित्र बहुत बड़ी तादाद में बनाए और आज तो हम कणों के उत्पादन और संसूचन के लिए विशालकाय संयंत्रों का इस्तेमाल करते हैं। इसी विकास के कारण मूल कणों की सूची बराबर समृद्ध होती जा रही है– आज ऐसे 300 से ज़्यादा कण खोजे जा चुके हैं। लेकिन अच्छी बात यह है कि इतनी विविधता के बावजूद हम मूल कणों का कुछ वर्गों में वर्गीकरण कर सकते हैं। इसके बारे में आप भाग 15.5 में पढ़ेंगे।

यह सब पढ़ते हुए आपके मन में शायद ये सवाल आए हों: ये मूल कण कितने मूल हैं? क्या हम यह कह सकते हैं कि द्रव्य की संरचना के मूलभूत घटक यही हैं? पदार्थ किन कणों से बने होते हैं, हम इन मूल कणों के गुणधर्मों को कैसे मापते हैं और उनकी गतिकी का विश्लेषण कैसे करते हैं? इन सबसे जुड़े कई और सवाल भी हैं: क्या न्यूक्लिऑनों की अपनी एक संरचना होती है? अगर हां, तो हम न्यूक्लिऑनों के घटकों की खोजबीन कैसे करें? इन सवालों के जवाब देने के लिए किए गए सतत प्रयासों ने आज हमको इस मुकाम पर पहुंचाया है कि अब हम मूल कणों की गतिकी और संरचना के बारे में कम से कम उतनी जानकारी तो रखते हैं जितनी कि परमाणुओं और नाभिकों के बारे में। हालांकि हम यहां इन सब बातों की गहराई में नहीं जायेंगे लेकिन इस इकाई के अंतिम भाग में हमने द्रव्य संरचना की अभी तक की समझ देने वाले सिद्धांत पर संक्षेप में चर्चा की है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- पॉज़िट्रॉन के अस्तित्व के लिए डिराक द्वारा दिए गए तर्क को समझा सकेंगे,
- मूल कणों की गतिकी और संरचना के अध्ययन में इस्तेमाल किए जाने वाले कण त्वरित्रों और संसूचकों के कार्यकारी नियमों को समझा सकेंगे,
- मूल कणों का चार व्यापक वर्गों में वर्गीकरण कर सकेंगे,
- उनकी क्षय प्रक्रियाओं को समझा सकेंगे, और
- पदार्थ के क्वॉर्क मॉडल का वर्णन कर सकेंगे।

15.2 पॉज़िट्रॉन की खोज: पहला प्रतिकण

खंड 3 की इकाई 10 से आप याद कीजिए कि गाउडस्मिट और उहलेनबेक ने परमाण्वीय स्पेक्ट्रम को समझाने के लिए यह सुझाव दिया था कि हर इलेक्ट्रॉन की एक स्पिन होती है और उसका स्पिन कोणीय संवेग $\frac{\hbar}{2}$ होता है। हालांकि इस संकल्पना की मदद से परमाण्वीय स्पेक्ट्रम को बेहतर ढंग से समझा जा सका लेकिन ख़ुद इसे समझ पाना मुश्किल साबित हुआ क्योंकि यह तब तक दी गई संकल्पनाओं से एकदम अलग हट कर थी। तब यह ज़रूरत महसूस की गई कि स्पिन की परिकल्पना को सैद्धांतिक आधार दिया जाए और उसे एक संतोषजनक क्वांटम सिद्धांत के ज़रिए पेश किया जाए।

1928 में डिराक ने विद्युतचुंबकीय क्षेत्र में स्थित इलेक्ट्रॉन के लिए तरंग समीकरण दिया जिसके ज़रिये उन्होंने क्वांटम यांत्रिकी में विशिष्ट आपेक्षिकता को भी शामिल किया। उनकी यह विधि गणितीय रूप से बहुत ही सुंदर थी। डिराक के समीकरण के मुताबिक

इलेक्ट्रॉन का चुंबकीय आघूर्ण एक बोर मैग्नेटॉन $\left(=\frac{e\hbar}{2m}\right)$ के बराबर था और उसका स्पिन कोणीय संवेग था $\hbar/2$। इन पूर्वानुमानों की प्रायोगिक जांच पड़ताल जल्दी ही की गई और ये सही साबित हुए। लेकिन इस सिद्धांत का सबसे महत्वपूर्ण परिणाम यह था: डिराक की आपेक्षिकीय समीकरण के ऐसे भी हल थे जिनसे ऋणात्मक ऊर्जा अवस्थाएं मिलती थीं: यानी कि इसके मुताबिक इलेक्ट्रॉन दोनों ही धनात्मक और ऋणात्मक ऊर्जा अवस्थाओं में रह सकते हैं:

$$E = \pm\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

धनात्मक मूल से यह नतीजा निकलता है कि इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा का मान उसका संवेग बढ़ने के साथ-साथ उसकी विराम ऊर्जा m_0c^2 से लेकर ∞ तक कुछ भी हो सकता हैं। ऋणात्मक मूल के कारण यह मान $-\infty$ से $-m_0c^2$ तक कुछ भी हो सकता है। धनात्मक ऊर्जा अवस्था में स्थित कोई इलेक्ट्रॉन ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था में भी संक्रमण (transition) कर सकता है। इन दोनों अवस्थाओं की ऊर्जा का यह अंतर एक फ़ोटॉन के रूप में उत्सर्जित होगा जिसकी ऊर्जा इस अंतर के बराबर होगी और उसी के मुताबिक उसका संवेग होगा। इसी तरह ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था में स्थित कोई इलेक्ट्रॉन उससे भी ज़्यादा ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था में संक्रमण कर सकता है। अब आप ज़ानते हैं कि हर निकाय की एक सहज प्रवृत्ति होती है कि वह निम्नतम ऊर्जा अवस्था में पहुंचे। तो क्या इससे यह सोचा जाए कि सभी इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा $E = -\infty$ होगी! लेकिन यह बात तो उस समय तक मालूम तमाम जानकारी का विरोध करती थी और इसके चलते डिराक के सिद्धांत को काफ़ी मुश्किलों का सामना करना पड़ा। डिराक के अपने शब्दों में:

> "शुरू में तो ऐसा लगा कि इस मुश्किल से पार नहीं पाया जा सकता। फिर यह पता चला कि अगर हम निर्वात के बारे में अपनी अवधारणा बदल दें तो हम इस मुश्किल को बहुत आसानी से हल कर सकते हैं।"

तब तक निर्वात के बारे में यह सोचा जाता था कि वह ऐसा क्षेत्र है जिसमें कुछ भी नहीं होता। डिराक ने निर्वात के बारे में यह अवधारणा दी कि यह निम्नतम ऊर्जा की अवस्था है। उनका तर्क था कि इलेक्ट्रॉन की ऋणात्मक ऊर्जा अवस्थाएं भी हो सकती हैं। और अगर ऐसा है तो हम यही चाहेंगे कि जितने संभव हो सके उतने ज़्यादा से ज़्यादा इलेक्ट्रॉन निम्नतम ऊर्जा अवस्था में रहें। लेकिन आप जानते हैं कि पाउली अपवर्जन सिद्धांत (Pauli's exclusion principle) के मुताबिक एक ऊर्जा अवस्था में एक इलेक्ट्रॉन से ज़्यादा नहीं रह सकता। इसलिए डिराक ने यह प्रस्ताव रखा कि निर्वात वह अवस्था है जिसमें सभी ऋणात्मक ऊर्जा अवस्थाएं भरी हैं, यानी उन सभी अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन उपस्थित हैं। लेकिन सभी धनात्मक ऊर्जा अवस्थाएं रिक्त हैं यानी उनमें कोई इलेक्ट्रॉन स्थित नहीं है। और क्योंकि निर्वात में स्थित सभी ऋणात्मक अवस्थाएं भरी हैं तो पाउली सिद्धांत को लागू करके हम धनात्मक ऊर्जा वाले इलेक्ट्रॉन का ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था में संक्रमण रोक सकते हैं। यानी इस तरह के इलेक्ट्रॉन को सीधे तौर पर नहीं देखा जा सकता। लेकिन अगर कोई ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था भरी न हो तो यह संक्रमण संभव है। किसी ऋणात्मक ऊर्जा अवस्था के भरे न होने को इस तरह समझाया गया है कि वह भरी हुई अवस्थाओं के सागर में एक होल (hole) के मानिंद है। यह होल धनात्मक आवेश वाले कण जैसे व्यवहार करता है, ठीक वैसे ही जैसे अर्द्ध चालक के वैलेन्स बैंड में स्थित एक होल। होल की यह अवस्था वास्तव में स्पिन 1/2 वाले कणों के आपेक्षिकीय सिद्धांत का ही एक परिणाम है। जब एक धनात्मक ऊर्जा वाला इलेक्ट्रॉन होल में कूदता है, तो दोनों ही गायब हो जाते हैं। भौतिक तौर पर हम कह सकते हैं

कि एक इलेक्ट्रॉन, पॉज़िट्रॉन का विनाश कर देता है और उनकी ऊर्जा अनावेशित फ़ोटॉनों के रूप में उत्सर्जित हो जाती है।

पॉज़िट्रॉन के अस्तित्व का पहले पहल 1932 में एंडरसन ने पता लगाया जब उन्होंने मेघ कक्ष (cloud chamber) में कॉस्मिक किरणों का प्रेक्षण करते हुए इलेक्ट्रॉन-नुमा लेकिन धनात्मक आवेश वाले कणों के पथ की खोज की। उन्होंने इस मेघ कक्ष को एक प्रबल चुंबकीय क्षेत्र में रखा था। इस चुंबकीय क्षेत्र के कारण ऋणात्मक और धनात्मक आवेशों का विक्षेपण अलग-अलग दिशाओं में हुआ और इस तरह, इन दो तरह के आवेशों में अंतर का पता लगा। एंडरसन ने देखा कि धनात्मक आवेश के संगत दिशा में कुछ इलेक्ट्रान-नुमा लीक (track) भी हैं: यानी कि यह लीक एक ऐसे कण की थी जिसका आवेश धनात्मक था लेकिन द्रव्यमान इलेक्ट्रॉन जितना था: यही पॉज़िट्रॉन था। उसके बाद किए गए मापनों में भी यह पता लगा कि पॉज़िट्रॉन का इलेक्ट्रॉन के बराबर ही द्रव्यमान होता है और उसके स्पिन और चुंबकीय आघूर्ण भी इलेक्ट्रॉन के बराबर होते हैं। यानी धनात्मक आवेश के अलावा पॉज़िट्रॉन और इलेक्ट्रॉन बाकी सभी बातों में बिल्कुल एक जैसे होते हैं। तो इस तरह खोज हुई पहले प्रतिकण (antiparticle) पॉज़िट्रॉन की। और उसके बाद तो मूल कणों की खोज का तांता ही लग गया। आइए इस खोज से जुड़े कुछ मील के पत्थरों की बात करें।

15.3 मूल कणों की खोज का शुरुआती दौर

सभी तरह के नाभिक, परमाणु और अणु जिन जाने पहचाने कणों के समूह से मिल कर बने होते हैं उनमें शामिल हैं, प्रोटॉन ($m_p c^2 = 938.2$ MeV, $s = \frac{1}{2}$, $q = +1$ इकाई) न्यूट्रॉन ($m_n c^2 = 939.6$ MeV, $s = \frac{1}{2}$, $q = 0$) इलेक्ट्रॉन ($m_e c^2 = 0.511$ MeV, $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$) और फ़ोटॉन ($m_\gamma c^2 = 0, s = 1, q = 0$)। अब हम इस समूह में प्रतिकणों $\bar{p}$, $\bar{n}$ और e^+ को भी जोड़ सकते हैं।

आप यह तो जानते ही हैं कि 1935 में युकावा ने अभिगृहीत के तौर पर पायॉन (pion) नाम के एक कण के अस्तित्व की संकल्पना पेश की थी। ये कण न्यूक्लिऑनों के बीच लग रहे प्रबल नाभिकीय बलों के कण हैं (ये कण काफ़ी कुछ फ़ोटॉन जैसे थे जो आवेशित कणों के बीच लग रहे विद्युतचुंबकीय क्षेत्रों के संगत कण हैं)। नाभिकीय बलों के लघु परास (short range) से युकावा ने यह नतीजा निकाला कि इन कणों का द्रव्यमान कुछ सौ MeV (0.113u) होगा; साथ ही इनकी युग्मन दृढ़ता (coupling strength) काफ़ी अधिक होगी ताकि वे कूलॉम प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध न्यूक्लिऑनों को जोड़ सकें। लगभग एक दशक के बाद पॉवेल (Powell) और ओकियालीनी (Occhialini) के प्रयोगों से मिला पायॉन ($\pi^{\pm}$ मीसॉन) के अस्तित्व का प्रायोगिक प्रमाण जब ऐसे साइक्लोट्रॉन बन गए जो पॉज़िट्रॉनों को सैकड़ों MeV तक त्वरित्र कर सकते थे और साथ ही साथ कॉस्मिक किरणों का अध्ययन करने की तकनीकें और अधिक विकसित हुईं। अब हम जानते हैं कि ऐसे 3 पायॉन हैं π^+, π^0 और π^- जिनके आवेश क्रमश: +1, 0, −1 इकाई हैं और इनके लिए $m_{\pi^\pm} c^2 = 140$ MeV, $m_{\pi^0} c^2 = 135$ MeV, $J = 0$।

इन कणों में, इलेक्ट्रॉन पूरी तरह से स्थायी हैं और प्रोटॉन के बारे में माना जाता है कि वे स्थायी हैं, लेकिन न्यूट्रॉन और पायॉन अस्थायी हैं। उनके क्षय के कारण तमाम नए कणों का जन्म होता है:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$$
$$\downarrow$$
$$e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$
$$\downarrow$$
$$e^+ + \nu_e$$

एक न्यूट्रॉन का क्षय पॉज़िट्रॉन, इलेक्ट्रॉन और प्रति न्यूट्रीनो (antineutrino) में होता है। एक पायॉन का क्षय एक म्यूऑन (muon) में होता है जिसका फिर से इलेक्ट्रॉन में क्षय हो जाता है। ये क्षय प्रक्रियाएं काफी कुछ रेडियोएक्टिवता के समान हैं क्योंकि क्षय की प्रायिकता कण की आयु पर निर्भर नहीं करती और इसकी एक अभिलक्षणिक अर्द्ध-आयु होती है। हम पाते हैं कि $\tau_n = 896$ s, $\tau_{\pi^+} = 2.6 \times 10^{-8}$ s, $\tau_{\pi^0} = 0.7 \times 10^{-16}$ s। इनसे उत्पन्न हुए नए-नए कणों में न्यूट्रीनो (neutrino) शामिल हैं जो शायद द्रव्यमानहीन हैं, इन पर कोई आवेश नहीं होता और ये 1/2 स्पिन वाले कण हैं। इनकी प्रबल नाभिकीय अन्योन्य क्रियाओं में कोई भूमिका नहीं होती और क्योंकि ये अनावेशित होते हैं इसलिए इन पर कोई विद्युतचुंबकीय बल नहीं लगता। साथ ही क्योंकि इनकी अन्योन्य क्रिया बहुत दुर्बल है, (बीटा-क्षय प्रक्रिया की तरह), इसलिए इनका पता लगाना बहुत मुश्किल है। इनकी उपस्थिति के बारे में अक्सर अनुमान लगाया जाता है: जब किसी नाभिकीय अभिक्रिया में संवेग और ऊर्जा का कुछ हिस्सा ग़ायब मिलता है जो इन कणों के संगत हो तो यह समझा जाता है कि इस अभिक्रिया में ये कण भाग ले रहे हैं।

उपरोक्त प्रक्रियाओं में म्यूऑन (μ मीसॉन, μ meson) प्रमुख क्षय उत्पाद हैं जिनके साथ साथ पायॉन के न्यूट्रीनो (ν_μ) भी उत्पन्न होते हैं। इस कण की खोज 1937 में एंडरसन ने कॉस्मिक किरणों के प्रेक्षण के दौरान की। पहले तो यह समझा गया कि यह पायॉन है। याद करें कि पायॉन के बारे में युकावा ने अभिगृहीत दिया था कि वह नाभिकीय बलक्षेत्रों के संगत कण है। इसीलिए इसे शुरू में मीसॉन कहते थे। लेकिन अंततः यह तो एक भारी भरकम इलेक्ट्रॉन ही निकला। इलेक्ट्रॉन की तरह ही इसकी नाभिकीय बलों में कोई भूमिका नहीं है। लेकिन क्योंकि इसका आवेश इलेक्ट्रॉन जितना ही है इसलिए इसके विद्युतचुंबकीय गुणधर्म इलेक्ट्रॉन जैसे ही हैं। इसका द्रव्यमान इलेक्ट्रॉन के मुकाबले 205 गुना है। इलेक्ट्रॉन, म्यूऑन और न्यूट्रीनो को सामूहिक तौर पर लेप्टॉन (lepton) कहा जाता है।

जब से परमाण्वीय नाभिक की खोज हुई, तभी से वैज्ञानिकों को यह जानने में बहुत रुचि रही है कि नाभिक किन कणों से मिल कर बने हैं और वे किस तरह के बल हैं जो न्यूक्लिऑनों को जोड़े रखते हैं। अब नाभिक के अंदर झांकने के लिए उसे किसी न किसी तरह तोड़ना पड़ता है। सबसे पहला नाभिकीय अपघटन रदरफ़र्ड ने 1919 में किया। उन्होंने अल्फ़ा कणों की मदद से नाइट्रोजन नाभिक का अपघटन किया। उन्होंने अल्फ़ा कणों का इस्तेमाल इसलिए किया कि वे रेडियोएक्टिव क्षय प्रक्रियाओं में प्राकृतिक तौर पर पाए जाते थे और साथ ही साथ उनकी ऊर्जा प्रयोगशाला प्रयोगों में उपलब्ध कणों की ऊर्जा से कहीं अधिक थी। बाद में, अपघटन प्रयोगों को प्रभावी तरीक़े से करने के लिए उच्च-ऊर्जा कणों के कृत्रिम स्रोतों की आवश्यकता पड़ी। ये कृत्रिम स्रोत, जिन्हें हम कण त्वरित्र (particle accelerators) कहते हैं, नाभिकीय भौतिकी के वे यंत्र हैं जो उच्च ऊर्जा कणों को उत्पन्न करते हैं। आज ये त्वरित्र नाभिकीय अनुसंधान के लिए नितांत आवश्यक हैं। इनके बिना किसी उच्च-ऊर्जा नाभिकीय प्रयोग की कल्पना भी नहीं की जा सकती। तो आइए अब इनके बारे में जानकारी हासिल करें।

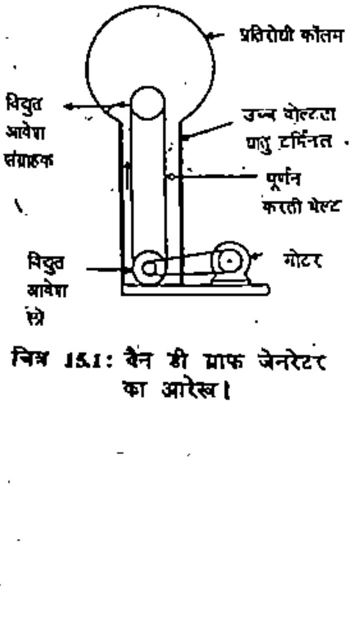
15.4 प्रायोगिक नाभिकीय भौतिकी के यंत्र

नाभिकीय भौतिकी के इन यंत्रों को व्यापक रूप से दो वर्गों में रखा जा सकता है: कण त्वरित्र (particle accelerators) और कण संसूचक (particle detectors)। जहां एक ओर त्वरित्रों की मदद से हमें उच्च ऊर्जा कण मिलते हैं वहीं संसूचकों की मदद से हम उच्च ऊर्जा संघट्टनों में उत्पन्न कणों का संसूचन कर सकते हैं।

अब हम इन पर अलग-अलग चर्चा करेंगे।

15.4.1 कण त्वरित्र

किसी आवेशित कण को त्वरित करने का सबसे आसान तरीका यह है कि उसे उच्च विभवांतर से गुज़ारा जाए। अगर आवेश q के कण को विभवांतर V से गुज़ारा जाता है तो उसकी गतिज ऊर्जा में qV की वृद्धि होती है। आजकल त्वरित्रों में 10^7 V तक का अधिकतम विभवांतर स्थापित किया जा सकता है जिसके कारण आयनों की प्रति आवेश ऊर्जा 10 MeV हो जाती है। और नाभिकीय ऊर्जा संरचना अध्ययन के लिए हमें लगभग इतनी ही ऊर्जा चाहिए। अतः स्थिरवैद्युत कण त्वरित्रों की प्रौद्योगिकी का वास्ता मुख्यतः एक उच्च वोल्टता स्थापित करने और फिर उसे बनाये रखने से है ताकि स्रोत से निकले आवेशित कणों को त्वरित किया जा सके।



चित्र 15.1: वैन डी ग्राफ जेनरेटर का आरेख।

कण त्वरित्रों का विकास 1920 से 1930 के बीच शुरू हुआ, और सबसे पहला कण त्वरित्र 1932 में कैम्ब्रिज की कैवेन्डिश प्रयोगशाला में कॉक्रॉफ्ट (Cockcroft) और वॉल्टन (Walton) ने बनाया। यह एक स्थिरवैद्युत त्वरित्र था जिसमें आवेशित कण का त्वरण एक प्रबल स्थिर-वैद्युत क्षेत्र के द्वारा किया जाता था। इस क्षेत्र को खुद भी बड़ी मात्रा में स्थिरवैद्युत आवेश की मदद से स्थापित किया जाता था। इस मशीन का पहला इस्तेमाल किया गया लगभग 400 KeV ऊर्जा वाले कृत्रिम प्रोटॉनों की मदद से लीथियम नाभिक का अपघटन करने के लिए:

$$p + {}^{7}Li \rightarrow {}^{4}He + {}^{4}He$$

नाभिकीय भौतिकी की प्रयोगशाला में आम तौर पर इस्तेमाल किया जाने वाला स्थिरवैद्युत जेनरेटर वैन डी ग्राफ (Van de Graff) जेनरेटर है जिसे चित्र 15.1 में दिखाया गया है। जब एक आवेशित आंतरिक चालक और एक खोखला बाहरी धात्विक चालक गोला एक दूसरे के विद्युत संपर्क में आते हैं, तो आंतरिक चालक पर स्थित सारा का सारा आवेश बाहरी चालक पर चला जाता है। इसके फलस्वरूप बाहरी चालक पर परिणामी विभव होता है $V = Q/C$ और इसे सैद्धांतिक तौर पर ज़्यादा से ज़्यादा आवेश जोड़कर अंतहीन रूप से बढ़ाया जा सकता है। इस आवेश को एक बैल्ट और ब्रश निकाय की मदद से यांत्रिक तौर पर स्थानांतरित किया जाता है। एक टर्मिनल से दूसरे टर्मिनल तक जाने में, कण लगभग कुछ करोड़ वोल्ट के विभवांतर से गुज़रते हैं और उनकी ऊर्जा में कुछ MeV की वृद्धि हो जाती है।

सभी स्थिरवैद्युत त्वरित्रों में एक बुनियादी कमी है: उच्च विभवांतर के कारण उनमें विद्युतरोधन भंजन (insulation breakdown) हो जाता है। किसी त्वरित्र संयंत्र की सबसे कमज़ोर कड़ी शायद उसका आयन स्रोत होता है। उसके विसर्जन (discharge) तन्तु जल सकते हैं– जिनके कारण उन्हें बदलना पड़ता है और अगर हमें प्रयोग में किसी दूसरे आयन का इस्तेमाल करना हो तो हर बार आयन स्रोत को आंशिक या पूरे तौर पर बदलना होता है। उच्च वोल्टता टर्मिनल के अंदर स्रोत रखा होने के कारण भी बहुत सी समस्याएं आती हैं जिसकी वजह से त्वरित्र को कुछ समय के लिए बंद भी करना पड़ता है। इन्हीं सब बातों को देखते हुए यह सोचा गया कि ऐसी मशीनें बनाई जाएं जो

छोटे-छोटे विभवांतरों द्वारा कणों की ऊर्जा में छोटी-छोटी वृद्धि करके कणों का त्वरण कर सकें। ऐसी ही एक मशीन थी साइक्लोट्रॉन (cyclotron)। यही साइक्लोट्रॉन एक नए क़िस्म के कण त्वरित्रों की पूरी शृंखला का आधार बना, जिनमें सिंक्रोट्रॉन (synchrotron) से लेकर सुपर कोलाइडर (super collider) शामिल हैं। इन मशीनों का विकास संसार भर में बहुत थोड़े समय में किया गया है। जैसे-जैसे ज़्यादा से ज़्यादा ऊर्जा वाले कणों की ज़रूरत बढ़ती गई, वैसे ही वैसे इन मशीनों का आकार भी बढ़ता गया। और आज तो दुनिया भर में ऐसी सैकड़ों मशीनें हैं। आइए अब हम इन मशीनों के भौतिक सिद्धांतों और कार्यप्रणाली के बारे में जानकारी हासिल करें।

क. साइक्लोट्रॉन

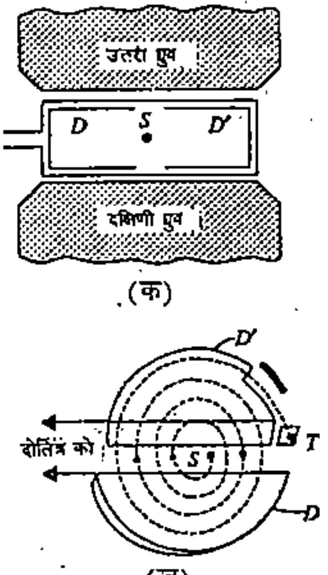
साइक्लोट्रॉन एक ऐसा त्वरित्र है जिसमें कणों का त्वरण एक नियत आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र द्वारा किया जाता है। ये कण अपने पथ के लम्बवत् एक नियत चुंबकीय क्षेत्र में सर्पिल पथ में गतिमान होते हैं। और प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र, कणों की गति के साथ तुल्यकालिक (synchronous) होता है।

सबसे पहले साइक्लोट्रॉन का मूलभूत डिज़ाइन लॉरेंस (Lawrence) ने, संयुक्त राज्य अमरीका 1929 में बर्कले स्थित कैलिफ़ोर्निया विश्वविद्यालय में, तैयार किया था। 19[illegible] में इस मशीन का इस्तेमाल करके लॉरेंस और लिविंग्सटन (Livingston) ने 1.2 MeV ऊर्जा वाले प्रोटॉनों द्वारा एक नाभिकीय अपघटन किया। यही वह अधिकतम ऊर्जा थी जो तब प्रयोगशाला में हासिल की जा सकती थी। इसके बाद के वर्षों में उन्होंने और भी बड़े-बड़े साइक्लोट्रॉन बनाए और इनसे वे 27 MeV तक की ऊर्जा वाले प्रोटॉन उत्पन्न कर सके।

हमने साइक्लोट्रॉन का मूल आरेख चित्र 15.2 में दिखाया है। इसमें दो अर्द्ध-गोलाकार धातु के डिब्बे D और D' होते हैं जिन्हें उनके आकार के कारण डी (dee) कहा जाता है। ये डी एक ऐसे कक्ष में रखे जाते हैं जिसमें निर्वात होता है और जो एक विद्युतचुंबक के ध्रुवों के पृष्ठों के बीच रखा जाता है। चुंबकीय क्षेत्र, जो डी के तल के लम्बवत होता है, केन्द्र में तो एकसमान होता है लेकिन केंद्र से दूर हटने पर ज़रा सा घट जाता है। ये दोनों डी एक उच्च आवृत्ति दोलित्र (oscillator) से जुड़े रहते हैं जो उन्हें उच्च आवृत्ति प्रत्यावर्ती विभव प्रदान करता है। तब ये डी इलेक्ट्रोड की तरह से काम करते हैं: जब एक डी धनात्मक होता है तो दूसरा ऋणात्मक हो जाता है।

धनात्मक आयन एक आयन स्रोत S से उत्पन्न होते हैं जो डी के बीच के स्थान में मध्य बिंदु पर रखा होता है। अगर किसी आयन विशेष के बनते वक्त डी D ऋणात्मक है तो आयन उसकी ओर त्वरित हो जाता है। एक बार D के अंदर पहुंचने पर वह चुंबकीय क्षेत्र के अधीन वर्तुलाकार पथ पर चलता है और उस पर विद्युत क्षेत्र का कोई प्रभाव नहीं होता। अगर D से उसके निकलने पर दोलित्र की ध्रुवता इस तरह बदले कि D' ऋणात्मक हो जाए, तो यह आयन D से D' तक जाने में फिर से त्वरित हो जाता है। नतीजा यह होता है कि आयन की गतिज ऊर्जा बढ़ जाती है जिससे उसकी चाल बढ़ जाती है। फिर वह D' में ज़्यादा बड़ी त्रिज्या वाले वृत्ताकार पथ में घूमता है। D' से निकलने पर वह फिर से त्वरित हो जाता है अगर तब तक D ऋणात्मक हो जाए। यह प्रक्रिया तब तक चलती है जब तक कि आयन डी की परिसीमा पर नहीं पहुंच जाता और वहां पहुंचने पर उसे विक्षेप पट्टिका (deflection plate) पर एक प्रबल ऋणात्मक विभव लगाकर निकाल लिया जाता है। फिर उसे T पर रखे लक्ष्य पर फेंका जाता है। संक्षेप में, चुंबकीय क्षेत्र के कारण आयन एक वृत्ताकार पथ में चलते हैं जबकि विद्युत क्षेत्र उन्हें एक निश्चित अंतराल पर छोटे-छोटे बल से त्वरित करता रहता है जिससे उनकी ऊर्जा बढ़ जाती है। इस तरह आयन का पथ बढ़ती हुई त्रिज्या का सर्पिल पथ

होता है। जब आवेश e और चाल v वाला कण चुंबकीय क्षेत्र B में गति करता है तो लॉरेंस बल evB उसे उसकी वृत्ताकार गति बनाए रखने के लिए जरूरी अभिकेंद्री त्वरण प्रदान करता है:



चित्र 15.2: साइक्लोट्रॉन का सिद्धांत (क) मशीन के मुख्य भाग का ऊर्ध्वाधर दृश्य; (ख) डी के अंदर कण का पथ।

$$F = evB = \frac{mv^2}{r} \tag{15.1}$$

जहाँ r कक्षा की तात्क्षणिक त्रिज्या है।

हम इस व्यंजक को फिर से ऐसे लिख सकते हैं

$$r = mv/eB \tag{15.2}$$

इस तरह एक अर्द्ध-वृत्ताकार कक्षा को तय करने में लिया गया समय है

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{eB} \tag{15.3}$$

कक्षीय आवृत्ति की गणना इस व्यंजक से की जा सकती है

$$\nu = \frac{1}{2t} = \frac{eB}{2\pi m} \tag{15.4}$$

जब कण साइक्लोट्रॉन की बाह्यतम (अधिकतम) त्रिज्या (R) पर पहुंचता है, तब उसकी अधिकतम गतिज ऊर्जा होती है

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 B^2}{m} R^2 \tag{15.5}$$

इस संबंध से हमें पता चलता है कि बहुत बड़े क्षेत्रों और बड़ी त्रिज्याओं वाले साइक्लोट्रॉन बनाना ही फ़ायदेमंद होता है।

यहाँ हम इस बात पर ज़ोर देना चाहेंगे कि एक साइक्लोट्रॉन में आयनों का कोणीय वेग नियत रहता है। यानी कम ऊर्जा वाले आयन कम त्रिज्या वाले वृत्तों में चलते हैं जबकि अधिक ऊर्जा वाले आयन अधिक त्रिज्या वाले वृत्तों में चलते हैं। इस कारण सभी आयन एक ही समय पर डी के बीच के रिक्त स्थान (gap) में पहुंचते हैं भले ही उनकी चालें अलग-अलग क्यों न हों। इसका मतलब है कि अर्द्ध-वृत्ताकार पथ को तय करने में कण को लगा समय कण की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता। इस रिक्त स्थान में आयनों की ऊर्जा में हमेशा वृद्धि होती है बशर्ते कि दोलित्र की आवृत्ति इतनी हो कि डी की ध्रुवता बदलने में लगा समय, आयन द्वारा अर्द्ध-वृत्ताकार पथ को तय करने में लगे समय के ठीक बराबर हो। आयन की अंतिम ऊर्जा रिक्त स्थान को एक बार पार करने में मिली ऊर्जा और तय किए गए अर्ध-वृत्ताकार पथों की कुल संख्या के गुणनफल के बराबर होती है।

साइक्लोट्रॉन में कणों द्वारा अर्जित ऊर्जा डी की वोल्टता पर निर्भर नहीं करती। जब वोल्टता कम होती है तो कण को परिसीमा पर पहुंचने के लिए अधिक संख्या में अर्द्धवृत्ताकार पथों में चलना पड़ता है।

यहाँ ध्यान दें कि साइक्लोट्रॉन में हम सिर्फ़ आवेशित कणों (जैसे कि प्रोटॉन, ड्यूटेरॉन, अल्फ़ा कण, हल्के और भारी तत्वों के आयन) को ही त्वरित कर सकते हैं क्योंकि विद्युत क्षेत्र सिर्फ़ आवेशित कणों पर ही बल लगा सकता है।

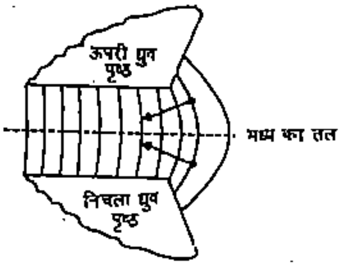
साइक्लोट्रॉन के आकार का माप अक्सर चुंबकीय ध्रुवों के व्यास से ही निर्धारित किया जाता है। बर्कले स्थित पहले साइक्लोट्रॉन के डी की त्रिज्या थी 12.5 cm। इस

साइक्लोट्रॉन की मदद से 1.3 T (13 kG) के क्षेत्र में 1.2 MeV के प्रोटॉन उत्पन्न किए गए जिनकी आवृत्ति लगभग 20MHz थी।

किसी साइक्लोट्रॉन में विभिन्न कणों को कितना त्वरित किया जा सकता है, यानी उन्हें कितनी ऊर्जा दी जा सकती है यह इन बातों से तय होता है:

(क) ध्रुव पृष्ठों की परिसीमा पर घट रहा चुंबकीय क्षेत्र जो कणों को फ़ोकसित करता है और उन्हें क्षैतिज तल में उनके पथ पर बनाए रखता है, और

(ख) प्रकाश के वेग के लगभग नज़दीकी वेग पर चल रहे कणों के द्रव्यमान में आपेक्षिकीय वृद्धि।



चित्र 15.3: ध्रुव पृष्ठों की कोर के निकट चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं ऊर्ध्वाधर नहीं रह जातीं।

इन कारणों से चुंबकीय ध्रुव-पृष्ठों की परिसीमा के नज़दीक आयनों का कोणीय वेग कम हो जाता है और प्रत्यावर्ती वोल्टता की आवृत्ति से उनका तुल्यकालन (synchronisation) नहीं रह जाता। इस कारण से आयनों का और आगे त्वरण होना रुक जाता है।

आम तौर पर एक साइक्लोट्रॉन कणों को लगभग 0.2 c तक त्वरित कर सकता है जहां c प्रकाश का वेग है। इस वेग पर द्रव्यमान में लगभग 2% की आपेक्षिकीय वृद्धि होती है। इस कारण से साइक्लोट्रॉन के आकार पर एक प्रतिबंध लग जाता है और साथ ही साथ उन ऊर्जाओं पर भी जो विभिन्न कणों को दी जा सकती हैं। प्रोटॉन के त्वरण के लिए यह सीमा लगभग 25 MeV है। ड्यूटेरॉन और अल्फ़ा कण इससे भी ज़्यादा ऊर्जा तक त्वरित किए जा सकते हैं।

ऐसे कणों की कक्षीय आवृत्ति का व्यंजक हो जाता है

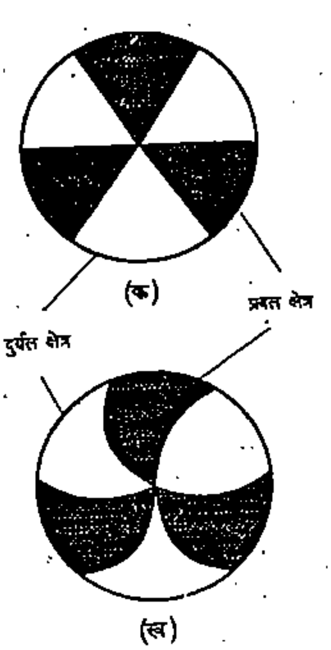
$$\nu = \frac{eB}{2\pi m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

ख. सिन्क्रोसाइक्लोट्रॉन

कई नाभिकीय प्रयोगों में सैकड़ों MeV ऊर्जा के कण चाहिए होते हैं। कणों की ऊर्जाओं को दो तरीक़ों से बढ़ाया जा सकता है:

- जैसे जैसे कण मशीन के केन्द्र से दूर जाते हैं वैसे वैसे त्वरक वोल्टता की आवृत्ति को लगातार किसी अधिकतम मान से न्यूनतम मान में बदलकर। इस परिवर्तन पर आधारित साइक्लोट्रॉन को सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन (synchrocyclotron) या आवृत्ति माडुलित सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन (frequency modulated synchrocyclotron) कहते हैं। ये मशीनें एक सतत कण किरण पुंज नहीं उत्पन्न करतीं। बल्कि इनसे कणों के छोटे-छोटे प्रस्फोट (burst) पुंज उत्पादित होते हैं। बर्कले सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन का इस्तेमाल करके 2.3 T के चुंबकीय क्षेत्रों की मदद से 20 MHz आवृत्ति वाले 750 MeV प्रोटॉन उत्पन्न किए गए हैं। ऐसी ही और मशीनें दुबना (Dubna) और जेनेवा (Geneva) में CERN में लगी हैं। आवृत्ति माडुलित सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन को प्रायः उच्च ऊर्जा (मूल कण भौतिकी) अनुसंधान में इस्तेमाल किया जाता है।
- चुंबकीय ध्रुव पृष्ठों के केन्द्र से उनकी परिसीमा तक जाते हुए चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता को लगातार बढ़ाने से। (यहां त्वरक वोल्टता की आवृत्ति नियत रखी जाती है।) चुंबकीय क्षेत्र बढ़ने के साथ-साथ कणों पर ज़्यादा बल लगता है और वे कम त्रिज्या वाले वृत्तों में घूमते हैं। उच्च वेगों पर इन छोटे पथों के कारण कोणीय वेग बढ़ जाता है क्योंकि इस तरह कोणीय वेग में हुई कमी को पूरा किया जाता है। लेकिन ऐसे क्षेत्र के कारण जो मशीन के केन्द्र से दूर हटने पर बढ़ता हो, ऊर्ध्वाधर दिशा में कणों का फ़ोकसन बिगड़ सकता है। इस ऊर्ध्वाधर विफ़ोकसन (defocussing) के कारण कण ऊपर या नीचे जा सकते हैं और डी की दीवारों से

टकराकर किरण पुंज से बाहर हो सकते हैं। 1938 में थॉमस (Thomas) ने इस समस्या का निदान सुझाया लेकिन उनके सुझाव को लगभग एक दशक तक प्रयोग द्वारा परखा नहीं गया। ऐसा शायद इसलिए हुआ कि उस दौरान सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन का विकास नाभिकीय अनुसंधान में काफ़ी फ़ायदेमंद साबित हो रहा था। थॉमस के सुझावों पर आधारित पहली दो मशीनें बर्कले में 1952 में बनाई गईं। इन्हें आइसोक्रोनस-साइक्लोट्रॉन (isochronous cyclotron) या त्रिज्य खंड फोकसन (sector focussing) साइक्लोट्रॉन या दिगंशीय परिवर्ती क्षेत्र साइक्लोट्रॉन (AVF-azimuthally varying field cyclotron) कहते हैं। लेकिन इन मशीनों में वास्तविक रुचि तभी जागी जब 1955 में लॉरेंस ने जेनेवा में हुए "शांति के लिए परमाणु" कांफ्रेंस में उनके बारे में बताया।



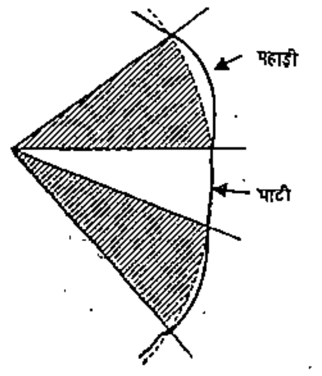
चित्र 15.4: AVF साइक्लोट्रॉन के ध्रुव पृष्ठ। छायादार क्षेत्र कटक या "पहाड़ी" क्षेत्र हैं और अछायित क्षेत्र घाटी क्षेत्र हैं (क) त्रिज्य कटक; (ख) सर्पिल कटक।

ग. दिगंशीय परिवर्ती क्षेत्र (AVF) साइक्लोट्रॉन

AVF साइक्लोट्रॉन में चुंबकीय ध्रुव पृष्ठ, या तो त्रिज्य दिशा में या बाहरी ओर सर्पिल लेकिन कम घुमाव वाले लोहे के बड़े-बड़े टुकड़ों में बांध दिए जाते हैं (चित्र 15.4)। इन टुकड़ों के, जिन्हें त्रिज्यखंड (sector) या कटक (ridge) कहते हैं, बीच में खाली जगह होती है और ये लगभग एक ही आमाप के होते हैं। क्योंकि इनके कटकों के बीच में थोड़ी ही खाली जगह होती है इसलिए घाटी क्षेत्रों के मुकाबले वहां पर चुंबकीय क्षेत्र ज़्यादा होता है। इस तरह हमें प्रबल और दुर्बल चुंबकीय क्षेत्रों के प्रत्यावर्ती क्षेत्र मिलते हैं। चुंबकीय क्षेत्र का मान त्रिज्या और दिगंशीय (azimuthal) कोण पर निर्भर करता है। इस प्रकार का क्षेत्र कणों को अच्छी तरह फ़ोकस कर पाता है। विशेषकर जब सर्पिल सैक्टरों का इस्तेमाल किया जाता है। इन मशीनों में कणों का पथ लगभग वृत्ताकार होता है और उस पथ की वक्रता घाटी क्षेत्रों के मुकाबले पहाड़ी क्षेत्रों में अधिक होती है (चित्र 15.5)। सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन के मुकाबले AVF साइक्लोट्रॉन का प्रमुख लाभ यह है कि इससे संतत कण-किरण पुंज मिलता है और इस तरह अधिकतम संभव पुंज धाराएं (100 A तक) मिलती हैं। इन मशीनों का इस्तेमाल करके 600 MeV से ज़्यादा ऊर्जा वाले प्रोटॉन भी प्राप्त किए जा चुके हैं।

आजकल इस्तेमाल होने वाले ज़्यादातर साइक्लोट्रॉन दोलित्र आवृत्ति के एक बड़े परास पर काम करते हैं, और इस तरह कणों को मनचाही ऊर्जाओं तक त्वरित किया जा सकता है। (हां, यह ज़रूर है कि इस्तेमाल की जा रही मशीन से एक अधिकतम ऊर्जा ही मिल सकती है)। इसीलिए इन्हें परिवर्ती ऊर्जा (variable energy) साइक्लोट्रॉन (VEC) भी कहते हैं। उनमें चुंबकीय क्षेत्र की प्रबलता को भी बदला जाता है ताकि कण रिक्त स्थान पर दोलित्र की आवृत्ति के साथ तुल्यकालिक रह सकें। भारत में कलकत्ता में एक VEC है।

एक AVF साइक्लोट्रॉन में उसके चुंबक के केंद्र से परिसीमा तक जाने में उसके चुंबकीय क्षेत्र में बढ़ोतरी अक्सर कुछ संकेन्द्रीय वृत्ताकार कुंडलियों के युग्मों के इस्तेमाल से हासिल की जाती है। इन्हें अक्सर ट्रिम (trim) कुंडलियां कहते हैं। ये कुंडलियां विद्युतचुंबक के ऊपरी और निचले ध्रुव पृष्ठों पर रखी जाती हैं। इन कुंडलियों में उचित धारा प्रवाहित करने से त्रिज्या के साथ-साथ चुंबकीय क्षेत्र में उचित वृद्धि हासिल की जा सकती है।



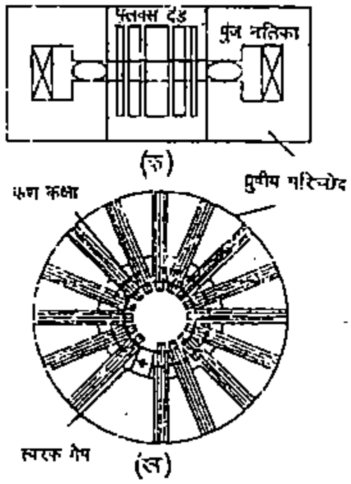
चित्र 15.5: आइसोक्रोनस साइक्लोट्रॉन में कण का पथ। वृत्ताकार पथ को छायादार हिस्से से दिखाया गया है।

इन मशीनों से प्राप्त कण-किरण पुंजों की तीव्रता काफ़ी अधिक होती है। लेकिन इनके कणों की ऊर्जा में काफ़ी अंतर होता है। इसलिए लक्ष्य पर फेंकने से पहले ऐसे कण पुंजों को चुंबक द्वारा विश्लेषित किया जाता है ताकि इस अंतर को लगभग 5 keV के बराबर या उससे कम रखा जा सके। आम तौर पर, साइक्लोट्रॉन का प्रयोग मध्यम ऊर्जा प्रयोगों में किया जाता है जिनमें 5 MeV से ज़्यादा ऊर्जा चाहिए होती है। कम ऊर्जा वाले प्रयोगों में स्थिरवैद्युत त्वरित्रों को प्राथमिकता दी जाती है। साइक्लोट्रॉन से निर्गम ऊर्जा को कम करने के लिए कभी-कभी लक्ष्य पर फेंकने से पहले कण पुंज के पथ में धात्विक पत्तियां रख दी जाती हैं।

घ. सिन्क्रोट्रॉन

अब तक आप यह बात तो समझ गए होंगे कि साइक्लोट्रॉन या सिन्क्रोट्रॉन की ऊर्जा बढ़ाने के लिए और भी ज़्यादा बड़ी त्रिज्या वाली मशीनें बनानी पड़ती हैं। इससे इनका ख़र्चा बहुत बढ़ जाता है। इस समस्या का कुछ हद तक निदान करने के लिए यह सोचा गया कि चुंबकीय बल क्षेत्र के साथ-साथ अनुनादी (resonant) आवृत्ति भी बदली जाए। ऐसे त्वरित्र को सिन्क्रोट्रॉन (synchrotron) कहते हैं। चित्र 15.6 में ऐसी एक मशीन का सबसे सरल डिज़ाइन दिखाया गया है। इस युक्ति का सबसे महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि उच्च ऊर्जाओं पर भी कण की कक्षीय त्रिज्या लगभग नियत रहती है।

ऐसा करने के लिए एक वृत्ताकार पुंज नली में, जिसमें निर्वात उत्पन्न किया जाता है, चुंबकीय क्षेत्र को बढ़ाया जाता है। यह नली त्वरित कणों के लिए "रेस के ट्रैक" का काम करती है यानी उन्हें एक ही लीक पर बनाये रखती है। याद करें कि एक सामान्य साइक्लोट्रॉन में चुम्बकीय क्षेत्र को उसके पूरे आयतन पर लगाया जाता है। वृत्ताकार पथ में चल रहे कणों का त्वरण उनकी हर कक्षा में एक विद्युत क्षेत्र द्वारा होता है जब वे रिक्त स्थान को पार कर रहे होते हैं। जैसे जैसे कणों की ऊर्जा बढ़ती है, रिक्त स्थान के ऊपर लग रहे विभवांतर की आवृत्ति बढ़ाई जाती है ताकि कक्षीय आवृत्ति नियत रखी जा सके और चुंबकीय क्षेत्र बढ़ाया जाता है ताकि कक्षीय त्रिज्या नियत रखी जा सके। यहां आप इस बात को अच्छी तरह समझ लें कि क्षेत्र का परिवर्तन समय के साथ होता है न कि स्थान के साथ जैसा कि AVF साइक्लोट्रॉन में होता है। क्योंकि इस त्वरित्र में परिवर्ती आवृत्ति और चुंबकीय क्षेत्र का इस्तेमाल होता है इसलिए यह कुछ प्रस्फोटों (burst) में कणों के पुंज उत्पादित करता है। सभी उच्च ऊर्जा प्रोटॉन त्वरित्र सिंक्रोट्रॉन होते हैं।



चित्र 15.6: इलेक्ट्रॉन सिंक्रोट्रॉन के ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज परिक्षेत्र के दृश्य। चुंबक किरण पुंज को वृत्ताकार पथ में रखते हैं और विद्युत क्षेत्र कण को प्रत्येक कक्षा में एक बार त्वरित करता है।

तालिका 15.1: कार्यरत या विकसित किए जा रहे कुछ त्वरित्रों की सूची

त्वरित्र	क्रियान्वयन की शुरुआत	कण	ऊर्जा (GeV में)
ब्रुकहेवन ऑल्टर्नेटिंग ग्रेडिएंट सिंक्रोट्रॉन (AGS), न्यूयॉर्क	1961	प्रोटॉन	33
स्टैंडर्ड लीनियर एक्सीलेरेटर (SLAC), कैलीफोर्निया	1961	इलेक्ट्रॉन	22
कॉर्नेल इलेक्ट्रॉन सिंक्रोट्रॉन, न्यूयार्क	1967	इलेक्ट्रॉन	12
सेर्पुखोव प्रोटॉन सिंक्रोट्रॉन, भूतपूर्व यू.एस.एस.आर. में	1967	प्रोटॉन	26
फर्मीलैब मेन रिंग, इलीनॉय	1972	प्रोटॉन	500
डॉइश इलेक्ट्रॉनेन सिंक्रोट्रॉन (DESY), जर्मनी	1974	इलेक्ट्रॉन	22
CERN सुपर प्रोटॉन सिंक्रोट्रॉन (SPS), स्विट्ज़रलैंड	1976	प्रोटॉन	500
फर्मीलैब टेवाट्रॉन, इलीनॉय	1985	प्रोटॉन	1000
जापानी नेशनल लैबोरेटरी (KEK)	1986	इलेक्ट्रॉन	30
CERN लार्ज इलेक्ट्रॉन पॉज़िट्रॉन स्टोरेज रिंग (LEP)	1989	इलेक्ट्रॉन	85
सुपरकंडक्टिंग सुपर कोलाइडर (SSC), यू एस ए	1995	प्रोटॉन	20000

बर्कले स्थित बीवाट्रॉन पहला बड़ा सिन्क्रोट्रॉन था जिसमें 6.4 GeV ऊर्जा वाले प्रोटॉनों का उत्पादन होता था। इस प्रोटॉन पुंज की एक लक्ष्य पर बमबारी करके इ.जी. सेगरे (E.G. Segre) और ओ. चैंबरलेन (O. Chamberlain) ने 1955 में सफलतापूर्वक प्रति प्रोटॉन उत्पन्न किए।

हमने तालिका 15.1 में आजकल कार्यरत या बनाए जा रहे कुछ त्वरित्रों की सूची दी है। आजकल चल रहे सबसे बड़े दो त्वरित्र फर्मीलैब (फर्मी नेशनल एक्सीलरेटर लैबोरेटरी), शिकागो में और जेनेवा के नजदीक सर्न (CERN Centre European de la Recherche Nucleaire) में है। फर्मीलैब में, त्वरित्र ज़मीन के अंदर एक गोलाकार सुरंग में है जिसकी त्रिज्या 1.2 km है। सर्न त्वरित्र कुछ बड़ा है, इसका संचालन कॉक्रॉफ्ट-वॉल्टन जेनेरेटर (800 keV) से शुरू किया जाता है। फिर किरण पुंज की ऊर्जा एक रैखिक त्वरित्र में 200 MeV तक बढ़ायी जाती है और फिर प्रोटॉन सिंक्रोट्रॉन में 26 GeV तक। इस अवस्था के बाद किरण पुंज को सुपर प्रोटॉन सिंक्रोट्रॉन मे ले जाया जाता है, जो इसकी ऊर्जा को 400 GeV से अधिक कर देता है। फर्मीलैब त्वरित्र में 1000 GeV या 1 TeV ऊर्जा वाले प्रोटॉनों का उत्पादन होता है, जिनकी चाल प्रकाश की चाल की 99.99995% होती है।

इसके बाद आता है स्टैनफर्ड रैखिक त्वरित्र (Stanford linear accelerator, SLAC) जो 2 मील लंबा है। इस त्वरित्र से 22 GeV के इलेक्ट्रॉनों का उत्पादन होता है जिनकी चाल और प्रकाश की चाल में 8 cm s^{-1} से भी कम का अंतर होता है। ऐसे इलेक्ट्रॉनों के लिए, व्यावहारिक कारकों को ध्यान में रखते हुए वृत्ताकार त्वरित्र बनाना ठीक नहीं रहता। क्योंकि इन इलेक्ट्रॉनों के अभिकेंद्री त्वरण के कारण विद्युतचुंबकीय विकिरण (सिंक्रोटॉन विकिरण) का उत्सर्जन होता है और इस प्रक्रिया में बड़ी मात्रा में ऊर्जा की हानि होती है।

एक बार जब प्रक्षेपों को उनकी अधिकतम ऊर्जा दे दी जाती है, उसके बाद उन्हें चुंबकों की मदद से त्वरित्र से बाहर निकाल लिया जाता है और तब उन्हें एक लक्ष्य पर आपतित किया जा सकता है। यह लक्ष्य धातु का एक बड़ा ब्लॉक हो सकता है या तरल से भरा हुआ एक टैंक भी हो सकता है। लक्ष्य के प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों और इन प्रक्षेपों के बीच हुए संघट्टनों के कारण जो अभिक्रियाएं होती हैं उनमें ऊर्जा का द्रव्यमान में परिवर्तन होता है और नये-नये कण उत्पन्न होते हैं। लेकिन इस अभिक्रिया में केवल आपतित कणों की संहति केंद्र ऊर्जा ही अभिक्रिया के लिए उपलब्ध होती है। इस तरह, नये-नये कणों को उत्पन्न करने के प्रयास में, त्वरित्र डिज़ाइन करने वाले भौतिकीविदों के सामने एक मुद्दा यह भी होता है कि किस तरह ऊर्जा के अधिक से अधिक अंश को द्रव्यमान में परिवर्तित किया जा सके। इस तरह की बातों ने संघट्टनी किरण पुंज त्वरित्र का मार्ग प्रशस्त किया। अब हम इनकी चर्चा करेंगे।

च. संघट्टनी किरण पुंज त्वरित्र

जब ऊर्जा E_{lab} का एक प्रोटॉन द्रव्यमान m_p के एक स्थिर प्रोटॉन से टकराता है तो अभिक्रिया की संहति केंद्र ऊर्जा होती है

$$E_{cm} = \sqrt{2\, m_p\, c^2\, E_{lab}}$$

इस तरह जब 30 GeV का एक प्रोटॉन, एक स्थिर लक्ष्य से टकराता है तो अभिक्रिया के लिए उपलब्ध संहति केंद्र ऊर्जा सिर्फ 7.6 GeV होती है। लेकिन अगर ऐसा मुमकिन हो कि 30 GeV प्रोटॉन के एक स्पंद (pulse) को, माना कि दक्षिणावर्त दिशा में, एक वलय में और वैसे ही दूसरे स्पंद को उसी तरह के वलय में वामावर्त दिशा में रखा जा सके और फिर किसी क्षण पर उनका, संसूचक की एक चुनी हुई स्थिति पर, एक दूसरे से संघट्टन कराया जा सके, तब अभिक्रिया के लिए पूरी की पूरी 60 GeV ऊर्जा उपलब्ध

होती है। हां, यह ज़रूर है कि जहां एक स्थिर लक्ष्य में संघट्टन के लिए बहुत बड़ी संख्या में प्रोटॉन उपलब्ध होते हैं, इस संघट्टनकारी में एक प्रतिरूपी (typical) किरण पुंज में प्रोटॉनों की संख्या सीमित होने के कारण, संघट्टनों की संख्या भी कम हो जाती है। संघट्टनकारी प्रभावी तरीक़े से काम करें इसके लिए किरण पुंज धारा अधिक से अधिक होनी चाहिए और साथ ही साथ उस किरण पुंज का फ़ोकसन अच्छी तरह किया जाना चाहिए, ताकि संघट्टन में अभिक्रिया की प्रायिकता बढ़ जाए। लेकिन फिर भी इस त्वरित्र में भले ही संघट्टनों की संख्या कम हो जाती है, हमें अभिक्रिया के लिए कहीं अधिक ऊर्जा प्राप्त होती है।

जब एक स्थिर प्रोटॉन से 30 GeV प्रोटॉन का संघट्टन होता है तो इस अभिक्रिया में ऐन्टिप्रोटॉन (anti proton) $\overline{p}$ के उत्पादन के लिए पर्याप्त ऊर्जा उपलब्ध होती है। इस तरह उत्पन्न हुए $\overline{p}$ को संचित किया जा सकता है और फिर $\overline{p}$ किरण पुंज का सुपरसिंक्रोट्रॉन में प्रवेश कराया जा सकता है ताकि जैसे-जैसे चुंबकीय क्षेत्र बढ़े वैसे-वैसे उसी मशीन में गतिमान प्रोटॉनों के साथ-साथ एन्टिप्रोटॉनों का भी त्वरण हो सके। इन दोनों किरण पुंजों का पहले से निर्धारित स्थितियों पर, जहां पर संसूचक भी रखे होते हैं, संघट्टन करने पर हम संहति केंद्र निर्देश तंत्र में $\overline{p}\,p$ संघट्टन भी प्रेक्षित कर सकते हैं। इस संघट्टन की पूरी की पूरी ऊर्जा नाभिकीय अभिक्रिया के लिए उपलब्ध होती है। (CERN) में 270 GeV प्रोटॉनों और 270 GeV ऐन्टिप्रोटॉनों के साथ किए गए एक ऐसे ही प्रयोग में 81 GeV द्रव्यमान वाले W^+ और W^- नामक नए कणों खोज की जा सकी।

स्टैन्फर्ड (संयुक्त राज्य अमरीका), DESY (हैम्बर्ग), फ्रासकाटी (इटली) और CERN (जेनेवा) में ऐसे संघट्टनकारी हैं जिनमें e^+ एवं e^- त्वरक कण हैं। आप जानते हैं कि जब एक आवेशित कण वर्तुल कक्षा में एकसमान गति से चलता है तो उस पर अभिकेंद्री त्वरण लगता है और जब आवेशित कण त्वरित होते हैं तो वे विद्युतचुंबकीय विकिरण उत्सर्जित करते हैं। साथ ही उनकी ऊर्जा में यह हानि त्वरण के वर्ग के समानुपाती होती है। चूंकि कणों का त्वरण वक्रता त्रिज्या के विलोमानुपाती होता है, इसलिए एक वृत्ताकार मशीन में इस ऊर्जा हानि को कम करने के लिए बड़ी त्रिज्याओं वाली कक्षाएं चाहिए होती हैं। कम द्रव्यमान वाले इलेक्ट्रॉन, अधिक द्रव्यमानों वाले प्रोटॉनों के मुकाबले ज़्यादा विकिरण उत्सर्जित करते हैं और ऊर्जा में हानि उनके द्रव्यमान की चौथी घात के विलोमानुपाती होती है। इसीलिए इलेक्ट्रॉन का इस्तेमाल करने वाले त्वरित्रों का, उतनी ही ऊर्जा वाले प्रोटॉन त्वरित्रों के मुकाबले, कहीं ज़्यादा बड़ा व्यास होता है। 50 GeV × 50 GeV के e^+e^- संघट्टनकारी की परिधि 26.7 km है। इसकी तुलना में CERN में स्थित 400 GeV SpS की परिधि 6.9 km है।

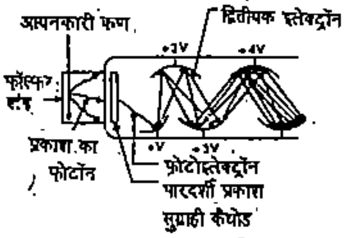
15.4.2 कण संसूचक

त्वरित्र प्रयोगशाला में किए गए उच्च ऊर्जा संघट्टन प्रयोगों में उत्पन्न मूल कणों का संसूचन करने के लिए इस्तेमाल होने वाली युक्तियों को संसूचक कहते हैं। किसी कण का संसूचन उसके इस गुणधर्म के कारण किया जा सकता है कि वह माध्यम के परमाणुओं का आयनन या उत्तेजन करके अपनी ऊर्जा खो देता है। इस प्रक्रिया में जो आयन उत्पन्न होते हैं, उनके कारण एक विद्युत स्पंद (pulse) बन सकता है जिसका इलेक्ट्रॉनिक युक्तियों से पता लगाया जा सकता है। या फिर ये आयन अतिसंतृप्त वाष्प के संघनन के लिए या अतितप्त द्रव में बुलबुलों के बनने के लिए नाभिकों की तरह कार्य करते हैं। इसी के मुताबिक संसूचकों को दो वर्गों में बांटा जा सकता है: गणित्र (counter), जैसे गाइगर मुलर गणित्र, प्रस्फुरण गणित्र (scintillation counter) और सेरेन्कोव गणित्र (Cerenkov counter) जो हरेक आवेशित कण के गुज़रने को दर्ज करते हैं, और दूसरी [illegible] कणों की लीक (track) दर्ज़ करने वाली युक्तियां हैं जैसे मेघ कक्ष

(cloud chamber), बुदबुद कोष्ठ (bubble chamber), ज्योतिकेतु कक्ष (streamer chamber) और आनुपातिक कक्ष (proportional chamber)। इन सभी युक्तियों में कण की लीक की तस्वीरें खींची जाती हैं। इस चर्चा की शुरुआत हम गणित्रों के वर्णन से करेंगे।

क. गणित्र

आवेशित कणों के संसूचन के लिए सबसे पहला उपकरण गाइगर ने डिज़ाइन किया। यह उपकरण संघट्टन द्वारा आयनन की परिघटना पर आधारित है। उसके बाद मुलर ने इस गणित्र में कुछ महत्वपूर्ण संशोधन किए और आज हम इसे गाइगर मुलर (G.M.) गणित्र के नाम से जानते हैं। गाइगर मुलर गणित्र में एक कांच की नली होती है जिसके अंदर अंशतः निर्वात स्थापित किया जाता है। इस नली में एक खुली हुई तांबे की नली होती है जो कैथोड का काम करती है। नली के अक्ष के अनुदिश टंगस्टन का एक तार खिंचा रहता है। जब उच्च ऊर्जा वाला एक आवेशित कण नली में प्रवेश करता है तो कांच की नली में भरी गैस का आयनन हो जाता है। इससे धारा का एक स्पंद पैदा होता है जो एक गिनने वाली युक्ति को क्रियान्वित करता है। यह युक्ति एक आयन युग्म तक के उत्पादन को सुग्राहिता से प्रेक्षित कर सकती है। साथ ही इसका निर्गम नियत रहता है, वह प्रारंभिक आयनन पर निर्भर नहीं करता।



चित्र 15.7: प्रस्फुरण गणित्र का आरेख।

प्रस्फुरण गणित्र (scintillation counter) एक सार्वत्रिक गणित्र है। यह किसी प्रस्फुरक जैसे अकार्बनिक क्रिस्टल, प्लास्टिक या कार्बनिक तरल का बना होता है। जब इस पदार्थ से आवेशित आयन टकराते हैं तो इससे प्रकाश का एक संक्षिप्त और दुर्बल फ़्लैश (स्फुर, flash) निकलता है। इस संदीप्ति (luminescence) को एक प्रकाश इलेक्ट्रॉन संवर्धक (photo multiplier) द्वारा रिकॉर्ड किया जाता है और एक इलेक्ट्रान परिपथ द्वारा गिना जाता है (चित्र 15.7)। यह गणित्र बहुत मज़बूत, सरल और दक्ष होते हैं और इनसे बहुत बड़े एवं स्पष्ट निर्गम स्पंद निकलते हैं।

सेरेन्कोव गणित्र में परावैद्युत पदार्थ होता है (जो अक्सर ही उच्च दाब पर टैंक में रखी एक गैस होती है)। इस पदार्थ में प्रकाश की चाल $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ से कम होती है। जब एक उच्च ऊर्जा वाला आवेशित कण इस परावैद्युत माध्यम में चलता है तो उसकी चाल प्रकाश की चाल से अधिक होती है। इन परिस्थितियों में, कण एक विद्युतचुंबकीय प्रघाती तरंग (shock wave) उत्सर्जित करता है जो ध्वनि की चाल से अधिक चाल से चलने वाले हवाई जहाज़ से उत्पन्न आवाज़ के अनुरूप है। सेरेन्कोव विकिरण को भी प्रकाश इलेक्ट्रॉन संवर्धक से देखा जा सकता है। इस गणित्र की उपयोगिता इस बात में है कि इससे किसी भी कोण पर मापन किए जा सकते हैं। इस सूचना की मदद से आयनकारी कण का वेग मालूम किया जा सकता है।

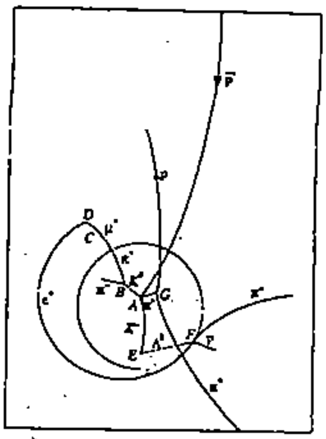
ख. कक्ष

विल्सन मेघ कक्ष (Wilson cloud chamber) वह पहला कक्ष था जिसकी मदद से पदार्थ से गुज़र रहे आवेशित कणों के पथ 'देखे' जा सके। जब पिस्टन लगे एक बेलनाकार बर्तन में भरी पानी, एल्कोहॉल या ईथर की संतृप्त वाष्प मिली हवा का बहुत तेज़ी से प्रसार किया जाता है तो यह वाष्प अतिसंतृप्त हो जाती है। और फिर यह वाष्प पानी या अन्य द्रवों की बूंदों के बादल में संघनित हो जाती है। इस तरह के बादल का बनना और भी आसान हो जाता है अगर कक्ष में आवेशित कणों द्वारा प्रेरित आयनन से उत्पन्न आयन मौजूद हों। जैसे-जैसे अतिसंतृप्ति बढ़ती है, ऋणात्मक आयन बादल में संघनन केंद्रों का काम करने लगते हैं। लेकिन आयतन बढ़ने के साथ-साथ धनात्मक और ऋणात्मक दोनों ही तरह के आयन बूंदों के नाभिकों का काम करते हैं। सूक्ष्म बूंदों का व्यूह (array) बनने के कारण इस बादल में एक लीक बन जाती है जिसकी तस्वीर खींचकर इस लीक को रिकॉर्ड कर लिया जाता है। यही लीक कण के पथ की द्योतक

है। लेकिन मेघ कक्ष की एक सीमा है कि यह इस प्रसार के बाद वापस साम्यावस्था में पहुंचने के लिए कुछ समय लेता है और इस तरह यह घटनाओं का निरंतर रिकॉर्ड नहीं दे सकता।

बुदबुद कोष्ठ (bubble chamber) में एक टैंक होता है जिसमें उच्च दाब (5-20 atm) और अपने क्वथनांक से कुछ कम ताप पर कोई द्रवित गैस, जैसे कि तरल हाइड्रोजन, हीलियम या फ्रीऑन, भरी होती है। इस कोष्ठ का टैंक में लगे एक पिस्टन की मदद से एकाएक रूद्धोष्म प्रसार किया जाता है। इस प्रक्रिया में क्वथनांक कम हो जाता है और वह द्रव अतितप्त हो जाता है। तब द्रव अस्थायी होता है और जैसे ही उसे कुछ बुलबुलों को बनाने के लिए किसी प्रकार से ऊर्जा मिलती है वह उबलने लगता है। इस कोष्ठ से गुज़रने वाला एक उच्च ऊर्जा आवेशित कण अपने पथ के अनुदिश द्रव के अणुओं का आयनन कर देता है। इस तरह मुक्त हुए इलेक्ट्रॉन अपनी ऊर्जा तरल को दे देते हैं और बुलबुलों को बनने में मदद देते हैं। इस प्रकार आवेशित कण की लीक के अनुदिश, बुलबुलों का सूक्ष्म पथ बन जाता है। तब व्यूह में रखे उच्च गति कैमरों द्वारा बुलबुलों के इस पथ की, उनके बनने के 10 ms के भीतर, तस्वीर खींच ली जाती है। फिर लगभग एक सेकंड के कुछ 100वें भाग के भीतर कोष्ठ को संपीडित किया जाता है। इससे बुलबुले बनने बंद हो जाते हैं और कोष्ठ संक्रिया के दूसरे चरण के लिए तैयार हो जाता है।

CERN में स्थित बुदबुद कोष्ठ एक विशालकाय विद्युतचुंबक से घिरा है जिसका चुंबकीय क्षेत्र कणों की कक्षाओं को घुमाव दे देता है और इस तरह प्रेक्षित वक्रता त्रिज्याओं से उन कणों के संवेग की गणना की जा सकती है। बुदबुद कोष्ठ से गुज़र रहे कणों की लीक के बहुत से चित्र अनेकों कैमरों से अलग-अलग कोणों से एक साथ लिए जाते हैं ताकि उन लीकों का त्रिविम दृश्य पाया जा सके। बुदबुद कोष्ठ का संचालन और उनका रखरखाव काफ़ी महंगा पड़ता है, लेकिन अन्य किसी भी संसूचक युक्ति के मुकाबले उनके द्वारा कहीं अधिक स्थानिक विभेदन प्राप्त किया जा सकता है। चित्रों में सावधानीपूर्वक मापन करके लीक स्थितियों का 0.05mm के भीतर निर्धारण संभव है। साथ ही चुंबकीय क्षेत्र में लीक की वक्रता से कण के संवेग का 0.1% तक के भीतर निर्धारण किया जा सकता है।



चित्र 15.8: बुदबुद कोष्ठ में कणों की लीक के अनुरेख का चित्र।

चित्र 15.8 में CERN के बुदबुद कोष्ठ में देखे गए कणों की लीक के चित्र का अनुरेख (trace) दिखाया गया है। इसमें एक प्रोटॉन और एक ऐन्टिप्रोटॉन के संघट्टन के दौरान कई कणों के उत्पन्न होने की घटनाओं का एक क्रम दिखाया गया है और उसके बाद इन कणों के क्षय और आपसी संघट्टनों को भी दिखाया गया है। ऐन्टिप्रोटॉन ($\bar{p}$) ऊपर से दृश्य क्षेत्र में आता है। चुंबकीय क्षेत्र के कारण पथ बायीं ओर घुमाव लिए हुए है। यह ऐन्टिप्रोटॉन बुदबुद कोष्ठ के बाहर तब उत्पन्न होता है जब प्रोटॉनों का एक किरण पुंज धात्विक लक्ष्य से टकराता है। बिंदु A पर ऐन्टिप्रोटॉन बुदबुद कोष्ठ के द्रव में विरामावस्था में स्थित एक प्रोटॉन से संघट्टन करता है। ये प्रोटॉन और ऐन्टिप्रोटॉन इस संघट्टन में नष्ट हो जाते हैं और इस प्रक्रिया में 2 केऑन (K^0, K^-) और 2 पायॉन (π^+, π^0) उत्पन्न होते हैं। यह नितांत संयोग है कि π^0 के अलावा अन्य सभी कणों के कारण बुदबुद कोष्ठ के दृश्य क्षेत्र में और भी कई घटनाएं होती हैं। K^0 कण आवेशहीन होता है इसलिए वह बुदबुद कोष्ठ में दिखाई देने वाली लीक नहीं छोड़ता, फिर भी उसकी लीक को बना सकना संभव है क्योंकि कुछ ही देर में (बिंदु B पर) इसका दो पायॉनों में स्वत: क्षय होता है जो अपनी लीक छोड़ते हैं। इनमें से एक पायॉन का फिर से (बिंदु C पर) एक ऐन्टिम्यूऑन और न्यूट्रीनो में क्षय होता है। उस ऐन्टिम्यूऑन का फिर से (D पर) एक पॉज़िट्रॉन और दो न्यूट्रीनो में क्षय हो जाता है। इस दौरान मूल ऐन्टिप्रोटॉन प्रोटॉन संघट्टन में उत्पन्न K^- कण का (बिंदु E पर) बुदबुद कोष्ठ के द्रव में विरामावस्था में स्थित दूसरे प्रोटॉन से संघट्टन होता है। इस

संघट्टन के कारण एक कण (Λ^0) और (π^0) पायॉन का जन्म होता है। Λ^0 पर आवेश नहीं होता इसलिए उसका पथ दिखता नहीं है लेकिन इसका F पर एक पायॉन (π^-) और प्रोटॉन में क्षय होता है। इसी के साथ-साथ मूल ऐन्टिप्रोटॉन-प्रोटॉन संघट्टन में उत्पन्न पायॉनों में से एक पायॉन का (बिंदु G पर) विरामावस्था में स्थित एक अन्य प्रोटॉन से प्रत्यास्थ संघट्टन होता है जिसके कारण इस प्रोटॉन का प्रतिक्षेपण (recoil) होता है।

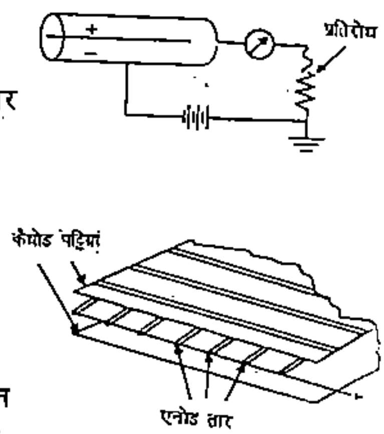
स्फुलिंग कक्ष (spark chamber) में बुदबुद कोष्ठ के मुकाबले कणों की लीकों की कुछ बेहतर तस्वीरें मिलती हैं क्योंकि वे अपेक्षाकृत काफी सरल युक्तियां हैं। स्फुलिंग कक्ष में धातु के कई समांतर पर्दे या पतली प्लेटें होती हैं जिनके बीच में लगभग 1 cm की दूरी होती है। इन प्लेटों के बीच गैस भरी होती है जो प्रायः नीयॉन गैस होती है। कक्ष में एकांतर प्लेटों को उच्च वोल्टता सप्लाई के धनात्मक और ऋणात्मक सिरों से जोड़ा जाता है जो प्लेटों के बीच लगभग 10^6 Vm^{-1} का विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करते हैं। कक्ष से गुज़र रहा एक उच्च-ऊर्जा आवेशित कण अपनी लीक के अनुदिश गैस का आयनन कर देता है। इस आयनन में मुक्त हुए इलेक्ट्रॉनों का प्रबल विद्युत क्षेत्र में त्वरण होता है और वे अन्य गैस अणुओं से टकराकर, अन्य इलेक्ट्रॉनों को मुक्त करते हैं और यह प्रक्रिया जारी रहती है। इस प्रक्रिया के कारण प्लेटों के बीच विद्युत विसर्जन (discharge) स्फुलिंग (spark) दिखाई देता है। इस तरह कक्ष में कणों के गुज़रने को उत्तरोत्तर स्फुलिंगों की मार्फत दर्ज किया जाता है। कक्ष में लगे कैमरे इन स्फुलिंगों का चित्र खींच लेते हैं। अक्सर स्फुलिंग कक्ष में चारों ओर दर्पण रखे जाते हैं ताकि एक ही चित्र पर कई कोणों से स्फुलिंग की लीक के कई दृश्य एक साथ रिकार्ड किए जा सकें।

स्फुलिंग कक्षों में बुदबुद कोष्ठों जितनी स्थानिक विभेदन क्षमता नहीं होती लेकिन उनकी समय विभेदन क्षमता अधिक होती है। इस कक्ष पर उच्च वोल्टता कुछ ही समय (लगभग 10^{-6} s) के लिए लगाई जाती है। इसलिए यह कक्ष इस संक्षिप्त समय अंतराल में ही काम कर रहा होता है। इस तरह इस कक्ष से एक एकल कण की लीक की तस्वीर ली जा सकती है, बशर्ते उसे एक उपयुक्त क्षण पर ट्रिगर किया जाए। यह ट्रिगर, कक्ष के चारों ओर रखे सहायक प्रस्फुरण गणित्रों से दिया जाता है। इन गणित्रों की मदद से आने वाले कणों की आरंभिक पहचान की जाती है और जब भी कोई ऐसी घटना घटती है जिसमें रुचि हो तब उसे रिकार्ड करने के लिए स्फुलिंग कक्ष को ट्रिगर किया जाता है।

ज्योतिकेतु कक्ष (streamer chamber) स्फुलिंग कक्ष जैसे ही होते हैं लेकिन उनमें स्फुलिंग कक्ष के समान बहुत नज़दीक रखी कई जोड़ी प्लेटों के बजाय दूर पर रखी एक जोड़ी प्लेट का ही इस्तेमाल होता है। इन प्लेटों पर लगभग 10^{-8} s के लिए उच्च वोल्टता का एक संक्षिप्त स्पंद लगाया जाता है। इस स्थिति में कक्ष में गैस के आयनन से मुक्त हुए इलेक्ट्रॉनों के पास इतना समय नहीं होता कि वे एक प्लेट से दूसरी प्लेट के बीच स्फुलिंग उत्पन्न कर सकें। इसके बजाय वे संक्षिप्त धुंधले प्रोटो-स्फुलिंग या ज्योतिकेतु उत्पन्न करते हैं जिनसे कण की लीक का पता चलता है। ज्योतिकेतु कक्षों में भी अच्छा स्थानिक विभेदन मिल सकता है। प्लेटों के लम्बवत् दिशा में तस्वीर लेने पर ज्योतिकेतुओं द्वारा, 0.1 mm की सीमा में कण की लीक पर बिंदुओं की स्थिति का पता लगाया जा सकता है।

आनुपातिक कक्ष (proportional chamber) आयनन को रिकॉर्ड करने वाले सबसे पुराने उपकरणों में से एक है। इसमें बेलनाकार धातु या कांच की नली में गैस भरी हुई होती है जिसे ऋणात्मक विभव पर रखा जाता है। नली के बीच में एक पतला तार होता है जिसे नली के सापेक्ष धनात्मक विभव पर रखा जाता है और यह एनोड का काम करता है। इस गणित्र में एक महत्वपूर्ण संशोधन यह किया गया कि इस अकेले तार की जगह

कई पतले समान्तर तार रखे गए। इनमें से हरेक तार पर धनात्मक विभव लगाया गया और उसे ऋणात्मक विभव वाली दो प्लेटों या पर्दों के बीच में रखा गया। इसे चित्र 15.9 में दिखाया गया है। कक्ष में गैस के आयनन में मुक्त हुए इलेक्ट्रॉन सबसे नज़दीक के धनात्मक तार की ओर अपवाह (drift) करते हैं और तार के बिल्कुल निकट प्रबल विद्युत क्षेत्र के कारण विद्युत विसर्जन उत्पन्न करते हैं। यह विद्युत विसर्जन तार पर धारा के स्पंद के रूप में दर्ज़ होता है (धारा स्पंद का परिमाण आयनन की मात्रा के समानुपाती होता है– इसी से इस कक्ष का नाम आनुपातिक कक्ष पड़ा है। प्रत्येक तार में खुद अपनी विद्युत धारा बह रही होती है। इस प्रकार प्रत्येक तार स्वयं एक स्वतंत्र संसूचक होता है जो विसर्जन की स्थिति बताता है। कई तारों वाले आनुपातिक कक्ष की स्थानिक विभेदन क्षमता बेहतर की जा सकती है अगर पूरे कक्ष को घने व्यूह में रखे बहुत सारे तारों से (लगभग 1 mm में 1 तार के हिसाब से) भर दिया जाए। अपवाह आनुपातिक कक्षों में तारों के बीच की दूरी कहीं ज़्यादा होती है। लेकिन कक्ष में आने वाले उच्च-ऊर्जा कणों के आगमन और तारों पर धारा स्पंदों के संसूचन के बीच समय अंतराल को मापकर बेहतरीन स्थानिक विभेदन प्राप्त किया जा सकता है। क्योंकि आयनन में मुक्त हुए इलेक्ट्रॉन, धनात्मक तारों की ओर एक जानी मानी अपवाह चाल से चलते हैं इसलिए इस समयांतराल के मापन से उन दूरियों की सटीक गणना की जा सकती है जो ये इलेक्ट्रॉन अपने उत्पादन के बिंदु से तार के बीच में तय करते हैं। अपवाह आनुपातिक कक्षों से 0.05 मिमी से भी कम की सार्थकता तक लीक स्थितियां निर्धारित की जा सकती हैं।



चित्र 15.9: आनुपातिक कक्ष में धनात्मक और ऋणात्मक इलेक्ट्रोडों की व्यवस्था।

आनुपातिक कक्षों में कणों की लीक की तस्वीर नहीं ली जा सकती। इसके बजाय वे अपने संसूचक तारों से उत्पन्न विद्युत संकेतों के क्रम के रूप में कण की लीकों को रिकॉर्ड करते हैं। ये संकेत कम्प्यूटरों को पहुंचाए जाते हैं जो इन लीकों की तस्वीर बनाते हैं। क्योंकि इनका स्थानिक विभेदन अच्छा होता है और इस तरह प्राप्त आंकड़ों की मदद से कंप्यूटर द्वारा कणों के पथ की गणना की जा सकती है इसलिए आनुपातिक कक्ष उच्च ऊर्जा भौतिकी में बहुत लोकप्रिय साबित हुए हैं।

वर्षण संसूचक (shower detector) **और कैलोरीमीटर** (calorimeter): उच्च-ऊर्जा इलेक्ट्रॉनों और फोटॉनों के कारण सोपानी वर्षण (cascade shower) होता है। एक जनक इलेक्ट्रॉन फ़ोटॉन उत्सर्जित करता है जो कण युग्मों में बदल जाते हैं और इस तरह माध्यम में गहराई के साथ कणों की संख्या चरघातांकी-रूप से बढ़ती है। ये विद्युतचुंबकीय वर्षण संसूचक अधिक परमाणु संख्या Z वाले पदार्थों से बनाये जाते हैं जिनकी विकिरण लंबाई कम होती है (परिभाषा से विकिरण लंबाई वह लंबाई या वह दूरी है जिसे तय करते हुए कण की ऊर्जा गुणक $1/e$ से कम हो जाती है। जब एक आपतित हेड्रॉन का अप्रत्यास्थ संघट्टन होता है जिससे द्वितीयक हेड्रॉन बनते हैं तब हेड्रॉन वर्षण होता है और यही प्रक्रिया जारी रहती है। आजकल विभिन्न प्रकार के विद्युतचुंबकीय और हेड्रॉन कैलोरीमीटर इस्तेमाल किए जाते हैं। वस्तुत: ये विशाल जटिल संयंत्रों का एक आवश्यक हिस्सा बन गये हैं।

15.5 मूल कणों की सूची

आज़ तक खोजे गए सभी कणों को मोटे तौर पर चार वर्गों में रखा जा सकता है: लेप्टॉन (lepton), बेरिऑन (baryon), मीसॉन (meson) और क्षेत्र बोसॉन (field boson)। मीसॉन और बेरिऑन को सामूहिक रूप से हेड्रॉन (hadron) कहा जाता है। अब हम इनकी संक्षेप में चर्चा करेंगे।

लेप्टॉन (lepton) वे कण हैं जो प्रबल अन्योन्यक्रिया में हिस्सा नहीं लेते लेकिन दुर्बल अन्योन्यक्रियाओं में उत्पन्न और अवशोषित होते हैं। इलेक्ट्रॉन, म्यूऑन (μ) और टाउ कण (τ) और इनसे संबंधित न्यूट्रीनो ν_e, ν_μ और ν_τ इस वर्ग के सदस्य हैं। इन छः लेप्टॉनों के प्रतिकणों से मिलकर ऐन्टिलेप्टॉनों का परिवार बनता है जिनमें e^+, μ^+, τ^+, $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ और $\bar{\nu}_\tau$ शामिल हैं। भौतिकीविदों का मानना है कि लेप्टॉनों की स्पिन अर्द्ध पूर्णांकीय होती है और वे फ़र्मिऑन होते हैं। तालिका 15.2 में इन लेप्टॉनों के विभिन्न प्रेक्षित गुणधर्म दिए गए हैं जैसे कि उनके द्रव्यमान, स्पिन, विद्युत आवेश, आयु और क्षय की विधा।

तालिका 15.2: लेप्टॉनों के प्रेक्षित गुणधर्म

कण	द्रव्यमान (MeV/c^2)	स्पिन	विद्युत आवेश	औसत आयु	प्रमुख क्षय विधा	
					विधा	अंश (%)
e	0.511003	1/2	− 1	स्थायी		
μ	105.659	1/2	− 1	2.1973×10^{-6} s	$e\nu\bar{\nu}$	100
τ	1784	1/2	− 1	34×10^{-13} s	$\mu\nu\bar{\nu}$ $e\nu\bar{\nu}$ हेड्रॉन आवेशहीन	17.6 17.4 51.6
ν_e	0*	1/2	0	स्थायी		
ν_μ	0	1/2	0	स्थायी		
ν_τ	0	1/2	0	स्थायी		

*हाल में लगाए गए अनुमानों के मुताबिक, न्यूट्रीनो का द्रव्यमान लगभग 20 eV/c^2 है।

आपने भाग 15.3 में म्यूऑन की खोज के बारे में पढ़ा। टाऑन की खोज 1975 में एम. पर्ल (M. Perl) और उनके साथियों ने स्टैनफर्ड रैखिक त्वरित्र में e^+e^- संघट्टन प्रयोगों में की। उन्हें 1995 का भौतिकी का नोबेल पुरस्कार अन्य वैज्ञानिकों के साथ मिला। वस्तुतः म्यूऑन और टाऑन इलेक्ट्रॉन के ही कुछ भारी संस्करण हैं। टाऑन का अधिकतर हेड्रॉन में क्षय होता है।

न्यूट्रीनो (ν_e, ν_μ और ν_τ) (शायद) द्रव्यमानरहित आवेशहीन कण हैं। इलेक्ट्रॉन न्यूट्रीनो ν_e, β^- क्षय में उत्सर्जित होता है। म्यूऑन और टाऑन न्यूट्रीनो ν_μ और ν_τ, म्यूऑन और टाऑन के क्षय में उत्सर्जित होते हैं:

$$\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

$$\tau \rightarrow \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu$$

$$\rightarrow e^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_e$$

जहां ν_e और ν_μ सीधे ही उन अभिक्रियाओं में देखे गए हैं जिनमें इनका अवशोषण होता है, वहां ν_τ के अस्तित्व का, टाऑन के क्षय में, ऊर्जा और संवेग संरक्षण के नियम लागू करके अनुमान लगाया गया है। इसे सीधे तौर पर नहीं देखा गया है।

बेरिऑन वे कण हैं जो प्रबल अन्योन्यक्रिया करते हैं। इनमें प्रोटॉन, न्यूट्रॉन और उनसे भी अधिक द्रव्यमान वाले कण जैसे ओमेगा-माइनस शामिल हैं जिनके अंतिम क्षय उत्पाद या तो प्रोटॉन या न्यूट्रॉन होते हैं (तालिका 15.3)।

तालिका 15.3: बेरिऑनों के प्रेक्षित गुण धर्म

कण	द्रव्यमान (MeV/c^2)	स्पिन पैरिटी	आइसोस्पिन	औसत आयु (s)	क्षय विधा
p	938.3	$1/2^+$	1/2	$> 10^{32}$ y	
n	939.6	$1/2^+$	1/2	898	$p\, e^- \, \bar{\nu}_e$
Λ	115.6	$1/2^+$	0	26×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$
Σ^+	1189.4	$1/2^+$	1	0.80×10^{-10}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
Σ^0	1192.5	$1/2^+$	1	5.0×10^{-20}	$\Lambda\gamma$
Σ^-	1197.3	$1/2^+$	1	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$
Ξ^0	1314.9	$1/2^+$	1/2	2.9×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	1321.3	$1/2^+$	1/2	1.6×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$
Ω^-	1672.5	$3/2^+$	1/2	0.82×10^{-10}	Λ_K, $\Xi^0\pi^-$, $\Xi^-\pi^0$
Λ_c^+	2282	$1/2^+$	0	अज्ञात	$pK^-\pi^+$, pK^0, $\Lambda^+ ... e^+$,...

यह वह वर्ग है जिसमें सबसे ज़्यादा तादाद में कण पाए जाते हैं। प्रत्येक बेरिऑन के संगत एक एन्टिबेरिऑन भी होता है। लेप्टॉन की ही तरह, इन प्रतिकणों के आवेश विपरीत चिन्ह के होते हैं लेकिन उनके द्रव्यमान और स्पिन वही होते हैं जो उनके संगत कणों के लिए हैं। इसी के साथ-साथ बेरिऑन भी फ़र्मिऑन ही होते हैं।

मीसॉन वे कण हैं जो प्रबल अन्योन्य क्रियाओं में हिस्सा लेते हैं लेकिन वे बेरिऑन नहीं होते (तालिका 15.4)। इन्हें उनके स्पिन और अन्य क्वांटम अंकों के मुताबिक अलग-अलग तरीकों से वर्गीकृत किया जा सकता है। इनके द्रव्यमानों में काफ़ी विचरण होता है: यह पायॉन (π^0) के लिए महज 135 MeV से लेकर अपसाइलन के लिए 10,000 MeV से भी अधिक होता है।

सभी मीसॉन कणों के स्पिन पूर्णांकीय होते हैं– वे बोसॉन हैं जबकि सभी बेरिऑन अर्द्ध पूर्णांकीय स्पिन वाले यानी फ़र्मिऑन होते हैं। प्रत्येक मीसॉन के लिए एक ऐन्टिमीसॉन होता है। उदाहरण के लिए, π^+ का प्रतिकण है π^- और π^0 का प्रतिकण स्वयं π^0 है। इसका मतलब यह है कि दो π^0 कणों की परस्पर क्रिया में वे दोनों ही नष्ट हो जाते हैं।

क्षेत्र बोसॉन विद्युतचुंबकीय और दुर्बल बलों के वाहक कण हैं। इस वर्ग के कण फ़ोटॉन हैं जो विद्युतचुंबकीय क्षेत्र के संगत कण हैं, और $W^\pm$ और Z^0 बोसॉन हैं।

अब आप जान गए हैं कि पूरे तौर पर स्थायी कणों में सिर्फ़ इलेक्ट्रॉन, फ़ोटॉन, न्यूट्रीनो और शायद प्रोटॉन आते हैं। इसका मतलब यह हुआ कि लगभग सभी जाने हुए कण अस्थायी होते हैं और उनका अन्य कणों में क्षय हो जाता है। बड़ी संख्या में ऐसे कणों का क्षय प्रबल अन्योन्यक्रिया बलक्षेत्र के कारण होता है। इस प्रबल बल के कारण हुए क्षय बहुत तेज़ी से होते हैं। ऐसे कणों की औसत आयु केवल 10^{-23} s होती है। ऐसे कणों को अस्थायी माना जाता है। अगर एक कण की आयु केवल 10^{-23} s हो तो हम उसका सीधे तौर पर पता नहीं लगा सकते क्योंकि इस दौरान में प्रकाश द्वारा चली गई अधिकतम दूरी है $\sim 10^{-15}$ m (10^{-23} s $\times 10^8$ ms^{-1}) जो लगभग प्रोटॉन के व्यास जितनी ही है। ज़ाहिर है कि ऐसे कण किसी भी संसूचक में दिखाई देने वाली लीक नहीं छोड़ेंगे। लेकिन इनके अस्तित्व का पता और तरीकों से लगाया जाता है। इतनी कम आयु वाले कणों को अक्सर अनुनाद (resonance) कहा जाता है। कम आयु वाले वर्ग के कणों को जिनमें से कुछ बेरिऑन हैं और बाकी मीसॉन हैं, तालिका 15.2 और तालिका 15.3

में नहीं दिखाया गया है। इनमें से कुछ कण उत्पादन के क्षण से 10^{-10}s तक रह जाते हैं। उच्च ऊर्जा भौतिकी में 10^{-14} s से 10^{-10} s का समय अंतराल काफ़ी लंबा माना जाता है। और इतनी औसत आयु वाले कण स्थायी माने जाते हैं। ऐसे विद्युतचुंबकीय क्षय जिनमें फ़ोटॉन शामिल होते हैं धीमे होते हैं। वे कण जिनकी विद्युतचुंबकीय या प्रबल क्षय विधा नहीं होती, उनके लिए दुर्बल क्षय विधा संभव हो सकती है। दुर्बल अन्योन्य क्रियाओं में होने वाले क्षय प्रायः सबसे धीमे होते हैं। इस तरह की धीमी क्षय विधा का एक जाना माना उदाहरण है न्यूट्रॉन का बीटा क्षय जिसकी औसत आयु लगभग 15 मिनट है।

तालिका 15.4: मीसॉनों के प्रेक्षित गुण धर्म

कण	द्रव्यमान (MeV/c^2)	J^P	I	औसत आयु (s)	क्षय विधा
$\pi^{\pm}$	139.6	0^-	1	2.6×10^{-8}	$\mu^{\pm}$ νu
π^0	135.0	0^-	1	0.83×10^{-16}	$\gamma\gamma$, e^+, e^- γ
η^0	549	0^-	0	10^{-18}	$\gamma\gamma$, $3\pi^0$, $\pi^+ \pi^- \pi^0$, $\pi^+ \pi^- \gamma$
$K^{\pm}$	493.7	0^-	1/2	1.24×10^{-8}	$\mu^{\pm}$, ν, $\pi^{\pm}$ π^0, $\pi^+ \pi^- \pi^{\pm}$, π^0 π^0 $\pi^{\pm}$, π^0 $\mu^{\pm}$ ν, π^0 $e^{\pm}$ ν
K^0, $\bar{K}^0$	497.7	0	1/2	K^0_S (50%), K^0_L (50%) में क्षय	
K^0_S				0.89×10^{-10}	$\pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$
K^0_L				5.2×10^{-8}	$3\pi^0$, $\pi^+ \pi^- \pi^0$, $\pi^{\pm} \mu^{\pm} \nu$, $\pi^{\pm} e^{\pm} \nu$
$D^{\pm}$	1869	0^-	1/2	9.2×10^{-13}	इलेक्ट्रॉन या K मीसान
D^0, $\bar{D}^0$	1865	0^-	1/2	4.4×10^{-13}	+ अन्य कण
$F^{\pm}$	1971	0^-	0	1.9×10^{-13}	ϕ π (ϕ एक कम आयु वाला कण है जिसका $K^+ K^-$, $K^0 \bar{K}^0$ आदि में क्षय होता है)
$B^{\pm}$	5271	0^-	1/2	1.4×10^{-12}	D मीसॉन या इलेक्ट्रॉन या μ
B^0, $\bar{B}^0$	5274	0^-	1/2		+ अन्य कण

15.6 संरक्षित राशियां

कणों के बीच परस्पर अभिक्रियाओं पर कई संरक्षण नियम लागू होते हैं। इनमें से कुछ संरक्षण नियमों को तो आप क्लासिकी भौतिकी से जानते ही हैं। कुछ और संरक्षण नियम बिल्कुल ही नए हैं– ये पूरी तरह आनुभविक नियमों पर आधारित हैं। और इनका अभी तक कोई सैद्धांतिक आधार नहीं दिया जा सका है। भौतिकीविदों ने इस तरह के संरक्षण नियमों को इसलिए प्रस्तावित किया क्योंकि इनकी मदद से वे उन सभी विविध काल्पनिक अभिक्रियाओं की अनुपस्थिति की व्याख्या कर सके जो उनके लिए एक पहेली बनी हुई थीं। आम तौर पर, यह आशा की जाती है कि कोई अभिक्रिया जो संरक्षण नियमों द्वारा वर्जित नहीं है, वह शायद एक धीमी दर पर चलेगी। लेकिन कुछ ऐसी अभिक्रियाओं की अनुपस्थिति, जो किसी भी जाने माने संरक्षण नियम द्वारा वर्जित नहीं हैं, हमें यह सुझाती हैं कि यहां कोई नया संरक्षण नियम लागू हो रहा है जिसमें कोई नई राशि संरक्षित हो रही है। लेकिन जब हम सिर्फ़ आनुभविक आधार पर कोई नया

संरक्षण नियम बनाते हैं तो हम यह समझ पाने का दावा नहीं कर सकते कि ये अभिक्रियाएं क्यों नहीं घटतीं। हम केवल प्रेक्षित तथ्यों को एक गणितीय स्वरूप दे रहे होते हैं, लेकिन इनकी कोई सैद्धांतिक व्याख्या हमारे पास नहीं होती। फिर भी इस तरीके के नियमों की अपनी एक महत्ता है, क्योंकि इनसे हमें यह पूर्वानुमान लगाने में मदद मिलती है कि कौन सी अभिक्रियाएं संभव है और कौन सी नहीं। इसी के साथ-साथ आनुभविक संरक्षण नियमों से हमें मूल कणों की अन्योन्य क्रियाओं के बारे में सिद्धांत विकसित करने के लिए बहुमूल्य निर्देशन मिलता है।

इनमें से कुछ संरक्षण नियम निरपेक्ष हैं यानी सभी परिस्थितियों में सभी अभिक्रियाएं इनका पालन करती हैं। ये परम संरक्षित राशियां हैं– ऊर्जा, संवेग, कोणीय संवेग, विद्युत आवेश, लेप्टॉन संख्या, बेरिऑन संख्या। इसमें से पहली चार (ऊर्जा, संवेग, कोणीय संवेग और विद्युत आवेश) आपकी जानी पहचानी राशियां हैं। इनका संरक्षण क्लासिकी या क्वांटम यांत्रिकी और विद्युतचुंबकत्व के मूलभूत नियमों का परिणाम है। बाकी दो राशियां आपके लिए नई हैं और इनकी हम एक-एक करके चर्चा करेंगे।

लेप्टॉन संख्या: नाभिकीय अभिक्रियाओं में इलेक्ट्रॉनों की संख्या संरक्षित रहती है। इस धारणा को हम इस तरह पेश करते हैं: इलेक्ट्रॉन के लिए लेप्टॉन संख्या $L_e = 1$ है और पॉज़िट्रॉन के लिए लेप्टॉन संख्या $L_e = -1$ है। लेप्टॉन संख्या के संरक्षण के तीन अलग-अलग नियम हैं जो तीन तरह के लेप्टॉनों e, ν और τ के संगत हैं। इलेक्ट्रॉन लेप्टॉन संख्या के संरक्षण नियम के मुताबिक किसी अभिक्रिया में इलेक्ट्रॉन-नुमा लेप्टॉनों की कुल संख्या अचर रहती है। कुल लेप्टॉन संख्या में ऐन्टिलेप्टॉन संख्या का ऋणात्मक योगदान लिया जाता है। वस्तुतः इसका मतलब यह है कि जब किसी अभिक्रिया में 1 लेप्टॉन उत्पन्न होता है या नष्ट होता है तो उसके संगत एक ऐन्टिलेप्टॉन को भी उत्पन्न या नष्ट होना चाहिए। मिसाल के तौर पर, एक मुक्त न्यूट्रॉन की क्षय प्रतिक्रिया है

$$n \rightarrow p + e + \overline{\nu}_e$$

यहां आप ध्यान दें कि अभिक्रिया के पहले और बाद में नेट इलेक्ट्रॉन लेप्टॉन संख्या शून्य है।

म्यूऑन लेप्टॉन संख्या और टाऑन लेप्टॉन संख्या के संरक्षण नियम भी ठीक इसी तरह दिए जाते हैं। लेप्टॉन संख्या का संरक्षण बहुत बार आनुभविक प्रमाणों से साबित हो चुका है।

बेरिऑन संख्या: लेप्टॉन संख्या के संरक्षण के अनुरूप, किसी नाभिकीय अभिक्रिया में न्यूक्लिऑन संख्या भी संरक्षित रहती है। इसे हम इस तरह पेश करते हैं: प्रबल अन्योन्य क्रियाओं में हिस्सा लेने वाले सभी कणों की एक ख़ास बेरिऑन संख्या होती है। अगर हम बेरिऑन को $B = +1$ और ऐन्टिबेरिऑन को $B = -1$ मान दें और उन सभी कणों के लिए जो बेरिऑन नहीं होते (जैसे मीसान, लेप्टॉन और क्षेत्र कण) $B = 0$ लें, तो किसी अभिक्रिया के दोनों पक्षों में बेरिऑन संख्या का मान बराबर होना चाहिए। उदाहरण के लिए, $p - p$ संघट्टन में ऐन्टिप्रोटॉन की उत्पादन अभिक्रिया की अंतिम अवस्था में 3 प्रोटॉन होने चाहिए ताकि बेरिऑन संख्या का कुल मान $B = +2$ दोनों ओर संरक्षित रहे:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

बेरिऑन संख्या संरक्षण नियम हमें बताता है कि किसी भी अभिक्रिया में बेरिऑनों की नेट संख्या अचर रहती है। लेप्टॉन संख्या के संरक्षण की ही तरह बेरिऑन संख्या का संरक्षण नियम भी आनुभविक नियम है।

बेरिऑन संख्या संरक्षण के मुताबिक इस तरह के क्षय वर्जित हैं:

$$\bar{\Lambda}^0 \rightarrow p + \pi^-$$

क्योंकि $B = -1 \rightarrow +1 + 0$

प्रोटॉन के प्रेक्षित स्थायित्व को ऊर्जा संरक्षण नियम और बेरिऑन ऊर्जा संरक्षण नियम का परिणाम माना जा सकता है। चूंकि प्रोटॉन सभी बेरिऑनों में सबसे हल्का है, इसलिए ऊर्जा संरक्षण के मुताबिक इसके क्षय उत्पाद बेरिऑन नहीं होंगे। और यह क्षय प्रक्रिया, बेरिऑन संख्या संरक्षण नियम का उल्लंघन करेगी। वीनबर्ग (Weinberg), सलाम (Salam), और ग्लाशोव (Glashow) द्वारा दिए गए इलेक्ट्रो-वीक सिद्धांत (electroweak theory) जो कि विद्युतचुंबकत्व और दुर्बल बलों का एकीकरण करता है, के अनुसार प्रोटॉन अस्थायी कण है: इसका क्षय 10^{31}y की अर्द्ध आयु से होना चाहिए। इलेक्ट्रो-वीक सिद्धांत के इस आयाम की पुष्टि के लिए प्रायोगिक प्रमाण जुटाने के लिए पूरी दुनिया में प्रयोग किये जा रहे हैं। भारत में यह प्रयोग कोलार स्वर्ण खदानों में प्रो. एम. जी. के मेनन (M.G.K. Menon) के निर्देशन में जापान के वैज्ञानिकों के साथ मिलकर किया जा रहा है। क्योंकि इन प्रयोगों से अभी तक प्रोटॉन क्षय का पता नहीं लगा है इसलिए अभी तक उपलब्ध आनुभविक प्रमाणों को बेरिऑन संख्या संरक्षण के संगत माना जा सकता है। अगर प्रोटॉन क्षय का प्रयोगों में पता लग जाएगा, तो बेरिऑन संख्या संरक्षण नियम को एक सन्निकटन ही माना जाएगा।

बाकी सभी संरक्षित राशियों जैसे कि आइसोस्पिन, विचित्रता संख्या, पैरिटी आदि की गणितीय व्याख्या इस पाठ्यक्रम की सीमा से बाहर है। इसलिए हम इनकी चर्चा यहां नहीं कर रहे।

15.7 क्वार्क मॉडल

अब तो आप इस बारे में पूरी तरह से सहमत हो गए होंगे कि उच्च ऊर्जा प्रयोगों के कारण ही विविध अभिलक्षणों वाले नए-नए कणों की खोज संभव हुई है। अब यह सवाल उठता है कि क्या हम किसी मूलभूत सिद्धांत या मॉडल के ज़रिए इतनी बड़ी तादाद में उत्पन्न इन कणों की भौतिकी समझ सकते हैं? इस सवाल का जवाब है, हां। अब ऐसा माना जाता है कि सभी हेड्रॉन 2 या 3 क्वार्कों से मिलकर बने हुए संयुक्त निकाय हैं। ये क्वार्क जिन बलों के कारण एक दूसरे से जुड़े रहते हैं उनके संगत कण हैं– ग्लुऑन (gluon)। ये कण द्रव्यमानरहित हैं और इनकी स्पिन 1 है। ये फ़ोटॉन के अनुरूप हैं जो आवेशित कणों के बीच लग रहे विद्युतचुंबकीय बलों के वाहक कण हैं। बेरिऑन 3 क्वार्कों से मिलकर बने हैं जबकि मीसॉन 2 क्वार्कों से मिलकर बने हैं।

क्वार्क मॉडल में दो ही मूल कण हैं, लेप्टॉन और क्वार्क। सभी क्वार्कों की स्पिन 1/2 होती है और उन पर आंशिक विद्युत आवेश होता है, $\left(\frac{2}{3}e \text{ और } -\frac{e}{3}\right)$। यह माना जाता है कि क्वार्कों के 6 सुवचिक (flavour) हैं (जिनका स्वाद से कोई लेना देना नहीं है)।

अन्य मूल कणों की तरह प्रत्येक क्वार्क का एक प्रतिकण भी होता है, जिस पर उस क्वार्क के विपरीत आवेश होता है। ये गुण धर्म तालिका 15.5 में दिए गए हैं।

तालिका 15.5: क्वार्क के गुणधर्म

नाम	संकेत	आवेश	स्पिन	बेरिऑन संख्या	ऐन्टिक्वार्क
अप	u	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{u}$
डाउन	d	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{d}$
स्ट्रेंज	s	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{s}$
चार्म्ड	c	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{c}$
टॉप	t	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{t}$
बॉटम	b	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\bar{b}$

क्वार्क से संबद्ध अभिक्रियाओं पर पाउली अपवर्जन सिद्धांत लागू करने के लिए सुरुचिक के साथ-साथ वर्ण क्षेत्र (colour field) की संकल्पना भी जोड़ी गई। क्वार्क के प्रत्येक सुरुचिक के साथ तीन मूल वर्ण संबद्ध होते हैं: लाल, हरा और नीला। प्रत्येक एन्टिक्वार्क के साथ संगत पूरक रंग संबद्ध किया जाता है: स्यान (cyan), मैजेंटा और पीला। इस तरह कुल अठारह क्वार्क और इतने ही ऐन्टिक्वार्क होते हैं।

वर्णों वाले क्वार्क मॉडल का एक बुनियादी लक्षण है कि हेड्रॉनों के लिए वर्णों के संयोजन से हमेशा सफेद रंग मिलता है। यानी सभी प्रेक्षित मीसॉन और बेरिऑन अवस्थाएं **वर्णहीन होती हैं**। इन तीन मूल रंगों के मिश्रण से हमें बेरिऑन मिलता है और मूल रंग में उसके पूरक रंग को मिलाने पर मीसान मिलता है। ध्यान दें कि हालांकि यह वर्णन सामान्य रंगों से काफी मिलता है पर इन कणों का कोई रंग नहीं होता।

आज जो स्थिति है, उसमें क्वार्क को सबसे मूलभूत कण माना जा सकता है क्योंकि आज तक के सभी जाने हुए कणों को, क्वार्कों के विविध संयोजनों से हासिल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक प्रोटॉन 2 u क्वार्कों और 1 d क्वार्क से मिलकर बना है। एक धनात्मक पायॉन एक u क्वार्क और एक d ऐन्टिक्वार्क से मिलकर बना है। अब आप पूछ सकते हैं: क्या हम पदार्थ की संरचना के सभी रहस्यों को पूरी तरह जान गए हैं? शायद नहीं। आज भी भौतिकीविद क्वार्कों को उनसे भी छोटी इकाइयों से बनाने के नए-नए प्रस्ताव रखते हैं। क्या हम कभी भी पदार्थों की संरचना पर इस खोज के अंतिम पड़ाव पर पहुंचेंगे? शायद नहीं। विज्ञान में सवालों का सिलसिला कभी भी खत्म नहीं होता।

15.8 सारांश

- डिराक के आपेक्षिकीय सिद्धांत के मुताबिक इलेक्ट्रॉन, धनात्मक और ऋणात्मक दोनों ही ऊर्जा अवस्थाओं में होते हैं।
- एक स्थिरवैद्युत त्वरित्र में, आवेशित कणों का त्वरण प्रबल स्थिरवैद्युत क्षेत्र द्वारा होता है।

- लारेंस ने एक साइक्लोट्रॉन बनाया जिसमें दो धातु के बने खोखले अर्द्ध-गोलाकार "डी" थे।
- एक साइक्लोट्रॉन में आवेशित कणों का त्वरण नियत आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र द्वारा होता है।
- एक कण द्वारा अर्द्ध-गोलाकार पथ तय करने में लिया जाने वाला समय पथ की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता।
- एक सिंक्रोसाइक्लोट्रॉन में आवेशित कणों की ऊर्जा बढ़ाने के लिए, जब कण मशीन के केंद्र से दूर जाता है तो त्वरण वोल्टता की आवृत्ति लगातार बदली जाती है।
- सिंक्रोट्रॉन त्वरित्रों में, चुंबकीय क्षेत्र प्रबलता और अनुनाद आवृत्ति लगातार बदलते जाते हैं।
- उच्च ऊर्जा संघट्टनों में कणों का पता लगाने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली युक्तियों को संसूचक कहते हैं।
- संसूचकों को दो वर्गों में बांटा जाता है: गणित्र और कक्ष। गणित्र हर आवेशित कण के गुज़रने की घटना को दर्ज करता है और कक्ष उसकी पूरी लीक को।
- गाइगर मुलर गणित्र संघट्टन द्वारा आयनन की परिघटना पर आधारित है।
- विल्सन मेघ कक्ष में, आवेशित कणों द्वारा प्रेरित आयनन में उत्पन्न आयनों के कारण उनकी स्थितियों पर पानी की बूंदों का बादल संघनित हो जाता है जिससे बादल में कण की लीक बन जाती है।
- आज तक पता लगे सभी कणों को मोटे तौर पर चार वर्गों में बांटा जा सकता है: लेप्टॉन, बेरिऑन, मीसॉन और क्षेत्र बोसॉन।
- लेप्टॉन ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu$ और ν_τ) दुर्बल अन्योन्यक्रिया में उत्पन्न और आवेशित होते हैं। बेरिऑन ($n, p, \Lambda, \Sigma^+, \Omega^-, \Lambda_C^+$) प्रबल अन्योन्यक्रिया में हिस्सा लेते हैं। मीसॉन भी प्रबल अन्योन्यक्रियाओं में हिस्सा लेते हैं पर वे बेरिऑन नहीं हैं। क्षेत्र बोसॉन विद्युतचुंबकीय क्षेत्रों और दुर्वल बल क्षेत्रों के वाहक कण हैं।
- सभी हेड्रॉन दो या तीन क्वार्कों से मिल कर बने होते हैं जो उन बलों के अधीन जुड़े रहते हैं जिनके लिए ग्लूऑन मध्यस्थता करते हैं। वे फ़ोटॉन के अनुरूप होते हैं जो आवेशित कणों के बीच लग रहे विद्युतचुंबकीय बलों के वाहक कण हैं।
- वर्णों वाले क्वार्क मॉडल में हेड्रॉनों के लिए रंगों के संयोजन से सफेद रंग मिलता है। सभी प्रेक्षित मीसॉन और बेरिऑन अवस्थाएं रंगहीन हैं।