स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-07
उच्च स्तरीय कलन

प्रथम खण्ड
R_∞ और R^n

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

शान्तिपुरम् (सेक्टर–एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद – 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-07
उच्च स्तरीय कलन

खंड

1

R_∞ और R^n

उच्च स्तरीय कलन

इस पाठ्यक्रम में कलन के बारे में और अधिक जानकारी दी जाएगी। यहां पहले हम एक चर वाले फलनों की अनंत सीमाओं का अध्ययन करेंगे, लोपिताल नियम पर चर्चा करेंगे और तब अनेक चरों वाले फलनों का अध्ययन करेंगे।

आप एक चर वाले फलनों के कलन के बारे में बहुत कुछ जानते हैं। जैसा कि हम कलन के पाठ्यक्रम में पहले बता चुके हैं, न्यूटन और लाइब्नीत्भ को कलन का पितामह माना जाता है। आप यह भी जानते हैं कि सत्रहवीं शताब्दी में कलन में काफ़ी विकास हुआ। बाद में चलकर अठारहवीं शताब्दी में इसकी आधारभूत संकल्पनाओं, अर्थात् सीमा, सांतत्य और अवकलनीयता को एक से अधिक चर वाले फलनों पर भी लागू किया गया। अनेक चरों वाले फलनों का अध्ययन करने की आवश्यकता तब समझी गई, जबकि ऑयलर, डेनियल, बर्नौली, फूरिए और दालेम्बेर जैसे कुछ गणितज्ञ कुछ भौतिक प्रश्नों का हल ढूंढने में लगे हुए थे।

आगस्टिन-लुई कॉशी (1789-1857) पेरिस के, जिसे उन दिनों गणित जगत का केन्द्र माना जाता था, एक महान गणितज्ञ थे। कॉशी ने भी अनेक चरों के कलन के विकास में काफ़ी योगदान दिया है।

इस पाठ्यक्रम में आप जिन संकल्पनाओं का अध्ययन करने जा रहे हैं, वे निश्चय ही एक चर वाले फलनों की संकल्पनाओं से कुछ अधिक जटिल होंगी। परन्तु आप देखेंगे कि एक चर से संबंधित संकल्पनाओं से प्रेरणा लेकर ही अनेक चरों से संबंधित संकल्पनाओं का व्यापकीकरण किया गया है। इसलिए जब कभी हम किसी संकल्पना को प्रस्तुत करेंगे, उस समय एक चर से संबंधित संकल्पना को भी याद कर लेंगे और तब देखेंगे कि इस संकल्पना को अनेक चरों वाली स्थिति में लागू किया जा सकता है अथवा नहीं। इस पाठ्यक्रम में हम अपना अध्ययन मुख्यतः दो या तीन चरों वाले फलनों तक ही सीमित रखेंगे।

पाठ के साथ हम बीच-बीच में उदाहरण भी देते गए हैं जिससे कि आप तथ्यों को और अच्छी तरह से समझ सकें। हमने प्रत्येक इकाई के सभी प्रश्नों के उत्तर इकाई के अंत में दिए हैं। जैसा कि आप देखेंगे, हमने पिछली इकाइयों के परिणामों अथवा परिभाषाओं का भी उल्लेख बीच-बीच में किया है। इसके लिए हम इकाई x के अनुभाग y.z का निर्देश भाग x.y.z से या इकाई x के भाग y का निर्देश भाग x.y से करेंगे। हमारे कलन के प्रथम पाठ्यक्रम (MTE-01) के कुछ परिणामों का भी हम उल्लेख करेंगे। उस पाठ्यक्रम की किसी इकाई का निर्देश हम "कलन पाठ्यक्रम की इकाई -" से करेंगे।

प्रत्येक खंड में हमने जो गणितीय पारिभाषिक शब्द प्रयोग में लाए हैं, उनके अंग्रेज़ी अनुवाद आप शब्दावली में देख सकते हैं, जो हमने खंड के अंत में दी है।

हमने कलन के बारे में पहले जो कुछ भी कहा है, वे सभी बातें इस पाठ्यक्रम पर भी लागू होती हैं। यहां दी गई विभिन्न विधियों को अच्छी तरह से समझने के लिए आपको काफ़ी अभ्यास करना होगा। यदि यहां बतायी गई संकल्पनाओं के बारे में आप कुछ और अधिक जानकारी चाहते हैं या आप कुछ और प्रश्नों को हल करना चाहते हैं तो इसके लिए आप पुस्तक Calculus III by Jerrold Marsden and Alan Weinstein का अध्ययन कर सकते हैं।

यह पुस्तक आपके अध्ययन केन्द्र के पुस्तकालय में उपलब्ध होगी।

हम आशा करते हैं कि इस पाठ्यक्रम में विकसित की गई विधियां आपके आगे के अध्ययन में उपयोगी सिद्ध होंगी।

यूनानी अक्षर

α	एल्फा
β	बीटा
γ	गामा
δ, Δ	डेल्टा
ε	एप्सिलॉन
ζ	झीटा
η	ईटा
θ	थीटा
ι	आयोटा
κ	कापा
λ	लैम्बडा
μ	म्यू
υ	न्यू
ξ	झाय
O	ओमिक्रॉन
π, Π	पाय
ρ	ह्रो
σ, Σ	सिगमा
τ	टाओ
ν	आप्सिलॉन
ϕ	फ़ाय्
χ	काय
ψ	साय
ω	ओमेगा
∂	डेल

खंड 1 R_∞ और R^n

यह उच्च स्तरीय कलन के पाठ्यक्रम का पहला खंड है। जैसा कि हम पहले ही बता चुके हैं, इस पाठ्यक्रम में हम कलन पाठ्यक्रम में बताई गई संकल्पनाओं का व्यापकीकरण करेंगे। उदाहरण के लिए कलन के पाठ्यक्रम में हमने अपनी चर्चा परिमित सीमाओं तक ही सीमित रखी थी। आपको याद होगा कि हमने वहां यह कहा था कि $f(x) = \frac{1}{x}$ की (परिमित) सीमा का, जबकि x शून्य की ओर प्रवृत्त होता हो, अस्तित्व नहीं होता। इस खंड में हम सीमा की संकल्पना को विस्तृत करके इसके अंतर्गत अनंत सीमाओं को भी शामिल कर लेंगे। इसके लिए पहले हम वास्तविक संख्या पद्धति में दो प्रतीक ∞ और $-\infty$ जोड़कर इसे और अधिक विस्तृत करेंगे। हम फलन की सीमा, जबकि स्वतंत्र चर अनंत की ओर प्रवृत्त होता हो, के ज्ञान को भी पुनः ताज़ा करेंगे। इस चर्चा से लोपिताल नियम के अध्ययन में हमें काफ़ी सहायता मिल सकती है। यह नियम एक सरल विधि है जिसकी सहायता से हम उन फलनों की सीमाएं ज्ञात कर सकते हैं, जो अनिर्धार्य रूप के हैं। इस खंड की प्रथम दो इकाइयों में हम एक चर वाले फलनों का ही अध्ययन करेंगे।

इस खंड की इकाई 3 में हम आपको अनेक चरों वाले फलनों से परिचित कराएंगे। शेष खंडों में आप इन फलनों की सीमा, सांतत्य, अवकलनीयता और समाकलनीयता की संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझने के लिए हम इकाई 3 में $\mathbf{R}^n$ की बीजीय संरचना का विस्तृत विवरण देंगे। वहां हम $\mathbf{R}^n$ में दूरी फलन पर भी चर्चा करेंगे। इस तरह, आप आगे जो कुछ भी अध्ययन करेंगे, उसका आधार इकाई 3 है।

अंत में, आपको फिर से यह याद दिला देना चाहते हैं कि आप हल किए उदाहरणों का अध्ययन अच्छी तरह से करें और प्रत्येक इकाई में दिए गए सभी प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें। ऐसा करने से आपको सिद्धांत अच्छी तरह से समझ में आ जाएंगे।

संकेत और प्रतीक

$\in$	का सदस्य है
$\notin$	का सदस्य नहीं है
$A \cup B$	समुच्चय A और समुच्चय B का सम्मिलन
$A \cap B$	समुच्चय A और समुच्चय B का सर्वनिष्ठ
$A \setminus B$	A के उन अवयवों का समुच्चय जो B के अवयव नहीं हैं।
$A \times B$	A और B का कार्तीय गुणनफल
N	प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय
Z	पूर्णांकों का समुच्चय
Q	परिमेय संख्याओं का समुच्चय
R	वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
∞	अनंत
$\mathbf{R}_\infty$	$\mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$
$\mathbf{R}^n$	**R** की n प्रतियों का कार्तीय गणनफल
$\Rightarrow$	निहित है
$\Leftrightarrow$	निहित है और से निहित है
iff	यदि और केवल यदि
$\exists$	का अस्तित्व है
$\forall$	सभी के लिए
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1+a_2+ \ldots +a_n$
w.r.t.	के सापेक्ष
$x \to a$	x,a की ओर प्रवृत्त होता है।
$f: X \to Y$	f, X से Y तक का फलन है
$x \to f(x)$	x, f(x) की ओर जाता है
$\lim_{x \to a} f(x)$	f(x) की सीमा जबकि x, a की ओर प्रवृत्त होता हो
$\frac{dy}{dx}, y_1, f'(x)$	x के सापेक्ष y = f(x) का अवकलज
$f^{(k)}(x)$	x के सापेक्ष f का k- वां अवकलज
$n!$	क्रमगुणित $n = n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$
$\max \{x,y\}$	x और y में से बड़ा
$\min \{x,y\}$	x और y में से छोटा
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$x_1, x_2, \ldots, x_n$ का n-यक
$f \circ g$	f और g का संयुक्त फलन
$\|x\|$	x का निरपेक्ष मान
$[x]$	महत्तम पूर्णांक $\leq x$

इकाई 1 अनंत सीमाएँ

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

वास्तविक मान फलन $f(x)$ की सीमा की संकल्पना से तो आप परिचित हैं ही। $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ जैसे फलनों से भी आप परिचित हैं, जो x के स्वेच्छ बृहत् मानों (arbitrarily large values) के लिए परिभाषित हैं। हम अपने कलन के प्रारंभिक पाठ्यक्रम MTE-01 में यह बता चुके हैं कि $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ या $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^2}$ का अस्तित्व नहीं होता। परन्तु, इन दोनों स्थितियों में विचाराधीन फलनों का शून्य के आसपास एक निश्चित व्यवहार होता है। स्पष्ट है कि x को 0 के काफ़ी निकट लाकर हम $\frac{1}{x^2}$ को इतना बड़ा बना सकते हैं, अथवा $\frac{-1}{x^2}$ को इतना लघु बना सकते हैं जितना कि हम चाहते हैं।

जब x बृहत् हो तब e^x, $\ln x$ जैसे फलनों के व्यवहार के बारे में अध्ययन करने के लिए, या जब x, 0 की ओर प्रवृत्त होता हो तब $\frac{1}{x^2}$ या $\frac{-1}{x^2}$ के बारे में अध्ययन करने के लिए हम दो नए प्रतीकों को जोड़कर वास्तविक संख्या पद्धति को विस्तारित करते हैं। ये दो प्रतीक हैं: $+\infty$ (जिसे केवल ∞ लिखा जाता है), जिसे धन अनंत अथवा अनंत कहा जाता है और $-\infty$, जिसे ऋण अनंत कहा जाता है।

हम सीमा की परिभाषा को इस तरह विस्तारित करते हैं कि उसमें सीमाओं के रूप में ∞ और $-\infty$ भी शामिल हो जाएं। जब x, ∞ या $-\infty$ की ओर प्रवृत्त करता हो, तब $f(x)$ की सीमा को भी हम परिभाषित करते हैं। कलन के प्रारंभिक पाठ्यक्रम में आप कुछ फलनों की सीमाओं के बारे में, जबकि x, ∞ या $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता है, पढ़ चुके हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ को परिभाषित कर सकेंगे, जबकि यह आवश्यक नहीं कि a वास्तविक संख्या हो;
- $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$ और $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ को परिभाषित कर सकेंगे, जबकि L वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ हो सकता है;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ का मान ज्ञात कर सकेंगे, जहाँ a और L विस्तारित वास्तविक संख्या पद्धति के अवयव हैं।

1.2 विस्तारित वास्तविक संख्या पद्धति

विस्तारित वास्तविक संख्या पद्धति वह समुच्चय है, जिसमें वास्तविक संख्याओं का समुच्चय और दो नए प्रतीक $+\infty$ (धन अनंत) और $-\infty$ (ऋण अनंत) होते हैं।

हम विस्तारित वास्तविक संख्या पद्धति को $\mathbf{R}_\infty$ से प्रकट करेंगे और इसमें $+\infty$ के स्थान पर केवल ∞ लिखेंगे । इस तरह,

$\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$,

जहां $\mathbf{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

आप $\mathbf{R}$ की अंकगणितीय संक्रियाओं के बारे में तो जानते ही हैं। आइए, देखें कि $\mathbf{R}_\infty$ में भी क्या इस प्रकार की संक्रियाएं परिभाषित की जा सकती हैं ?

1.2.1 $\mathbf{R}_\infty$ में अंकगणितीय संक्रियाएँ

$\mathbf{R}$ से संबंधित जोड़, घटाना, गुणा और भाग जैसी आधारभूत संक्रियाओं (operations) को निम्नलिखित सूत्रों की सहायता से $\mathbf{R}_\infty$ में लागू किया जाता है :

1 यदि x, y, $\mathbf{R}$ में हों तो $x \pm y$, xy, $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ के अर्थ वही होते हैं, जो सामान्यतः समझे जाते हैं।

2 किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए हम निम्नलिखित परिभाषित करते हैं।

i) $x + \infty = \infty + x = \infty$.

ii) $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.

iii) $x \cdot \infty = \infty . x = \infty$ यदि $x > 0$.

iv) $x \cdot \infty = \infty . x = -\infty$ यदि $x < 0$.

v) $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$ यदि $x > 0$.

vi) $x(-\infty) = (-\infty)x = \infty$ यदि $x < 0$.

vii) $\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty$ यदि $x > 0$.

viii) $\frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty$ यदि $x < 0$.

ix) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

3 हम निम्नलिखित भी परिभाषित करते हैं :

i) $\infty + \infty = \infty$

ii) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

iii) $\infty \cdot \infty = \infty$.

iv) $(-\infty)(-\infty) = \infty$.

v) $\infty(-\infty) = (-\infty)\infty = -\infty$.

ध्यान दीजिए कि यदि x और y दो वास्तविक संख्याएँ हों तो $x+y$, xy, $x-y$, $\frac{x}{y}(y \neq 0)$ के समान मान होते हैं, चाहे x, y को $\mathbf{R}$ के अवयव माना जाए, या $\mathbf{R}_\infty$ के।

टिप्पणी 1 : आपने यहां इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि सूत्र-1, सूत्र-2 और सूत्र-3 के अंतर्गत $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ जैसी स्थितियाँ परिभाषित नहीं हैं। इन प्रतीकों को परिभाषित न करने का कारण यह है कि इन व्यंजकों को कोई ऐसा अद्वितीय मान देना संभव नहीं है, जो ऊपर दिए गए सूत्रों के संगत है।

उदाहरण के लिए, यदि हम $\infty - \infty = \alpha$ परिभाषित करें, जहां α एक वास्तविक संख्या है, तो

$\infty = \infty + \alpha = \infty + (\infty - \infty) = (\infty + \infty) - \infty = \infty - \infty = \alpha,$

जोकि एक अंतर्विरोध है। यदि $\infty - \infty$ को ∞ के बराबर मान लें, तो किसी भी वास्तविक $a < 0$ के लिए

$-\infty = a(\infty) = a(\infty - \infty) = -\infty + \infty = \infty.$

इसी तरह $\infty - \infty$ को $-\infty$ मान लेने पर भी अंतर्विरोध प्राप्त होता है।

ठीक ऊपर की प्रक्रिया को लागू करने पर आप इस बात की जांच कर सकेंगे कि ऊपर उल्लेख किए गए अन्य प्रतीकों में से किसी का भी एक अद्वितीय मान निर्धारित नहीं किया जा सकता। यही कारण है कि व्यंजकों $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$ को **अनिर्धार्य रूप** (indeterminate forms) कहा जाता है।

E1) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित को अद्वितीय मान नहीं दिया जा सकता :

क) $\frac{0}{0}$ ख) $\frac{\infty}{\infty}$ ग) $0.\infty$

$\mathbf{R}_\infty$ में क्रम संबंध : क्रम संबंध "से कम अथवा के बराबर ($\leq$)", निम्न प्रकार से $\mathbf{R}_\infty$ पर भी लागू कराया जाता है :

i) यदि x और y दो वास्तविक संख्याएं हों, तो $\mathbf{R}_\infty$ में $x \leq y$ यदि और केवल यदि $\mathbf{R}$ में $x \leq y$

ii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $x < \infty$.

iii) किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए $-\infty < x$.

अतः यह स्पष्ट है कि ∞ किसी भी वास्तविक संख्या से बड़ा होता है और $-\infty$ किसी भी वास्तविक संख्या से छोटा होता है। इसलिए हम कह सकते हैं कि वास्तविक संख्या रेखा में दो और बिन्दु, अर्थात् बिल्कुल दायीं ओर ∞ और बिल्कुल बायीं ओर $-\infty$, जोड़ने पर $\mathbf{R}_\infty$ प्राप्त हुआ है।

टिप्पणी 2 : कलन के पाठ्यक्रम में हमने वास्तविक रेखा पर विभिन्न अनंत अंतरालों के लिए निम्नलिखित संकेतों का प्रयोग किया है :

$]-\infty, \infty[= \mathbf{R} = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -\infty < x < \infty\}$

$]a, \infty[= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > a\}$

$]-\infty, a[= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < a\}$

$[a, \infty[= \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geq a\}$

$]-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leq a\}$

आप देखेंगे कि ये संकेत $\mathbf{R}_\infty$ से संबंधित क्रम संबंध की हमारी परिभाषा के संगत हैं।

अब हम $\mathbf{R}_\infty$ के उपसमुच्चयों के निम्न और उपरि परिबंध की चर्चा करेंगे।

1.2.2 $\mathbf{R}_\infty$ में परिबंध

आप वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय के उपरि परिबंध (upper bound) और निम्न परिबंध (lower bound) से परिचित हैं (कलन की इकाई 1 में दी गई परिभाषा 1)। अब हम इन संकल्पनाओं को $\mathbf{R}_\infty$ के उपसमुच्चयों पर लागू करेंगे। आप देखेंगे कि यहां दी गई परिभाषाएं ठीक उसी प्रकार की हैं, जैसी कि $\mathbf{R}$ के उपसमुच्चयों के लिए दी गई थीं।

परिभाषा 1 : मान लीजिए S, $\mathbf{R}_\infty$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। अवयव $a \in \mathbf{R}_\infty$ को S का **उपरि परिबंध** कहा जाता है, यदि प्रत्येक $s \in S$ के लिए $s \leq a$ या $(a \geq s)$.

अवयव $u \in \mathbf{R}_\infty$ को S का **न्यूनतम उपरि परिबंध** (least upper bound) कहा जाता है, यदि u, S का एक उपरि परिबंध हो और कोई संख्या $u' \in \mathbf{R}_\infty$, $u' < u$, S का उपरि परिबंध न हो।

परिभाषा 2 : मान लीजिए S, $\mathbf{R}_\infty$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। अवयव $x \in \mathbf{R}_\infty$ को S का निम्न परिबंध कहा जाता है, यदि प्रत्येक $s \in S$ के लिए $x \leq s$.

अवयव $x_0 \in \mathbf{R}_\infty$ को S का महत्तम निम्न परिबंध (greatest lower bound) कहा जाता है, यदि x_0, S का एक निम्न परिबंध हो और कोई संख्या $x_1 \in \mathbf{R}_\infty$, $x_1 > x_0$ (अर्थात् $x_0 < x_1$), S का निम्न परिबंध न हो।

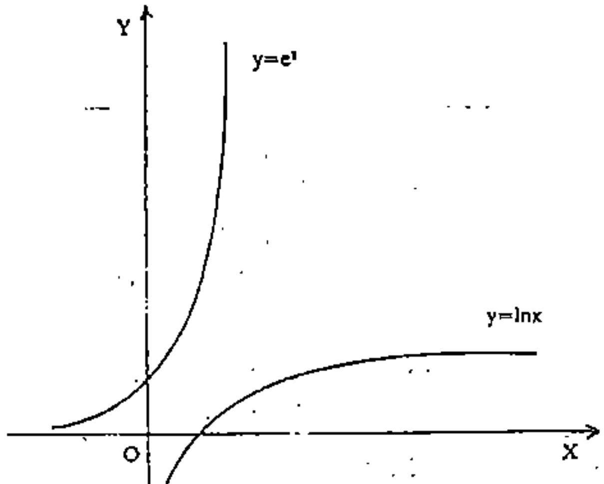
परिभाषा 1 से यह स्पष्ट है कि यदि S, **R** का एक ऊपर से परिबद्ध उपसमुच्चय हो तो **R** में S का न्यूनतम उपरि परिबंध (lub S) वही होता है, जोकि $\mathbf{R}_\infty$ में lub S है। मान लीजिए S, **R** का एक अरिक्त उपसमुच्चय है, जो ऊपर से परिबद्ध नहीं है। यह स्पष्ट है कि इस S को $\mathbf{R}_\infty$ का उपसमुच्चय मानने पर केवल ∞ ही S का उपरि परिबंध होगा। अतः lub S = ∞.

इसी प्रकार, निम्न परिबद्ध अरिक्त समुच्चय $S \subseteq \mathbf{R}$ के लिए **R** में glb S (S का महत्तम निम्न परिबंध) वही होता है, जो कि $\mathbf{R}_\infty$ में glb S है। और **R** के उस अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए, जो निम्न परिबद्ध नहीं है, glb S = $-\infty$ होता है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि **R** का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय $\mathbf{R}_\infty$ में परिबद्ध होता है और उसका एक अद्वितीय lub और एक अद्वितीय glb होता है।

1.2.3 चरघातांकी और लघुगणकीय फलनों का R_∞ में विस्तार

हम जानते हैं कि जब $x > 0$ और बृहत् होता है, तो e^x भी बृहत् होता है (देखिए चित्र 1)। अतः हम $e^\infty = \infty$ और $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ से परिभाषित करते हैं। इसी प्रकार $\ln 0 = -\infty$ और $\ln \infty = \infty$ लेकर हम lnx की परिभाषा को $\mathbf{R}_\infty$ में लागू करते हैं।



चित्र 1

घात फलन a^x को $\mathbf{R}_\infty$ में निम्न रूप में लागू किया जाता है :

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty, \text{ यदि } a > 1 \\ 0, \text{ यदि } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0, \text{ यदि } a > 1 \\ \infty, \text{ यदि } 0 < a < 1 \end{cases}$$

व्यंजक $1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$ परिभाषित नहीं होते हैं, क्योंकि इनमें से किसी भी व्यंजक को कोई ऐसा अद्वितीय मान नहीं दिया जा सकता जो ऊपर दी गई विभिन्न परिभाषाओं के संगत हो। इस तरह, हम यह पाते हैं कि $1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$ भी अनिर्धार्य रूप हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 2) क) मान लीजिए S, $\mathbf{R}$ का एक अपरिबद्ध उपसमुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि यदि S को $\mathbf{R}_\infty$ का एक उपसमुच्चय मान लिया जाए तो या तो $\text{lub } S = \infty$, या फिर $\text{glb } S = -\infty$

ख) $\mathbf{R}$ के एक ऐसे उपसमुच्चय S का उदाहरण दीजिए जो अपरिबद्ध हो और जिसके लिए $\text{lub } S = \infty$, पर $\text{glb } S \in \mathbf{R}$.

ग) $\mathbf{R}$ के एक ऐसे अपरिबद्ध उपसमुच्चय का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $\text{glb } S = -\infty$ और $\text{lub } S \in \mathbf{R}$.

घ) $\mathbf{R}$ के एक ऐसे अपरिबद्ध उपसमुच्चय S का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $\text{lub } S = \infty$ और $\text{glb } S = -\infty$.

E 3) यदि $S = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\} \subset \mathbf{R}_\infty$, तो

क) S के दो निम्न परिबंध और एक उपरि परिबंध ज्ञात कीजिए।

ख) $\text{lub } S$ और $\text{glb } S$ ज्ञात कीजिए।

इस भाग को समाप्त करने से पहले हम आपको फिर से यह याद दिला देना चाहेंगे कि ∞ तथा $-\infty$ केवल प्रतीक हैं, वास्तविक संख्याएं नहीं है।

इस इकाई में तथा इसके बाद वाली इकाई में यदि कोई विशेष उल्लेख न हो तो यह मान लिया जाएगा कि सभी समुच्चय वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चय हैं। साथ ही, उनके परिबंध के संदर्भ में यह मान लिया जाएगा कि उनके परिबंध वही होंगे जो इन उपसमुच्चयों के $\mathbf{R}$ में परिबंध हैं।

1.3 अनंत सीमाएँ

इस भाग में हम सीमाओं की संकल्पना को विस्तारित करेंगे। सीमाओं की संकल्पना को चार विधियों से विस्तारित किया जा सकता है। इसमें एक विधि $f(x)$ के व्यवहार के बारे में जानकारी प्राप्त करना है, जबकि x, ∞ की ओर प्रवृत्त होता हो। एक अन्य विधि $f(x)$ के व्यवहार के बारे में जानकारी प्राप्त करना है, जबकि x, $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता हो। इन दो विधियों पर चर्चा हम भाग 1.3.3 में करेंगे। दो अन्य विधियों में उन स्थितियों पर विचार करना होता है, जहां $f(x)$ स्वेच्छया (arbitrarily) बृहत् हो जाता हो (∞ की ओर प्रवृत्त करता हो), और जहां $f(x)$ स्वेच्छया लघु हो जाता हो ($-\infty$ की ओर प्रवृत्त करता हो), जबकि x, $a \in \mathbf{R}$ की ओर प्रवृत्त होता हो।

इन दो विधियों की चर्चा अब हम भाग 1.3.1 में करेंगे।

1.3.1 अनंत सीमाएँ, जबकि स्वतंत्र चर $x \to a \in \mathbf{R}$

आप परिमित सीमाओं से तो परिचित हैं ही। आइए अब जल्दी से यह फिर से याद कर लें कि जब हम यह कहते हैं कि

$\lim_{x \to 0} f(x) = a$, तो इसका अर्थ क्या होता है।

इसका अर्थ यह है कि यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है ($\exists\, \delta > 0$), जिससे कि

$x \in \,]-\delta, \delta[\, \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

तब हम इसे निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$\left\{ f(x) \mid x \in \,]-\delta, \delta[\, \setminus \{0\} \right\} \subseteq \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

इसका अर्थ यह है कि समुच्चय $\left\{ f(x) \mid x \in \,]-\delta, \delta[, x \neq 0 \right\}$

एक परिबद्ध समुच्चय है।

a के प्रतिवेश से हमारा तात्पर्य $]a-\delta, a+\delta[$, $\{x \mid x > r\}$, या $\{x \mid x < r\}$ के प्रकार के समुच्चय से होता है, जबकि a क्रमशः एक वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ हो।

इस चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि $\lim_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व हो (और वह परिमित हो), तो शून्य के किसी प्रतिवेश (neighbourhood) $]-\delta, \delta[$ के लिए $\{f(x) \mid x \in\ ]-\delta, \delta[, x \neq 0\}$ एक परिबद्ध समुच्चय होता है।

अब मान लीजिए हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि फलन $f(x) = \frac{1}{x^2}$ एक परिमित सीमा की ओर प्रवृत्त नहीं करता है, जबकि $x \to 0$. तब यह सिद्ध कर देना ही काफ़ी होगा कि 0 के किसी प्रतिवेश में, अर्थात् $]-\delta, \delta[$ के प्रकार के किसी अंतराल में f परिबद्ध नहीं है। आइए हम किसी $\delta > 0$ के लिए एक अंतराल $]-\delta, \delta[$ लें। अब हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि यदि कोई वास्तविक संख्या $M > 0$ दी हुई हो तो हम एक ऐसा $x \in\ ]-\delta, \delta[$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि $f(x) > M$. मान लीजिए $M > 0$. तब

$$f(x) > M \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

अब, चूंकि M दिया हुआ है, इसलिए या तो $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$ या $\delta > \frac{1}{\sqrt{M}}$. यदि $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$, तो किसी $x \in\ ]-\delta, \delta[$ के लिए $|x| < \delta \Rightarrow x^2 < \delta^2$. इसलिए $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} > M$. अर्थात् $f(x) > M$.

यदि $\delta > \frac{1}{\sqrt{M}}$, तो अंतराल $\left]-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right[\subseteq\ ]-\delta, \delta[$. $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right[$ लीजिए। तब $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$. इससे यह अर्थ निकलता है कि $f(x) > M$.

इस तरह, दोनों स्थितियों में हमने यह सिद्ध किया है कि यदि $M > 0$ दिया हुआ हो, तो एक ऐसा $x \in\ ]-\delta, \delta[$ होता है, जिससे कि $f(x) > M$. वास्तव में इस स्थिति में हम एक इससे भी प्रबल कथन को सिद्ध कर सकते हैं। अर्थात् हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यदि एक वास्तविक संख्या $M > 0$ दी हुई हो तो एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है (δ, M पर निर्भर करती है) कि $]-\delta, \delta[$ में सभी शून्येतर x के लिए $f(x) > M$. अतः इस चर्चा से यह पता चलता है कि यदि M दिया हुआ हो तो $\delta < \frac{1}{\sqrt{M}}$ लेकर हमारा काम चल जाएगा।

ऊपर दिए गए तथ्यों को हम यह कहकर व्यक्त कर सकते हैं कि फलन $\frac{1}{x^2}$, ∞ की ओर प्रवृत्त होता है, जबकि x, 0 की ओर प्रवृत्त करता है।

इसी प्रकार, यदि हम फलन $f(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$, $x \neq a$ को लें तो हम यह दिखा सकते हैं कि a के काफ़ी निकट परन्तु a से भिन्न सभी x के लिए $f(x)$ के मान को एक दी हुई संख्या से कम रखा जा सकता है। वस्तुतः एक दिए हुए $m < 0$ के लिए कोई भी धनात्मक $\delta < \sqrt{\frac{-1}{m}}$ पर्याप्त होगा। इसे हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं कि $f(x)$, $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता है, जबकि x, a की ओर प्रवृत्त होता है।

अब हम परिशुद्ध परिभाषाएं नीचे दे रहे हैं :

परिभाषा 3 : मान लीजिए f एक विवृत अंतराल $]a-h, a+h[$ में (संभवतः a को छोड़कर) परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। x का a की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x)$ को सीमा ∞ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि यदि कोई वास्तविक संख्या M दी हुई हो तो M पर निर्भर करने वाली एक ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या $\delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

परिभाषा 4 : मान लीजिए f एक विवृत अंतराल $]a-h, a+h[$ में (संभवतः a को छोड़कर) परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब, x का a की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x)$ को सीमा $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होना तब

कहा जाता है, जबकि m पर निर्भर करने वाली एक ऐसी धन संख्या $\delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < m.$

हम प्रतीकों $\lim_{x\to a} f(x) = \infty(-\infty)$ या $f(x) \to \infty\,(-\infty)$, जबकि $x \to a$ यह व्यक्त करने के लिए करेंगे कि x का a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x), $\infty\,(-\infty)$ की ओर प्रवृत्त होता है।

टिप्पणी 3 : i) परिभाषा 3 में, यदि हमें एक M के लिए एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$ प्राप्त हुई हो, तो वही δ, M से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए पर्याप्त होगी। इस तरह, हम यह पाते हैं कि यदि परिभाषा 3 में हम $M > 0$ लें तो व्यापकता में कोई कमी नहीं आएगी।

ii) इसी प्रकार परिभाषा 4 में, यदि हमें एक m के लिए एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$ प्राप्त हुई हो तो वही δ, m से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए पर्याप्त होगी। इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि परिभाषा 4 में हम $m < 0$ लें तो व्यापकता में कोई कमी नहीं आएगी।

अब हम ऊपर दी गई परिभाषाओं को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1 : आइए हम यह सिद्ध करें कि

i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \infty$

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1-\cos 2x} = \infty$

i) मान लीजिए $M > 0$ दिया हुआ है। हमारा लक्ष्य एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ प्राप्त करना है, जिससे कि

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > M.$$

अब, $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow 1 - \delta < x < 1 + \delta,\ x \neq 1$

इस तरह $x > 1 - \delta$ और $(x-1)^2 < \delta^2$. इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1-\delta}{\delta^2}$$

और, यदि हम एक ऐसा धनात्मक δ लें जो एक नियत वास्तविक संख्या, मान लीजिए $1/2$ से कम हो, तो

$$0 < |x - 1| < \delta < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1}{2\delta^2}$$

अब प्रश्न उठता है कि कब $\dfrac{x}{(x-1)^2}$, M से बड़ा होगा। यह तब होगा, जबकि $\dfrac{1}{2\delta^2} > M$, अर्थात्, जबकि

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2M}}.$$

अतः हमें अपने लक्ष्य की प्राप्ति के लिए δ पर दो प्रतिबंध लगाने होते हैं : $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ और $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{2M}}$.

इस तरह, यदि हम कोई ऐसा δ लें, जिससे कि

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2M}}\right\},$$

तो $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \dfrac{x}{(x-1)^2} > M,$

जिससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty.$$

ii) मानलीजिए

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos 2x}, \; x \neq 0.$$

तब, $f(x) = \frac{1}{2\sin^2 x}$

यदि $|x| < \frac{\pi}{2}$, तो $|\sin x| \leq |x|$. अतः

$$f(x) > \frac{1}{2x^2}.$$

इस तरह, हम यह पाते है कि $0 < |x| < \delta < \frac{\pi}{2}$ के लिए हमें

$f(x) > \frac{1}{2x^2} > \frac{1}{2\delta^2}$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $0 < |x| < \delta$, और $f(x) > \frac{1}{2\delta^2} > M$, जबकि $\delta < \frac{1}{\sqrt{2M}}$.

इस तरह, हमने यह सिद्ध किया है कि यदि किसी $M > 0$ के लिए हम एक वास्तविक संख्या δ लें जिससे कि $0 < \delta < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2M}}\right\}$, तो

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{1 - \cos 2x} > M$$

इससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \cos 2x} = \infty.$$

यहां ध्यान दीजिए कि i) में हमने किसी विशेष उद्देश्य से $\delta < \frac{1}{2}$ नहीं लिया है। हम कोई भी अन्य δ, मान लीजिए $\delta = \frac{2}{3}$, ले सकते थे। उस स्थिति में तब हमें

$$\frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1}{3\delta^2}$$

प्राप्त होता है, और अपने लक्ष्य की प्राप्ति के लिए हम कोई $\delta < \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3M}}\right\}$ ले सकते थे।

उदाहरण 2 : मान लीजिए हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि

(i) $\lim_{x \to -2} \frac{4x}{(x+2)^2} = -\infty$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\infty.$

आइए इन्हें हम एक-एक लेकर सिद्ध करें।

(i) मान लीजिए $M > 0$ दिया हुआ है। यदि $0 < |x+2| < \delta < 1$,

तो

$$\frac{1}{(x+2)^2} > \frac{1}{\delta^2}, \text{ और तब}$$

$$\frac{4}{(x+2)^2} > \frac{4}{\delta^2}, \text{ और}$$

$\frac{4x}{(x+2)^2} < \frac{4x}{\delta^2} < \frac{-4}{\delta^2}$ (ध्यान दीजिए : $|x+2| < 1 \Rightarrow x < -1$) अब यदि हम

$\delta < \frac{2}{\sqrt{M}}$ लें, तो $\frac{-4}{\delta^2}$ को $-M$ से छोटा बनाया जा सकता है।

अतः यदि $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{2}{\sqrt{M}}\right\}$, तो

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \frac{4x}{(x+2)^2} < -M.$$

$$\therefore \lim_{x\to -2} \frac{4x}{(x+2)^2} = -\infty.$$

(ii) मान लीजिए $M > 0$ दिया हुआ है। यदि $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, तो $x \in]-\delta, \delta[, x \neq 0$ के लिए $\sin^2 x < x^2$.

या $\frac{-1}{\sin^2 x} < \frac{-1}{x^2} < \frac{-1}{\delta^2}$.

अतः यदि $0 < \delta < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right\}$, तो

$0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{-1}{\sin^2 x} < \frac{-1}{\delta^2} < -M$, और इसलिए

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\infty.$$

कलन का पाठ्यक्रम पढ़ते समय आपने देखा होगा कि परिभाषा का सीधा प्रयोग करके फलनों की सीमाओं का परिकलन करना कोई आसान काम नहीं है। यही बात यहां भी लागू होती है। अब हम जिस प्रमेय की चर्चा करने जा रहे हैं, वह प्रमेय सीमाओं के परिकलन में काफ़ी उपयोगी सिद्ध होगा। इस प्रमेय से परिमित और अनंत सीमाओं के बीच का संबंध भी स्पष्ट हो जाता है।

प्रमेय 1 : i) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ यदि और केवल यदि एक $\delta > 0$ के लिए $]a-\delta, a+\delta[$ में (संभवतः a को छोड़कर) f(x) धनात्मक है और

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

ii) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ यदि और केवल यदि एक $\delta > 0$ के लिए $]a-\delta, a+\delta[$ में (संभवतः a को छोड़कर) f(x) ऋणात्मक है और

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

उपपत्ति : i) मान लीजिए $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

हमें यह दिखाना है कि $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. मान लीजिए $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। तब इस $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसा M लीजिए ताकि $M > \frac{1}{\varepsilon}$. इस M के लिए $\exists\, \delta > 0$, जिससे कि

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M > \frac{1}{\varepsilon}.$$

या $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} < \varepsilon$.

या $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$

इसलिए $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

और, चूंकि $0 < |x-a| < \delta$ संतुष्ट करने वाले सभी x के लिए $f(x) > M$, इसलिए a को छोड़कर अंतराल $]a-\delta, a+\delta[$ में f(x) धनात्मक है।

इसका विलोम सिद्ध करने के लिए मान लीजिए f(x) किसी $\delta > 0$ के लिए $]a-\delta, a+\delta[$ में (a को छोड़कर) धनात्मक है और $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. तब $M > 0$ दिया हुआ हो तो ऐसा $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$ लीजिए, जिससे कि

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow f(x) > M,$$

क्योंकि f(x), $]a-\delta_1, a+\delta_1[$ में धनात्मक है। इसका यह अर्थ हुआ कि

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty .$$

ii) की उपपत्ति सरल है और इसे हम एक अभ्यास के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E4))

नीचे दिए गए उदाहरण से आपको इस प्रमेय की उपयोगिता समझ में आ जाएगी।

उदाहरण 3 : आइए हम यह दर्शाएं कि

i) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{1-\sin x} = \infty$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{(e^x+e^{-x}-2)^2} = -\infty$

iii) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{x}{\sin 2x \cos x} = \infty$.

इन सीमाओं को हम एक-एक करके परिकलित करेंगे।

i) स्पष्ट है कि सभी x के लिए $\frac{1}{1-\sin x} > 0$ और $\lim_{x\to\pi/2} (1-\sin x) = 0$.

अतः प्रमेय 1 के अनुसार

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{1-\sin x} = \infty .$$

ii) $\lim_{x\to 0} (e^x+e^{-x}-2) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (e^x+e^{-x}-2)^2 = 0$, और दिया हुआ फलन सभी x के लिए ऋणात्मक है। अतः प्रमेय 1 के अनुसार

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{(e^x+e^{-x}-2)^2} = -\infty .$$

iii) चूंकि $\frac{x}{\sin 2x\cos x} = \frac{x}{2\sin x\cos^2 x}$, इसलिए $\frac{x}{\sin 2x \cos x} > 0$, $0 < x < \pi$ के लिए।

इस तरह,

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{x}{\sin 2x \cos x} = \infty ,$$

क्योंकि

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{x} = 0.$$

हम यह जानते हैं कि $\lim_{x\to a} f(x) = L$ के अस्तित्व से यह अर्थ निकलता है कि फलन f(x), a के किसी प्रतिवेश (neighbourhood) में (संभवतः a को छोड़कर) परिबद्ध है। इसके विपरीत, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty(-\infty)$ से यह अर्थ निकलता है कि f(x), a के किसी भी प्रतिवेश में (संभवतः a को छोड़कर उपरि (निम्न) परिबद्ध नहीं है। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ये तीनों स्थितियां परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) हैं। अर्थात् $x \to a$ होने पर f(x) परिमित संख्या L और ∞ अथवा $-\infty$ दोनों की ओर प्रवृत्त नहीं हो सकता। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (जहां L कोई वास्तविक संख्या, ∞ अथवा $-\infty$ है) अद्वितीय है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 4) प्रमेय 1 के भाग (ii) को सिद्ध कीजिए।

E 5) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

क) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}$

ख) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2 - \frac{5}{x^2}$

ग) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2(x-5)}$

घ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x(e^x-1)}$

ङ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)$

च) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1}/x^2$

छ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n+1}(e^x-1)}$ जहाँ $n = 0$ या n एक धन पूर्णांक है।

ज) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^3 x}$

झ) $\lim\limits_{x\to \pi/2} x\tan^2 x$

ञ) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1}{(\sin x)(x-\pi)}$.

1.3.2 एकपक्षीय अनंत सीमाएं

अब हम ∞ तथा $-\infty$ को शामिल करके एकपक्षीय सीमाओं की संकल्पना को व्यापक रूप में प्रस्तुत करेंगे।

परिभाषा 5 : मान लीजिए f विवृत अंतराल $]a, a+h[$ में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है।

(i) x का दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को सीमा ∞ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि यदि कोई वास्तविक संख्या M दी हुई हो तो (M पर निर्भर) एक ऐसी धन वास्तविक संख्या $\delta, \delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) > M$.

(ii) x का दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को सीमा $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि यदि कोई वास्तविक संख्या m दी हुई हो तो (m पर निर्भर) एक ऐसी धन वास्तविक संख्या $\delta, \delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) < m$.

परिभाषा 6 : मान लीजिए f विवृत अंतराल $]a-h, a[$ में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है।

i) x का बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को सीमा ∞ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि यदि एक वास्तविक संख्या M दी हुई हो तो (M पर निर्भर) एक ऐसी धन वास्तविक संख्या $\delta, \delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$.

ii) x का बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को सीमा $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि यदि एक वास्तविक संख्या m दी हुई हो तो (m पर निर्भर) एक ऐसी धन वास्तविक संख्या $\delta, \delta < h$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) < m$.

प्रतीकों $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, या

$f(x) \to \pm\infty$ जबकि $x \to a^+$, या

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, या

$f(x) \to \pm\infty$ जबकि $x \to a+0$, का प्रयोग यह व्यक्त करने के लिए किया जाएगा कि x का दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x), ∞ या $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता है। वाम पक्षीय सीमा (left-sided limit) के लिए हम धन चिह्न के स्थान पर ऋण चिह्न का प्रयोग करेंगे। उदाहरण के लिए, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ का अर्थ यह है कि x का बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x), ∞ की ओर प्रवृत्त होता है।

टिप्पणी 4 : (i) यदि हम परिभाषाओं 5 (i) और 6 (i) में $M>0$ ले लें और परिभाषाओं 5 (ii) और 6 (ii) में $m<0$ ले लें तो भी व्यापकता में कोई कमी नहीं आएगी। (टिप्पणी 3 से इसकी तुलना कीजिए)।

(ii) उपर्युक्त संशोधन कर देने पर प्रमेय 1 एकपक्षीय सीमाओं पर लागू होता है। अर्थात् हम यह आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (या $-\infty$) यदि और केवल यदि किसी विवृत अंतराल $]a, a+\delta[$ में

$f(x)>0$ (या <0) और $x\to a^+$ होने पर $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (या $-\infty$) यदि और केवल यदि किसी विवृत अंतराल $]a-\delta, a[$ में

$f(x)>0$ (या <0), और $x\to a^-$ होने पर $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$.

कलन पाठ्यक्रम की इकाई 2 में आप एक ऐसे परिणाम (प्रमेय 4) का अध्ययन कर चुके हैं, जो सीमाओं और एकपक्षीय सीमाओं के बीच संबंध स्थापित करता है। ठीक इसी प्रकार का परिणाम अनंत सीमाओं पर भी लागू होता है। इस तरह,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (या $-\infty$) यदि और केवल यदि

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (या $-\infty$) और $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (या $-\infty$)

उदाहरण 4 : आइए हम निम्नलिखित एकपक्षीय सीमाओं की जाँच करें।

i) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}=\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x-1}=\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-2)^3}=-\infty$

iv) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{x^2\sin x}=-\infty.$

हम इन पर एक-एक करके विचार करेंगे।

i) स्पष्ट है कि $x>5$ होने पर $\sqrt{x^2-25}>0$ और $x\to 5^+$ होने पर $\sqrt{x^2-25}\to 0$.

अतः टिप्पणी 4 (ii) के अनुसार

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}=\infty.$$

ii) चूंकि $x>0$ होने पर $e^x-1>0$ और $x\to 0^+$ होने पर $e^x-1\to 0$, इसलिए $x\to 0^+$ होने पर $\dfrac{1}{e^x-1}\to\infty$.

iii) चूंकि $x\to 2$ होने पर $\dfrac{(x-2)^3}{x^2}\to 0$ और $x<2$ के लिए

$\dfrac{x^2}{(x-2)^3}<0$, इसलिए $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-2)^3}=-\infty$.

iv) चूंकि $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ के लिए $\dfrac{\cos x}{x^2\sin x}<0$ और $x\to 0$ होने पर $\dfrac{x^2\sin x}{\cos x}\to 0$, इसलिए

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x^2\sin x}=-\infty.$$

उदाहरण 5 : अब हम टिप्पणी 4 के बाद प्राप्त हुए परिणाम का प्रयोग यह दिखाने के लिए करेंगे कि x, 0 की ओर प्रवृत्त होने पर निम्न फलनों की सीमाओं का अस्तित्व नहीं है।

(i) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 2x+3, & x<0\end{cases}$

आइए पहले हम (i) पर विचार करें।

(i) उदाहरण 4 में हम यह देख चुके हैं कि

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = \infty .$$

चूंकि $x<0$ पर $\frac{1}{e^x-1}<0$ और $x \to 0$ होने पर $e^x-1 \to 0$, इसलिए

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty .$$ अतः $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1}$ का अस्तित्व नहीं है।

(ii) आप यह आसानी से देख सकते हैं कि

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ और } \lim_{x\to 0^-} 2x+3 = 3.$$

इससे यह पता चलता है कि दी हुई सीमा का अस्तित्व नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 6) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

क) $\lim_{x\to \pi^+/2} x \tan x$ ख) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{2x(e^x-1)}$

ग) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1-x)\ln x}$ घ) $\lim_{x\to 3^+} \frac{1+2x+x^2}{3-x}$

ङ) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2[x]+2}{x^2+x-2}$, जहां [x] महत्तम पूर्णांक फलन है।

E 7) बताइए कि निम्नलिखित सीमाओं में से किन-किन का अस्तित्व है और किन-किन का अस्तित्व नहीं है। जिन-जिन सीमाओं का अस्तित्व हो, उन्हें ज्ञात कीजिए :

क) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{x^2+2}{\sin x \cos x}$ ख) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2[x]+2}{x^2+x-2}$

ग) $\lim_{x\to \pi/2} x \tan x$

घ) $\lim_{x\to 0} f(x)$, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & x > 0 \\ x^2+2x+3, & x < 0 \end{cases}$$

ङ) $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$

E 8) मान लीजिए f(x) और g(x) वास्तविक गुणांकों वाले दो बहुपद हैं। मान लीजिए इनका एक मूल α है, जिसकी f(x) और g(x) में क्रमशः m और n बहुकता है। तब सिद्ध कीजिए कि :

क) $\lim_{x\to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ यदि $m>n$

ख) $\lim_{x\to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ परिमित है और शून्य से भिन्न है, यदि $n=m$

ग) $\lim_{x\to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व नहीं है, यदि $m-n$ विषम है और $m<n$

घ) $$\lim_{x\to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty \text{ यदि } x=\alpha \text{ पर } \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} \frac{g(x)}{(x-\alpha)^n} > 0 \\ -\infty \text{ यदि } x=\alpha \text{ पर } \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} \frac{g(x)}{(x-\alpha)^n} < 0 \end{cases}$$

जबकि $m-n$ सम है और $m<n$.

1.3.3 स्वतंत्र चर का ∞ या $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन की सीमा

अभी तक हमने फलन की उस सीमा पर विचार किया है, जबकि स्वतंत्र चर एक परिमित वास्तविक संख्या a की ओर प्रवृत्त करता है।

$\lim_{x\to a} f(x)$ के अस्तित्व से हमें केवल a के निकट फलन के व्यवहार के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त होती है। परन्तु हमारा सामना बार-बार e^x, $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$, $\frac{1}{x^2-1}$ जैसे फलनों से होता रहता है, जोकि x के बृहत् मानों अथवा x के लघु मानों के लिए परिभाषित हैं। ज़ाहिर है कि हम x के बृहत् अथवा लघु मानों के लिए इन फलनों के बारे में जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे। इसके लिए हम सीमा की संकल्पना को उन स्थितियों को भी शामिल करने के लिए विस्तारित करते हैं, जबकि स्वतंत्र चर x, "∞ की ओर प्रवृत्त होता है" या "$-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता है"। आप इन स्थितियों का अध्ययन कलन पाठ्यक्रम में कर चुके हैं। यहां हम उन परिभाषाओं को पुनः प्रस्तुत करेंगे और उन्हें अनंत सीमाओं को शामिल करने के लिए विस्तारित भी करेंगे।

परिभाषा 7 : मान लीजिए f सभी $x > r$ के लिए परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है, जहां r एक वास्तविक संख्या है।

(i) x का ∞ की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को एक वास्तविक संख्या L की ओर प्रवृत्त होना, अर्थात् $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, तब कहा जाता है, जबकि यदि कोई वास्तविक संख्या $\varepsilon > 0$ दी हुई हो तो (ε पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या G, $G > r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x > G \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

(ii) x का ∞ की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) को ∞ की ओर प्रवृत्त होना, अर्थात् $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, तब कहा जाता है जबकि, यदि एक वास्तविक संख्या M दी हुई हो तो (M पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या G, $G > r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x > G \Rightarrow f(x) > M.$

(iii) x का ∞ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन f(x) को $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होना, अर्थात् $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, तब कहा जाता है, जबकि यदि एक वास्तविक संख्या m दी हुई हो तो (m पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या G, $G > r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x > G \Rightarrow f(x) < m.$

परिभाषा 8 : मान लीजिए f(x) सभी $x < r$ के लिए परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है, जहां r एक वास्तविक संख्या है।

(i) x का $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन f(x) को एक वास्तविक संख्या L की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि, यदि एक वास्तविक संख्या $\varepsilon > 0$ दी हुई हो तो (ε पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या g, $g < r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x < g \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

(ii) x का $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर फ़लन f(x) को ∞ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि, यदि एक वास्तविक संख्या M दी हुई हो तो (M पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या g, $g < r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x < g \Rightarrow f(x) > M.$

(iii) x का $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होने पर फलन f(x) को $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होना तब कहा जाता है, जबकि, यदि एक वास्तविक संख्या m दी हुई हो तो (m पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या g, $g < r$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$x < g \Rightarrow f(x) < m.$

टिप्पणी 5 : (i) जैसा कि पहले बताया जा चुका है (देखिए टिप्पणी 3 और 4), व्यापकता में कोई कमी लाए बिना हम ऊपर दी गई परिभाषाओं में यह मान सकते हैं कि $M > 0$ और $m < 0$

(ii) स्पष्ट है कि $x \to \infty$ होने पर $f(x) \to \infty$ या $(-\infty)$, अर्थात् $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ या $-\infty$, यदि और केवल यदि x के सभी बृहत मानों के लिए $f(x) > 0$ (या $f(x) < 0$) और $x \to \infty$ होने पर $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ या $-\infty$ यदि और केवल यदि x के सभी लघु मानों के लिए $f(x) > 0$ (या $f(x) < 0$), और $x \to -\infty$ होने पर $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

इस तरह, इस भाग में हमने $\lim_{x \to a} f(x) = L$ परिभाषित किया है जहां a एक वास्तविक संख्या है, या $a = \infty$ या $a = -\infty$, और L एक वास्तविक संख्या है, या $L = \infty$ या $-\infty$ है।

हम पहले यह देख चुके हैं कि यदि $\lim_{x \to a} f(x)$, $a \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व है तो यह अद्वितीय होती है। इस प्रकार के तर्क से यह पता चलता है कि यदि $\lim_{x \to a} f(x)$, $a \in \mathbf{R}_\infty$ का अस्तित्व है, चाहे वह परिमित हो अथवा अपरिमित, तो यह सीमा अद्वितीय होती है।

ध्यान दीजिए कि $\lim_{x \to a} f(x)$ के अस्तित्व के लिए a पर f(x) के मान का कोई महत्व नहीं होता। वस्तुतः $x = a$ पर f परिभाषित न भी हो तब भी इस सीमा का अस्तित्व हो सकता है।

अब मान लीजिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है।

नोट कीजिए कि यदि a के किसी प्रतिवेश के बाहर फलन f(x) में परिवर्तन आ जाए, तब भी $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व बना रहेगा और इसके मान में कोई अंतर नहीं आएगा। उदाहरण के लिए फलन $f(x) = x, x \in \mathbf{R}$ पर गौर कीजिए। इस फलन के लिए $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. अब हम एक नया फलन g इस तरह परिभाषित करेंगे कि

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = x, & \text{यदि } x \in \;]-\delta, \delta[\\ 1, & \text{यदि } x \notin \;]-\delta, \delta[\end{cases}$$

जहां $\delta > 0$.

तब $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

इस प्रकार हम देखते हैं कि 0 के एक प्रतिवेश $]-\delta, \delta[$ के बाहर f(x) का मान बदलने से सीमा के मान पर कोई असर नहीं हुआ है।

अब हम एक उदाहरण लेकर यह दिखाएंगे कि केवल परिभाषाओं की सहायता से सीमाओं का परिकलन कैसे किया जाता है।

उदाहरण 6 : आइए हम निम्नलिखित सीमाओं की जाँच करें :

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2} = 3$

ii) $\lim_{x \to \infty} e^{-ax} = 0$, जहां a एक धन वास्तविक संख्या है।

iii) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1$.

अब हम एक-एक पर विचार करेंगे।

i) मान लीजिए $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। तब

$$\left| \frac{3x^2}{x^2 + 2} - 3 \right| = \left| \frac{6}{x^2 + 2} \right| < \frac{6}{x^2} < \varepsilon, \text{ यदि } x > \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}.$$

इस तरह, यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो हम एक ऐसा $G = \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}$ प्राप्त करते हैं जिससे कि

$$x > G \Rightarrow \left| \frac{3x^2}{x^2 + 2} - 3 \right| < \varepsilon.$$

इससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2} = 3.$$

ii) मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ दिया हुआ है। तब $|e^{-ax}| < \varepsilon$, यदि और केवल यदि $\frac{1}{\varepsilon} < e^{ax}$, यदि और केवल यदि

$x > \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

इस तरह, $\lim_{x \to \infty} e^{-ax} = 0$ जबकि $a > 0$.

iii) मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ दिया हुआ है। तब

$$\left|\frac{e^x}{e^x + 1} - 1\right| = \frac{1}{e^x + 1} < \frac{1}{e^x} < \varepsilon, \text{ यदि } x > \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

इस तरह,

$$x > G = \ln \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{e^x}{e^x + 1} - 1\right| < \varepsilon.$$

इससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1.$$

आइए अब हम सीमाओं के बीजगणित पर विचार करें।

1.3.4 सीमाओं का बीजगणित

कलन पाठ्यक्रम में परिमित सीमाओं के अध्ययन के दौरान (देखिए इकाई 2 का भाग 2) उल्लेख किए गए सीमाओं के बीजगणित के नियम अनंत सीमाओं पर भी लागू होते हैं। अब हम इनका कथन (उपपत्ति दिए बिना) निम्नलिखित प्रमेय में देंगे। इस प्रमेय का अध्ययन करने पर आप पाएंगे कि इसे लागू करके कुछ सीमाओं को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

प्रमेय 2 (सीमाओं का बीजगणित) :

मान लीजिए $\lim_{x \to a} f(x) = L$ और $\lim_{x \to a} g(x) = M$, जहां a, L और M वास्तविक संख्याएं, ∞ या $-\infty$ हैं । तब

i) $\lim_{x \to a} c.f(x) = c.L$, जहां c एक अचर है,

ii) $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

iii) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = LM$,

iv) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$,

बशर्ते दक्षिण पक्ष सार्थक हो। अर्थात् $cL, L \pm M, LM, \frac{L}{M}$ अनिर्धार्य रूप के न हों।

सीमाओं का बीजगणित हमें यह बताता है कि यदि

$\lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$, जहां * किसी भी प्रतीक +, –, ×, ÷ को प्रकट करता है, अनिर्धार्य रूप का न हो तो यह $\lim_{x \to a} (f * g)(x)$ के बराबर होता है। परन्तु यदि $\lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$ अनिर्धार्य रूप का हो तो हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? यह निष्कर्ष निकालना तो ठीक नहीं होगा कि इस स्थिति में $\lim_{x \to a} (f * g)(x)$ का अस्तित्व ही नहीं है। इसका अर्थ सिर्फ़ यही है कि इस स्थिति में हम सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग नहीं कर सकते। तब फिर जहां सीमाओं का बीजगणित लागू नहीं होता, वहां $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x)$, $\lim_{x \to a} (fg)(x)$ या $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ का परिकलन करने के लिए हमें नई विधियों का पता लगाना होगा। इन विधियों का अध्ययन हम अगली इकाई में करेंगे।

उदाहरण 7 : मान लीजिए हम यह दर्शाना चाहते हैं कि

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$

ii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$

iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 7}{2x^5 + x^4 + 3x + 6} = \frac{1}{2}$

iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2}{x^3 + 6x + 5} = \infty$

आइए पहले हम पहली सीमा पर विचार करें।

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ (e^x से भाग देने पर)

परन्तु $\lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} (1 + e^{-x}) = 1$

इसलिए सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1.$$

ii) सीमाओं का बीजगणित लागू करके हम यह आसानी से दिखा सकते हैं कि,

$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - i}{e^x + 1} = -i$, क्योंकि

$\lim_{x\to -\infty} e^x - 1 = -1$, और $\lim_{x\to -\infty} e^x + 1 = 1$.

iii) $x \neq 0$ के लिए हम लिख सकते हैं

$$\frac{x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 7}{2x^5 + x^4 + 3x + 6} = \frac{1 + 4/x^2 + 3/x^3 + 7/x^5}{2 + 1/x + 3/x^4 + 6/x^5}$$

मान लीजिए $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^5}$ और $g(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5}$.

तब $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^5}\right) = 1$, और

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5}\right) = 2$

क्योंकि सभी पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए $\frac{1}{x^n} \to 0$ जबकि $x \to \infty$

इस तरह $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 7}{2x^5 + x^4 + 3x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \frac{1}{2}$

iv) $x \neq 0$ के लिए हम लिख सकते हैं

$$\frac{x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2}{x^3 + 6x + 5} = \frac{x + 7 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + 6/x^2 + 5/x^3} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

जहां $f(x) = x + 7 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$ और $g(x) = 1 + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^3}$

यह स्पष्ट है कि $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ और $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

अतः $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2}{x^3 + 6x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 7 + 3/x + 2/x^3}{1 + 6/x^2 + 5/x^3}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (x + 7 + 3/x + 2/x^3)}{\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 6/x^2 + 5/x^3)}$$

$$= \frac{\infty}{1} = \infty$$

अब यहां हम दो परिणाम (प्रमेय 3 और प्रमेय 4) दे रहे हैं, जोकि $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ और $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ का मान ज्ञात करने में काफ़ी उपयोगी सिद्ध होते हैं।

प्रमेय 3 : (i) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$, यदि और केवल यदि

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$, यदि और केवल यदि

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

जहां L कोई वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है।

उपपत्ति : (i) मान लीजिए $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. हमें यह सिद्ध करना है कि $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$. अब दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसा $M > 0$ लीजिए, जिससे कि

$x > M \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ या

$\frac{1}{x} < \frac{1}{M} \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$

यदि हम $\delta = \frac{1}{M}$ लें और $y = \frac{1}{x}$ लिखें, तो

$0 < y < \delta \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

इसका अर्थ यह है कि

$$\lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

इसी तर्क को उलटकर हम सिद्ध कर सकते हैं कि यदि

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$, तो $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

ii) की उपपत्ति भी इसी प्रकार दी जा सकती है और इसे हम एक अभ्यास के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E9))।

E9) प्रमेय 3 का भाग (ii) सिद्ध कीजिए।

अब हम एक उदाहरण की सहायता से ऊपर दिए गए परिणामों को समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 8 : मान लीजिए हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$$

चूंकि यहां $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, इसलिए $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sin x$.

अब, $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0$.

अतः प्रमेय 3 से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0.$$

अब यहां हम एक और उदाहरण दे रहे हैं, जिसकी सहायता से सीमाओं के संबंध में एक अन्य उपयोगी परिणाम को समझा जा सकता है।

उदाहरण 9 : आइए हम यह दिखाएं कि

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0$, और (ii) $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} \sin \frac{1}{x} = 0, a > 0$.

पहले (i) पर विचार करें।

(i) मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ दिया हुआ है। तब सभी $x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ के लिए

$$\left|\frac{1}{x^2} \sin x\right| \le \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

इससे पता चलता है कि

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0.$$

(ii) मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$. यह स्पष्ट है कि

$$\left|e^{ax} \sin \frac{1}{x}\right| \le e^{ax} < \varepsilon, \text{ यदि } x < \frac{1}{a} \ln \varepsilon.$$

इससे यह सिद्ध हो जाता है कि $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} \sin \frac{1}{x} = 0$.

ऊपर के उदाहरण में बताए गए दोनों परिणाम निम्नलिखित साधारण परिणाम की विशेष स्थितियां हैं।

मान लीजिए $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, जहां a एक वास्तविक संख्या ∞ या $-\infty$ है। यदि $g(x)$, a के प्रतिवेश में परिभाषित एक परिबद्ध फलन हो तो $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$

उदाहरण 10 : $\lim_{x\to\infty} \cos x$ का अस्तित्व नहीं है, यह सिद्ध करने के लिए हम शुरू में यह मानकर चलेंगे कि इस सीमा का अस्तित्व है और तब हम एक अंतर्विरोध प्राप्त करेंगे।

चूंकि cosx पूर्ण वास्तविक रेखा पर एक परिबद्ध फलन है, अतः यदि $\lim_{x\to\infty} \cos x$ का अस्तित्व है तो यह अवश्य परिमित होगी।

मान लीजिए $\lim_{x\to\infty} \cos x = L$. तब विशेष रूप में $\varepsilon = \frac{1}{2}$ के लिए एक ऐसी वास्तविक संख्या $G > 0$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$x > G \Rightarrow |\cos x - L| < \varepsilon.$$

यदि $x_1 > G$, $x_2 > G$ तब

$$\begin{aligned} |\cos x_1 - \cos x_2| &= |\cos x_1 - L + L - \cos x_2| \\ &\le |\cos x_1 - L| + |\cos x_2 - L| \\ &< 2\varepsilon = 1. \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (*)$$

मान लीजिए n एक प्राकृतिक संख्या है जिससे कि $n\pi > G$. यदि हम $x_1 = n\pi$ और $x_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ लें तो x_1 और x_2 दोनों ही G से बड़े होंगे, परन्तु

$$|\cos x_1 - \cos x_2| = 1.$$

यह (*) का अंतर्विरोध करता है। इससे यह सिद्ध हो जाता है कि $\lim_{x\to\infty} \cos x$ का अस्तित्व नहीं है। इसी प्रकार हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\lim_{x\to-\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ और $\lim_{x\to\infty} \sin x$ का अस्तित्व नहीं है।

अब हम संयुक्त फलनों की सीमाओं से संबंधित एक प्रमेय की चर्चा करेंगे।

प्रमेय 4 (संयुक्त फलन नियम)

मान लीजिए f और g दो वास्तविक मान फलन हैं और g o f सभी $x > r$ के लिए परिभाषित है, जहां r एक वास्तविक संख्या है। यदि $\lim_{x\to\infty} f(x)$ परिमित हो, और g, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ पर संतत हो, तो

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$, और मान लीजिए $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। y_0 पर फलन g संतत होने के कारण अब एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होगा, जिससे कि

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

चूँकि $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$, इस $\delta > 0$ के लिए वास्तविक संख्या $G > r$ का अस्तित्व है, जिससे कि

$$x > G \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

(*) और (**) को संयोजित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$x > G \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

अर्थात् $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$.

∞ के स्थान पर $-\infty$ या कोई परिमित वास्तविक संख्या प्रतिस्थापित करने पर भी यह परिणाम सत्य होगा। अधिक परिशुद्ध रूप में हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है :

प्रमेय 5 : (संयुक्त फलन नियम)

मान लीजिए f और g ऐसे दो वास्तविक फलन हैं, जिससे कि संभवतः a को छोड़कर a के प्रतिवेश में सभी x के लिए g o f परिभाषित हो। यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ परिमित है और g, $\lim_{x\to a} f(x)$ पर संतत है, तो

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

जब a एक परिमित संख्या हो अथवा $a = -\infty$ हो, तब ऊपर दिए गए प्रमेय की उपपत्ति प्राप्त करने के लिए आपको प्रमेय 4 की उपपत्ति में थोड़ा बहुत परिवर्तन करना होगा।

अब हम इन प्रमेयों की उपयोगिता समझने के लिए एक उदाहरण यहां दे रहे हैं।

उदाहरण 11 : आइए निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात करें

i) $\lim_{x\to 7} \sqrt[3]{5x-8}$

ii) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2-5}}$

आइए अब हम इन पर एक-एक करके विचार करें।

i) मान लीजिए $h(x) = \sqrt[3]{5x-8}$ तब $h(x)$ निम्नलिखित दो फलनों $f(x)$ और $g(x)$ का संयुक्त फलन है

$f(x) = 5x - 8$ और $g(x) = \sqrt[3]{x}$

अर्थात् $h(x) = g o f(x)$, और

$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7} (5x-8) = 27.$

अब, क्योंकि फलन g सभी x के लिए संतत है, इसलिए g, 27 पर संतत होगा। अतः प्रमेय 5 के अनुसार,

$$\lim_{x\to 7} \sqrt[3]{5x-8} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 7}(5x-8)} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

ii) मान लीजिए $h(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2x^2 - 5}}$. तब $h(x) = gof(x)$, जहां

$f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 5}$ और $g(x) = \sqrt{x}$.

अब $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2 - 5/x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

और $g(x)$, $\frac{1}{2}$ पर संतत है। अतः प्रमेय 5 के अनुसार

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^2}{2x^2-5}} = \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

हमें विश्वास है कि अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E 10) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

क) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{3x^3 + 6x^2 + 7}$ ख) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^9 + 5x^4 + 6x + 7}{x^7 + 6x^3 + 3x + 5}$

ग) $\lim_{t \to \infty} \frac{3t^2 + 4t}{4t + 5}$ घ) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$

ङ) $\lim_{x \to \infty} 2\cos \frac{1}{x} + e^{-x} + 5$

च) $\lim_{x \to \infty} ([x] + 1)$, जहां $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को दर्शाता है।

E 11) केवल परिभाषा की सहायता से निम्नलिखित सिद्ध कीजिए :

क) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^4 + 8} = 0$ ख) $\lim_{x \to \infty} (2 + e^{-5x}) = 2$

ग) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ घ) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2 + x^5}{x^5} = 1.$

ङ) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \ln(x-2)} = 0$.

1.4 सारांश

इस इकाई में हमने

1) दो नए प्रतीकों ∞ और $-\infty$ को लेकर वास्तविक संख्या पद्धति को विस्तारित किया है।
2) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ परिभाषित किया है, जहां a एक वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है और L एक वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है।
3) सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग करके कुछ सीमाएं ज्ञात की।
4) सीमाओं को परिकलित करने के लिए कुछ विधियां विकसित की हैं।

1.5 हल और उत्तर

1) क) मान लीजिए $\frac{0}{0} = k \in \mathbf{R}$, तब

$$2k = 2.\frac{0}{0} = \frac{0}{0} = k.$$

यह केवल तभी हो सकता है, जबकि $k = 0$.

अब, यदि $\frac{0}{0} = 0$, तब

$x + 0 = x + \frac{0}{0} = \frac{x \cdot 0 + 0}{0} = \frac{0}{0} = 0$, या

$x = 0 \ \forall \ x \in \mathbf{R}$.

यह एक अंतर्विरोध है।

यदि $\frac{0}{0} = \infty$, तब $x < 0$ के लिए $\frac{0}{0} = \frac{0.x}{0} = \frac{0}{0} \cdot x$, या $\infty = -\infty$,जोकि अंतर्विरोध है। इसी प्रकार $\frac{0}{0} = -\infty$ भी संभव नहीं है। अतः हम $\frac{0}{0}$ को कोई मान नहीं दे सकते।

ख) मान लीजिए $\frac{\infty}{\infty} = k$.

तब $x \cdot k = x \cdot \frac{\infty}{\infty} = \frac{x.\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = k, \ \forall \ x$.

$\Rightarrow k = 0$.

यदि $\frac{\infty}{\infty} = 0$, तब ऊपर (क) की तरह हमें एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $\frac{\infty}{\infty} = \infty$ या $-\infty$ भी नहीं हो सकता।

ग) मान लीजिए $0 \cdot \infty = k$.

$x \cdot k = x\,(0 \cdot \infty) = (x \cdot 0)\,\infty = 0 \cdot \infty = k \ \forall \ x$.

$\Rightarrow k = 0$.

अब, यदि $0 \cdot \infty = 0$, तो $\frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0 = 0$. परन्तु हम यह देख चुके हैं कि $\frac{\infty}{\infty}$ अनिर्धार्य है।

$0 \cdot \infty = \infty$ या $-\infty$ भी संभव नहीं है, इसका प्रमाण दीजिए।

E 2) क) यदि S, **R** का एक अपरिबद्ध उपसमुच्चय हो तो या तो S निम्न परिबद्ध नहीं है या यह उपरि परिबद्ध नहीं है। मान लीजिए S निम्न परिबद्ध नहीं है। अतः S का **R** में निम्न परिबंध नहीं होगा और हम यह देख चुके हैं कि ऐसी स्थिति में $\text{glb}S = -\infty$. इसी प्रकार, यदि S उपरि परिबद्ध नहीं है, तो $\text{lub}S = \infty$.

ख) $\mathbf{N} = \{1,2,3.............\}$ लीजिए। **N**, **R** में परिबद्ध नहीं है। $\text{lub}\ \mathbf{N} = \infty$, परन्तु $\text{glb}\ \mathbf{N} = 1 \in \mathbf{R}$.

ग) $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\} \subset \mathbf{R}$ लीजिए। तब $\text{lub}\ S = 0 \in \mathbf{R}$ परन्तु $\text{glb}\ S = -\infty$.

घ) $\mathbf{Z} = \{..........., -2, -1, 0, 1, 2............\} \subset \mathbf{R}$ लीजिए।

$\text{lub}\ \mathbf{Z} = \infty$ और $\text{glb}\ \mathbf{Z} = -\infty$.

E 3) क) 0 और 1, S के दो निम्न परिबंध हैं और S का केवल एक उपरि परिबंध है, ∞

ख) $\text{lub}\ S = \infty$ और $\text{glb}\ S = 2$.

E 4) मान लीजिए $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. तब $\forall \ m < 0 \ \exists \ \delta > 0$,

जिससे कि $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < m$.

$\Rightarrow f(x)$ ऋणात्मक है।

हमें यह सिद्ध करना है कि $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

अब दिए हुए किसी $\varepsilon > 0$ के लिए $m < -\frac{1}{\varepsilon}$ लीजिए।

इस m के लिए $\exists\ \delta > 0$, जिससे कि

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < m < -\frac{1}{\varepsilon}$.

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} > -\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{-1}{f(x)} < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ क्योंकि f(x) ऋणात्मक है।

इसलिए $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

अब, यदि $0 < |x - a| < \delta_1$ में $f(x) < 0$, और यदि $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, तब m दिया हुआ हो तो $\varepsilon < -\frac{1}{m}$ लीजिए।

इस ε के लिए $\exists$ a $\delta > 0$, $\delta < \delta_1$, जिससे कि

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} < -\frac{1}{m}$

$\Rightarrow f(x) < m$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

E 5) क) $\frac{1}{|x - 2|} > 0$ और $x \to 2$ होने पर $|x - 2| \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$

ख) $2x^2 - \frac{5}{x^2} = \frac{2x^4 - 5}{x^2} < 0$ यदि $0 < |x| < \sqrt[4]{5/2}$

और $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^4 - 5} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \left(2x^2 - \frac{5}{x^2}\right) = -\infty$.

ग) $-\infty$

घ) $x > 0$ के लिए $e^x - 1 > 0$ और $x < 0$ के लिए $e^x - 1 < 0$. इससे यह पता चलता है कि सभी $x \neq 0$ के लिए $x^{2n+1}(e^x - 1) > 0$ जहां n एक ऋणेतर (non-negative) पूर्णांक है। चूँकि $x \to 0$ होने पर $2x(e^x - 1) \to 0$, हमें यह पता चलता है कि $x \to 0$ होने पर

$\frac{1}{2x(e^x - 1)} \to \infty$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x(e^x - 1)} = \infty$.

ङ) $\frac{-1}{2h^{3/2}}$. संकेतः अंश का परिमेयकरण कीजिए।

च) 0

मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ दिया हुआ है। तब $e^{-1/x^2} < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < e^{1/x^2}$

$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\ln 1/\varepsilon}.$$

एक ऐसा δ लीजिए जिससे कि $0 < \delta < \sqrt{\frac{1}{\ln 1/\varepsilon}}$. तब

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow e^{-1/x^2} < \varepsilon.$$

छ) ∞ (देखिए घ)

ज) ∞

झ) ∞

ञ) $-\infty$

E 6) क) $x \tan x < 0$, यदि $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ और $x \to \frac{\pi^+}{2}$ होने पर $\frac{1}{x \tan x} = \frac{\cos x}{x \sin x} \to 0$.

$\therefore \lim\limits_{x \to \pi/2^+} x \tan x = -\infty$.

ख) $x > 0$ के लिए $\frac{x+2}{2x(e^x-1)} > 0$, और

$x \to 0$ होने पर $\frac{2x(e^x-1)}{x+2} \to 0$.

अतः $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+2}{2x(e^x-1)} = \infty$.

ग) $-\infty$

घ) $-\infty$

ङ) ∞ यदि $1 < x < 2$, तो $[x] = 1$ और

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) > 0$

इसलिए 1 और 2 के बीच के सभी $x (1 < x < 2)$ के लिए $\frac{x^2[x]+2}{x^2+x-2} > 0$,

चूँकि $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2[x]+2} = 0$, अभीष्ट सीमा ∞ के बराबर है।

E 7) क) "अस्तित्व नहीं है"

$\lim\limits_{x \to \pi/2^+} \frac{x^2+2}{\sin x \cos x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \frac{x^2+2}{\sin x \cos x} = \infty$.

ख) अस्तित्व नहीं है।

ग) अस्तित्व नहीं है।

घ) अस्तित्व नहीं है।

ध्यान दीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ और $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$.

ङ) अस्तित्व नहीं है। यह सिद्ध करना काफ़ी होगा कि $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है।

क्योंकि $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \le 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$, यदि इसका अस्तित्व है, तो अवश्य परिमित होगी।

यदि संभव हो तो मान लीजिए $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x} = L$. तब $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो एक ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$0 < x < \delta \Rightarrow \left|\sin \frac{1}{x} - L\right| < \varepsilon.$$

मान लीजिए

$$x_1 = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \; x_2 = \frac{1}{2n\pi}$$

तब हम n इतना बड़ा ले सकते हैं कि

$0 < x_1 < \delta$ और $0 < x_2 < \delta$

और

$$1 = \left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = \left|\sin\frac{1}{x_1} - L + L - \sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leq \left|\sin\frac{1}{x_1} - L\right| + \left|\sin\frac{1}{x_2} - L\right|$$

$$< 2\varepsilon$$

$$< 1,$$

यदि $\varepsilon < \frac{1}{2}$. यह एक अंतर्विरोध है।

अतः $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है।

E 8) दी हुई सूचना के आधार पर हम यह लिख सकते हैं कि

$f(x) = (x-\alpha)^m f_1(x)$, जहां $f_1(\alpha) \neq 0$

और $g(x) = (x-\alpha)^n g_1(x)$, जहां $g_1(\alpha) \neq 0$.

इस तरह,

क) $m > n$ के लिए

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-\alpha)^{m-n} f_1(x)}{g_1(x)}$$

अतः

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} (x-\alpha)^{m-n} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

$$= 0 \cdot \frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 0.$$

ख) क्योंकि $m = n$ के लिए $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ और $g_1(\alpha) \neq 0$,

इससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)} \neq 0, \text{यदि } m = n.$$

ग) यदि $m < n$, तो

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x-\alpha)^{m-n} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

क्योंकि $x = \alpha$ पर $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \neq 0$, और संतत है, अतः α के एक प्रतिवेश में इसका चिह्न वही होगा, जोकि $\frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)}$ का चिह्न है। परन्तु $x > \alpha$ के लिए $(x-\alpha)^{m-n}$ धनात्मक है और $x < \alpha$ के लिए $(x-\alpha)^{m-n} < 0$, क्योंकि $m-n$ विषम है। अब

$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ और $\lim_{x\to\alpha^-} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$, जहां $m-n$ विषम है और $m < n$. अतः

$\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)}$ का अस्तित्व नहीं है। इसलिए $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व नहीं है।

घ) $m-n$ सम हो, $m < n$, तो $(x-\alpha)^{m-n}$ सदैव धनात्मक होता है। इससे यह पता चलता

है कि α के प्रतिवेश में $\frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)} > 0$ या $\frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)} < 0$ के अनुसार $(x-\alpha)^{m-n} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ धनात्मक अथवा ऋणात्मक होगा।

क्योंकि $x \to \alpha$ होने पर $(x-\alpha)^{n-m} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \to 0$, अतः अपेक्षित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E 9) मान लीजिए $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. हमें यह सिद्ध करना है कि

$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$.

$\varepsilon > 0$ के लिए ऐसा $m < 0$ लीजिए जिससे कि

$x < m \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, या

$\frac{1}{x} < -\frac{1}{m} \Rightarrow f(x) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

यदि $\delta = -\frac{1}{m}$ तो $\delta > 0$. $y = \frac{1}{x}$ लीजिए।

तब, $0 < y < \delta \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in \,]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$.

अतः $\lim_{y\to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$.

इसी प्रकार इसका विलोम सिद्ध कीजिए।

E 10) क) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+5}{3x^3+6x^2+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

ख) ∞

ग) ∞

घ) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

क्योंकि सभी x के लिए cosx और sinx परिबद्ध फलन हैं, और $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, इससे यह पता चलता है कि $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

इस तरह,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

ङ) 7

क्योंकि $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, और cosx सर्वत्र संतत है, हमें प्राप्त होता है (प्रमेय 5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \cos\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = 1.$$

शेष भाग स्पष्ट है।

च) ∞

मान लीजिए M दिया हुआ है। मान लीजिए N एक ऐसी प्राकृतिक संख्या है कि $N > M$. तब

$x > N-1 \Rightarrow [x]+1 \geq N-1+1$

इससे यह पता चलता है कि

$\lim_{x\to\infty} ([x]+1) = \infty$.

E 11) $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है $\left|\frac{3x^2}{x^4+8}\right| = \frac{3x^2}{x^4+8} < \varepsilon$ यदि और केवल

यदि $3x^2 - \varepsilon x^4 < 8\varepsilon \Leftrightarrow x^2(\varepsilon x^2 - 3) > -8\varepsilon$

$\Leftrightarrow (\varepsilon x^2 - 3) > -8\varepsilon$, यदि $x > 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon x^2 > 3 - 8\varepsilon$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}}$$

अतः, क्योंकि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है, इसलिए यदि

$M = \max\left\{1, \frac{3-8\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$, तो

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{3x^2}{x^4+8}\right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^4+8} = 0.$$

ख) $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। $|2+e^{-5x}-2| < \varepsilon$ यदि और केवल यदि $|e^{-5x}| = e^{-5x} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow -5x < \ln\varepsilon$

$\Leftrightarrow x > \frac{-\ln\varepsilon}{5}$.

इसलिए यदि $M = \frac{-\ln\varepsilon}{5}$, तो $x > M \Rightarrow |2 + e^{-5x} - 2| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} (2 + e^{-5x}) = 2.$$

ग) $\varepsilon > 0$ दिया हुआ है; $\left|\frac{1}{\ln x}\right| > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} < \varepsilon$, यदि $x > 1 \Leftrightarrow x > e^{\varepsilon}$.

$\therefore M = \max\{1, e^{\varepsilon}\}$ लीजिए।

घ) $\left|\frac{2+x^5}{x^5} - 1\right| = \left|\frac{2}{x^5}\right|$

$\varepsilon > 0$ दिया हुआ है। $\left|\frac{2}{x^5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x^5} > -\varepsilon$ यदि $x < 0$.

$$\Leftrightarrow x < \sqrt[5]{-2/\varepsilon}.$$

$\therefore m = \min\left\{0, \sqrt[5]{-2/\varepsilon}\right\}$ लीजिए।

तब $x < m \Rightarrow \left|\frac{2+x^5}{x^5} - 1\right| < \varepsilon$

अतः $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+x^5}{x^5} = 1.$

ङ) मान लीजिए $x > 3$. तब, क्योंकि $x > 1$ के लिए $\ln x > 0$, इसलिए

$$\left|\frac{1}{1+\ln(x-2)}\right| = \frac{1}{1+\ln(x-2)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1+\ln(x-2) > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-2) > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\Leftrightarrow x-2 > e^{(1/\varepsilon-1)}$$

$$\Leftrightarrow x > 2+e^{(1/\varepsilon-1)}$$

$\therefore\ M = \max\left\{3,\ 2+e^{(1/\varepsilon-1)}\right\}$ लीजिए।

इकाई 2 : लोपिताल नियम

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने यह बताया था कि अनंत सीमाएं हमेशा ही अंकगणित के चार मूलभूत नियमों का पालन नहीं करती। अर्थात् यह आवश्यक नहीं है कि सीमाओं के योगफल अथवा गुणनफल, योगफल अथवा गुणनफल फलनों की सीमाओं के बराबर ही हों। इस इकाई में हम इन स्थितियों पर कुछ विस्तार से विचार करेंगे और इनसे संबंधित विधियाँ विकसित करेंगे।

ऐसे अपवादी स्थितियों में अधिकांश सीमाएं ज्ञात करने के लिए जिस विधि को लागू किया जाता है वह है लोपिताल नियम। इस नियम में सीमाएं ज्ञात करने के लिए हम अवकलज का प्रयोग करते हैं। अभी तक हम ठीक इसके विपरीत क्रिया करते थे, अर्थात् हम सीमाओं का प्रयोग अवकलज के परिकलन में करते थे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- अनिर्धार्य रूपों की पहचान कर सकेंगे,
- निम्नलिखित सीमाओं का परिकलन कर सकेंगे।

i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, जबकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, जबकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$, जबकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iv) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x)$ जबकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

v) $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)}$ जबकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, या

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, या

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $a \in \mathbf{R}$

ऊपर दी गई सभी सीमाएँ ज्ञात कर सकेंगे, जबकि a, ∞ या $-\infty$ हो,

2.2 अनिर्धार्य रूप

इकाई 1 में हमने यह देखा है कि हम $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ जैसे प्रतीकों को कोई निर्धारित मान नहीं दे सकते। यही कारण है कि इन्हें अनिर्धार्य रूप (indeterminate form) कहा जाता है। हमने यह भी देखा है कि सीमाओं का बीजगणित अर्थात्

$$\lim_{x \to a} (f * g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$$

को उस स्थिति में लागू नहीं किया जा सकता, जबकि दक्षिण पक्ष अनिर्धार्य रूप का हो। ऐसी स्थिति में हम यह कहते हैं कि $f(x) * g(x)$ एक अनिर्धार्य रूप में है जबकि $x \to a$.

आइए अब हम विभिन्न प्रकार के अनिर्धार्य रूपों से परिचित हो लें।

मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ दो वास्तविक मान फलन हैं, जो (संभवतः a को छोड़कर) a के प्रतिवेश में परिभाषित हैं, जबकि a एक परिमित वास्तविक संख्या है।

i) $\frac{0}{0}$ रूप : मान लीजिए V में किसी भी x के लिए $g(x) \neq 0$.

यदि $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$, तब

$\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, $\frac{0}{0}$ के रूप का एक व्यंजक है। इस स्थिति में हम यह कहते हैं कि $x = a$ पर अथवा $x \to a$ होने पर $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ के प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का है।

उदाहरण के लिए,

$x = 0$ पर $\frac{e^x - \cos x}{x}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है।

∞ पर $\frac{e^{-x} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है और

$-\infty$ पर $\frac{e^x}{1/x^2}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है।

ii) $\frac{\infty}{\infty}$ रूप : यदि $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty = \lim_{x \to a} g(x)$, तब $x = a$ पर $\frac{f(x)}{g(x)}$ को $\frac{\infty}{\infty}$ के प्रकार का अनिर्धार्य रूप कहा जाता है। उदाहरण के लिए ∞ पर $\frac{e^x}{\ln x}$, $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है।

$-\infty$ पर $\frac{x^2}{e^{-x}}$, $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है, और

$x = 0$ पर $\frac{\ln x}{x^{-2n}}$, $(n \in \mathbf{N})$, $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है।

iii) $\infty - \infty$ रूप : यदि $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ और $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, तो $x = a$ पर $f(x) - g(x)$ को $\infty - \infty$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का कहा जाता है। उदाहरण के लिए

$x = \frac{\pi}{2}$ पर $\tan^2 x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-2}$, $\infty - \infty$ रूप का है।

∞ पर $x^2 - e^x$, $\infty - \infty$ रूप का है।

व्यापक रूप में, मान लीजिए $*$ चार अंकगणितीय संक्रियाओं, जोड़, घटाना, गुणा और भाग में से किसी भी एक संक्रिया को प्रकट करता है।

यदि $\lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$ अनिर्धार्य रूप का हो, अर्थात् $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$ के प्रकार का एक व्यंजक हो, तब हम यह कहते है कि $x = a$ पर अथवा x का a की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x) * g(x)$ एक **अनिर्धार्य रूप** का है।

अन्य अनिर्धार्य रूप : यदि $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ और $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$,

जिससे कि $\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$, 1^∞ के प्रकार का एक व्यंजक हो, तो हम यह कहते हैं

कि $x = a$ पर $[f(x)]^{g(x)}$, 1^∞ के प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का है। उदाहरण के लिए, $x = 0$ पर $\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{1/x^2}$, 1^∞ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है, जबकि ∞ पर $(1+1/x)^x$, 1^∞ के प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का है।

इसी प्रकार $0^0, 0^\infty, \infty^0$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप परिभाषित होते हैं। उदाहरण के लिए,

$x = 0$ पर $(e^x - 1)^{1-\cos x}$, 0^0 के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है और,

$x = 0$ पर $(\sin x)^{1/x^2}$, 0^∞ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है और

∞ पर $(e^x)^{1/x^2}$, ∞^0 के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है।

हम पहले भी बता चुके हैं और यहां फिर दोहरा रहे हैं कि अभी तक हमने जिन विधियों को विकसित किया है उनकी सहायता से ऊपर उल्लेख की गई स्थितियों में सीमाएं परिकलित नहीं की जा सकती। यहां हम कुछ ऐसी विधियों की चर्चा करेंगे, जिनकी सहायता से ऐसी लगभग सभी स्थितियों में सीमाएं परिकलित की जा सकेंगी।

पहले आप देखिए कि आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकते हैं कि नहीं।

E 1) निम्नलिखित स्थितियों में अनिर्धार्य रूपों के प्रकार बताइए।

क) $\frac{e^x}{x^n}$, जबकि $x \to \infty$

ख) $\frac{\sin 2x}{x \cos x^2}$ जबकि $x \to 0$

ग) $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}$, जबकि $x \to 0$

घ) $\frac{\sin x}{x}$, जबकि $x \to 0$.

2.3 $\frac{0}{0}$ के रूप के लिए लोपिताल नियम

गिथ्यॉम फ्रांस्वा आंत्वान द लोपिताल नामक एक फ्रांसिसी गणितज्ञ जॉन बर्नौली का विद्यार्थी था। उसने 1696 में कलन पर प्रथम पुस्तक प्रकाशित की। बर्नौली के व्याख्यानों पर आधारित इस पुस्तक में उस स्थिति में $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात करने की एक विधि दी गई है जबकि $x = a$ पर $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ के प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का हो। इस परिणाम को अब लोपिताल नियम के नाम से जाना जाता है, हालांकि इसे बर्नौली ने सिद्ध किया था। यहां पहले हम इस नियम के सरलतम रूप का कथन देंगे और उसे सिद्ध करेंगे। आगे आने वाले उपभागों में हम इस नियम के अन्य रूपों की चर्चा करेंगे।

2.3.1 लोपिताल नियम का सरलतम रूप

अब हम एक प्रमेय के रूप में लोपिताल नियम के सरलतम रूप का कथन देंगे।

प्रमेय 1 : यदि $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक मान फलन हों कि

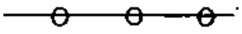
i) $x = a$ ($a \in \mathbf{R}$) पर $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय हों,

ii) $f(a) = 0 = g(a)$, और

iii) $g'(a) \neq 0$.

$$\text{तो} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

a के निष्कासित प्रतिवेश का अर्थ है, a का एक प्रतिवेश जिस से बिंदु a हटाया गया है। नीचे चित्र देखिए।



a–δ a a+δ

उपपत्ति : ध्यान दीजिए कि $f'(a)$, $g'(a)$ के अस्तित्व से इस बात का पता चलता है कि दोनों फलन a के एक प्रतिवेश में परिभाषित हैं। फिर भी, परिकल्पना (hypothesis) $g'(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ से यह पता चलता है कि a के एक निष्कासित प्रतिवेश (deleted neighbourhood) में $g(a)$, 0 से भिन्न है। अतः भागफल $\frac{f(x)}{g(x)}$, a के एक निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित है। स्पष्ट है कि

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}, \text{ क्योंकि } f(a) = g(a) = 0$$

$$= \frac{(f(x)-f(a))/(x-a)}{(g(x)-g(a))/(x-a)}$$

अब क्योंकि $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ और

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \neq 0,$$

इसलिए हम सीमाओं के बीजगणित का प्रयोग कर सकते हैं। तब हमें प्राप्त होता है

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

ध्यान दीजिए कि इस समीकरण का दक्षिण पक्ष अनिर्धार्य रूप का नहीं है, क्योंकि $g'(a)$ एक शून्येतर परिमित संख्या है। आइए अब हम इस प्रमेय का प्रयोग करके सीमाएं प्राप्त करें।

उदाहरण 1 : मान लीजिए हम निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात करना चाहते हैं।

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

ii) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{(x-\pi/2)^2}{\cos x}$

पहले i) की सीमा को परिकलित करें।

i) मान लीजिए $f(x) = 1-\cos x$, $g(x) = \sin x$. तब प्रमेय 1 की परिकल्पनाएं संतुष्ट हो जाती हैं और हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

ii) चूंकि $x = \frac{\pi}{2}$, पर $\frac{d}{dx}(\cos x)$, -1 है,

और $x = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d}{dx}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$, इसलिए प्रमेय 1 लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{(x-\pi/2)^2}{\cos x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

इस उदाहरण में फलन $f(x)$ और $g(x)$, $x = a$ पर अवकलनीय हैं और इसीलिए संतत हैं। इसलिए

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 \text{ और } \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0.$$

अतः यहाँ हम सीमाओं के बीजगणित को सीधे लागू करके $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ प्राप्त नहीं कर सकते थे।

प्रमेय 1 का काफी सीमित उपयोग है। इस प्रमेय की परिकल्पनाओं के अनुसार यह आवश्यक है कि फलन $f(x)$ और $g(x)$, a पर परिभाषित हों। जबकि भागफल $\frac{f(x)}{g(x)}$ की सीमा के अस्तित्व के लिए यह आवश्यक नहीं है कि $f(x)$ और $g(x)$, a पर परिभाषित हों। अगले उपभाग में हम एक अन्य प्रमेय (प्रमेय 3) प्रस्तुत करेंगे, जिसमें प्रमेय 1 के प्रतिबंधों के स्थान पर कुछ अन्य प्रतिबंध लगाए गए हैं।

प्रमेय 1 लागू करके अब आप नीचे दिए गए प्रश्न में सीमाएं ज्ञात कीजिए।

E 2) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए।

क) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin x}$

ख) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-6x+5}$

प्रमेय 1 में हमने लोपिताल नियम का सबसे सरल रूप देखा है। अब हम इस नियम के एक और रूप की चर्चा करेंगे।

2.3.2 $\frac{0}{0}$ रूप के लिए लोपिताल नियम का एक अन्य रूप

इस उपभाग में हम $\frac{0}{0}$ रूप के लिए लोपिताल नियम का कथन (प्रमेय 3) देंगे और उसे सिद्ध करेंगे। परन्तु इसे सिद्ध करने के लिए हमें कॉशी माध्यमान प्रमेय (Cauchy's mean value theorem) की सहायता लेनी होगी।

कलन पाठ्यक्रम में आप रोल प्रमेय और लगरांज माध्य मान प्रमेय से परिचित हो चुके हैं (देखिए कलन की इकाई 7 में प्रमेय 2 और 3)। यहां हम कॉशी माध्य मान प्रमेय का केवल कथन देंगे। यह रोल प्रमेय का ही एक सरल निष्कर्ष है। आपको इन सभी माध्य मान प्रमेयों की उपपत्तियां वास्तविक विश्लेषण के पाठ्यक्रम में मिल सकती हैं।

प्रमेय 2 (कॉशी माध्य मान प्रमेय) :

मान लीजिए f और g संवृत अंतराल [a,b] पर परिभाषित ऐसे दो वास्तविक मान फलन हैं कि

i) f और g, [a,b] पर संतत हैं,

ii) f और g,]a,b[पर अवकलनीय हैं, और

iii)]a,b[में किसी x के लिए $g'(x)\neq 0$.

तब एक ऐसी वास्तविक संख्या c का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

फ्रांस के ऑगस्टिन लुई कॉशी (1789-1857) उन्नीसवीं शताब्दी के एक महान गणितज्ञ थे। उनकी रुचि गणित के अनेक क्षेत्रों में थी। गणितीय विश्लेषण की तर्कसंगत नींव डालने में उनका विशेष योगदान रहा।

अब हम किसी वास्तविक संख्या a पर $\frac{0}{0}$ रूप के लिए लोपिताल नियम का कथन दे सकते हैं और इसे सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 3 : मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक मान फलन हैं जिससे कि

i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$, जहां a एक वास्तविक संख्या है, और

ii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है (और इसका मान ∞ अथवा $-\infty$ हो सकता है)

तब $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

उपपत्ति : परिकल्पना के अनुसार $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है। इससे यह अर्थ

निकलता है कि a के निष्कासित प्रतिवेश में $f'(x)$ और $g'(x)$ का अस्तित्व है। अर्थात् किसी $\delta > 0$ के लिए, संभवतः $x = a$ को छोड़कर, अंतराल $]a-\delta, a+\delta[$ में f और g दोनों अवकलनीय हैं। इससे यह भी अर्थ निकलता है कि $0 < |x-a| < \delta$ के लिए $g'(x) \neq 0$, जिससे कि $0 < |x-a| < \delta$ के लिए $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ परिभाषित है ।

परिकल्पना में $x = a$ पर f और g के मानों के बारे में कुछ नहीं कहा गया है। वस्तुतः यह ज़रूरी नहीं है कि $x = a$ पर $f(x)$ और $g(x)$ परिभाषित हों। यहां हम मानकर चलेंगे कि $f(a) = 0$ और $g(a) = 0$. ध्यान दीजिए कि इससे सीमाओं $\lim_{x \to a} f(x)$ और $\lim_{x \to a} g(x)$ के अस्तित्व अथवा मान पर कोई असर नहीं होता। फिर भी हमारी कल्पना से $x = a$ पर ये फलन संतत हो गए हैं।

अब किसी x के लिए ताकि $0 < |x-a| < \delta$ फलन $f(x)$ और $g(x)$, $a < x$ या $x < a$ के अनुसार अंतराल $[a,x]$ या $[x,a]$ में कॉशी माध्य मान प्रमेय (प्रमेय 2) की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं। अर्थात् $f(x)$ और $g(x)$ संवृत अंतराल $[a,x]$ या $[x,a]$ में संतत हैं,
$f(x)$ और $g(x)$ विवृत अंतराल $]a,x[$ या $]x,a[$ में अवकलनीय हैं, और

$]a,x[$ या $]x,a[$ में किसी y के लिए $g'(y) \neq 0$.

इस तरह, प्रमेय 2 लागू करके हम यह कह सकते हैं कि a और x के बीच एक ऐसी वास्तविक संख्या c का अस्तित्व है, जिससे कि

ध्यान दीजिए
$f(a) = g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

स्पष्ट है कि $x \to a$ होने पर $c \to a$. अतः

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

इस तरह उपपत्ति पूरी हो जाती है।

टिप्पणी 1 : प्रमेय 3 में उल्लेख किया गया प्रतिबंध ii), $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ के अस्तित्व के लिए पर्याप्त (sufficient) है, आवश्यक (necessary) नहीं है। इस तरह, यदि $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व न हो, तो $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ के अस्तित्व के बारे में हम इस प्रमेय से कुछ भी निर्णय नहीं ले सकते हैं। और तब इसके अस्तित्व को स्थापित करने और उसका मान ज्ञात करने के लिए हमें विभिन्न विधियों का प्रयोग करना होगा (देखिए उदाहरण 3)।

प्रमेय 3 की उपपत्ति में थोड़ा-बहुत परिवर्तन करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है जिसे एक-पक्षीय सीमाओं के लिए लोपिताल नियम कहा जाता है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ दो वास्तविक मान फलन हैं।

i) यदि $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x)$, और

$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है (और इसका मान ∞ अथवा $-\infty$ भी हो सकता है),

तब $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ii) यदि $\lim_{x \to a^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^-} g(x)$, और

$\lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है (और इसका मान ∞ या $-\infty$ हो सकता है),

तब $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से ऊपर की गई चर्चा को और अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 2 : मान लीजिए हम

i) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ और

ii) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}}$

ज्ञात करना चाहते हैं।

इन्हें हम एक के बाद एक लेंगे।

i) स्पष्ट है कि $x=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{1-\sin x}{\cos x}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है। फलन $1-\sin x$ और $\cos x$ प्रमेय 3 की परिकल्पना को संतुष्ट करते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि यहां लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है। अतः

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = 0.$$

ii) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x-\sqrt{x}$ लीजिए। स्पष्ट है कि उपयुक्त $\delta > 0$, मान लीजिए $\delta = \frac{1}{2}$, के लिए $]1-\delta, 1+\delta[$ में $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय हैं। साथ ही

$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$, और

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2.$$

इस तरह, लोपिताल नियम से

$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-\sqrt{x}} = 2$ प्राप्त होता है।

अब हम एक ऐसा उदाहरण देंगे जिसमें लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता। आप देखेंगे कि इस स्थिति में भी आप $\frac{f(x)}{g(x)}$ की सीमा ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ ज्ञात करने के लिए पहले हम यह देखते हैं कि $x=0$ पर $\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है। पर, यहां लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}(\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos\frac{1}{x} + 2x \sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

का अस्तित्व नहीं है। क्या आप सिद्ध कर सकते हैं कि इस सीमा का अस्तित्व नहीं है ? ध्यान दीजिए कि यदि

$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ का अस्तित्व है, तो $\lim_{x\to 0} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ का अस्तित्व ज़रूर होगा।

और फलस्वरूप $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ का अस्तित्व होगा, जो कि सत्य नहीं है। साथ दी हुई टिप्पणी देखिए।

$x \to 0$ होने पर $\cos\frac{1}{x}$, 1 और -1 के बीच दोलन करता है और किसी सीमा की ओर प्रवृत्त नहीं होता।

फिर भी, हम $x \to 0$ होने पर $\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ की सीमा ज्ञात कर सकते हैं।

यहां $$\left|\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right| < \left|\frac{x^2}{\sin x}\right| = \left|\frac{x}{\sin x}\right| |x|.$$

चूँकि $x \to 0$ होने पर $\frac{x}{\sin x} \to 1$, अतः इससे यह पता चलता है कि $x\to 0$ होने पर $\frac{x^2}{\sin x} \to 0$.

इसलिए $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$

अगले उदाहरण में यह दिखाया गया है कि लोपिताल नियम $\left(\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \right)$ को केवल उन भागफलों पर लागू किया जा सकता है जो दिए हुए बिन्दु पर $\frac{0}{0}$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप हों। हम यह कहना चाहते हैं कि प्रमेय 3 का पहला प्रतिबंध काफी महत्वपूर्ण है।

उदाहरण 4 : मान लीजिए हम $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$ ज्ञात करना चाहते हैं। क्या हम यह तर्क दे सकते हैं कि $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{2}{1} = 2$?

यह सही है कि फलन $x + \sin x$ और $x + \cos x$ अवकलनीय फलन हैं। पर फिर भी उपर दिया हुआ तर्क सही नहीं है, क्योंकि यहां $x = 0$ पर $\dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$ एक अनिर्धार्य रूप का नहीं है। और इसलिए लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता। वास्तव में

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} (x + \sin x)}{\lim_{x\to 0} (x + \cos x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

हम आपको बता चुके हैं कि प्रमेय 3 में उल्लेख किए गए प्रतिबंध $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ की सीमा ज्ञात करने के लिए पर्याप्त है, पर आवश्यक नहीं हैं। इसका एक और उदाहरण अब हम दे रहे हैं।

उदाहरण 5 : मान लीजिए

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

और $g(x) = x$. आइए हम $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात करें और दिखाएं कि इस स्थिति में प्रमेय 3 लागू नहीं किया जा सकता है।

स्पष्ट है कि

i) 0 पर $f(x)$ और $g(x)$ अवकलनीय हैं,

ii) $f(0) = 0 = g(0)$, और

iii) $g'(0) \neq 0$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0, \text{ क्योंकि } \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h| \to 0$$

इसलिए, प्रमेय 1 के अनुसार

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0.$$

परंतु यहां प्रमेय 3 लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि

$\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व नहीं है। अतः हम यह कह सकते हैं कि प्रमेय 3 में प्रतिबंध ii) का उल्लंघन हुआ है, फिर भी $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व है।

क्या आपने इस बात की ओर ध्यान दिया है, कि यह एक ऐसी स्थिति है जहां $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व नहीं है, परंतु $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ का अस्तित्व है ? इससे यह अर्थ निकलता है कि $x = 0$ पर $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ संतत नहीं है। हम चाहेंगे कि आप इस उदाहरण को फिर से देखें और सभी तथ्यों को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करें।

प्रमेय 1 के प्रतिबंध भी $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान निकालने के लिए पर्याप्त हैं परंतु आवश्यक नहीं हैं। हम अपनें अगले उदाहरण में उस स्थिति पर विचार करेंगे जहां प्रमेय 3 तो लागू किया जा सकता है, पर प्रमेय 1 लागू नहीं किया जा सकता। उदाहरण 5 और 6 को एक साथ लेने पर हमें यह पता चलता है कि प्रमेय 1 और प्रमेय 3 एक दूसरे से स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 6 : मान लीजिए हम $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}$ ज्ञात करना चाहते हैं। मान लीजिए $f(x) = x^2$ और $g(x) = \sin^2 x$. यह स्पष्ट है कि $x = 0$ पर $\frac{x^2}{\sin^2 x}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है।

अब $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2 \sin x \cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} \cos x}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \cos x}$$

अतः प्रमेय 3 के अनुसार

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1.$$

ध्यान दीजिए कि यहां हम प्रमेय 1 लागू नहीं कर सकते क्योंकि

$g'(0) = 0.$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 3) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए :

क) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x^2}$

ख) $\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\cos \pi x}$

ग) $\lim_{x\to \alpha} \frac{x^m - \alpha^m}{x^n - \alpha^n}, \alpha > 0$

घ) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1+4x)}{4x}$

ङ) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{1 - \sin x}$

च) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

छ) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$

ज) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12} - 4}{x^2 - 4}$

अब फलनों $f(x) = 1-\cos x$ और $g(x) = x^2$ को लीजिए। ये फलन **R** पर अवकलनीय हैं। आइए हम $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ का मान ज्ञात करें। यहां $f'(x) = \sin x$ और $g'(x) = 2x$. अब $x = 0$ पर $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ भी $\frac{0}{0}$ प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का है। आइए अब हम $f'(x)$ और $g'(x)$ पर अपना ध्यान केंद्रित करें। हम पाते हैं कि $f'(x)$ और $g'(x)$ भी अवकलनीय फलन हैं और $f''(x) = \cos x$, $g''(x) = 2$. इस तरह, $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$. इसका अर्थ है कि हम $f'(x)$ और $g'(x)$ के भागफल को $x = 0$ पर लोपिताल नियम लागू कर सकते हैं। हमें प्राप्त होता है

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}.$$

अब, क्योंकि $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$. इसलिए $\frac{f(x)}{g(x)}$ पर लोपिताल नियम लागू करने पर

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$$

प्राप्त होता है। इस तरह, हम यह लिख सकते हैं

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

हमें प्रायः ऐसी स्थितियां प्राप्त होती हैं जहां लोपिताल नियम को बार-बार लागू करके अपेक्षित सीमाएं हम ज्ञात कर सकते हैं। अब हम नीचे दिए गए प्रमेय में इससे संबंधित एक व्यापक परिणाम का कथन देंगे।

प्रमेय 5 : मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक फलन हैं कि

$\lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x), 0 \le k \le n-1$, जहां $n \in N$.

(यहां $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$, और $f^{(k)}$, $1 \le k \le n-1$ के लिए f के k वीं कोटि के अवकलज को प्रकट करता है।)

यदि $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व है (जिसका मान ∞ या $-\infty$ भी हो सकता है),

तो $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

इस प्रमेय को भी ठीक उसी तरह सिद्ध किया जा सकता है जिस प्रकार प्रमेय 3 सिद्ध किया गया है। परंतु यहां हम इसके उपपत्ति की चिंता नहीं करेंगे, क्योंकि हमारी रुचि केवल इस प्रमेय को लागू करने में है।

निम्न टिप्पणीयों पर विचार कीजिए।

टिप्पणी 2 : ध्यान दीजिए कि यदि किसी n के लिए, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व न हो, और

$\lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x), 0 \le k \le n-1$; तो लोपिताल नियम को लागू करके $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

टिप्पणी 3 : अब हम एक - पक्षीय सीमाओं के लिए व्यापक लोपिताल नियम का कथन दे सकते हैं।

मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक मान फलन हैं कि

$\lim\limits_{x\to a^+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g^{(k)}(x), 0 \le k \le n-1, n \in N$.

यदि $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व हो (इसका मान ∞ या $-\infty$ भी हो सकता है), तब

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

यदि हम हर जगह a^+ के स्थान पर a^- प्रतिस्थापित करें, तो हमें वाम पक्षीय सीमा का कथन प्राप्त होगा।

अब हम ऊपर की चर्चा को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 7 : आइए निम्नलिखित के मान ज्ञात करें।

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-5x+4}{x^3-x^2-x+1}$, और

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}$

पहले हम i) को हल करेंगे।

i) यदि हम $f(x) = x^5 - 5x + 4$ और $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ लें,

तो $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} (5x^4 - 5) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 1} g''(x) = \lim\limits_{x\to 1} (3x^2-2x-1) = 0,$

और $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{20x^3}{6x-2} = 5.$

अतः प्रमेय 5 को लागू करने पर, अर्थात् लोपिताल नियम का बार-बार प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-5x+4}{x^3-x^2-x+1} = 5.$$

ii) यदि $f(x) = e^{3x}-3x-1$ और $g(x) = 1-\cos x$, तब

$f'(x) = 3e^{3x}-3$ और $g'(x) = \sin x.$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0,$ और

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0.$

अब $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{\cos x} = 9$, जिससे यह पता चलता है कि

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x} = 9.$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 4) निम्नलिखित सीमाएं ज्ञात कीजिए।

क) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\tan^{-1}x)^2}{\ln(1+x^2)}$

ख) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\tan^{-1}x}{x-\sin x}$

ग) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$

घ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2\tan^2 x}$

ङ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3x}{x^3}$

च) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

छ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x}$

E 5) t का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 2x + t\sin 2x}{x^3}$$

परिमित हो। सीमा का मान ज्ञात कीजिए।

$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

E 6) t का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + te^{-x} - 2x}{1-\cos x}$$

परिमित हो। सीमा का मान ज्ञात कीजिए।

E 7) दिखाइए कि

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin 1/x}{5\tan x} = 0$$

और यह भी दिखाइए कि लोपिताल नियम की सहायता से उपरोक्त सीमा का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

इस अनुभाग में अब तक हमने $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ की जो चर्चा की है, उसमें a को R का सदस्य माना था। क्या a की जगह ∞ या – ∞ रखने पर भी लोपिताल नियम लागू होगा ? आइए देखें।

∞ या – ∞ पर $\frac{0}{0}$ रूप के लिए लोपिताल नियम

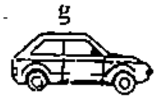
लोपिताल नियम से संबंधित प्रमेय 3 और प्रमेय 5, x = a पर तब भी लागू होते हैं जबकि a = ∞, या – ∞.

हम इस परिणाम को सिद्ध करने की कोशिश नहीं करेंगे। परन्तु यहां हम एक उदाहरण दे रहे हैं, जिसे पढ़ कर आप मानेंगे कि यह प्रमेय ज़रूर सत्य होगा।

f

स्थिति $f(t)$
वेग $f'(t)$

g



स्थिति $g(t)$
वेग $g'(t)$

मान लीजिए दो कारें, f– कार तथा g– कार अनंत (endless) यात्रा पर निकली हैं। f(t) और g(t) समय t पर इन कारों की स्थिति को दर्शाते हैं। तब इनके वेग क्रमशः $f'(t)$ और $g'(t)$ होंगे। अब यदि

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L,$$

तो इसका अर्थ यह है कि आखिरकार, f– कार, g– कार से L गुना तेज़ चलती है। इसलिए क्या यह मानना सही नहीं होगा कि आखिरकार f– कार, g– कार से L गुना दूरी तय करती है ?

अब हम इस तथ्य का प्रयोग करके एक उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 8 : मान लीजिए हम

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\tan \frac{3}{x}}{\sin \frac{1}{x}}$, और

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} x \sin \frac{5}{x}$

के मान ज्ञात करना चाहते हैं।

आइए हम इन सीमाओं को एक-एक करके ज्ञात करें।

i) मान लीजिए $f(x) = \tan \frac{3}{x}$ और $g(x) = \sin \frac{1}{x}$. तब $x \to \infty$ होने पर $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का होगा। स्पष्ट है कि f(x) और g(x) दोनों ही सभी $x \neq 0$ के लिए अवकलनीय हैं, और

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-3/x^2)\sec^2(3/x)}{(-1/x^2)\cos(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\sec^2(3/x)}{\cos(1/x)} = 3.$$

इस तरह, ∞ पर $\frac{0}{0}$ रूप का लोपिताल नियम यहां लागू हो सकता है। इसलिए

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tan(3/x)}{\sin(1/x)} = 3.$$

ii) मान लीजिए $f(x) = \sin \frac{5}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ तब – ∞ पर

$\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है, और

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-5/x^2)\cos(5/x)}{-1/x^2} = 5.$$

इसलिए, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(5/x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 5.$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकेंगे।

E 8) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए :

क) $\lim_{x\to\infty} x \tan^{-1}(1/x)$

ख) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{e^{1/x}-1}$

ग) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$

घ) $\lim_{x\to\infty} 2x(\ln(x+1)-\ln x)$

ङ) $\lim_{x\to-\infty} x^2 \ln\left[\dfrac{x^2+1}{x^2}\right]^3$

अगले भाग में हम $\frac{\infty}{\infty}$ प्रकार के अनिर्धार्य रूप के फलनों पर विचार करेंगे।

2.4 $\frac{\infty}{\infty}$ रूप के लिए लोपिताल नियम

पिछले भाग में हम यह देख चुके हैं कि किस प्रकार लोपिताल नियम की सहायता से $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात किया जा सकता है, जबकि $x = a$ पर $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{0}{0}$ रूप का है। अब इस भाग में हम $x = a$ पर $\dfrac{\infty}{\infty}$ रूप के किसी भागफल की सीमा, यानि $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात करने के लिए एक नियम का अध्ययन करेंगे। जब $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$, तब $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का मान ज्ञात करने के लिए हमें ठीक उसी प्रकार के परिणाम प्राप्त हैं, जैसे कि हमने पिछले भाग में देखे हैं। पर इनकी उपपत्ति काफी जटिल होती है। अतः यहां हम इन परिणामों का केवल कथन देंगे लेकिन उन्हें सिद्ध नहीं करेंगे। और तब कुछ उदाहरणों की सहायता से इन नियमों को और अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

प्रमेय 6 : मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक फलन हैं कि

i) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$,

जहां a एक वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है।

ii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ का अस्तित्व है, और इसका मान अनंत भी हो सकता है। तब

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

पिछले भाग (देखिए प्रमेय 4) की तरह हम यहां भी एक-पक्षीय सीमाओं

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ और } \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}$$

के मान ज्ञात करने के लिए इस प्रमेय के कथन में थोड़ा बहुत परिवर्तन कर सकते हैं।

हम प्रमेय 5 में यह देख चुके हैं कि कभी-कभी लोपिताल नियम का बार-बार प्रयोग करके अपेक्षित सीमा का मान ज्ञात किया जाता है। अब हम $\frac{\infty}{\infty}$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप के लिए एक अनुरूप परिणाम का कथन देंगे।

प्रमेय 7 : मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक मान फलन हैं कि

i) $\lim_{x\to a} f^{(k)}(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g^{(k)}(x)$,

जहां $0 \le k \le n-1$, n एक प्राकृतिक संख्या है, और a एक वास्तविक संख्या ∞ या $-\infty$ है, और

ii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ का अस्तित्व है और इसका मान अनंत भी हो सकता है। तब

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

हम आपको फिर से यहां यह याद दिला देना चाहते हैं कि पिछले भाग की तरह यहां भी प्रमेय 6 और प्रमेय 7

में उल्लेखित प्रतिबंध पर्याप्त प्रतिबंध हैं, पर आवश्यक प्रतिबंध नहीं हैं।

यहां एक अन्य बात की ओर भी आपको ध्यान देना चाहिए।

यदि $0 \le k < n$ के लिए $\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$ एक अनिर्धार्य रूप का हो और $x \to a$ होने पर $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ एक सीमा की ओर प्रवृत्त नहीं होता हो, तो इससे यह अर्थ नहीं निकाल लेना चाहिए कि $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व नहीं है। इससे केवल यह अर्थ निकलता है कि हम लोपिताल नियम लागू नहीं कर सकते। अतः हमें विचाराधीन सीमा के अस्तित्व की जांच करने के लिए कोई अन्य विधि अपनानी होगी।

अब हम इस तथ्य को और साथ ही कुछ अन्य तथ्यों को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने की कोशिश करेंगे। अतः इन उदाहरणों का अध्ययन आप अच्छी तरह से करें। इससे आपको संबंधित संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझने में काफ़ी सहायता मिलेगी।

उदाहरण 9 : आइए हम यह दिखाने का प्रयास करें कि

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, n \ge 1$

ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \; n > 0,$ और

iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x} = 1.$

आइए हम इन सीमाओं की एक-एक करके जांच करें।

i) मान लीजिए $f(x) = e^x, g(x) = x^n, n \ge 1.$ तब

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

यदि $n = 1$, तो $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$

अतः लोपिताल नियम के अनुसार

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

यदि $n > 1$, तो यह स्पष्ट है कि

$$\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g^{(k)}(x), 0 \le k < n,$$

और $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$

इस तरह $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, सभी $n \ge 1$ के लिए।

ii) मान लीजिए $f(x) = \ln x, g(x) = x^n, n > 0.$ चूँकि फलन $f(x)$ और $g(x)$ प्रमेय 6 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं, इसलिए

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

iii) मान लीजिए $f(x) = \ln \tan 2x, g(x) = \ln \tan x.$

तब $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 0^+} g(x)$

और $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4 \operatorname{cosec} 4x}{2 \operatorname{cosec} 2x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= 1.$$

इसलिए, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x} = 1.$

ऊपर के उदाहरण में हमने $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \tan 2x}{\ln \tan x}$ के बारे में चर्चा नहीं की है, क्योंकि x के लघु ऋणात्मक मानों के लिए tan2x और tanx ऋणात्मक हैं और इसलिए हम उनके लघुगुणक नहीं ले सकते। आप इस बात की ओर भी ध्यान दे सकते है कि इस उदाहरण में $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty = \lim_{x\to 0^+} g'(x)$,

परंतु $x \to 0^+$ होने पर $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

अनिर्धार्य रूप का नहीं है।

उदाहरण 10 : मान लीजिए हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$, जहां n एक पूर्णांक है, $n \geq 0$

ii) $\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = 0$, $m > 0$, $n > 0$ और m एक पूर्णांक है।

आइए पहले हम i) को हल करें।

i) $n = 0$ के लिए तो परिणाम स्पष्ट है। $n = 1$ के लिए परिणाम को उदाहरण 9 ii) में सिद्ध किया जा चुका है। अब मान लीजिए $n > 1$.

$f(x) = (\ln x)^n$ और $g(x) = x$ लीजिए। तब

फलन f(x) और g(x), $x > 0$ पर अवकलनीय हैं

और $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to \infty} g(x)$.

इसलिए $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$,

बशर्ते दक्षिण पक्ष की सीमा का अस्तित्व है। $(\ln x)^n$ और x के स्थान पर फलन $(\ln x)^{n-1}$ और x लेने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x},$$

बशर्ते दक्षिण पक्ष की सीमा का अस्तित्व है। ऊपर की प्रक्रिया को बार-बार करने पर

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{n!}{x} = 0$$ प्राप्त होता है।

ii) मान लीजिए $f(x) = (\ln x)^m$, $g(x) = x^n$. तब $x > 0$ के लिए f(x), g(x) अवकलनीय हैं, और

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to \infty} g(x)$.

इसलिए,

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = \lim_{x\to \infty} \frac{m(\ln x)^{m-1}}{nx^n},$$

बशर्ते दक्षिण पक्ष की सीमा का अस्तित्व हो। $(\ln x)^m$ और x^n के स्थान पर फलन $(\ln x)^{m-1}$ और x^n लेने पर हमें

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = \lim_{x\to \infty} \frac{m(m-1)(\ln x)^{m-2}}{n^2 x^n}$$

प्राप्त होता है, बशर्ते दक्षिण पक्ष की सीमा का अस्तित्व हो। इसी तरह ऊपर की प्रक्रिया बार-बार लागू करने पर हमें

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} = \lim_{x\to \infty} \frac{m!}{n^m} \cdot \frac{1}{x^n} = 0$$ प्राप्त होता है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि ऊपर के उदाहरण में हमने प्रमेय 6 को, न कि प्रमेय 7

को, बार-बार लागू किया है। वास्तव में प्रमेय 7 को लागू ही नहीं किया जा सकता, क्योंकि दोनों ही स्थितियों i) और ii) में $\lim_{x\to\infty} f'(x) \neq \infty$.

उदाहरण 11 : मान लीजिए $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0$ और $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b_0$, वास्तविक गुणांकों वाले दो बहुपद हैं और $a_m \neq 0, b_n \neq 0$. अब हम यह दिखाएंगे कि

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, \text{ यदि } m=n \\ 0, \text{ यदि } m<n \\ \pm\infty \text{ यदि } m>n, \text{जो कि } \frac{a_m}{b_n} \text{ के} \\ \text{धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार है।} \end{cases}$$

आइए हम वह स्थिति लें जबकि $m = n$.

यदि $0 \le k < m$, तो $\lim_{x\to\infty} P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty} Q^{(k)}(x)$ अनंत हैं, और

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m\, m!}{b_m\, m!} = \frac{a_m}{b_m}.$$

इसलिए,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)} = \frac{a_m}{b_m}, \text{ प्रमेय 7 के अनुसार}$$

अब, मान लीजिए $m < n$.

यहां $0 \le k < m$ के लिए $\lim_{x\to\infty} P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty} Q^{(k)}(x)$

अनंत हैं, और

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{m!\, a_m}{\sum_{r=m}^{n} b_r\, r(r-1)\ldots(r-m+1)x^{r-m}}$$

$$= 0$$

इस तरह,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{P^{(m)}(x)}{Q^{(m)}(x)} = 0.$$

अब, यदि $m > n$, तो यह स्पष्ट है कि

$0 \le k < n$ के लिए $\lim_{x\to\infty} P^{(k)}(x)$ और $\lim_{x\to\infty} Q^{(k)}(x)$

अनंत हैं, और

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P^{(n)}(x)}{Q^{(n)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{r=n}^{m} a_r\, r(r-1)\ldots(r-n+1)x^{r-n}}{n!\, b_n}$$

$$= \pm\infty, \text{ जबकि } \frac{a_m}{b_n} > 0 \text{ या } < 0.$$

इस तरह,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{P^{(n)}(x)}{Q^{(n)}(x)} = \infty \text{ या } -\infty, \text{ जबकि}$$

$$\frac{a_m}{b_n} > 0 \text{ या } < 0.$$

इस उदाहरण को इकाई 1 के उदाहरण 7 में उल्लेख की गई विधि का प्रयोग करके भी हल किया जा सकता है। इसे हम अगले उदाहरण में एक विशेष फलन लेकर समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 12 : हम यह दिखाएंगे कि $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+3x^2+5x+6}{5x^4+6x+7}$ का मान दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है।

लोपिताल नियम (उदाहरण 11 की तरह) लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+3x^2+5x+6}{5x^4+6x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2+6x+5}{20x^3+6}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{24x+6}{60x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{24}{120x}$$

$$= 0.$$

सीमाओं का बीजगणित लागू करके एक सरल विधि से हम ऊपर की सीमा का मान ज्ञात कर सकते हैं :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+3x^2+5x+6}{5x^4+6x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+3/x+5/x^2+6/x^3}{5x+6/x^2+7/x^3}$$

$$= 0.$$

क्योंकि $x \to \infty$ होने पर $1/x \to 0$.

अगले उदाहरण में हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जहां लोपिताल नियम लागू नहीं होता।

उदाहरण 13 : $\lim_{x\to\infty} \frac{2x\sin x}{1+x^2}$ पर गौर कीजिए। क्या हम इस सीमा का मान ज्ञात करने के लिए लोपिताल नियम लागू कर सकते हैं ?

यहां हम लोपिताल नियम लागू नहीं कर सकते, क्योंकि $\lim_{x\to\infty} 2x\sin x$ का अस्तित्व नहीं है। फिर भी

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\sin x}{1+x^2} = 0,$$

क्योंकि

$$\left|\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right| \le \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|, \text{ और}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

अब हम एक ऐसा उदाहरण लेंगे जहां लोपिताल नियम लागू तो होता है पर उससे कोई परिणाम नहीं प्राप्त होता । परंतु ऐसी स्थितियां बहुत कम होती हैं।

उदाहरण 14 : फलन $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ लीजिए।

आइए हम यह देखें कि $x \to \infty$ होने पर इसकी सीमा ज्ञात करने के लिए यदि लोपिताल नियम लागू किया जाए तो क्या होता है ?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

दक्षिण पक्ष तो $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है, पर इसका मान ज्ञात करने के लिए यदि हम लोपिताल नियम लागू करें, तो फिर हम वहीं आ जाते हैं, जहां से हमने शुरु किया है। अतः इस स्थिति में लोपिताल नियम लागू करना व्यर्थ ही होगा। पर हम निम्नलिखित विधि से सीमा का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1,$$

क्योंकि $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$

ऊपर दिए गए उदाहरणों को अच्छी तरह से समझ लेने के बाद आपको नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने में कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए।

E 9) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए।

क) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + a_0}{e^x}$ जहाँ a_i,

$1 \leq i \leq n$, वास्तविक संख्याएं हैं।

ख) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\tan x}{\ln \cos x}$

ग) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

घ) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^6 + \ln x}{2x^6 + 5x^4 + 1}$

ङ) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^8 + 5x^7 + 6x^3 + 1}{3x^8 + 5x^7 + 5x + 1}$

E 10) दिखाइए कि

$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = 1,$

और इसका मान ज्ञात करने में लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता।

E 11) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि प्रत्येक स्थिति में लोपिताल नियम लागू नहीं होता।

क) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \sin x^2}{x^2}$

ख) $\lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x}$

ग) $\lim_{x\to\infty} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x}$

घ) $\lim_{x\to\infty} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$

2.5 अन्य प्रकार के अनिर्धार्य रूप

अभी तक हमने अपनी चर्चा दो प्रकार के अनिर्धार्य रूपों, अर्थात् $\frac{0}{0}$ और $\frac{\infty}{\infty}$ तक ही सीमित रखी थी। इस भाग में हम एक - एक करके अन्य अनिर्धार्य रूपों को लेंगे और उनकी सीमाएं ज्ञात करने की विधियों पर विचार करेंगे। यदि कोई अनिर्धार्य रूप दिया हुआ हो तो हमारी सामान्य प्रक्रिया यह होती है कि पहले हम उसे $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में लाते हैं और तब लोपिताल नियम लागू करते हैं।

2.5.1 $\infty - \infty$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप

कुछ बीजीय अथवा त्रिकोणमितीय प्रक्रिया लागू करके हम इस प्रकार के अनिर्धार्य रूप को दो मानक रूपों $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ में से किसी एक रूप में रूपांतरित कर सकते हैं और तब इसकी सीमा का मान ज्ञात करने के लिए हम लोपिताल नियम लागू कर सकते हैं।

अब हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण की सहायता से प्रस्तुत करेंगे।

उदाहरण 15 : मान लीजिए हम निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात करना चाहते हैं :

i) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x})$

ii) $\lim_{x\to\pi/2^-} \left[\sec x - \frac{1}{(1 - \sin x)}\right]$

iii) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$

स्पष्ट है कि तीनों फलन $\infty-\infty$ के प्रकार के हैं।

i) हम यह लिख सकते हैं

$$\operatorname{cosec}x-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x},$$

जिससे कि दक्षिण पक्ष $x=0$ पर $\frac{0}{0}$ रूप का हो जाता है। अब उस पर लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है। इस तरह,

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec}x-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}, \text{ अवकलन से}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}(2\cos x-x\sin x)}=\frac{0}{2}=0.$$

ii) अब

$$\sec x-\frac{1}{1-\sin x}=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{1-\sin x}=\frac{1-\sin x-\cos x}{\cos x(1-\sin x)}$$

और $x\to\frac{\pi}{2}^-$ होने पर दक्षिण पक्ष $\frac{0}{0}$ रूप का हो जाता है, जिस पर लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है।

इस तरह,

$$\lim_{x\to\pi/2^-}\left(\sec x-\frac{1}{1-\sin x}\right)=\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{1-\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{-\cos x+\sin x}{-\sin x-\cos 2x}, \text{ अवकलन से}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2^-}(-\cos x+\sin x)\cdot\lim_{x\to\pi/2^-}\left(\frac{1}{-\sin x-\cos 2x}\right)$$

$$=1.\infty$$

$$=\infty$$

$\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{1}{-\sin x-\cos 2x}=\infty$, क्योंकि $x\to\pi/2^-$ होने पर $-\sin x-\cos 2x\to 0$

iii) स्पष्ट है कि

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

और दक्षिण पक्ष में सीमा का मान ज्ञात करने के लिए लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है।

इसलिए,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

अब हम एक अन्य प्रकार के अनिर्धार्य रूप पर विचार करेंगे।

2.5.2 $0.\infty$ के प्रकार का अनिर्धार्य रूप

मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो वास्तविक मान फलन हैं कि

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ और $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, जहां a एक वास्तविक संख्या, ∞ या $-\infty$ है। तब, जैसा कि हम भाग 2.2 में देख चुके हैं, $x \to a$ होने पर $f(x)\, g(x)$, $0.\infty$ प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का है। $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x)$ का मान ज्ञात करने के लिए इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}, \text{ या}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

इससे दक्षिण पक्ष $\frac{0}{0}$ रूप अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का होता है, जिस पर हम लोपिताल नियम लागू कर सकते हैं। $0.\infty$ रूप का रूपांतरण $\frac{0}{0}$ रूप में किया जाए या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में — यह बात विचाराधीन विशेष फलनों पर निर्भर करेगी। यदि आप नीचे दिए गए उदाहरण का अच्छी तरह से अध्ययन करें तो यह बात आपको समझ में आ जाएगी।

उदाहरण 16 : मान लीजिए हम i) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2} \ln x$ और ii) $\lim_{x\to \infty} x^p e^{-qx}$, जहां p, q धन पूर्णांक हैं, के मान ज्ञात करना चाहते हैं।

पहले हम i) को हल करेंगे। यहां यह ध्यान दीजिए कि $x = 1$ पर $\tan\frac{\pi x}{2} \ln x$, $0.\infty$ रूप का है। अब,

$$\tan\frac{\pi x}{2} \ln x = \frac{\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)} \ln x.$$

हम जानते हैं कि $\lim_{x\to 1} \sin\frac{\pi x}{2} = 1$. आइए हम $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}$ का मान ज्ञात करने का प्रयास करें।

अब $x = 1$ पर $\frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है।

अतः लोपिताल नियम के अनुसार

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-\sin(\pi x/2).\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

इस तरह,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \tan\frac{\pi x}{2} \ln x &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x/2) \ln x}{\cos(\pi x/2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \sin\frac{\pi x}{2} . \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)} \\ &= 1(-2/\pi) = \frac{-2}{\pi}\end{aligned}$$

ii) हम यह लिख सकते हैं कि

$$\lim_{x\to \infty} x^p e^{-qx} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^p}{e^{qx}}$$

अब, $\frac{x^p}{e^{qx}}$, $\frac{\infty}{\infty}$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है, जिस पर लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है। अतः

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^p}{e^{qx}} = \lim_{x\to \infty} \frac{p!}{q^p e^{qx}} = 0,$$

जिससे कि $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0.$

अब हम शेष प्रकार के अनिर्धार्य रूपों की चर्चा करके इस भाग को समाप्त कर रहे हैं।

2.5.3 $0^0, \infty^0, 1^\infty$ के प्रकार के अनिर्धार्य रूप

मान लीजिए $f(x)$ और $g(x)$, (संभवतः a को छोड़कर) a के प्रतिवेश V में परिभाषित दो वास्तविक मान फलन हैं, जहां a एक परिमित वास्तविक संख्या है। मान लीजिए V के सभी x के लिए $f(x) > 0$. तब

$\ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$ और

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$$
$$= e^{\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)}$$

क्योंकि चर घातांकी फलन e^x एक संतत फलन है।

इसलिए $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ का मान ज्ञात करने के लिए $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ का मान ज्ञात कर लेना ही काफी होगा। आप इस बात से तो सहमत होंगे कि यदि $x \to a$ होने पर $[f(x)]^{g(x)}$, $0^\infty, \infty^0, 1^\infty$ में से किसी भी एक प्रकार का हो, तो $g(x)\ln f(x)$, $0.\infty$ के प्रकार का होगा। और भाग 2.5.2 में हम आपको यह बता चुके हैं कि इस रूप के लिए सीमा का मान किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

इस प्रक्रिया को समझने के लिए यहां हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 17 : मान लीजिए हम निम्नलिखित का मान ज्ञात करना चाहते हैं।

i) $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} (\ln \frac{1}{x})^x$, और

iii) $\lim_{x\to \pi/2^-} (\cos x)^{\cos x}$

i) यह स्पष्ट है कि $x \to 1^+$ होने पर $x^{1/(x-1)}$, 1^∞ के प्रकार का एक अनिर्धार्य रूप है। मान लीजिए $y = x^{1/(x-1)}$, तब

$$\ln y = \frac{1}{x-1} \ln x.$$

अब $x \to 1^+$ होने पर $\frac{\ln x}{x-1}$, $\frac{0}{0}$ रूप का होता है और इस पर लोपिताल नियम लागू किया जा सकता है। इसलिए

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{1} = 1.$$

अतः

$$\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 1^+} \ln y} = e^1 = e.$$

ii) मान लीजिए $y = (\ln \frac{1}{x})^x$, जिससे कि $x \to 0^+$ होने पर y, ∞^0 रूप का होता है। तब

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln \frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} \quad \ldots(1)$$

परंतु $\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln (\ln \frac{1}{x})$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\ln \frac{1}{x})}{1/x}$$

अब, $x \to 0^+$ होने पर $\frac{\ln (\ln \frac{1}{x})}{1/x}$, $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का होता है।

इसलिए लोपिताल नियम के अनुसार

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\ln(1/x)} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-1/x^2} = 0.$$

इसे (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1 \text{ प्राप्त होता है।}$$

iii) मान लीजिए $y = (\cos x)^{\cos x}$, $0 < x < \pi/2$. तब

$$\ln y = \cos x \ln \cos x = \frac{\ln \cos x}{\sec x}$$

अतः लोपिताल नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\lim_{x\to \pi/2^-} \ln y = \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\ln \cos x}{\sec x} = \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{-\tan x}{\sec x \tan x} = 0.$$

इस तरह,

$$\lim_{x\to \pi/2^-} (\cos x)^{\cos x} = e^{\lim_{x\to \pi/2^-} \ln y} = e^0 = 1.$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को स्वयं हल कर सकते हैं।

E 12) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए। प्रत्येक स्थिति में पहले यह पता लगाना होगा कि फलन किस प्रकार के अनिर्धार्य रूप का है, और तब आपको निर्णय लेना होगा कि कौन-सी प्रक्रिया लागू की जाए।

क) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$

ख) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

ग) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

घ) $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\sin 2x}$

ङ) $\lim_{x\to \pi/2^-} (\tan x)^{\sin 2x}$

च) $\lim_{x\to \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

आइए अब हम इस इकाई में जो कुछ अध्ययन किया है, उसे संक्षिप्त रूप में दोहराएं।

2.6 सारांश

इस इकाई में हमने

1) किसी बिंदु पर फलन के अनिर्धार्य रूपों को परिभाषित किया है।

2) a पर $\frac{0}{0}$ रूप के लिए लोपिताल नियम का कथन दिया है और उसे सिद्ध किया है, जहां a एक वास्तविक संख्या है।

इस तरह, यदि $\frac{f(x)}{g(x)}$, a पर $\frac{0}{0}$ प्रकार के एक अनिर्धार्य रूप का हो, तो

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$ जबकि दक्षिण पक्ष की सीमा का अस्तित्व हो।

3) ∞ और $-\infty$ पर भी $\frac{0}{0}$ रूपों का लोपिताल नियम लागू किया।

4) $\frac{\infty}{\infty}$ रूपों के लिए लोपिताल नियम का केवल कथन दिया है, उसकी उपपत्ति नहीं दी है, और कुछ उदाहरणों की सहायता से इसे समझाने की कोशिश की है।

5) इस बात पर चर्चा की है कि किस प्रकार अन्य प्रकार के अनिर्धार्य रूपों, अर्थात् $\infty - \infty$ और 1^∞, 0^∞ और 0^0 को $\frac{0}{0}$ अथवा $\frac{\infty}{\infty}$ रूपों में रूपांतरित किया जा सकता है।

6) कुछ ऐसे उदाहरण दिए हैं जहां लोपिताल नियम सफलतापूर्वक लागू नहीं होता।

2.7 हल और उत्तर

E 1) क) $\frac{\infty}{\infty}$

ख) $\frac{0}{0}$

ग) $\infty - \infty$

घ) $\frac{0}{0}$

E 2) क) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{1-1}{1} = 0.$

ख) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 6x + 5}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x - 5} = \frac{4}{-4} = -1.$

E 3) क) लोपिताल नियम के अनुसार

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{2x\cos x^2}$$

अब, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2x \cos x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x^2} = 1.$

इसलिए, अपेक्षित सीमा 1 है।

ख) $\frac{7}{\pi}$

ग) $\left(\frac{m}{n}\right)\alpha^{m-n}$

घ) 1

ङ) -1

च) $\ln\frac{3}{2}$

छ) $\sqrt{2}$

ज) $\frac{1}{8}$

E 4) क) 1

ख) 2

ग) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1 - \cos x^2}{x^4} \frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x^2}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$

लोपिताल नियम को सीधे लागू करने पर भी यह परिणाम प्राप्त हो सकता है।

घ) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\tan^2 x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x \sec^2 x - 2x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^4 x - 2\sec^2 x \tan^2 x - 1}{6x^2} = 0$$

क्योंकि

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^4 x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^4 x \tan x}{12x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\sec^4 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3},$$

और $\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}$.

ङ) $-\frac{9}{2}$

च) $\frac{1}{4}$

छ) 2

E 5) $t = -1, \frac{8}{3}$

E 6) $t = -1, 0.$

E 7) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{5\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin\frac{1}{x}}{5\,\frac{\tan x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x}{x}}$$

$= \frac{0}{5}$, क्योंकि $\sin\frac{1}{x} \le 1$, और $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$

$= 0.$

लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{5\sec^2 x}$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ का अस्तित्व नहीं है जैसा कि हमने उदाहरण 3 में देखा है।

E 8) क) 1 ख) 1 ग) 1

घ) $\lim_{x\to\infty} 2x(\ln(x+1) - \ln x)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(\ln(x+1) - \ln x)}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

ङ) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^3}{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot 3\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3.$$

E 9) क) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{a_m x^m + \ldots + a_0}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{m!\, a_m}{e^x} = 0$

ख) ∞

ग) लोपिताल नियम के अनुसार

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}$$

जो फिर $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है। इसे $\frac{0}{0}$ रूप में परिवर्तित करके आसानी से हल किया जा सकता है।

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-6\cos x \sin x}{-6\cos 3x \sin 3x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin 2x}{\sin 6x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{2\cos 2x}{6\cos 6x} = \frac{1}{3}.$$

घ) $\frac{1}{2}$

ङ) $\frac{2}{3}$

E 10) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$

क्योंकि sinx और cosx परिबद्ध फलन हैं,

और $\frac{1}{x} \to 0$ जबकि $x \to \infty$.

लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\lim_{x \to \infty} (x+\sin x)$ तथा $\lim (x+\cos x)$ का अस्तित्व नहीं है।

E 11) क) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - \sin x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{1 - \frac{\sin x^2}{x^2}}{1}$

= 1 क्योंकि $\sin x^2$ परिबद्ध है, और

$\frac{1}{x^2} \to 0$ जबकि $x \to \infty$

यहां लोपिताल नियम लागू नहीं होता क्योंकि

$\lim_{x \to \infty} (x^2 - \sin^2 x)$

का अस्तित्व नहीं है।

ख) 1. क) में दिए गए कारणों से यहां भी लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता।

ग) 0. लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\frac{f(x)}{g(x)}$ एक अनिर्धार्य रूप का नहीं होता, जबकि $x \to \infty$.

घ) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right) = 0$

लोपिताल नियम लागू नहीं किया जा सकता क्योंकि $\lim\limits_{x\to\infty} (x\sin x+\cos x)$ का अस्तित्व नहीं है।

E 12) क) 1^∞. यदि $y = (1+x)^{1/x}$, तब $\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{0}{0}$ रूप का है।

$$\therefore \lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

$$\lim_{x\to0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to0^+} y = e^1 = e.$$

ख) 1^∞. यदि $y = (\cos x)^{1/x^2}$, तो $\ln y = \frac{\ln \cos x}{x^2}$, जो $\frac{0}{0}$ रूप का है जबकि $x\to0$.

$$\therefore \lim_{x\to0} \ln y = \lim_{x\to0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \lim_{x\to0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

ग) 0^0. यदि $y = x^x$, तब $\ln y = x\ln x$, जो कि $0(-\infty)$ रूप का है जबकि $x\to0^+$.

$$\therefore \lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to0^+} (-x) = 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to0^+} x^x = e^0 = 1.$$

घ) 0^0. $\lim\limits_{x\to0^+} (\tan x)^{\sin 2x} = 1$.

ङ) ∞^0. यदि $y = (\tan x)^{\sin 2x}$, तो

$\ln y = \sin 2x \ln \tan x$.

$$\therefore \lim_{x\to\pi/2^-} \ln y = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\ln \tan x}{\operatorname{cosec} 2x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-2\operatorname{cosec}2x \cot 2x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\frac{2}{\sin 2x}}{\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{-\sin 2x}{\cos 2x} = 0.$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi/2^-} (\tan x)^{\sin 2x} = e^0 = 1.$$

च) $\infty.0$. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1.$$

इकाई 3 अनेक चरों वाले फलन

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

कलन के प्रथम पाठ्यक्रम में और इस खंड की प्रथम दो इकाइयों में हम वास्तविक चर के वास्तविक मान फलनों की सीमा, सांतत्य और अवकलनीयता की संकल्पनाओं का अध्ययन कर चुके हैं। खंड 2 में हम अनेक चरों वाले फलनों के लिए इन्हीं संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे। अनेक चरों वाले फलनों का मतलब है वे फलन जिनका प्रांत $\mathbf{R}$ की n प्रतियों के कार्तीय गुणनफल $\mathbf{R}^n$ का एक उपसमुच्चय है। इस प्रकार के फलन विभिन्न संदर्भों में आते रहते हैं। उदाहरण के लिए, बीमा-प्रीमियम, बीमा की राशि, बीमा करवाने वाले व्यक्ति की आयु और उसकी आयु संभाविता (life expectancy) जैसे अनेक प्राचलों का एक फलन है। इसी प्रकार किसी वस्तु का मूल्य, उत्पादन-लागत, लाभ और राज्य करों जैसे अनेक घटकों पर निर्भर करता है।

आप जानते हैं कि एक चर वाले फलनों की सीमा और सांतत्य को समझने के लिए $\mathbf{R}$ की बीजीय संरचना की जानकारी होना और $\mathbf{R}$ के दो बिन्दुओं x और y के बीच की दूरी $|x-y|$ के गुणधर्मों से परिचित होना आवश्यक होता है। यही बात अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू होती है। अतः इस इकाई में पहले हम $\mathbf{R}^n$ को परिभाषित करेंगे और उसकी बीजीय संरचना का वर्णन करेंगे। इसके बाद हम $\mathbf{R}^n$ के दो बिन्दुओं के बीच की दूरी की संकल्पना से आपको परिचित कराएंगे और उसके प्रारंभिक गुणधर्म निगमित करेंगे। इस इकाई के अंत में हम अनेक चरों वाले फलन को परिभाषित करेंगे और इन फलनों से संबंधित विभिन्न प्रकार के उदाहरण देंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप :

- विमा n वाली वास्तविक यूक्लिडीय समष्टि (real Euclidean space of dimension n) को परिभाषित कर सकेंगे,
- अनेक चरों वाले वास्तविक मान और सदिश मान फलनों के उदाहरण दे सकेंगे।

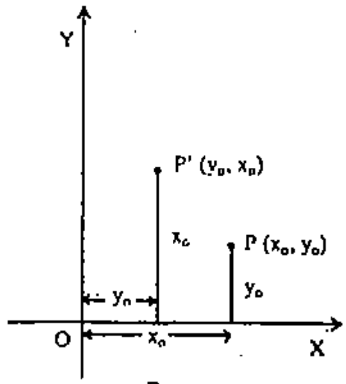
3.2 समष्टि $\mathbf{R}^n$

प्रस्तावना में हम यह बता चुके हैं कि इस इकाई में हम उन फलनों का अध्ययन करेंगे जिनका प्रांत (domain) $\mathbf{R}^n$ का एक उपसमुच्चय है। अब प्रश्न उठता है कि $\mathbf{R}^n$ क्या है ? इस भाग में हम $\mathbf{R}^n$ परिभाषित करेंगे और उसकी बीजीय संरचना का अध्ययन करेंगे। हम $\mathbf{R}^n$ में दूरी फलन का भी अध्ययन करेंगे। पर, आइए पहले हम $\mathbf{R}^n$ को परिभाषित करें। इसके लिए हमें समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल (Cartesian product) को परिभाषित करना होगा।

3.2.1 कार्तीय गुणनफल

मान लीजिए X और Y दो अरिक्त समुच्चय हैं। (x,y) से, जहाँ $x \in X$ और $y \in Y$, हम उस क्रमित युग्म (ordered pair) को परिभाषित करते हैं जिसका पहला सदस्य अथवा निर्देशांक x है और दूसरा सदस्य अथवा निर्देशांक y है। दो क्रमित युग्म (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बराबर होते हैं, अर्थात् $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. आप इस संकल्पना से परिचित तो हैं ही। आपको याद होगा कि

R_∞ और R^n



चित्र 1

शब्द कार्तीय गुणनफल का नामकरण फ्रांसिसी गणितज्ञ रेने देकार्त (1596-1650) के नाम पर किया गया है, जिसने पहले पहल समतल के बिन्दुओं को क्रमित संख्या युग्मों से निरूपित किया।

निर्देशांक ज्यामिति में कार्तीय समतल में स्थित बिन्दु P को (x_0, y_0) से निरूपित करते हैं, जहाँ x_0, P का भुज (abscissa) था और y_0 कोटि (ordinate) (देखिए चित्र 1)। स्पष्ट है कि बिन्दु (x_0, y_0), बिन्दु (y_0, x_0) से भिन्न होता है, यदि $x_0 \neq y_0$. इस तरह आप यह जानते हैं कि समतल में स्थित एक बिन्दु को क्रमित युग्म (x,y) से निरूपित किया जाता है, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं।

ध्यान दीजिए कि क्रमित युग्म (x, y), समुच्चय {x, y} से भिन्न होता है, क्योंकि $(x, y) \neq (y, x)$ यदि $x \neq y$, जबकि समुच्चय {x, y} और {y, x} बराबर होते हैं।

सभी क्रमित युग्मों (x, y) के समुच्चय को, जहाँ $x \in X$, $y \in Y$, समुच्चय X और Y का **कार्तीय गुणनफल** कहा जाता है। इसे हम $X \times Y$ से प्रकट करते हैं।

इस तरह $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

उदाहरण के लिए, यदि $X = \{0, 1, 2\}$ और $Y = \{0, 1\}$, तो

$X \times Y = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0) (1, 1) (2, 0), (2, 1)\}$.

यदि

$X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$, तब

$X \times Y = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

कार्तीय समतल है

अब हम इस संकल्पना का विस्तार करके n समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल की परिभाषा देंगे।

मान लीजिए $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ अरिक्त समुच्चय हैं। हम $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ से, जहाँ $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq n$, एक n-यक (n-tuple) को प्रकट करते हैं। दो n-यक $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ बराबर होते हैं, अर्थात्

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

यदि और केवल यदि सभी i, $1 \leq i \leq n$ के लिए $x_i = y_i$. सभी n-यकों $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, जहाँ $x_i \in X_i$ के समुच्चय को n समुच्चयों $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$, का कार्तीय गुणनफल कहते हैं, और इसे $X_1 \times X_2 \times \ldots\ldots \times X_n$ से प्रकट किया जाता है।

इस तरह, $X_1 \times X_2 \times \ldots\ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}$

अब यदि $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, $X_3 = \{0\}$, तो $X_1 \times X_2 \times X_3$ क्या होगा ? आप आसानी से यह देख सकते हैं कि

$X_1 \times X_2 \times X_3 = \{(1,1,0), (1,2,0), (2,1,0), (2,2,0)\}$

यदि सभी i के लिए, जहाँ $1 \leq i \leq n$, $X_i = \mathbf{R}$, तो

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots\ldots \times \mathbf{R} \text{ (n बार)} = \mathbf{R}^n$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

को $\mathbf{R}$ की n प्रतियों का कार्तीय गुणनफल कहा जाता है। n = 1 पर $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$, n = 2 पर $\mathbf{R}^2$ कार्तीय समतल है, और n = 3 पर $\mathbf{R}^3$, 3 – विम आकाश में सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है।

मान लीजिए V कार्तीय समतल में सभी सदिश $\overrightarrow{OP}$ का समुच्चय है, जहाँ O मूल बिन्दु है और P समतल में निर्देशांक (x, y) वाला एक बिन्दु है। तब $\overrightarrow{OP} \to (x, y)$ से V और $\mathbf{R}^2$ के बीच एक एकैकी संगति स्थापित होती है। इसी प्रकार सदिशों $\overrightarrow{OP}$, जहाँ O मूल बिन्दु है और P आकाश में कोई बिन्दु (x, y, z) है, और (x, y, z) से प्रकट किए गए बिन्दुओं के बीच एकैकी संगति होती है। इन्हीं संगतियों के कारण $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के अवयवों को सदिश कहा जाता है। अब हम $\mathbf{R}^n$ के अवयवों को सदिश और $\mathbf{R}$ के अवयवों को अदिश मानेंगे।

यदि $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, $\mathbf{R}^n$ का कोई बिन्दु हो, तो x_i को x का **i-वाँ निर्देशांक** अथवा **घटक** कहा जाता है।

समुच्चय $\mathbf{R}^n$ को परिभाषित कर लेने के बाद आइए अब हम देखें कि क्या हम $\mathbf{R}^n$ के अवयवों पर किसी बीजीय संक्रिया को परिभाषित कर सकते हैं।

3.2.2 $\mathbf{R}^n$ की बीजीय संरचना

पिछले उपभाग में हमने यह देखा कि किसी पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए

$$\mathbf{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

और दो सदिश $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ तथा $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ बराबर होते हैं, यदि और केवल यदि $x_i = y_i$, $1 \leq i \leq n$. अब हम $\mathbf{R}^n$ पर एक बीजीय संरचना को परिभाषित करेंगे :

शून्य सदिश (zero vector) : उस सदिश को, जिसके सभी निर्देशांक 0 हों, हम 0 से प्रकट करेंगे और यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि 0, $\mathbf{R}^n$ के एक अवयव को निरूपित करता है या वास्तविक संख्या 0 को।

दो सदिशों का गुणनफल : मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$, $\mathbf{R}^n$ के दो अवयव हैं। तब दो सदिशों x और y का योगफल $x + y$ वह सदिश होता है जिसका i-वाँ निर्देशांक $x_i + y_i$ है, $1 \leq i \leq n$. अर्थात्

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n)$$

वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में जोड़ की संक्रिया के गुणधर्मों को लागू करके हम निम्न गुणधर्म आसानी से सिद्ध कर सकते हैं।

A1 यदि $x, y \in \mathbf{R}^n$, तो $x + y \in \mathbf{R}^n$.

A2 $x + 0 = 0 + x = x$, $\mathbf{R}^n$ में किसी सदिश x के लिए। (यहाँ 0 शून्य सदिश को प्रकट करता है।)

A3 यदि $\mathbf{R}^n$ में एक सदिश x दिया हुआ हो, तो $\mathbf{R}^n$ में एक ऐसे अद्वितीय सदिश y का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$x + y = y + x = 0.$$

A4 $\mathbf{R}^n$ में किन्हीं तीन सदिशों x, y, z के लिए

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A5 $\mathbf{R}^n$ में किन्हीं दो सदिशों x, y के लिए

$$x + y = y + x.$$

यदि $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, तो स्पष्ट है कि ऊपर A3 में उल्लेख किया गया अद्वितीय सदिश y, $(-x_1, -x_2, \ldots\ldots, -x_n)$ के बराबर है। हम इसे $-x$ से प्रकट करेंगे। इसे x का **योज्य प्रतिलोम** या **ऋणात्मक** कहते हैं। यदि x और y, $\mathbf{R}^n$ में दो सदिश हों, तो $x - y$, x और y का अंतर, सदिश $x + (-y)$ को प्रकट करता है, जहाँ $-y$, y का ऋणात्मक है।

अदिश गुणन (scalar multiplication) : मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ एक सदिश है और a, $\mathbf{R}$ का एक अवयव है। हम नए सदिश ax को $ax = (ax_1, ax_2, \ldots\ldots, ax_n)$ से परिभाषित करते हैं।

अब हम यह कहते हैं कि सदिश x को अदिश a से गुणा करने पर सदिश ax प्राप्त हुआ है। इस विशेष संक्रिया को $\mathbf{R}^n$ में **अदिश गुणन** कहा जाता है। स्पष्ट है कि $\mathbf{R}^n$ में प्रत्येक x के लिए $0.x = 0$. ध्यान दीजिए कि बाएँ पक्ष का 0 वास्तविक संख्या 0 को प्रकट करता है, जबकि दाएँ पक्ष का 0, $\mathbf{R}^n$ में शून्य सदिश को प्रकट करता है।

अदिश गुणन के निम्नलिखित गुणधर्मों को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है। इन्हें हम आपको प्रश्न के रूप में हल करने के लिए छोड़ रहे हैं। (देखिए E1)।

S1 $a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n$ के लिए $ax \in \mathbf{R}^n$

S2 प्रत्येक $x, y \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}$ के लिए

$$a(x+y) = ax+ay$$

S3 $x \in \mathbf{R}^n$, $a, b \in \mathbf{R}$ के लिए

$a(bx) = (ab)x.$

S4 $x \in \mathbf{R}^n, a, b \in \mathbf{R}$ के लिए $(a + b)x = ax + bx$.

S5 प्रत्येक $x \in \mathbf{R}^n$ के लिए $ax = 0$ यदि और केवल यदि $a = 0$.

E1) वास्तविक संख्याओं के संगत गुणधर्मों की सहायता से S1, S2, S3, S4 और S5 सिद्ध कीजिए।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $\mathbf{R}^n$ में सदिशों का जोड़ और अदिश गुणन करने की संक्रियाएँ समतल अथवा आकाश में (जब $n = 2$ या 3) सदिशों के जोड़ और अदिश गुणन करने की सामान्य संक्रियाएं ही होती हैं।

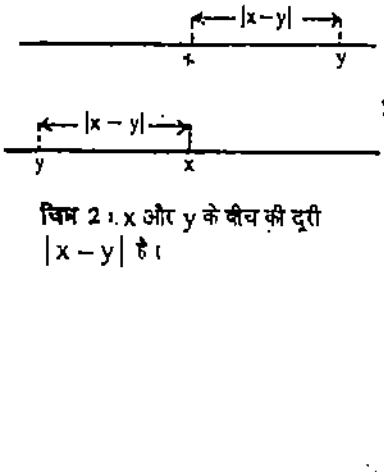
आप इस बात को अवश्य जानते होंगे कि सदिशों का गुणा अथवा भाग, समतल या आकाश में परिभाषित नहीं होता। इसी प्रकार $n \geq 2$ के लिए $\mathbf{R}^n$ में ये संक्रियाएँ परिभाषित नहीं होतीं।

आप में से जिन्होंने रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम का अध्ययन किया है, वे इस बात से अवश्य परिचित होंगे कि ऊपर परिभाषित सदिशों के जोड़ की और अदिश गुणन की संक्रियाओं के सापेक्ष $\mathbf{R}$ पर $\mathbf{R}^n$ एक सदिश समष्टि (vector space) है।

$\mathbf{R}^n$ की बीजीय संरचना के बारे में चर्चा कर लेने के बाद आइए अब हम $\mathbf{R}^n$ में दूरी फलन (distance function) परिभाषित करें।

3.2.3 $\mathbf{R}^n$ में दूरी

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं x और y के लिए निरपेक्ष मान $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2}$, वास्तविक संख्या रेखा पर x और y से निरूपित बिन्दुओं के बीच की दूरी को प्रकट करता है।



चित्र 2 : x और y के बीच की दूरी $|x - y|$ है।

देखिए चित्र 2. इसी प्रकार, निर्देशांक ज्यामिति के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि व्यंजक $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ कार्तीय समतल में निर्देशांकों (x_1, y_1) और (x_2, y_2) वाले दो विन्दुओं के बीच की दूरी को निरूपित करता है। हम $\mathbf{R}^n$ के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि $n = 1$ या $n = 2$ लेने पर हमारा दूरी सूत्र ऊपर उल्लेख किए गए दो व्यंजकों के रूप में बदल जाता है।

परिभाषा 1 : मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$, $\mathbf{R}^n$ के दो बिन्दु हैं। हम y से x की दूरी $|x - y|$ को $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

से परिभाषित करते हैं। आप यह देख सकते हैं कि $n = 1$ पर

$|x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$, $x - y$ का निरपेक्ष मान है, जो कि वास्तविक रेखा पर के विन्दुओं x और y के बीच की दूरी है।

$n = 2$ पर $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, जो कि कार्तीय समतल में निर्देशांकों (x_1, x_2) और (y_1, y_2) वाले बिन्दुओं के बीच की दूरी है।

आप में से जिन्होंने त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति का अध्ययन किया है वे इस बात से अवश्य परिचित होंगे कि $n = 3$ पर

$|x - y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$,

आकाश में निर्देशांकों (x_1, x_2, x_3) और (y_1, y_2, y_3) वाले दो विन्दुओं के बीच की दूरी है।

$\mathbf{R}^n$ के दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के निम्नलिखित गुणधर्म होते हैं, जिन्हें दूरी की परिभाषा को लागू करके आसानी से निगमित किया जा सकता है।

मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$, $\mathbf{R}^n$ के कोई दो बिन्दु हैं। तब

D1 $|x-y| = 0$ यदि और केवल यदि $x = y$

D2 $|x-y| = |y-x|$

आप जानते हैं कि कार्तीय समतल अथवा आकाश में एक त्रिभुज की दो भुजाओं का जोड़ तीसरी भुजा से अधिक होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि x, y और z, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ या $\mathbf{R}^3$ के तीन बिन्दु हों तो $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$ (त्रिभुज असमिका)। यही बात $n>3$ के लिए $\mathbf{R}^n$ पर भी लागू होती है। अर्थात् $\mathbf{R}^n$ के किन्हीं तीन बिन्दुओं x, y, z के लिए

$$|x-y| \le |x-z| + |z-y|$$

परन्तु इसे सिद्ध करने के लिए हमें कॉशी असमिका की सहायता लेनी होती है, जिसका अब हम कथन देंगे।

प्रमेय 1 (कॉशी असमिका) : यदि $a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n, b_1, b_2, \dots\dots\dots, b_n$, 2n वास्तविक संख्याएं हों तो

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

उपपत्ति : यदि सभी संख्याएं a_i, शून्य के बराबर हों, तब तो सिद्ध करने के लिए कुछ रह ही नहीं जाता। अतः यह मान लीजिए कि कम से कम एक a_j शून्येतर है। निम्नलिखित व्यंजक लीजिए :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = ax^2 + 2bx + c,$$

ज़हाँ

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\ , \quad c = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

स्पष्ट है कि सभी वास्तविक x के लिए $ax^2 + 2bx + c \ge 0$ और सर्वसमिका

$$a(ax^2 + 2bx + c) = (ax + b)^2 + ac - b^2$$

से यह पता चलता है कि $ac - b^2 \ge 0$, क्योंकि $a > 0$. इस तरह, $b^2 < ac$, या

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ . \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

अर्थात्

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

इस तरह उपपत्ति पूरी हो जाती है।

$\mathbf{R}^n$ के किसी बिन्दु $x = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ के लिए

$$|x| = |x-0| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

को x का **मानक** (norm) या **मापांक** (modulus) कहा जाता है। आपको याद होगा कि इन शब्दों का प्रयोग हमने तब भी किया था, जबकि x एक वास्तविक संख्या थी या x, समतल या आकाश में एक सदिश था।

आइए अब हम त्रिभुज असमिका पर विचार करें।

प्रमेय 2 (त्रिभुज असमिका) : $\mathbf{R}^n$ के किन्हीं तीन बिन्दुओं x, y, z के लिए

$$|x-y| \le |x-z| + |z-y|$$

उपपत्ति : आइए पहले हम यह सिद्ध करें कि $\mathbf{R}^n$ के किन्हीं दो बिन्दुओं x, y के लिए

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. तब कॉशी असमिका के अनुसार

$$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

अतः $|x+y|^2 \le |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2$

या $|x+y|^2 \le (|x| + |y|)^2$

या $|x+y| \le |x| + |y|$

अब, यदि x, y, z, $\mathbf{R}^n$ के कोई तीन बिन्दु हों तो
$|x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |y-z|$

इस तरह उपपत्ति पूरी हो जाती है।

उपर परिभाषित किए गए $\mathbf{R}^n$ के दो विन्दुओं के बीच की दूरी के साथ समुच्चय $\mathbf{R}^n$ को विमा n वाली **यूक्लिडीय समष्टि** कहा जाता है।

यहाँ आपको हम इस बात से भी परिचित करा देना चाहते हैं कि $\mathbf{R}^n$ में दूरी परिभाषित करने का केवल यही एक तरीका नहीं है। वास्तव में,

$|x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ के अलावा ऐसी अनेक विधियां हैं जिनसे हम $\mathbf{R}^n$ के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी परिभाषित कर सकते हैं। इनमें से कई विधियां भी हैं, जिनसे परिभाषित दूरी त्रिभुज असमिका को भी संतुष्ट करती है। परन्तु ध्यान रहे कि उपर परिभाषित की गई दूरी से भिन्न दूरी फलन के साथ लिए गए $\mathbf{R}^n$ को यूक्लिडीय समष्टि नहीं कहा जाता। यहां हम केवल यूक्लिडीय समष्टियों पर ही विचार करेंगे।

आप जानते हैं कि $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ के प्रकार के समुच्चयों को, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएं ∞ या $-\infty$ हैं, $\mathbf{R}$ में विवृत अंतराल (open interval) कहा जाता है। अब हम इसी प्रकार यूक्लिडीय समष्टि $\mathbf{R}^n$ में विवृत अंतराल परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $x_0 \in \mathbf{R}^n$ और $r > 0$ एक वास्तविक संख्या है। तब समुच्चय

$S(x_0, r) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, |x - x_0| < r\}$ को **विवृत गोला** (open sphere) **विवृत गेंद** या **विवृत चक्रिका** (open disc) कहा जाता है, जिसका केन्द्र x_0 है और त्रिज्या r है।

टिप्पणी 1 : i) यदि n = 1, तो $S(x_0, r)$ विवृत अंतराल $]x_0 - r, x_0 + r[$ होता है। देखिए चित्र 3 (क)।

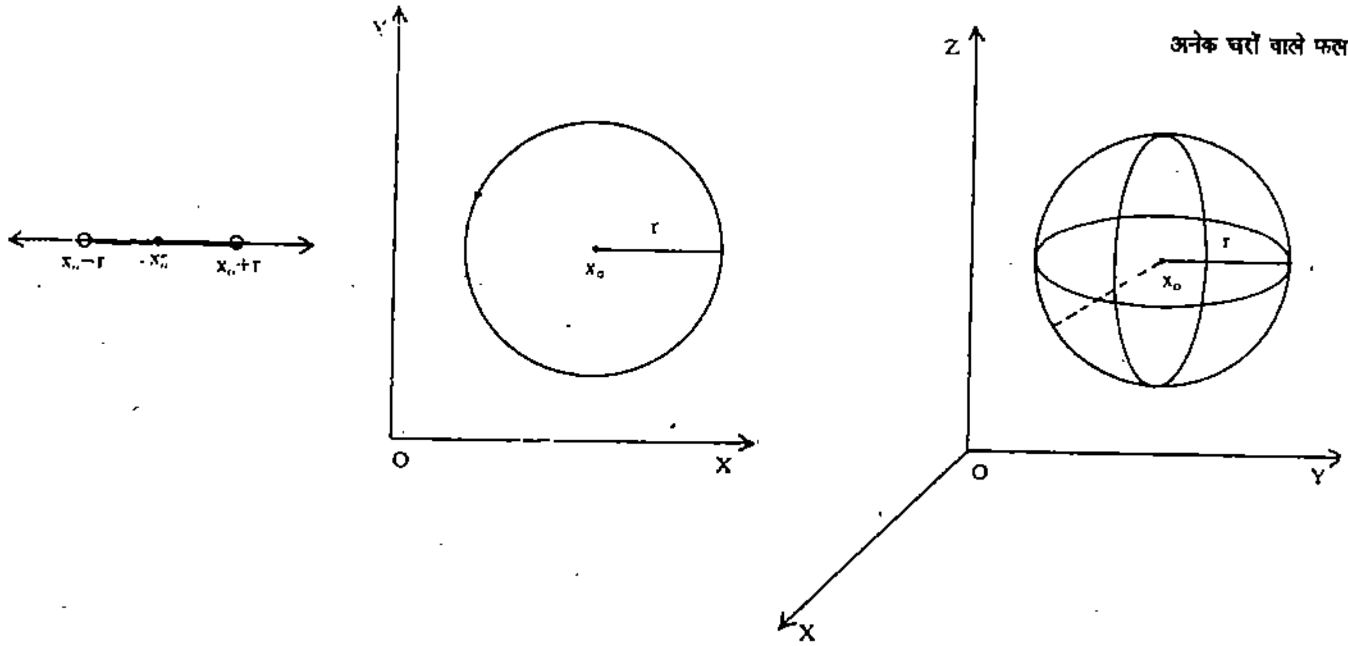
ii) यदि n = 2 और x_0 एक बिन्दु हो जिसके निर्देशांक (a, b) हों तो $S(x_0, r)$ समतल में उस चक्रिका का अभ्यंतर (interior) होता है जिसका केन्द्र (a, b) है और जिसकी त्रिज्या r है (देखिए चित्र 3 (ख))। अर्थात्,

$$S(x_0, r) = \left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\right\}$$

iii) यदि n = 3 और x_0 आकाश में एक बिन्दु है, जिसके निर्देशांक (a,b,c) हैं तो

$$S(x_0, r) = \left\{(x,y,z) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\right\}$$

उस गोले का अभ्यंतर है जिसका केंद्र (a, b, c) है और जिसकी त्रिज्या r है। चित्र 3 (ग) देखिए।



चित्र 3 : (क) $\mathbf{R}$ में $S(x_0, r)$; (ख) $\mathbf{R}^2$ में $S(x_0,r)$; (ग) $\mathbf{R}^3$ में $S(x_0,r)$

टिप्पणी 2 : वास्तविक रेखा पर के प्रतिवेशों के अनुरूप हम विवृत गोले $S(x_0,r)$ को $\mathbf{R}^n$ में बिन्दु x_0 का r–प्रतिवेश कहते हैं। और x_0 के **निष्कासित प्रतिवेश** से हमारा तात्पर्य बिन्दु समुच्चय

$\{x \mid x \in \mathbf{R}^n, 0 < |x - x_0| < r\} = S(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ से है।

कुछ उदाहरण और प्रश्न देकर हम इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं। उदाहरणों को अच्छी तरह से देखिए और सभी प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए। $\mathbf{R}^n$की संरचना की पूरी जानकारी हो जाने पर आपको अनेक चरों वाले फलनों के अध्ययन में काफ़ी सहायता मिल सकती है।

उदाहरण 1 : मान लीजिए $e_1 = (1, 0, 0)$ और $e_2 = (0, 1, 0)$ और $e_3 = (0, 0, 1)$. तब हम यह दिखा सकते हैं कि

$\mathbf{R}^3$ के $x = (x_1, x_2, x_3)$ को

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ के रूप में अद्वितीयतः लिखा जा सकता है।

अदिश गुणन की परिभाषा के अनुसार,

$x_1 e_1 = (x_1, 0, 0)$

$x_2 e_2 = (0, x_2, 0)$

$x_3 e_3 = (0, 0, x_3)$.

अतः $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = (x_1, x_2, x_3) = x$.

आइए अब हम यह सिद्ध करें कि ये x_1, x_2, x_3 अद्वितीय हैं।

इस तरह, यदि $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, जहाँ a_1, a_2, a_3 वास्तविक हैं,

$x = (a_1, a_2, a_3) = (x_1, x_2, x_3)$. अतः $a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3$.

सादिशों e_1, e_2, e_3 को निर्देश-अक्ष के अनुदिश **एकक सदिश** (unit vector) कहते हैं।

यदि आपने "रैखिक बीजगणित" का पाठ्यक्रम पढ़ा हो, तो आपको याद होगा कि $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbf{R}^3$ का एक आधार है।

उदाहरण 2 : मान लीजिए $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$, जहां e_1, e_2, e_3 उदाहरण 1 में परिभाषित किए गए एकक सदिश हैं। आइए अब हम $|x+2y|$ तथा $|x+y|$ ज्ञात करें।

अब, $x + 2y = e_1 + e_2 - 2e_3 + 4e_1 - 2e_2 + 2e_3$

$= 5e_1 - e_2$

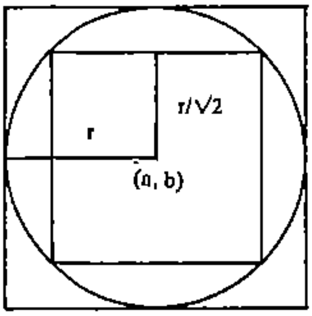
$= (5, -1, 0)$

अतः $|x + 2y| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{26}$

इसी प्रकार,

$x + y = 3e_1 - e_3 = (3, 0, -1)$, और $|x + y| = \sqrt{10}$

उदाहरण 3 : $\mathbf{R}^2$ में केन्द्र (a, b) और त्रिज्या r वाली विवृत चक्रिका, विवृत वर्ग



चित्र 4

$$S_1 = \left\{(x,y) \;\middle|\; |x - a| < r, \; |y - b| < r \right\}$$

में स्थित है और विवृत वर्ग

$$S_2 = \left\{(x,y) \;\middle|\; |x - a| < \frac{r}{\sqrt{2}}, \; |y - b| < \frac{r}{\sqrt{2}}\right\}$$

को आविष्ट करती है। देखिए चित्र 4.

आइए अब हम इसे सिद्ध करने का प्रयास करें।

यदि $(x, y) \in S$ तो हम जानते हैं कि,

$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r$

अतः $|x - a| < r$, और $|y - b| < r$.

अर्थात् $(x,y) \in S_1$. इससे यह अर्थ निकलता है कि $S \subset S_1$.

अब यदि $(x, y) \in S_2$, तो $|x - a| < \frac{r}{\sqrt{2}}$, $|y - b| < \frac{r}{\sqrt{2}}$

अतः $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} = r^2$.

अर्थात् $(x, y) \in S$. इस तरह $S_2 \subset S$.

अब देखिए कि आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं या नहीं।

E2) मान लीजिए $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots\ldots, \delta_{in})$,

$1 \le i \le n$, जहां δ_{ij} क्रॉनेकर प्रतीक हैं, ($\delta_{ij} = 0$ यदि $i \ne j$ और $\delta_{ii} = 1$) $\mathbf{R}^n$ में n सदिश हैं। सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R}^n$ में $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ को $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

के रूप में अद्वितीयतः लिखा जा सकता है।

$e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ को निर्देशांक अक्ष के अनुदिश एकक सदिश कहा जाता है।

E3) मान लीजिए $e = (1, 0)$, $f = (1, 1)$ $\mathbf{R}^2$ में है।

$|x - y|$, $|2x - y|$, $|x|$ ज्ञात कीजिए जहाँ $x = e + f$, $y = 2e + 3f$.

E4) दिखाइए कि $\mathbf{R}^3$ में केन्द्र (a, b, c) और त्रिज्या r वाला विवृत गोला S, विवृत घन (open cube)

$$P_1 = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; |x - a| < r, \; |y - b| < r, \; |z - c| < r \right\}$$

में आविष्ट है और विवृत घन

$$P_2 = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; |x - a| < \frac{r}{\sqrt{3}}, \; |y - b| < \frac{r}{\sqrt{3}}, \; |z - c| < \frac{r}{\sqrt{3}}\right\}$$

को आविष्ट करता है।

अब हम $\mathbf{R}^n$ के उपसमुच्चयों पर परिभाषित फलनों पर विचार करेंगे।

3.3 अनेक चरों वाले फलन

आप फलन की परिभाषा से तो पहले से ही परिचित हैं (देखिए कलन पाठ्यक्रम की इकाई 1 की परिभाषा 4)। यदि X और Y दो अरिक्त समुच्चय हों तो X से Y तक का फलन एक नियम अथवा संगति होता है जो X के

प्रत्येक सदस्य का संबंध Y के एक अद्वितीय सदस्य के साथ जोड़ता है। यहां हम एक विशेष प्रकार के फलन लेंगे जिनके लिए X, $\mathbf{R}^n$ का एक उपसमुच्चय है और Y, $\mathbf{R}^m$ का एक उपसमुच्चय है और m, $n \geq 1$. यदि $m = 1$, तो ऐसे फलनों को n चरों वाले **वास्तविक मान** (real–valued) फलन कहा जाता है। और यदि $m > 1$, तो इन फलनों को n चरों वाले **सदिश मान** (vector–valued) फलन कहा जाता है। इनकी परिशुद्ध परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा 3 : i) मान लीजिए D, विमा n ($n \geq 1$) वाली यूक्लिडीय समष्टि $\mathbf{R}^n$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। D से $\mathbf{R}$ तक के फलन को **n चरों वाला वास्तविक मान फलन** कहा जाता है, जिसका प्रांत D है।

ii) मान लीजिए D, $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$) का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। D से $\mathbf{R}^m$ ($m > 1$) तक के फलन को **n चरों वाला सदिश मान फलन** कहा जाता है, जिसका प्रांत D है।

n चरों वाले फलन को **अनेक चरों वाला फलन** भी कहा जाता है।

यदि $f : D \to \mathbf{R}^m$, जहां $D \subset \mathbf{R}^n$, तब हम बिन्दु $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in D$ पर के फलन के मान को $f(x)$ या $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ से प्रकट करते हैं।

यहां हम अनेक चरों वाले फलनों के कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

i) $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ के लिए $f(x, y) = \sin x + \cos y$ परिभाषित कीजिए।

तब, $f(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन होता है, जिसका प्रांत $\mathbf{R}^2$ है।

ii) मान लीजिए $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. $(x, y) \in D$ के लिए $f(x, y) = \sin^{-1}x \cos^{-1}y$ परिभाषित कीजिए। तब $f(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन होता है, जिसका प्रांत D है।

iii) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ के लिए

$f(x, y, z) = |x| + 2\,|y| + |z|^2$ लीजिए।

तब $f(x, y, z)$, 3 चरों वाला एक वास्तविक मान फलन होता है, जिसका प्रांत $\mathbf{R}^n$ है।

iv) मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, $\mathbf{R}^n$ का एक अवयव है। किसी j के लिए, $1 \leq j \leq n$ $\pi_j(x) = x_j = x$ का j-वां निर्देशांक परिभाषित कीजिए।

स्पष्ट है कि ये n फलन $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots, \pi_n$, n चरों वाले वास्तविक मान फलन हैं जिनके प्रांत $\mathbf{R}^n$ के बराबर हैं। फलन

π_j, $1 \leq j \leq n$ को $\mathbf{R}^n$ से $\mathbf{R}$ तक **j-वां प्रक्षेपण** (j[th] projection) कहा जाता है।

v) $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f(x) = (x, 0)$ परिभाषित कीजिए। तब $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ एक चर वाला सदिश मान फलन है।

vi) मान लीजिए D, $\mathbf{R}^3$ में केन्द्र (0, 0, 0) और त्रिज्या 1 वाला एक विवृत गोला है। तब

$f(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

3 चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है, जिसका प्रांत D है।

vii) $\mathbf{R}^2$ में (x, y) के लिए $g(x, y) = (x, y, 0)$ परिभाषित कीजिए। तब, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ दो चरों वाला एक सदिश मान फलन है।

viii) $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ के लिए $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ परिभाषित कीजिए। तब $f(x, y)$ दो चरों वाला एक सदिश मान फलन है, जिसका प्रांत $\mathbf{R}^2$ है।

ix) यदि $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ के लिए हम $f(x)$ को n चरों $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ वाला एक बहुपद (polynomial) परिभाषित करें तो f, n चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। परन्तु n चरों वाला बहुपद क्या होता है ?

$\Sigma\, a_{k_{1i}\, k_{2i} \ldots\ldots k_{ni}}\, x_1^{k_{1i}}\, x_2^{k_{2i}} \ldots\ldots x_n^{k_{ni}}$ के रूप के व्यंजक को, जहां k_{ji} ऋणेतर पूर्णांक हैं, और $k_{1i} + k_{2i} + \ldots\ldots + k_{ni} = i$, n चरों वाला बहुपद कहा जाता है।

इस तरह, $x^3y^2z + 10x^2yz^3 + 8xyz + z^5$, 3 चरों वाले बहुपद का एक उदाहरण है, और $xy^2 + 2xy - y^4$ दो चरों वाले बहुपद का एक उदाहरण है।

टिप्पणी 3 : एक चर वाले फलनों की तरह हम अक्सर अनेक चरों वाले फलनों को एक सूत्र की सहायता से परिभाषित करते हैं। जब अनेक चरों वाले फलन को एक सूत्र की सहायता से परिभाषित किया जाता है, तब इसका प्रांत उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है जहां दिया हुआ सूत्र लागू होता है। उदाहरण के लिए, तीन चरों वाले फलन

$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ का प्रांत संवृत गोला

$\left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$ होता है।

इसी प्रकार, दो चरों वाले फलन

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

का प्रांत समुच्चय $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ है।

टिप्पणी 4 : मान लीजिए $f : D \to \mathbf{R}^m$, $m > 1$ एक सदिश मान फलन है, जहां D, $\mathbf{R}^n$ का एक उपसमुच्चय है। तब फलन f से D पर परिभाषित m वास्तविक मान फलन प्राप्त होते हैं, जिनसे फिर f अद्वितीयतः प्राप्त हो जाता है। $1 \leq j \leq m$ के लिए फलन $(\pi_j \circ f)(x) = \pi_j(f(x))$, $x \in D$ प्राप्त होते हैं, जहां π_j, iv) में परिभाषित j-वें प्रक्षेपण $\pi_j : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ को प्रकट करता है।

स्पष्ट है कि $f(x) = (\pi_1(f(x)), \pi_2(f(x)), \ldots\ldots, \pi_m(f(x)))$

विलोमतः, यदि $g_1, g_2, \ldots\ldots, g_m$, D पर परिभाषित वास्तविक मान फलन हों तो इन फलनों से D पर परिभाषित एक अद्वितीय सदिश मान फलन

$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots.., g_m(x))$ प्राप्त होता है।

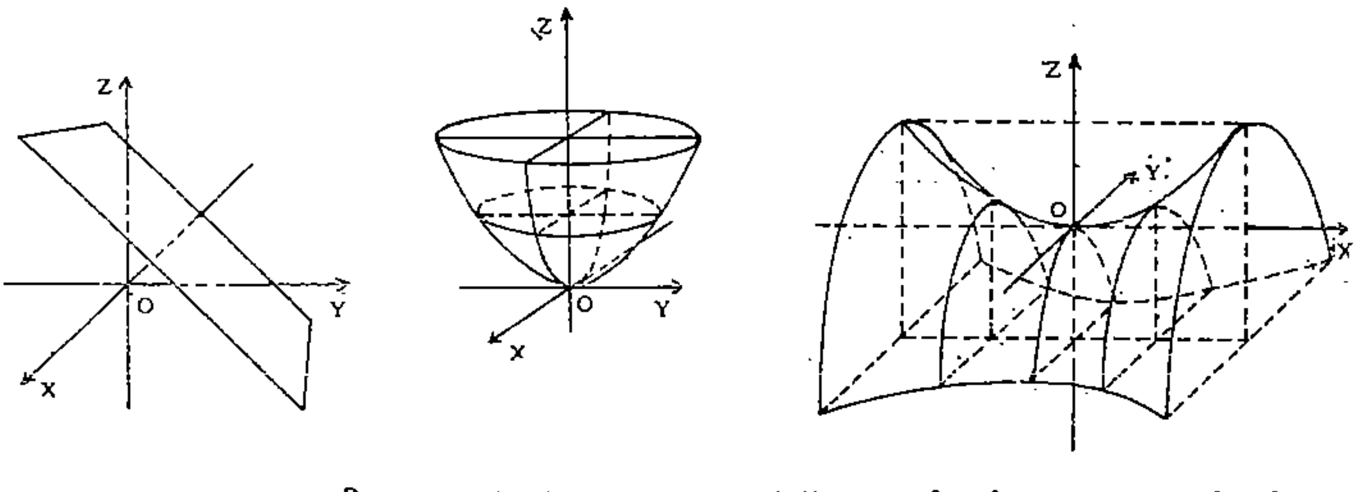
इससे यह अर्थ निकलता है कि हम किसी भी सदिश मान फलन को अनेक वास्तविक मान फलनों में विभक्त कर सकते हैं। इसीलिए आप देखेंगे कि अक्सर सदिश मान फलनों का अध्ययन करने के लिए केवल संगत वास्तविक मान फलनों का अध्ययन करना ही काफ़ी हो जाता है। प्रायः फलनों $g_1, g_2, \ldots, g_m$ को g के **घटक** (components) या **घटक फलन** (component functions) कहा जाता है।

आप वास्तविक चर वाले अनेक वास्तविक मान फलनों के लेखाचित्रों से परिचित हैं। आइए अब हम देखें कि हम किस प्रकार दो चरों वाले वास्तविक मान फलन को ज्यामितीय रूप में निरूपित कर सकते हैं।

परिभाषा 4 : मान लीजिए $f(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जिसका प्रांत D है। तब फलन f का लेखाचित्र 3 विमा वाली युक्लिडीय समष्टि में ऐसे बिन्दुओं (x, y, z) का समुच्चय होता है, जिससे कि $z = f(x,y)$, अर्थात्

f का लेखाचित्र $= G(f) = \left\{ (x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D \right\}$

यहां हम चित्र 5 में कुछ सरल फलनों के लेखाचित्र दे रहे हैं।



चित्र 5 : (क) $f(x, y) = x - y + 2$ (ख) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (ग) $f(x, y) = x^2 - y^2$ के लेखाचित्र

परन्तु, अधिकांश स्थितियों में आप पाएंगे कि दो चरों वाले वास्तविक मान फलन के लेखाचित्र को आसानी से आलेखित नहीं किया जा सकता। फिर भी, नीचे परिभाषित "स्तर वक्रों" (level curves) की सहायता से आप लेखाचित्र का एक स्थूल रूप प्राप्त कर सकते हैं।

परिभाषा 5 : मान लीजिए $f(x, y)$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है और मान लीजिए c एक अचर है। तब समतल में ऐसे बिन्दुओं (x, y) के समुच्चय को, जिससे कि $f(x, y) = c$, फलन का मान c वाला **स्तर वक्र** कहा जाता है।

स्पष्ट है कि स्तर वक्र $f(x, y) = c$,

पृष्ठ $z = f(x, y)$ (अर्थात् f का लेखाचित्र) और समतल $z = c$ का प्रतिच्छेद होता है।

मोटे तौर पर दो चरों वाले वास्तविक मान फलन f का लेखाचित्र, स्तर वक्रों $f(x, y) = c$ को एक के ऊपर एक रखकर प्राप्त किया जा सकता है, जबकि c, f के परिसर में अलग-अलग मान लेता है।

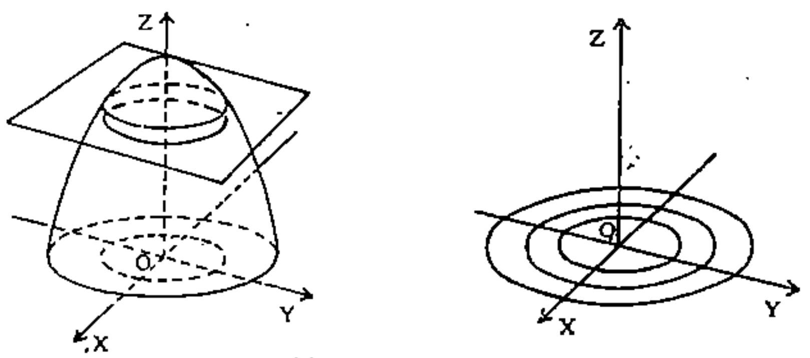
उदाहरण 4 : आइए अब हम निम्नलिखित के प्रांत और परिसर ज्ञात करें।

i) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$

ii) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$

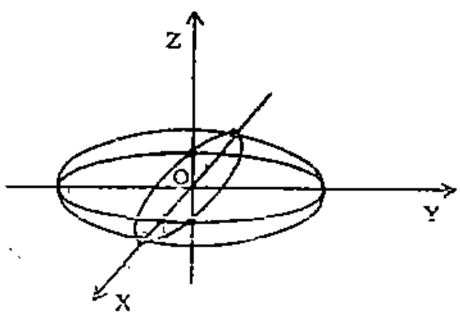
और इनके स्तर वक्रों की जांच करें।

i) दिए हुए फलन का प्रांत $\mathbf{R}^2$ है और परिसर 100 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। स्तर वक्र वृत्त हैं, जिनका केन्द्र मूल बिन्दु पर है। देखिए चित्र 6 (क) और (ख)।



चित्र 6 : (क) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ का लेखाचित्र; (ख) स्तर वक्र

ii) ध्यान दीजिए कि यहां हमने फलन को $z = f(x, y)$ के रूप में व्यक्त नहीं किया है और हम x तथा y के मानों को प्रतिस्थापित करके z के मान को स्पष्ट रूप से नहीं लिख सकते। फिर भी, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = c$ लेकर हम स्तर वक्र प्राप्त कर सकते हैं। ये दीर्घवृत्त होंगे, देखिए चित्र 7.

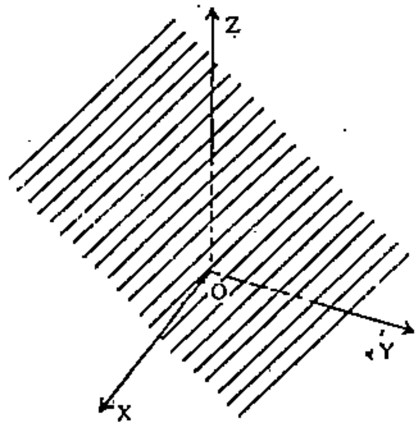


चित्र 7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ का लेखाचित्र

उदाहरण 5 : अब हम फलन $f(x, y) = x - y$ का लेखाचित्र खींचेंगे।

इस फलन का लेखाचित्र $\mathbf{R}^3$ में समतल $z = x - y$ है। देखिए चित्र 8.

स्तर वक्र सरल रेखाएं $x - y = c$ हैं।



चित्र 8 : $z = x - y$ का लेखाचित्र

हम परिभाषा 4 को तीन चरों वाले वास्तविक मान फलनों पर भी लागू कर सकते हैं।

परिभाषा 6 : मान लीजिए $f(x, y, z)$ तीन चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जिसका प्रांत D है। तब फलन $f(x, y, z)$ का लेखाचित्र यह होता है :

$\mathbf{R}^4$ में f का लेखाचित्र $= G(f) = \left\{ (x, y, z, w) \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D \right\}$

चूंकि तीन चरों वाले वास्तविक मान फलन का लेखाचित्र 4-विम यूक्लिडीय समष्टि में होता है, इसलिए इसे ज्यामितीय रूप में प्राप्त नहीं किया जा सकता। फिर भी, नीचे परिभाषित स्तर पृष्ठों (level surfaces) का स्थूल रूप प्राप्त किया जा सकता है।

परिभाषा 7 : मान लीजिए $f(x, y, z)$ तीन चरों वाला वास्तविक मान फलन है और मान लीजिए c एक अचर है। तब आकाश में ऐसे बिन्दुओं (x, y, z) का समुच्चय, जिससे कि $f(x, y, z) = c$, फलन f का c मान वाला स्तर पृष्ठ कहा जाता है।

फलन $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ के स्तर पृष्ठ क्या हैं ? ये समतल $x + 2y + 3z = c$ हैं, जहां c एक अचर है ।

आप इस बात से सहमत होंगे कि फलन $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ के स्तर पृष्ठ गोले
$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = c$, या $x^2 + y^2 + z^2 = c + a^2$ हैं, जहां $c > - \sqrt{a^2}$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E5) निम्नलिखित फलनों के प्रांत ज्ञात कीजिए :

क) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^4}$

ख) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

ग) $f(x, y) = x \sin \dfrac{1}{x} + y \sin \dfrac{1}{y}$

घ) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$

ङ) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 - y^2}$

जिस तरह हम **R** से **R** तक के फलनों के लिए योगफल, गुणनफल और भागफल परिभाषित करते हैं, ठीक उसी तरह हम अनेक चरों वाले फलनों पर भी इन बीजीय संक्रियाओं को परिभाषित कर सकते हैं। आइए इन पर हम एक-एक करके विचार करें।

दो फलनों का योगफल : मान लीजिए $f : D_1 \to \mathbf{R}^m$ और $g : D_2 \to \mathbf{R}^m$, जहां D_1 और D_2, $\mathbf{R}^n$ के उपसमुच्चय हैं। मान लीजिए $D = D_1 \cap D_2 \neq \phi$. तब D पर $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

से परिभाषित फलन $f + g$ को दो सदिश मान फलनों f और g का **योगफल** कहा जाता है।

दो फलनों का गुणनफल : मान लीजिए $f : D_1 \to \mathbf{R}$ और $g : D_2 \to \mathbf{R}$, जहां D_1 और D_2, $\mathbf{R}^n$ के उपसमुच्चय हैं। मान लीजिए $D = D_1 \cap D_2 \neq \phi$. तब D पर

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

से परिभाषित फलन fg को दो वास्तविक मान फलनों f और g का **गुणनफल** कहा जाता है।

दो फलनों का भागफल : मान लीजिए f और g ऊपर बताए गए वास्तविक मान फलन हैं। मान लीजिए कि समुच्चय

$$D^* = \{ x \mid x \in D,\ g(x) \neq 0 \}$$

तब D^* पर

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

से परिभाषित फलन f/g को फलनों f और g का **भागफल** कहा जाता है।

आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि हमने योगफल $f + g$ को दो सदिश मान फलनों f और g के लिए परिभाषित किया है, जबकि गुणनफल fg और भागफल f/g को केवल वास्तविक मान फलनों f और g के लिए परिभाषित किया है। ऐसा करने का कारण यह रहा है कि, जैसा कि हमने भाग 3.2.2 के अंत में उल्लेख किया है, दो सदिशों के गुणनफल और भागफल परिभाषित नहीं होते।

अब हम इन संक्रियाओं को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 6 : i) मान लीजिए $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ और

$g(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$. तब

$D_1 = f$ का प्रांत $= \{(x,y) \mid x \neq 0\}$ और

$D_2 = g$ का प्रांत $= \{(x, y) \mid y \neq 0\}$

स्पष्ट है कि $D_1 \cap D_2 = \{(x, y) \mid x \neq 0$ और $y \neq 0\} \neq \phi$. इस तरह, योगफल फलन

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y},$$

$D_1 \cap D_2$, अर्थात् $\mathbf{R}^2 \setminus$ (दोनों अक्ष) पर परिभाषित है।

ii) मान लीजिए $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ और $g(x, y) = (x^2, y^2)$. तब योगफल फलन

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y)\\ &= (e^x \cos y + x^2, e^x \sin y + y^2)\end{aligned}$$

पूर्ण $\mathbf{R}^2$ पर परिभाषित है।

iii) मान लीजिए $f(x, y, z) = |x|\ |y|^2$, $g(x, y, z) = \sin(x + y + z)$ तब गुणनफल फलन fg,

$(fg)(x, y, z) = f(x, y, z)\, g(x, y, z) = |x|\ |y|^2 \sin(x + y + z)$ से परिभाषित है और इसका प्रांत $\mathbf{R}^3$ है।

iv) मान लीजिए $f(x, y) = 2xy$, $g(x,y) = x^2 + y^2$. स्पष्ट है कि

$$D^* = \{(x, y) \mid g(x, y) \neq 0\} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

इस तरह f और g का भागफल फलन

$(f/g)(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ से परिभाषित होता है और इसका प्रांत $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E6) निम्नलिखित फलनयुग्मों का गुणनफल और भागफल ज्ञात कीजिए और प्रत्येक का प्रांत बताइए।

क) $f(x, y) = x^2y,\ g(x, y) = x^2y^2$

ख) $f(x, y) = \sin x + \sin y,\ g(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \cos y,\ x \neq 0.$

वास्तविक चर वाले दो वास्तविक मान फलनों का संयुक्त फलन क्या होता है यह तो आप जानते ही हैं (कलन पाठ्यक्रम की इकाई 1 का भाग 6)। आपको याद होगा कि $f(x) = x^2$ और $g(x) = \sin x$ से परिभाषित दो फलनों $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का संयुक्त फलन $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ऐसा होगा जिससे कि $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin x^2$.

यहां हम इस संकल्पना को अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू करेंगे।

परिभाषा 8 : मान लीजिए $g : D_1 \to \mathbf{R}^m$, जहां D_1, $\mathbf{R}^n$ का एक उपसमुच्चय है और $f : D_2 \to \mathbf{R}^p$, जहां D_2, $\mathbf{R}^m$ का एक उपसमुच्चय है। मान लीजिए कि $g(D_1) \subset D_2$. तब हम सभी $x \in D_1$ के लिए $\phi(x) = f(g(x))$ मानकर एक नया फलन $\phi : D_1 \to \mathbf{R}^p$ परिभाषित कर सकते हैं।

इस नए फलन $\phi : D_1 \to \mathbf{R}^p$ को फलनों f और g का **संयुक्त फलन** कहा जाता है और इसे $f \circ g$ से प्रकट किया जाता है। यदि $n = m = p = 1$, तो यह परिभाषा ठीक वही हो जाती है, जो हमने कलन के पाठ्यक्रम में दी थी।

आइए अब हम संयुक्त फलनों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 : मान लीजिए $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ पर एक फलन है और $f(t) = \sin t$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ पर एक फलन है। तब

$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x^2 + xy + y^2) = \sin(x^2 + xy + y^2)$ से परिभाषित संयुक्त फलन $f \circ g$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ पर एक फलन है।

ध्यान दीजिए कि यहां $g \circ f$ परिभाषित नहीं होता।

आपको कुछ ऐसे फलन f और g भी प्राप्त हो सकते हैं, जिनके लिए $f \circ g$ और $g \circ f$ दोनों परिभाषित होते हैं, परन्तु बराबर नहीं होते (देखिए E7) क)।

उदाहरण 8 : मान लीजिए $f(x, y) = (x^2 + y^2, x+y, xy)$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ पर एक फलन है और $g(x, y, z) = (e^{x+y}, \sin(y + z))$, $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ पर एक फलन है। तब

$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2 + y^2, x + y, xy) = \left(e^{x^2+y^2+x+y}, \sin(x+y+xy)\right)$ से परिभाषित संयुक्त फलन $g \circ f$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ पर एक फलन है।

अब आप नीचे के प्रश्न में दिए फलनों का संयुक्त फलन आसानी से लिख सकते हैं।

E7) निम्नलिखित फलनों के लिए $f \circ g$ और $g \circ f$, यदि इनका अस्तित्व हो, तो ज्ञात कीजिए :

क) $f(x, y, z) = (e^x, \ln(x^2+y^2+1), z^2),\ g(x, y, z) = (x + y, 2y, 5z)$

ख) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|2xy|}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $g(t) = \sin^{-1}(t)$

आइए अब हम इस इकाई में जो कुछ अध्ययन किया है, उसका संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

3.4 सारांश

इस इकाई में हमने :

1) समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल परिभाषित किया है, और $\mathbf{R}^n$ की बीजीय संरचना पर चर्चा की है।

2) $\mathbf{R}^n$ पर एक दूरी फलन परिभाषित किया है और $\mathbf{R}^n$ में बिंदुओं का r–प्रतिवेश परिभाषित किया है।

3) अनेक चरों वाले वास्तविक मान और सदिश मान फलन परिभाषित किए हैं।

4) दो और तीन चरों वाले फलनों के लिए क्रमशः स्तर वक्र और स्तर पृष्ठ परिभाषित किए हैं।

5) $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ पर फलनों का योगफल, गुणनफल, भागफल और संयुक्त फलन परिभाषित किए हैं।

3.5 हल और उत्तर

E1) $S_1 : x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, जहां प्रत्येक $x_i \in \mathbf{R}$.

अब $ax = (ax_1, ax_2, \ldots\ldots, ax_n)$ $1 \le i \le n$ के लिए $ax_i \in \mathbf{R}$, इसलिए $ax \in \mathbf{R}^n$

S_2 : मान लीजिए $x=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $y=(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

तब
$$\begin{aligned} a(x+y) &= a[(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)] \\ &= a(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots\ldots, x_n+y_n) \\ &= (a(x_1+y_1), a(x_2+y_2), \ldots\ldots, a(x_n+y_n)) \\ &= (ax_1+ay_1, ax_2+ay_2, \ldots\ldots, ax_n+ay_n) \\ &= (ax_1, ax_2, \ldots\ldots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \ldots\ldots, ay_n) \\ &= a(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + a(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \\ &= ax + ay. \end{aligned}$$

इसी प्रकार S_3, S_4 प्राप्त होते हैं।

S_5 : मान लीजिए $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

तब $ax = (ax_1, ax_2, \ldots\ldots, ax_n)$.

अब, यदि $ax = 0$, तो $ax_1 = 0$

$\therefore ax = 0 \; \forall\, x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow ax_1 = 0 \; \forall\, x_1 \in \mathbf{R}^n \Rightarrow a = 0$

विलोमतः यदि $a = 0$, तो स्पष्ट है कि $ax = 0 \; \forall\, x \in \mathbf{R}^n$

E2) अब $e_1 = (1, 0 \ldots\ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots\ldots, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, \ldots\ldots, 0)$, आदि-आदि

इसलिए $x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots\ldots + x_ne_n$

$= (x_1, 0, 0, \ldots\ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots\ldots, 0) + \ldots\ldots + (0, 0, \ldots\ldots, x_n)$

$= (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

इसलिए यदि $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, तब

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i.$$

अब मान लीजिए $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ और $x = \sum_{i=1}^{n} y_ie_i$.

तब $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ और $x = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

$\Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots\ldots, x_n = y_n$.

इससे यह अर्थ निकलता है कि $x \in \mathbf{R}^n$ को

$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ के रूप में अद्वितीयतः लिखा जा सकता है।

E3) $x = e + f = (1,0) + (1,1) = (2,1)$

$y = 2e + 3f = 2(1,0) + 3(1,1)$

$= (2,0) + (3,3)$

$= (5,3)$

$\therefore\ x - y = (2,1) - (5,3)$

$= (-3, -2)$

$\therefore\ |x-y| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{13}$

इसी प्रकार, $|2x - y| = \sqrt{2}$, $|x| = \sqrt{5}$

E4) $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; |(x - a, y - b, z - c)| < r \right\}$

अब $(x, y, z) \in S \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r$

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2$

$\Rightarrow (x-a)^2 < r^2,\ (y-b)^2 < r^2,$ और $(z-c)^2 < r^2.$

$\Rightarrow |x-a| < r,\ |y-b| < r,\ |z-c| < r$

$\Rightarrow (x, y, z) \in P_1$

$\Rightarrow S \subset P_1$

अब $x \in P_2 \Rightarrow |x-a| < \frac{r}{\sqrt{3}},\ |y-b| < \frac{r}{\sqrt{3}},\ |z-c| < \frac{r}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{3}} < r$

$\Rightarrow |(x-a, y-b, z-c)| < r$

$\Rightarrow (x, y, z) \in S$

$\Rightarrow P_2 \subset S.$

E 5) क) प्रांत में केवल उन बिन्दुओं को छोड़कर, जिनके लिए $x^4 + y^4 = 0$, $\mathbf{R}^2$ के अन्य सभी बिन्दु होते हैं ।

अब, $x^4 + y^4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 0$ और $y^4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ और $y = 0.$

इसलिए प्रांत $= \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ख) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq y\}$

ग) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

घ) त्रिज्या 2 और केन्द्र (0, 0, 0) वाला विवृत गोला, क्योंकि $\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$ धनात्मक होना चाहिए।

ङ) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y \neq \pm x\}$

E 6) क) $(fg)(x, y) = f(x, y)\, g(x, y) = x^2y.x^2y^2 = x^4y^3 = \mathbf{R}^2.$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{x^2y}{x^2y^2} = \frac{1}{y}$

$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

ख) $(fg)(x, y) = \frac{1}{x}(\sin x + \sin y)\cos y$

$$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{x(\sin x + \sin y)}{\cos y}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$$

E 7) क) $(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z))$

$$= g(e^x, \ln(x^2+y^2+1), z^2)$$

$$= (e^x + \ln(x^2+y^2+1), 2\ln(x^2+y^2+1), 5z^2)$$

और $f \circ g\,(x, y, z) = f(g(x, y, z))$

$$= f(x+y, 2y, 5z)$$

$$= (e^{x+y}, \ln(x^2+5y^2+2xy+1), 25z^2)$$

स्पष्ट है कि $f \circ g \neq g \circ f$, हालांकि दोनों ही परिभाषित हैं।

ख) $g \circ f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$(g \circ f)(x, y) = \begin{cases} \sin^{-1}\left[\dfrac{2|xy|}{x^2+y^2}\right], & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f \circ g$ का अस्तित्व नहीं है।

शब्दावली

अदिश गुणन	scalar multiplication
अनिर्धार्य रूप	indeterminate form
एकक सदिश	unit vector
उपरि परिबंध	upper bound
कार्तीय गुणनफल	Cartesian product
क्रम संबंध	order relation
दूरी फलन	distance function
निम्न परिबंध	lower bound
निष्कासित प्रतिवेश	deleted neighbourhood
परिबंध	bound
प्रतिवेश	neighbourhood
विवृत अंतराल	open interval
संयुक्त फलन	composite function
सदिश समष्टि	vector space
स्तर वक्र	level curve
स्तर पृष्ठ	level surface.

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-07
उच्चस्तरीय कलन

खंड

2

आंशिक अवकलज

खंड 2 आंशिक अवकलज

खंड 1 में हमने आपको अनेक चरों वाले फलनों से परिचित कराया है। इस खंड में पहले हम आपको अनेक चरों वाले फलन की सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं से परिचित कराएंगे। आप यहां देखेंगे कि इन संकल्पनाओं का अध्ययन करने के दौरान $\mathbf{R}^n$ पर परिभाषित दूरी फलन काफ़ी सहायक सिद्ध होता है। आप इस दूरी फलन का अध्ययन इकाई 3 में कर चुके हैं।

इसके बाद हम अनेक चरों वाले फलनों के अवकलजों के बारे में चर्चा करेंगे। इस खंड की शेष इकाइयों में हम आपको कुछ ऐसी विधियों से परिचित कराएंगे, जिनके अनुसार अवकलज की संकल्पना को एक से अधिक चरों वाले फलन पर भी लागू किया जा सकता है। भौतिक स्थितियों से प्राप्त आंशिक अवकल समीकरणों के अध्ययन के दौरान दो या तीन चरों वाले फलनों के अवकलज की संकल्पना का विकास हुआ था।

इकाई 5 में हम आपको आंशिक अवकलजों से परिचित कराएंगे। आप अनेक चरों वाले अवकलनीय फलन की संकल्पना का भी अध्ययन करेंगे, जोकि एक चर वाले अवकलनीय फलन का एक सही व्यापकीकरण है। हम यहां सांतत्य, अवकलनीयता और आंशिक अवकलजों के बीच संबंध स्थापित करेंगे। इस संबंध में हम अपनी चर्चा दो या तीन चरों वाले फलनों तक ही सीमित रखेंगे।

इस खंड की इकाई 6 में उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों पर चर्चा की गई है। व्यापक रूप में आप देखेंगे कि जिन चरों के सापेक्ष फलन को अवकलित किया जाता है, उनके क्रम का काफ़ी महत्व है। हम उन पर्याप्त प्रतिबंधों को भी प्राप्त करेंगे जिनके अंतर्गत दो चरों वाले फलन के मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर होते हैं।

इसके बाद हम इकाई 7 में संयुक्त फलनों के अवकलन पर विचार करेंगे। यहां हम शृंखला नियम और समघात फलन से सम्बद्ध ऑयलर-प्रमेय का भी अध्ययन करेंगे।

अंत में, हम एक दिए हुए बिन्दु पर एक दी हुई दिशा में फलन के दिक्-अवकलज को परिभाषित करेंगे। यहां आप देखेंगे की फलन के आंशिक अवकलज निर्देश-अक्षों की दिशाओं में उस फलन के दिक्-अवकलज होते हैं।

इस तरह इस खंड का अध्ययन कर लेने के बाद आप विभिन्न चरों वाले फलन के अवकलज को परिभाषित करने की विभिन्न विधियों से परिचित हो जाएंगे। आप इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझ सकें, इसके लिए हम प्रत्येक संकल्पना का ज्यामितीय विवेचन भी देंगे। आंशिक अवकलजों के अध्ययन की ओर हम विशेष ध्यान देंगे क्योंकि खंड 3 में हमें इनका प्रयोग बार-बार करना होगा।

संकेत और प्रतीक

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$f(x)$ की सीमा जबकि x, a की ओर प्रवृत्त होता हो।
	यहां $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, और $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $D_1 f$, f_x	x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}	x के सापेक्ष f का द्वितीय कोटि का आंशिक अवकलज
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx}	f का द्वितीय कोटि का आंशिक अवकलज, प्रथम y के सापेक्ष और फिर x के सापेक्ष
$D_\theta f(a)$, $f_\theta(a)$, $f_v(a)$	a पर f का $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ की दिशा में दिक्-अवकलज
∇f	$= (f_x, f_y)$, f का ग्रेडिएण्ट

इकाई 4 सीमा और सांतत्य

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

इकाई 3 में आप अनेक चरों वाले फलनों के उदाहरण देख चुके हैं। इस इकाई में हम आपको इन अनेक चरों वाले फलनों की सीमा और सांतत्य से परिचित कराएंगे। हम परिभाषाएं तो व्यापक रूप में देंगे, परन्तु उदाहरण और प्रश्न केवल दो अथवा तीन चरों वाले फलन तक ही सीमित रखेंगे। पहले हम अनेक चरों वाले वास्तविक मान फलनों का अध्ययन करेंगे और उसके बाद अनेक चरों वाले उन फलनों का अध्ययन करेंगे जो सदिशमानी हैं, अर्थात् जिनका परिसर $\mathbf{R}^n$, $n > 1$ का एक उपसमुच्चय है।

अध्ययन के दौरान आप देखेंगे कि अनेक चरों वाले फलन की सीमा और सांतत्य की परिभाषाएं ठीक वैसी ही हैं, जैसी कि एक चर वाले फलन की थीं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- अनेक चरों वाले फलन की सीमाएं परिभाषित कर सकेंगे और उनके मान ज्ञात कर सकेंगे,
- यह निर्णय ले सकेंगे कि एक दिए हुए बिन्दु अथवा बिन्दु-समुच्चय पर दिया हुआ अनेक चरों वाला फलन संतत है अथवा नहीं।

4.2 वास्तविक मान फलन की सीमाएं

आप एक चर वाले वास्तविक मान फलन (real-valued function) की सीमा की संकल्पना से परिचित हैं। यहां हम अनेक चरों वाले फलन की सीमा की संकल्पना का अध्ययन करेंगे। परंतु इस भाग में हम अनेक चरों वाले वास्तविक मान फलन की सीमा की संकल्पना का ही अध्ययन करेंगे। सदिश मान फलन (vector-valued function) की संकल्पना का अध्ययन हम भाग 4.4 में करेंगे। अब नीचे दी गई परिभाषाओं को ध्यान से पढ़िए।

परिभाषा 1 : मान लीजिए $f(x)$, प्रतिवेश

$$S(a, h) = \{ x \mid x \in \mathbf{R}^n, |x-a| < h\}$$

में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। x का a की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x)$ की सीमा L होगी, यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो (ε पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक धन संख्या $\delta (\delta < h)$ का अस्तित्व है कि

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि यह परिभाषा ठीक वैसी ही है, जैसा कि एक चर वाले फलन की सीमा की परिभाषा है। अंतर केवल यह है कि यहां दूरी $|x-a|$, $\mathbf{R}^n$ में x की a से दूरी है।

फिर भी, यह ध्यान रखिए कि $|f(x) - L|$, वास्तविक संख्या $f(x) - L$ का निरपेक्ष मान है।

यदि $n=1$, तो ऊपर दी गई परिभाषा ठीक वही हो जाती है, जो एक वास्तविक चर के वास्तविक मान फलन f के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ की परिभाषा है। x का a की ओर प्रवृत्त होने पर फलन f(x) की सीमा L होती है इस बात को व्यक्त करने के लिए हम संकेत $\lim_{x \to a} f(x) = L$ या $x \to a$ होने पर $f(x) \to L$ का प्रयोग करेंगे।

एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन की तरह हम इस स्थिति में भी यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\lim_{x \to a} f(x)$, यदि इसका अस्तित्व है, अद्वितीय है। हम इसकी उपपत्ति को आपके लिए एक प्रश्न के रूप में छोड़ रहे हैं। इसके लिए E1) देखिए।

E 1) यदि $\lim_{x \to a} f(x) = L$ और $\lim_{x \to a} f(x) = M$, जहां $a \in \mathbf{R}^n$, तो सिद्ध कीजिए कि $L = M$.

अब हम सीमाओं से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण कथन नीचे दे रहे हैं।

टिप्पणी 1: i) चूंकि नीचे दिया गया कथन परिभाषा 1 के तुल्य (equivalent) है इसलिए इसे $\lim_{x \to a} f(x)$ की परिभाषा माना जा सकता है।

"मान लीजिए f(x), $\mathbf{R}^n$ के बिन्दु a के प्रतिवेश S(a, h) में संभवतः बिन्दु a को छोड़कर, परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। हम कहते हैं कि x का a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) की सीमा एक वास्तविक संख्या L है, जबकि L के दिए हुए ε-प्रतिवेश के लिए a के एक δ-प्रतिवेश ($\delta < h$) का (L के ε-प्रतिवेश पर निर्भर) अस्तित्व होता है ताकि जब भी x, a के δ-प्रतिवेश में होता है, $x \neq a$, तो f(x), L के ε-प्रतिवेश में होता है"।

ii) यदि $\lim_{x \to a} f(x) = L$, तो f(x), a के एक निष्कासित प्रतिवेश (deleted neighbourhood) में प्रतिबद्ध होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि ऐसी वास्तविक संख्याओं m और M का अस्तित्व है कि a के एक निष्कासित प्रतिवेश में सभी x के लिए

$$m \leq f(x) \leq M.$$

अब प्रश्न उठता है कि इसे हम किस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं ? इसके लिए हम परिभाषा 1 का प्रयोग करेंगे। इस तरह $\lim_{x \to a} f(x) = L$ का अर्थ यह होता है कि दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए $\exists\, \delta > 0$, जिससे कि

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$
$$\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

अब $m = L - \varepsilon$ और $M = L + \varepsilon$ लीजिए। इस तरह यह सिद्ध हो जाता है कि यदि $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है तो a के एक निष्कासित प्रतिवेश में f(x) परिबद्ध है।

यहां हम आपका ध्यान इस ओर दिलाना चाहते हैं कि ऊपर दिए गए कथन का विलोम सही नहीं है। अर्थात् यदि कोई फलन एक बिन्दु a के किसी निष्कासित प्रतिवेश में परिबद्ध है तो इससे हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते कि a पर फलन की सीमा का अस्तित्व है। इस बात का प्रमाण आप उदाहरण 2 में देख सकते हैं।

अब हम सीमाओं के बीजगणित से संबंधित एक प्रमेय का कथन देंगे। यह प्रमेय अनेक चरों वाले कुछ फलनों की सीमाएं ज्ञात करने में काफ़ी उपयोगी होता है। आपको याद होगा कि आपने एक चर वाले फलनों की सीमाओं के संबंध में इसी प्रकार के एक प्रमेय का अध्ययन किया है और उसका प्रयोग किया है। यहां हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं देंगे क्योंकि यह थोड़ी जटिल है।

प्रमेय 1 (सीमाओं का बीजगणित) : मान लीजिए f और g, $\mathbf{R}^n$ के एक बिन्दु a के निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित दो वास्तविक मान फलन हैं। यदि $\lim_{x \to a} f(x) = L$ और $\lim_{x \to a} g(x) = M$, तो

i) $\alpha \in \mathbf{R}$ के लिए $\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) = \alpha . L$.

ii) $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = L \pm M$

iii) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = LM$

iv) $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = \dfrac{L}{M}$, जबकि, $M \neq 0$.

प्रस्तावना में हमने यह बात कही है कि यहां हम केवल 2 अथवा 3 चरों वाले फलनों से सम्बद्ध उदाहरण और प्रश्न देंगे। लेकिन दो अथवा तीन चरों वाले फलनों तक अपने को सीमित करने से पहले आइए हम एक सरल परिणाम सिद्ध करें। इससे यह पता चल सकेगा कि सीमा की परिभाषा में $\mathbf{R}^n$ की दूरी सूत्र के प्रयोग से बचा जा सकता है।

प्रमेय 2 : मान लीजिए $f(x)$, $\mathbf{R}^n$ के बिन्दु a के एक निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब $\lim_{x \to a} f(x) = L$, यदि और केवल यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो (ε पर निर्भर) धन वास्तविक संख्याओं $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$, $\delta_i < h$, $1 \leq i \leq n$ का अस्तित्व है, जिससे कि
$0 < |x_i - a_i| < \delta_i$, $1 \leq i \leq n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$,

जहां $a = (a_1, a_2 \ldots\ldots, a_n)$ और $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$.

उपपत्ति : मान लीजिए $\lim_{x \to a} f(x) = L$. तब $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$, $\delta < h$ का अस्तित्व है, जिससे कि

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

मान लीजिए $\delta_i = \delta/\sqrt{n}$, $1 \leq i \leq n$.

अब, यदि किसी बिन्दु $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, के लिए, सभी i, $1 \leq i \leq n$ के लिए $|x_i - a_i| < \delta_i = \delta/\sqrt{n}$, तो $|x-a| < \delta$. अतः

$$0 < |x_i - a_i| < \delta_i,\ 1 \leq i \leq n, \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

विलोम के रूप में मान लीजिए कि दिया हुआ प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है।

$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots\ldots, \delta_n\}$ लीजिए।

तब, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x_i - a_i| < \delta \leq \delta_i$, $1 \leq i \leq n$,
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

जिससे यह पता चलता है कि $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

अब हम प्रमेय 1 और 2 की सहायता से अगले उदाहरण में दिए गए फलनों की सीमाओं का परिकलन करेंगे।

$(x, y) \to (a, b)$ होने पर $f(x, y)$ की सीमा को $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ से भी दर्शाया जाता है।

उदाहरण 1: आइए हम यह दिखाएं कि

i) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (x^2 + y) = 2$,

i) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0$,

ii) $\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} (x^2 + xy + y^3) = 37$,

v) $\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} (xy + yz + zx) = ab + bc + ca$.

म प्रमेय 2 की सहायता से (i) और (ii) को हल करेंगे।

मान लीजिए $0 < \varepsilon < 1$ दिया हुआ है। तो प्रमेय 2 के अनुसार,
$|f(x) - L| = |x^2 + y - 2| \leq |x^2| + |y-2| < \varepsilon$,
यदि $|x| < \varepsilon/2$, $|y-2| < \varepsilon/2$. इस तरह

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (x^2 + y) = 2$.

ध्यान दीजिए कि यहां हमने $\delta_1 = \varepsilon/2 = \delta_2$ लिया है।

ii) स्पष्ट है कि यदि $|x| < \frac{\varepsilon}{2}, |y| < \frac{\varepsilon}{2}$, तो

$$\left|x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y|$$

$< \varepsilon$ अगर $|x| < \varepsilon/2$ और $|y| < \varepsilon/2$.

इस तरह, प्रमेय 2 को लागू करके हम यह देख सकते हैं कि

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

अब हम सीमाओं के बीजगणित की सहायता से (iii) और (iv) को हल कर सकते हैं।

iii) चूंकि

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} x^2 = 4, \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} xy = 6, \quad \text{और} \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} y^3 = 27,$$

सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर हम पाते हैं कि दी हुई सीमा 37 के बराबर है।

iv) सीमाओं के बीजगणित को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} (xy+yz+zx) = \lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} xy + \lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} yz + \lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} zx$$
$$= ab+bc+ca.$$

हम टिप्पणी 1 में यह बता चुके हैं कि एक फलन अगर किसी बिन्दु के प्रतिवेश में परिबद्ध हो तब भी यह संभव है कि उस बिन्दु पर उसकी सीमा न हो। इस तथ्य को समझने के लिए नीचे के उदाहरण में हमने दो फलन दिए हैं।

उदाहरण 2: i) यदि $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, तो

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) \quad \text{का अस्तित्व नहीं है।}$$

ii) यदि $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ अपरिमेय} \\ 0, & x \text{ परिमेय,} \end{cases}$, तो

किसी भी बिन्दु (a, b) पर $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

ध्यान दीजिए कि ये दोनों ही फलन परिबद्ध फलन है। आइए पहले हम (i) को सिद्ध करें।

i) यदि संभव हो तो हम यह मान लें कि $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = L$.

अब यदि ε, $0 < \varepsilon < 1$, दिया हुआ हो, तो $\exists\ \delta > 0$, जिससे कि

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon/2.$$

विशेष रूप से, यदि (x_1, y_1), (x_2, y_2) दो बिन्दु हों,

जहां $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} < \delta$, $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} < \delta$, तो

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f(x_1, y_1) - L + L - f(x_2, y_2)|$$
$$\leq |f(x_1, y_1) - L| + |f(x_2, y_2) - L|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

मान लीजिए

$(x_1, y_1) = \left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ और $(x_2, y_2) = \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. इन बिन्दुओं के लिए

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$. परन्तु

$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = 1 > \varepsilon$,

इससे (1) का अंतर्विरोध प्राप्त होता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

आइए अब हम दूसरा फलन लें।

ii) यदि संभव हो तो आइए हम यह मान लें कि $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ का अस्तित्व है। तब (i) की तरह

प्रक्रिया लागू करने पर हम यह पाते हैं कि दिए हुए ε, $0 < \varepsilon < 1$, के लिए एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि जब कभी (x_1, y_1), (x_2, y_2) केन्द्र (a, b) और त्रिज्या δ वाली एक विवृत चक्रिका S के सदस्य हों, तो

$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

अब विवृत चक्रिका S में हम (x_1, y_1) और (x_2, y_2) ले सकते हैं, ताकि x_1 अपरिमेय हो और x_2 परिमेय हो। तब,

$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = 1 > \varepsilon$,

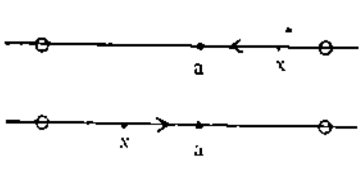
जिससे यह पता चलता है कि $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

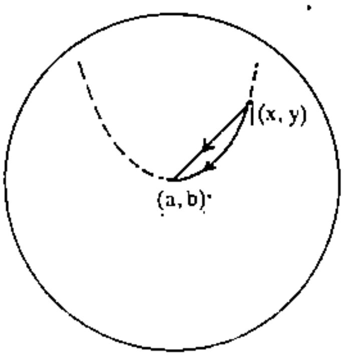
हम जानते हैं कि वास्तविक रेखा पर x बायीं ओर अथवा दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त कर सकता है। (चित्र 1 (क) देखिए)। इसी के अनुसार हम एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन की वाम सीमा, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ और दक्षिण सीमा, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ की परिभाषा करते हैं। हम यह भी जानते हैं कि

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, यदि और केवल यदि

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

आइए अब हम कार्तीय समतल $\mathbf{R}^2$ लें। मान लीजिए बिंदु (a, b) के प्रतिवेश में बिंदु (x, y) है। तब बिन्दु (x, y), बिन्दु (a, b) की ओर विभिन्न पथों से जा सकता है। उदाहरण के लिए, चित्र 1 (ख) में आप देख सकते हैं कि (x, y), (a, b) की ओर एक सरल रेखा के अनुदिश जा सकता है अथवा एक विशेष वक्र, मान लीजिए $(y-b) = (x-a)^2$, के अनुदिश जा सकता है।





चित्र 1: (क) $x \in]a-\delta, a+\delta[$, a की ओर बायीं या दायीं ओर से जा सकता है।
(ख) $(x,y) \in S((a,b), r)$, (a, b) की ओर रेखा या वक्र के अनुदिश जा सकता है।

अब आप देखेंगे कि यदि $\lim\limits_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$, तो किसी भी पथ के अनुदिश (x, y) के (a, b) की ओर जाने पर, $f(x, y)$, L की ओर जाता है।

अब हम इस परिणाम का कथन निम्नलिखित प्रमेय में देंगे और उसे सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3 : मान लीजिए f(x, y) दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है और

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$$

यदि $\phi(x)$ एक वास्तविक चर वाला वास्तविक मान फलन हो जिससे कि $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = b$, तो

$$\lim_{x\to a} f(x, \phi(x)) = L.$$

उपपत्ति : मान लीजिए $\varepsilon > 0$. तो एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि f(x, y), केन्द्र (a, b) और त्रिज्या δ वाली विवृत चक्रिका में, संभवतः (a, b) को छोड़कर, परिभाषित है और

$$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

चूंकि $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = b$, तो इस $\delta > 0$ के लिए एक वास्तविक संख्या $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta/\sqrt{2}$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि सभी x, $0 < |x-a| < \delta_1$ के लिए $\phi(x)$ परिभाषित है और

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |\phi(x)-b| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

इस तरह,

$0 \leq |x-a| < \delta_1 \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (\phi(x)-b)^2} < \delta$ और

इसलिए $|f(x, \phi(x)) - L| < \varepsilon$.

अर्थात् $\lim\limits_{x\to a} f(x, \phi(x)) = L$.

इस प्रमेय से यह पता चलता है कि यदि $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x) = L$ का अस्तित्व हो तो यह सीमा उस पथ से स्वतंत्र होती है जिसके अनुदिश बिन्दु (x, y), बिन्दु (a, b) की ओर जाता है। इसलिए हम यह कह सकते हैं कि यदि दो अलग-अलग पथों के अनुदिश $(x, y) \to (a, b)$ होने पर f(x, y) दो अलग-अलग सीमाओं की ओर प्रवृत्त होता हो, तो $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)$ का अस्तित्व नहीं होता। अब हम प्रमेय 3 के एक उपप्रमेय के रूप में इसका कथन देंगे।

उपप्रमेय 1 : मान लीजिए f(x, y) बिन्दु (a, b) के एक निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। यदि ऐसे वास्तविक मान फलन $\phi_1(x)$ और $\phi_2(x)$ का अस्तित्व हो कि

$$\lim_{x\to a} \phi_1(x) = b = \lim_{x\to a} \phi_2(x)$$

और

$$\lim_{x\to a} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim_{x\to a} f(x, \phi_2(x)),$$

तो

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$ अर्थात् $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं होता।

आप आगे देखेंगे कि दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों की सीमाओं के अस्तित्व की जांच में यह उपप्रमेय अत्यंत उपयोगी सिद्ध होता है।

अब हम इस चर्चा को कुछ उदाहरणों की सहायता से और अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

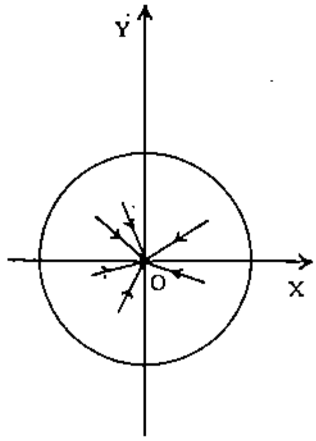
उदाहरण 3 : हम यह दिखाएंगे कि

i) $x\to 0$, $y\to 0$ होने पर $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ की सीमा का अस्तित्व नहीं है, और

ii) $x\to 0$, $y\to 0$ होने पर f(x, y) की सीमा का अस्तित्व नहीं है,

$$\text{जहां } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

आइए पहले हम (i) को हल करें।



चित्र 2: पृथांतर रेखाएं

i) मान लीजिए $y = mx$. तब

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

चूंकि m के अलग-अलग मानों के लिए $\frac{1 - m^2}{1 + m^2}$ का मान अलग-अलग होता है, अतः इससे यह निष्कर्ष

निकलता है कि अलग-अलग रेखाओं के अनुदिश $(x, y) \to (0, 0)$ होने पर $f(x,y)$ अलग-अलग 'मानों की ओर प्रवृत्त होता है (देखिए चित्र 2)।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि उपप्रमेय 1 के अनुसार $x \to 0$, $y \to 0$ होने पर $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ की सीमा का अस्तित्व नहीं है। (यहां हम $\phi_1(x) = m_1 x$, $\phi_2(x) = m_2 x$, $m_1 \neq \pm m_2$ ले सकते हैं।)

ii) मान लीजिए $\phi_1(x) = x - x^3$, $\phi_2(x) = x - x^2$.

तब $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + (x - x^3)^3}{x^3} = 2$ और

$$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_2(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + (x - x^2)^3}{x^2} = 0.$$

अतः उपप्रमेय 1 के अनुसार $x \to 0$, $y \to 0$ होने पर $f(x, y)$ की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

अनेक स्थितियों में आप देखेंगे कि ध्रुवी निर्देशांकों में रूपांतरित कर देने पर, अर्थात् $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ प्रतिस्थापित कर देने पर, कुछ सीमाओं का मान आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। आइए अब हम इस प्रतिस्थापन का प्रयोग नीचे के उदाहरण में करें।

उदाहरण 4: आइए हम यह सिद्ध करें कि

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

यहां $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ प्रतिस्थापित करने पर $x^2 + y^2 = r^2$ प्राप्त होता है। तब

$$\left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2} \right| \leq 2r = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

क्योंकि $|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leq |\cos^3\theta| + |\sin^3\theta| \leq 2.$

अब, यदि $|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ और $|y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$, तब $2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$,

और तब $\left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$

अर्थात् $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$

हम समझते हैं कि आप इन उदाहरणों को अच्छी तरह से समझ गए होंगे। अब आप खुद नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए।

E 2) दिखाइए कि

क) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

ख) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

ग) $\lim\limits_{(x, y, z) \to (0, 1, 2)} \frac{x^2 + 3xyz - 5z^2}{xy^3 + 5z^2 - 3xy + x^3} = -1.$

घ) $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x \sin y}{2x^2 + 1} = 0$

E3) दिखाइए कि $x \to 0$, $y \to 0$ होने पर निम्नलिखित फलनों की सीमाओं का अस्तित्व नहीं होता।

क) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

ख) $\dfrac{x^2}{x^2+y}$

ग) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

E4) नीचे दिए गए प्रश्नों में मूल बिन्दु (origin) के कितने निकट बिन्दु (x, y) अथवा (x, y, z) को लेना चाहिए जिससे कि दिए हुए ε के लिए

$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$, या

$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \varepsilon$

क) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\varepsilon = 0.01$

ख) $f(x, y) = xy$, $\varepsilon = 0.0004$

अनेक चरों वाले फलनों की सीमा संकल्पना से अब आप परिचित हो चुके हैं। आइए अब इनके सांतत्य की चर्चा करें।

4.3 वास्तविक मान फलन का सांतत्य

आप जानते हैं (कलन की इकाई 2 देखिए) कि एक चर वाले फलन की सीमा की जानकारी की मदद से हम इन फलनों के सांतत्य का अध्ययन कर सकते हैं। परिशुद्ध रूप में आप यह जानते हैं कि बिन्दु $a \in \mathbf{R}$ पर फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ संतत होता है, यदि

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

पिछले भाग मे हमने अनेक चरों वाले वास्तविक मान फलन की सीमा की संकल्पना का अध्ययन किया है। आइए अब देखें कि इस जानकारी की सहायता से हम $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ के संतत फलनों को किस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $f(x)$ बिन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ के एक प्रतिवेश में परिभाषित n चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। फलन $f(x)$ को a पर संतत कहा जाता है यदि

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,

अर्थात् यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो (ε पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

n-चरों वाले वास्तविक मान फलन को इस फलन के प्रांत में आविष्ट समुच्चय **A** पर संतत कहा जाता है, यदि **A** के प्रत्येक बिन्दु पर फलन संतत हो।

n-चरों वाले वास्तविक मान फलन को **संतत फलन** कहा जाता है, यदि फलन अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर संतत हो।

पिछले भाग में आप वास्तविक मान फलनों के अनेक उदाहरण देख चुके हैं। आइए अब हम इनमें से कुछ फलनों के सांतत्य की जांच करें।

मिसाल के तौर पर, उदाहरण 1 से $f(x, y) = x^2+y$ लीजिए। हम जानते हैं कि $\lim\limits_{(x,y) \to (0, 2)} (x^2+y) = 2$.

अब, चूंकि $f(0, 2) = 2$, इसलिए

$$\lim_{(x, y) \to (0, 2)} (x^2+y) = f(0, 2).$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि (0, 2) पर $f(x, y) = x^2+y$ संतत है।

प्रक्षेप $\pi_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$\pi_j (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = x_j, 1 \le j \le n.$$

$\mathbf{R}^n$ पर संतत फलन हैं। इसकी उपपत्ति हम आपके ऊपर छोड़ रहे हैं। (E6 देखिए।)

आप भी यह मानेंगे कि उदाहरण 3 में लिया गया फलन $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$, (0, 0) पर संतत नहीं है। आपको याद होगा कि हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि $(x, y) \to (0, 0)$ होने पर इस फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं होता।

अब यहां हम एक प्रमेय का कथन देंगे, जो प्रमेय 1 का ही एक सरल परिणाम है। आप देखेंगे कि फलनों के सांतत्य को स्थापित करने में यह प्रमेय काफ़ी उपयोगी सिद्ध होगा।

प्रमेय 4 (संतत फलनों का बीजगणित) : मान लीजिए f और g, n चरों वाले दो वास्तविक मान फलन हैं जो बिन्दु a पर संतत हैं। तब

i) $f \pm g$, a पर संतत है।

ii) αf प्रत्येक $\alpha \in \mathbf{R}$ के लिए a पर संतत है।

iii) fg, a पर संतत है।

iv) $\dfrac{f}{g}$, a पर संतत है, जबकि $g(a) \neq 0$.

उपपत्ति :

i) $$\lim_{x\to a} (f \pm g) (x) = \lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)]$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \text{ प्रमेय 1 से}$$
$$= f(a) \pm g(a) \text{ , क्योंकि f और g संतत हैं।}$$

ii) $$\lim_{x\to a} (\alpha f) (x) = \lim_{x\to a} \alpha f(x)$$
$$= \alpha \lim_{x\to a} f(x)$$
$$= \alpha . f(a)$$

iii) $$\lim_{x\to a} (fg) (x) = \lim_{x\to a} f(x) g(x)$$
$$= \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$$
$$= f(a) g(a)$$

iv) $$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right) (x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$
$$= \frac{f(a)}{g(a)}$$

इससे यह पता चलता है कि $f \pm g$, αf, fg और f/g, a पर संतत हैं।

प्रमेय 4 से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, n चरों $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ वाला एक बहुपद हो, तो $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ पर एक संतत फलन है।

अब हम दो संतत फलनों के संयोजन (composite) के सांतत्य से संबंधित एक परिणाम का कथन देंगे और उसे सिद्ध करेंगे। आप इसी प्रकार के परिणाम का अध्ययन एक चर वाले फलनों के लिए कर चुके हैं। (कलन की इकाई 2 का प्रमेय 6 देखिए)

प्रमेय 5 : मान लीजिए f, n चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जो बिन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ पर संतत है, और मान लीजिए g एक वास्तविक चर वाला वास्तविक मान फलन है जो f(a) पर संतत है। तब संयुक्त फलन $g \circ f$, a पर संतत होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए $\varepsilon > 0$. f(a) पर फलन g के सांतत्य से यह पता चलता है कि एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व है कि

$$|y-f(a)| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\cdot)$$

अब, a पर फलन f के सांतत्य से यह पता चलता है कि एक ऐसी धन संख्या $\eta > 0$ का अस्तित्व है कि

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\cdot\cdot)$$

$(\cdot)$ और $(\cdot\cdot)$ का संयोजन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon,$$

अथवा

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon,$$

अर्थात् a पर $g \circ f$ संतत है।

अगले उदाहरण में हम प्रमेय 5 को लागू करके एक संयुक्त फलन की सीमा की जांच करेंगे।

उदाहरण 5 : हम यह दिखाएंगे कि

$$\lim_{(x,y) \to (0, \ln 5)} e^{x+y} = 5$$

स्पष्ट है कि फलन $f(x,y) = x+y$ और $g(t) = e^t$ सर्वत्र संतत हैं। इसलिए प्रमेय 5 के अनुसार, संयुक्त फलन $g \circ f$ सर्वत्र संतत होगा। फलस्वरूप,

$$\lim_{(x, y) \to (0, \ln 5)} e^{x+y} = e^{0+\ln 5} = 5.$$

इस भाग के अंत में अब हम एक सरल परिणाम दे रहे हैं जो अनेक अनुप्रयोगों में काफ़ी उपयोगी होता है।

प्रमेय 6 : मान लीजिए f(x), n चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जो $\mathbf{R}^n$ के बिन्दु a पर संतत है। यदि $f(a) \neq 0$, तो a के एक प्रतिवेश में f(x) का चिह्न वही होगा जो f(a) का चिह्न है।

उपपत्ति : चूंकि f, a पर संतत है, इसलिए $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

अथवा $|x - a| < \delta$ के लिए $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

मान लीजिए $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2}$. तब a के δ-प्रतिवेश में सभी x के लिए

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}, \text{ यदि } f(a) > 0$$

और $\dfrac{3f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{f(a)}{2}$, यदि $f(a) < 0$.

अर्थात् $S(a, \delta)$ में सभी x के लिए f(x) का वही चिह्न होता है जो f(a) का चिह्न है। इस तरह, उपपत्ति पूरी हो जाती है।

ध्यान दीजिए कि यदि $f(a) = 0$, तो a के प्रतिवेश में फलन के चिह्न के बारे में निश्चित रूप से कुछ भी नहीं कहा जा सकता है। उदाहरण के लिए,

(0, 0) पर $f(x, y) = x^4+y^4$ संतत है, $f(0, 0) = 0$ और $(x, y) \neq (0,0)$ के लिए $f(x, y) > 0$.

जबकि फलन $g(x, y) = -(x^2+y^2)$, के साथ ठीक इसके उलटा होता है।

और फलन $f(x,y) = x^3+y^3$ के साथ (0, 0) पर तीनों संभावनाएं होती हैं :

$f(0, 0) = 0$ और (0, 0) के किसी भी प्रतिवेश में

कुछ (x, y) के लिए $f(x, y) > 0$,

- कुछ (x, y) के लिए $f(x, y) < 0$, और
- कुछ (x, y) के लिए $f(x, y) = 0$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए।

E5) दिखाइए कि नीचे दिए गए फलन बिन्दु (0, 0) पर संतत नहीं हैं।

क) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^3+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ख) $$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x} + x \sin \dfrac{1}{y}, & x \neq 0, y \neq 0 \\ 1, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

E6) मान लीजिए $j = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $\pi_j = \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, j वां प्रक्षेप है। अर्थात् $\pi_j(x) = x_j$, x का j वां निर्देशांक। सिद्ध कीजिए कि π_j एक संतत फलन है।

E7) दिखाइए कि अपने प्रांत के मूल बिन्दु पर नीचे दिए गए फलन संतत हैं :

क) $x \sin y + y \sin z + z \sin x$

ख) $e^x \cos y + e^y \cos z + e^z \cos x$

ग) $\ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$

घ) $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

अगले भाग में हम अनेक चरों वाले सदिश मान फलनों की सीमा और सांतत्य की संकल्पना के बारे में चर्चा करेंगे।

4.4 $\mathbf{R}^n - \mathbf{R}^m$ पर फलन की सीमा और सांतत्य

अभी तक हम अनेक चरों वाले वास्तविक मान फलनों के ही सीमाओं और सांतत्य पर विचार करते आए हैं। इस भाग में हम सदिश मान फलनों की सीमा और सांतत्य को परिभाषित करेंगे। हम सदिश मान फलनों के सांतत्य और वास्तविक मान फलनों के सांतत्य के बीच संबंध भी स्थापित करेंगे। आप देखेंगे कि इस संबंध की वजह से केवल वास्तविक मान फलनों का अध्ययन करना ही हमारे लिए काफ़ी होगा।

परिभाषा 3: मान लीजिए f(x), विवृत गोले

$S(a, h) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \; |x-a| < h\}$,
में, संभवतः a को छोड़कर, परिभाषित एक सदिश मान फलन है जिसके मान यूक्लिडीय समष्टि $\mathbf{R}^m$ में स्थित हैं। x का a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x) की सीमा $L \in \mathbf{R}^m$ तब होती है, जबकि $\varepsilon > 0$, दिया हुआ हो तो (ε पर निर्भर) एक ऐसी वास्तविक संख्या δ, $0 < \delta < h$ होती है कि

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

मान लीजिए, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ और $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. तब, प्रतीक $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ या $\lim\limits_{\substack{x_i \to a_i \\ 1 \le i \le n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L$, या $f(x) \to L$ जबकि $x \to a$ का प्रयोग यह व्यक्त करने के लिए किया जाता है कि x का a की ओर प्रवृत्त होने पर f(x), L की ओर प्रवृत्त होता है।

ध्यान दीजिए कि दूरी $|x-a|$, $\mathbf{R}^n$ में दूरी है, जबकि दूरी $|f(x) - L|$, $\mathbf{R}^m$ में दूरी है।

E1) की तरह प्रक्रिया लागू करके हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, यदि इसका अस्तित्व है, अद्वितीय होता है।

आइए अब हम एक संतत सदिश-मान फलन परिभाषित करें।

परिभाषा 4: मान लीजिए $f(x)$, विन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ के प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है जिसके मान $\mathbf{R}^m$ में स्थित हैं। तब फलन $f(x)$ को **विन्दु a पर संतत** कहा जाता है, यदि $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

मान लीजिए $D \subseteq \mathbf{R}^n$ और $f : D \to \mathbf{R}^m$. तब यदि D के एक उपसमुच्चय A के प्रत्येक विन्दु पर f संतत हो, तो f को **A पर संतत** कहा जाता है और अगर f अपने प्रांत के प्रत्येक विन्दु पर संतत हो तो f को **संतत फलन** कहा जाता है।

यदि $f: D \to \mathbf{R}^m$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$, तो हम यह जानते हैं कि D पर m वास्तविक मान फलनों $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_m$ का अस्तित्व होता है, जो f से निर्धारित होते हैं और f को अद्वितीयतः निर्धारित करते हैं। वास्तव में $j = 1, 2, \ldots\ldots, m$ के लिए $f_j = \pi_j \circ f$, जहां $\pi_j : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, jवां प्रक्षेप है। अब हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि विन्दु a पर f संतत होता है, यदि और केवल यदि, a पर f_j, $i \le j \le m$, संतत हों।

अब, यदि $a \in \mathbf{R}^n$ पर $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ संतत हो तो $f_j = \pi_j \circ f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, दो संतत फलनों π_j और f का संयुक्त फलन होने के कारण a पर संतत होता है। ध्यान दीजिए कि यहां f, a पर संतत है और π_j, f(a) पर संतत है।

अब हमें यह सिद्ध करना रह जाता है कि यदि $a \in \mathbf{R}^n$ पर f_j, $1 \le j \le m$, संतत हों तो a पर f भी संतत होता है। इसकी उपपत्ति काफ़ी सरल है और हम इसे एक प्रश्न के रूप में हल करने के लिए आप पर छोड़ रहे हैं। (देखिए E8)।

इस तरह, हम पाते हैं कि सदिश मान फलन के सांतत्य की चर्चा वास्तविक मान फलनों के सांतत्य पर विचार करके ही की जा सकती है।

उदाहरण के लिए, $\mathbf{R}$ से $\mathbf{R}^2$ तक का फलन $t \to (\cos t, \sin t)$ संतत होता है, क्योंकि इसके घटक फलन (component functions) $t \to \cos t$ और $t \to \sin t$ सर्वत्र संतत हैं।

इसी प्रकार आप जांच कर सकते हैं कि $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^3$ तक का फलन
$(x, y) \to (\cos x, \sin x \sin y, e^x \sin y)$, $\mathbf{R}^2$ पर संतत है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E8) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ जिसके घटक फलन $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_m$ हैं। यदि विन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ पर प्रत्येक फलन f_j संतत हो तो सिद्ध कीजिए कि a पर f संतत है।

सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं को अनेक चरों वाले फलनों पर कैसे लागू किया जाता है यह हमने देखा। अगले भाग मे हम अनेक चरों वाले फलनों की सीमा को परिभाषित करने के एक और तरीके पर विचार करेंगे।

4.5 पुनरावृत्त सीमाएं

आपने सीमा की जिन परिभाषाओं का अध्ययन भाग 4.2 और भाग 4.4 में किया है, वे $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ के फलनों की सीमा की परिभाषा के ही व्यापकीकरण हैं। अब हम एक अन्य प्रकार की सीमा पर विचार करेंगे, जो खास कर अनेक चरों वाले फलनों के लिए ही परिभाषित है। क्लिष्टता से बचने के लिए हम अपनी चर्चा दो चरों वाले फलनों तक ही सीमित रखेंगे।

मान लीजिए $f(x, y)$, विन्दु (a, b) के किसी निष्कासित प्रतिवेश में परिभाषित दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। तब हम निश्चित ही सीमाओं

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right)$$

और

$$\lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right)$$

पर विचार कर सकते हैं

ये दो सीमाएं, जिन्हें पुनरावृत्त सीमाएं (repeated limits) कहा जाता है, $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ से स्वतंत्र होती हैं। $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ को युगपत सीमा (simultaneous limit) माना जाता है, क्योंकि x और y दोनों ही एक साथ क्रमशः a और b की ओर जाते हैं। नीचे दिए गए उदाहरणों में यह दिखाया गया है कि युगपत सीमा का अस्तित्व होने से हम यह अर्थ नहीं निकाल सकते कि पुनरावृत्त सीमाओं का भी अस्तित्व होगा। उसी प्रकार, पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व होने से हम यह अर्थ भी नहीं निकाल सकते हैं कि युगपत सीमा का अस्तित्व होगा।

उदाहरण 6: मान लीजिए $f(x, y) = \dfrac{(x - y)^2}{x^2+y^2}$. तब दोनों पुनरावृत्त सीमाओं

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) \quad \text{और}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$$

का अस्तित्व है और वे बराबर हैं, परन्तु युगपत सीमा $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

स्पष्ट है कि $\lim_{x\to 0} f(x, y) = 1 = \lim_{y\to 0} f(x, y)$. इसलिए

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$$

अब, मान लीजिए $y = mx$. तब

$$f(x, y) = \frac{(1 - m)^2 x^2}{(1+m^2) x^2}, \quad \text{अतः}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{(1 - m)^2}{1+m^2},$$

जिसका मान अलग-अलग m के लिए अलग-अलग है। ($m=1, 2$ लेकर जांच कीजिए)

इस तरह हम पाते हैं कि $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 7: मान लीजिए $f(x, y) = \dfrac{xy}{|y|}$. तब

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व तो है, परन्तु $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right)$ का अस्तित्व नहीं है और

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{|y|}\right) = 0.$$

चूंकि

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{|y|} = |x|,$$

इसलिए $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

और $\lim_{y\to 0^+} \dfrac{xy}{|y|} = x$ और $\lim_{y\to 0^-} \dfrac{xy}{|y|} = -x.$

इससे यह पता चलता है कि $x\neq 0$ पर $\lim_{y\to 0} \dfrac{xy}{|y|}$ का अस्तित्व नहीं है। अतः हम

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \dfrac{xy}{|y|}\right)$ के बारे में सोच भी नहीं सकते। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{|y|}\right) = 0.$$

क्या इसका मतलब यह है कि युगपत् सीमा और पुनरावृत्त सीमाओं में बिल्कुल कोई संबंध नहीं है ? इसका उत्तर "नहीं" में है। स्थिति इतनी बुरी नहीं है। कुछ ऐसी भी स्थितियां हैं जिनमें इन दोनों के बीच संबंध स्थापित किया जा सकता है।

नीचे हम एक प्रमेय दे रहे हैं, जिसमें युगपत् सीमा और पुनरावृत्त सीमाओं के बीच के संबंध को स्पष्ट किया गया है।

प्रमेय 7: मान लीजिए f(x, y) एक ऐसा वास्तविक मान फलन है कि $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L$. यदि दोनों पुनरावृत्त सीमाओं

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x, y)\right) \text{ और } \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x, y)\right)$$

का अस्तित्व हो तो इनमें से प्रत्येक सीमा L के बराबर होती है।

यहां हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं क्योंकि यह इस पाठ्यक्रम के क्षेत्र से बाहर है।

अब आप देखिए कि नीचे दिए गए प्रश्नों को आप हल कर सकते हैं अथवा नहीं।

E9) फलन $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि (0, 0) पर युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं है, जबकि दो पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है और दोनों बराबर हैं।

E10) फलन $f(x, y) = \dfrac{y-x}{y+x}\,\dfrac{1+x^2}{1+y^2}$, के लिए यह दिखाइए कि

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = -1 \text{ और } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) = 1.$$

प्रमेय 7 लागू करके $(x, y)\to(0, 0)$ होने पर f(x, y) के युगपत् सीमा के अस्तित्व की जांच कीजिए।

E11) मान लीजिए $f(x, y) = \begin{cases} 1+xy, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

तब सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x, y)\right] = 1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x, y)\right]$$

लेकिन $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

यहीं हम इस इकाई को समाप्त कर रहे हैं। अतः इस इकाई में हमने जो कुछ भी अध्ययन किया है, आ: उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

4.6 सारांश

इस इकाई में हमने :

1) फलन $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ की सीमा परिभाषित की है :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ यदि $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,$
जिससे कि $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

2) पुनरावृत्त सीमाओं पर और युगपत् सीमा के साथ उनके संबंध पर चर्चा की है।

3) अनेक चरों वाले फलनों के सांतत्य की संकल्पना परिभाषित की है:
बिन्दु a पर $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ संतत होता है, यदि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
a पर f संतत होता है, यदि $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, जिससे कि
$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

यह देखा है कि सदिश मान फलनों के सांतत्य का अध्ययन केवल वास्तविक मान फलनों के सांतत्य पर विचार करके भी किया जा सकता है।

$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ के फलनों के सांतत्य के संबंध में अनेक परिणामों के कथन दिए हैं :

संतत फलनों के बीजगणित के बारे में,
दो फलनों के संयुक्त फलन के सांतत्य के बारे में,
a के प्रतिवेश में संतत फलन f के मानों के चिह्न के बारे में, जबकि $f(a) \neq 0$.

.7 हल और उत्तर

1) मान लीजिए $f(x)$, बिन्दु a के प्रतिवेश $S(a, h)$ में, संभवतः बिन्दु a को छोड़कर, परिभाषित है। मान लीजिए $L \neq M$. तब $|L-M| > 0$.

चूंकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, इसलिए यदि हम $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2}$ लें, तो $\exists\ \delta_1 > 0,\ \delta_1 < h$,

जिससे कि $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

इसी प्रकार, चूंकि $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, इसलिए $\exists\ \delta_2 > 0,\ \delta_2 < h$,

जिससे कि $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ लीजिए। यदि $|x-a| < \delta$, तो $|x-a| < \delta_1$ और $|x-a| < \delta_2$ और $\delta < h$, क्योंकि $\delta_1 < h$ और $\delta_2 < h$.

इसलिए $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ और $|f(x) - M| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{तब } |L-M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &< 2\varepsilon = |L-M|. \end{aligned}$$

इस तरह, $|L-M| < |L-M|$, जोकि एक अंतर्विरोध है। अतः हमारा यह मान लेना कि $|L-M| > 0$, गलत है।

2) क) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ लीजिए। तब,

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r\cos\theta .\ r\sin\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}\right|$$

$$= \left|\frac{r^2\cos\theta.\sin\theta}{r}\right|$$

$$\leq r = \sqrt{x^2+y^2}$$

अब, यदि $|x| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ |y| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, तो $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$.

अतः $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon$.

इस तरह, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0.$

ख) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ लीजिए। तब;

$$\left|\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta.\ r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}\right|$$

$$= \left|\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r}\right|$$

$$\leq r^3 = (x^2+y^2)^{3/2}$$

अब, यदि $|x| < \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$, $|y| < \frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$, तो

$$(x^2+y^2)^{3/2} < \left(\frac{\varepsilon^{2/3}}{2} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{2}\right)^{3/2} = \varepsilon.$$

इसलिए $\left|\frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \varepsilon.$

अर्थात् $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

ग) चूँकि $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (x^2+3xyz-5z^2) = -20$

और $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (xy^3+5z^2-3xy+x^3) = 20,$

सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \left(\frac{x^2+3xyz-5z^2}{xy^3+5z^2-3xy+x^3}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (x^2+3xyz-5z^2)}{\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} (xy^3+5z^2-3xy+x^3)} = \frac{-20}{20} = -1$$

घ) चूंकि

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin y = 0 \text{ और } \lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+1) = 1 \neq 0,$$

इसलिए, सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\sin y}{2x^2+1}\right) = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin y}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x^2+1)} = \frac{0}{1} = 0.$$

E3) क) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$

यदि हम $y = \phi_1(x) = mx$ लें, तो

$$f(x, \phi_1(x)) = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

m के अलग-अलग मानों के लिए इसका मान अलग-अलग होगा। इससे यह पता चलता है कि फलन की अलग-अलग दिशाओं में अलग-अलग सीमाएं है। अतः फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ख) उपप्रमेय 1 के अनुसार, यह सिद्ध कर देना ही पर्याप्त है कि ऐसे वास्तविक मान फलनों $\phi_1(x)$ और $\phi_2(x)$ का अस्तित्व होता है कि

$$\lim_{x\to 0} \phi_1(x) = 0 = \lim_{x\to 0} \phi_2(x)$$

और $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x, \phi_2(x))$

मान लीजिए $\phi_1(x) = x^2$ और $\phi_2(x) = x - x^2$. तब,

$$\lim_{x\to 0} \phi_1(x) = \lim_{x\to 0} \phi_2(x) = 0.$$

और

$$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

और $$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_2(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x-x^2}$$

$$= \lim x = 0.$$

इस तरह, $\lim_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim_{x \to 0} f(x, \phi_2(x))$

अतः प्रमेय 1 के अनुसार सीमा का अस्तित्व नहीं है।

ग) मान लीजिए $\phi_1(x) = m_1 x$ और $\phi_2(x) = m_2 x$.

$\lim_{x \to 0} \phi_1(x) = \lim_{x \to 0} \phi_2(x) = 0.$

अब, $$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) = \frac{x^2 - m_1^2 x^2}{x^2+m_1^2 x^2} + \frac{2x.m_1 x}{x^2+m_1^2 x^2}$$

$$= \frac{1-m_1^2}{1+m_1^2} + \frac{2m_1}{1+m_1^2}$$

$$= \frac{1+2m_1-m_1^2}{(1+m_1^2)}$$

इसी प्रकार, $$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_2(x)) = \frac{1+2m_2-m_2^2}{(1+m_2^2)}$$

तब, $\lim_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim_{x \to 0} f(x, \phi_2(x))$. $m_1 = 1$ और $m_2 = -1$ लेकर जांच कीजिए।

अतः सीमा का अस्तित्व नहीं है।

E4) क) हम ऐसा δ ज्ञात करना चाहते हैं कि यदि $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ और $|z| < \delta$, तो $|x^2+y^2+z^2| < 0.01$.
अब, $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ और $|z| < \delta \Rightarrow x^2+y^2+z^2 < 3\delta^2$.

तब, अगर हम ऐसा δ लें कि $3\delta^2 < 0.01$, तो हमारा काम हो जाएगा! उदाहरण के लिए, हम $\delta = 0.05$ ले सकते हैं।

ख) यदि $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, तब $|xy| < \delta^2$। तब हम एक ऐसा δ ले सकते हैं कि $\delta^2 < 0.0004$। उदाहरण के लिए $\delta = 0.01$.

E5) क) यह सिद्ध करने के लिए कि एक बिन्दु पर फलन असंतत है, यह दिखा देना ही काफ़ी होता है कि एक विशेष दिशा में सीमा का अस्तित्व है परन्तु यह $f(0, 0)$ के बराबर नहीं है।
मान लीजिए $\phi_1(x) = x$. तब

$$\lim_{x \to 0} f(x, \phi_1(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1} = 0 \neq 2 = f(0,0).$$

अतः f संतत नहीं है।

ख) आप उदाहरण 1 में यह देख चुके हैं कि

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y} \right) = 0.$$

परंतु $f(0,0) = 1$. इसलिए $(0,0)$ पर फलन संतत नहीं है।

E6) मान लीजिए $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. हमें यह दिखाना है कि
$\lim_{x \to a} \pi_j(x) = a_j = \pi_j(a)$ (a, b) $\in$ D है।
मान लीजिए $\varepsilon > 0$ दिया हुआ

$$|\pi_j(x) - \pi_j(a)| = |\pi_j(x_1, \ldots, x_n) - \pi_j(a_1, \ldots, a_n)|$$
$$= |x_j - a_j|.$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $\delta_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, लीजिए । तब

$$0 < |x_i - a_i| < \delta_i,\ 1 \le i \le n \Rightarrow |\pi_j(x) - \pi_j(a)| = |x_j - a_j| < \delta_j < \varepsilon.$$

अतः प्रमेय 2 से

$$\lim_{x \to a} \pi_j(x) = \pi_j(a).$$

इससे यह पता चलता है कि π_j संतत है ।

E7) क) $|x \sin y + y \sin z + z \sin x| \le |x| + |y| + |z|$

तब $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{3}$ और $|z| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$
$|x \sin y + y \sin z + z \sin x| < \varepsilon.$

इस तरह, प्रमेय 2 लागू करने पर

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} (x \sin y + y \sin z + z \sin x) = 0.$$

इससे यह पता चलता है कि 0 पर फलन संतत है ।

ख) सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} (e^x \cos y + e^y \cos z + e^z \cos x) =$$
$$= \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} e^x \cdot \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \cos y + \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} e^y \cdot$$
$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \cos z + \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} e^z \cdot \lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \cos x$$

$= 1 + 1 + 1 = 3$, क्योंकि $\lim_{t \to 0} e^t = e^0 = 1$ और $\lim_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1$.

ग) मान लीजिए $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.
तब $f = g \circ h$ जहां $h(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$ और $g(t) = \ln t$.
स्पष्ट है कि $(0,0,0)$ पर फलन h संतत है और $h(0,0,0) = 1$ पर g संतत है ।
अतः प्रमेय 6 लागू करने पर हम यह पाते हैं कि $(0,0,0)$ पर f संतत है ।

घ) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.
मान लीजिए $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_2|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
तब, f_i अनेक चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है । और प्रत्येक $i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $f_i = g \circ \pi_i$, जहां $g(t) = |t|$.
प्रत्येक i के लिए π_i, $(0, 0, \ldots, 0)$ पर संतत है और g, $\pi_i(0,0,\ldots,0) = 0$ पर संतत है । अतः प्रमेय 6 लागू करने पर $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ के लिए f_i संतत है । तब सीमाओं का बीजगणित लागू करने पर हम यह पाते हैं कि $(0,0,\ldots,0)$ पर f संतत है ।

E8) मान लीजिए a पर प्रत्येक f_j संतत है । तब $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो ऐसी वास्तविक संख्याएं

$\delta_i > 0$, $1 \le i \le n$, होती हैं कि $|x - a| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

मान लीजिए $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. तब

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2} < \varepsilon.$$

इससे यह पता चलता है कि a पर f संतत है ।

E9) हम E3) में यह देख चुके हैं कि फलन ... करने पर हमें ... की युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं है ।

पुनरावृत्त सीमाओं $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$, $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$ का अस्तित्व है

और दोनों शून्य के बराबर हैं, क्योंकि $\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ और $\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

E10) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{y-x}{y+x}\frac{1+x^2}{1+y^2}\right) = \frac{y}{y\,(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2}$

इसलिए $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{y-x}{y+x}\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y^2} = 1.$ अब

$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y-x}{y+x}\frac{1+x^2}{1+y^2}\right) = -(1+x^2)$

अतः $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{y-x}{y+x}\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)\right] = -1.$

इससे यह पता चलता है कि दोनों पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व है। तब प्रमेय 7 लागू करके हम कह सकते हैं कि यदि युगपत् सीमा $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)\,(1+x^2)}{(y+x)\,(1+y^2)}$ का अस्तित्व हो तो दोनों

पुनरावृत्त सीमाएं बराबर होंगी। परन्तु हम जानते हैं कि ये पुनरावृत्त सीमाएं बराबर नहीं हैं। अतः इस स्थिति में युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं है।

E11) $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$ और तब

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = 1.$

इसी प्रकार, $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = 1.$

$y = \phi_1(x) = x$ लीजिए। तब

$\lim_{x\to 0} f(x, \phi_1(x)) = \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1$

और जब हम $y = \phi_2(x) = 0$ लेते हैं तब प्रत्येक x के लिए $\lim_{x\to 0} f(x, \phi_2(x)) = 0,$
क्योंकि $y = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow f(x,y) = 0.$

इससे यह पता चलता है कि युगपत् सीमा का अस्तित्व नहीं है।

इकाई 5 प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज और अवकलनीयता

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

आप एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन के अवकलज की संकल्पना से अच्छी तरह परिचित हैं (कलन, इकाई 3)। इस इकाई में हम अनेक चरों वाले फलनों के अवकलज की संकल्पना का अध्ययन करेंगे। आप इकाई 3 में इस प्रकार के फलनों से परिचित हो चुके हैं। आपने यह भी देखा है कि सीमा तथा सांतत्य की संकल्पनाओं को इन फलनों पर लागू किया जा सकता है।

एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन के अवकलज की परिभाषा को हम n चरों $(n>1)$ वाले वास्तविक मान फलन पर अक्षरशः व्यापकीकृत नहीं कर सकते, क्योंकि किसी $h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0$ के लिए भागफल $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ का कोई अर्थ नहीं होता। आपको पता है कि $\mathbf{R}^n$ में एक सदिश से भाग नहीं दिया जा सकता।

फिर भी, यदि हम अवकलज की परिभाषा की जांच और अच्छी तरह से करें तो हम देखेंगे कि एक चर वाला फलन एक बिन्दु पर अवकलनीय होता है, यदि और केवल यदि, दो दिक्-अवकलज (directional derivative) अर्थात् दक्षिण अवकलज और वाम अवकलज का अस्तित्व हो और वे उस बिन्दु पर समान हों।

बाद में हम इकाई 6 में यह देखेंगे कि दिक्-अवकलज की इस संकल्पना का व्यापकीकरण अनेक चरों वाले फलनों के लिए किया जा सकता है। इसे $\mathbf{R}^n$ में लागू करने में एक कठिनाई यह है कि यहां हमारा सामना अनंततः अनेक दिशाओं से होता है। फिर भी, शुरू में हम अपना अध्ययन केवल उन्हीं विशेष दिशाओं तक सीमित रखेंगे जो निर्देश-अक्षों के समांतर हैं। इससे हमें आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं। इस इकाई में हम अनेक चरों वाले फलन के आंशिक अवकलज की संकल्पना के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे। यहां इस बात पर ध्यान देना आवश्यक है कि आंशिक अवकलज की इस संकल्पना से एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन के अवकलज की संकल्पना का सही व्यापकीकरण नहीं होता। इस इकाई में हम बाद में आपको अनेक चरों वाले फलनों की अवकलनीयता की संकल्पना से परिचित कराएंगे और अवकलनीयता, सांतत्य और आंशिक अवकलज के अस्तित्व के बीच के संबंध पर चर्चा करेंगे।

इस पूरी इकाई में जहां कहीं भी शब्द "फलन" का प्रयोग किया जाएगा वहां इसका अर्थ होगा अनेक चरों वाला वास्तविक मान फलन अर्थात् $D \to \mathbf{R}$ का एक फलन, जहां D, $\mathbf{R}^n$, $n>1$ का एक उपसमुच्चय है। यद्यपि यहां हम व्यापक रूप में n चरों वाले वास्तविक मान फलनों की परिभाषाएं देंगे, परन्तु हमारा अध्ययन अधिकतर दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों तक ही सीमित रहेगा। हां, यहां हम तीन चरों वाले वास्तविक मान फलनों पर भी संक्षेप में चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप:

- अनेक चरों वाले फलनों के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज परिभाषित कर सकेंगे,
- एक विशेष चर के सापेक्ष दिए हुए अनेक वास्तविक चरों वाले वास्तविक मान फलन को आंशिकतः अवकलित कर सकेंगे,
- दो चरों वाले फलनों के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का ज्यामितीय विवेचन कर सकेंगे,
- यह बता सकेंगे कि दो या अधिक चरों वाला दिया हुआ फलन अवकलनीय है अथवा नहीं,
- अनेक चरों वाले फलन के सांतत्य, अवकलनीयता और आंशिक अवकलजों के अस्तित्व के बीच के संबंध को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण दे सकेंगे।

5.2 प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज

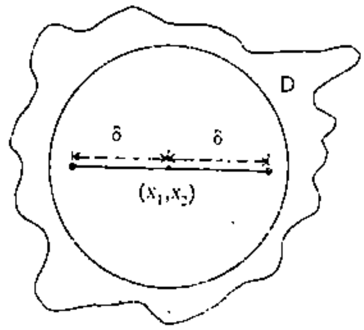
इस भाग में हम देखेंगे कि एक बिन्दु पर आंशिक अवकलज (partial derivative) का क्या अर्थ होता है। एक चर वाले फलन के अवकलज की परिभाषा तो आप कर सकते हैं। इसी परिभाषा का प्रयोग हम अनेक चरों वाले फलनों के आंशिक अवकलजों को परिभाषित करने में करेंगे।

5.2.1 परिभाषाएं और उदाहरण

एक फलन $f : D \to \mathbf{R}$, लीजिए, जहां $D \subseteq \mathbf{R}^n$. मान लीजिए $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, D का एक आंतरिक बिन्दु (interior point) है। अर्थात् D में आविष्ट केन्द्र $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ वाले एक विवृत गोले का अस्तित्व है। तब प्रत्येक i, $1 \le i \le n$, के लिए इस फलन f से हम वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन की रचना इस प्रकार कर सकते हैं:

एक लघु संख्या $\delta > 0$ लीजिए जिससे कि सभी $h \in]-\delta, \delta[$ के लिए बिन्दु $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D$. ऐसे δ का अस्तित्व होता है क्योंकि $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, D का एक आंतरिक बिन्दु है। इसे हमने चित्र-1 में $n = 2$ के लिए दिखाया है। अब हम $f_i :]-\delta, \delta[\to \mathbf{R}$ परिभाषित कर सकते हैं, जिससे कि सभी $h \in]-\delta, \delta[$, $h \neq 0$, के लिए

$$f_i(h) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$



चित्र 1

अब, यदि $\lim_{h \to 0} f_i(h)$ का अस्तित्व है तो हम यह कहते हैं कि बिन्दु $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ पर i वें चर x_i के सापेक्ष f के प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलज का अस्तित्व है। और तब बिन्दु $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ पर $\lim_{h \to 0} f_i(h)$ के मान को f का प्रथम कोटि का iवां आंशिक अवकलज कहा जाता है।

यहां इस बात की ओर आपको अवश्य ध्यान देना चाहिए कि $\lim_{h \to 0} f_i(h)$ के अस्तित्व की जांच करने के लिए इतना ही काफ़ी है कि विचाराधीन बिन्दु के प्रतिवेश में f परिभाषित है। अब हम इसकी औपचारिक परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा 1: मान लीजिए $f : D \to \mathbf{R}$, जहां $D \subseteq \mathbf{R}^n$ और मान लीजिए $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, D का एक आंतरिक बिन्दु है। तब, बिन्दु $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ पर फलन f के iवें आंशिक अवकलज का अस्तित्व होता है, यदि

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$ का अस्तित्व हो।

इस सीमा के मान को बिन्दु $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ पर f का iवां आंशिक अवकलज कहा जाता है।

जब कभी हम यह कहते हैं कि सीमा का अस्तित्व है तो हमारे कहने का तात्पर्य यह होता है कि परिमित सीमा का अस्तित्व है।

यूं तो दिए हुए फलन के आंशिक अवकलज को विभिन्न प्रतीकों से प्रकट किया जाता है, लेकिन यहां हम f के प्रथम कोटि के iवें आंशिक अवकलज को प्रकट करने के लिए अपनी सुविधानुसार केवल प्रतीकों

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \; f_{x_i}, \quad \text{या} \quad D_i f,$$

का प्रयोग करेंगे। यदि हम उस बिन्दु का निर्देश करना चाहते हैं, जिसपर आंशिक अवकलज परिकलित किया गया है, तब हम

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ को "डेल f बटा डेल x_i" पढ़ा जाता है।

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

या $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

या $D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

लिखते हैं ।

हम कलन पाठ्यक्रम में यह देख चुके हैं कि एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलन को व्यक्त करने के लिए $y = f(x)$ लिखा जाता है । दो चरों वाले फलनों के लिए प्रायः $z = f(x, y)$ लिखा जाता है और तब बिन्दु (x, y) पर f के दो आंशिक अवकलजों

को $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ से प्रकट किया जाता है ।

टिप्पणी 1: i) ध्यान दीजिए कि (सांतत्य की तरह) फलन का आंशिक अवकलज **स्थानीय** होता है, अर्थात् जब हम यह कहते हैं कि एक समुच्चय A पर फलन के आंशिक अवकलज का अस्तित्व है तो हमारे कहने का अर्थ यह होता है कि A के प्रत्येक बिन्दु पर फलन के आंशिक अवकलज का अस्तित्व है

ii) एक बिन्दु पर के आंशिक अवकलज की परिभाषा से स्पष्ट है कि बिन्दु के प्रतिवेश में फलन अवश्य परिभाषित होना चाहिए । इस तरह हम यह पाते हैं कि प्रांत D के केवल आंतरिक बिन्दुओं पर ही हम आंशिक अवकलज को परिभाषित कर सकते हैं । उदाहरण के लिए, यदि $\mathbf{R}^2$ में D एक वृत्त हो तो हम इस वृत्त की परिधि के बिन्दु पर आंशिक अवकलज को परिभाषित नहीं कर सकते हैं ।

iii) यदि f का $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ पर एक आंशिक अवकलज हो तो इसका मान उस बिन्दु के इर्द-गिर्द एक विवृत गोले में f के मानों पर ही निर्भर करता है । यदि इस फलन में इस गोले के बाहर कोई परिवर्तन आता हो तो इससे आंशिक अवकलज के मान पर कोई अंतर नहीं आता ।

अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा यह दिखाएंगे कि आंशिक अवकलज किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं । यदि कोई विशेष बिन्दु न दिया हुआ हो तो इससे यह अर्थ निकलता है कि हमें $n = 2$ अथवा $n = 3$ के अनुसार बिन्दु (x, y) या (x, y, z) पर आंशिक अवकलज ज्ञात करना है ।

उदाहरण 1: मान लीजिए $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ एक फलन है, जो $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ से परिभाषित है । आइए अब हम $f_x(x, y)$ और $f_y(x, y)$ ज्ञात करें ।

परिभाषा के अनुसार,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h)\,y + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + xy + hy + y^3 - x^2 - xy - y^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h + y) \\ &= 2x + y \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{x^2 + x(y+k) + (y+k)^3 - x^2 - xy - y^3}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{xk + 3y^2k + 3yk^2 + k^3}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} (x + 3y^2 + 3yk + k^2) \\ &= x + 3y^2 \end{aligned}$$

जब हम दो चरों x और y वाले फलनों पर विचार कर रहे होते हैं तो हम सामान्यतः x में की गई वृद्धि को अक्षर h से और y में की गई वृद्धि को अक्षर k से प्रकट करते हैं। इसी प्रकार, जब तीन चरों x, y और z वाले फलनों पर विचार कर रहे होते हैं तो x, y और z में की गई वृद्धियों के लिए क्रमशः अक्षर p, q और r का प्रयोग करते हैं। यह केवल एक परंपरा है और इसे नियम नहीं माना जा सकता। अगले उदाहरण में हम तीन चरों वाला एक फलन लेंगे।

उदाहरण 2: मान लीजिए $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ एक फलन है जो
$f(x, y, z) = xy + yz + zx$ से परिभाषित है। आइए अब हम बिन्दु (a, b, c) पर आंशिक अवकलज प्राप्त करें। परिभाषा के अनुसार,

$$f_x(a, b, c) = \lim_{p \to 0} \frac{f(a+p, b, c) - f(a, b, c)}{p}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{(a+p)\,b + bc + c\,(a+p) - ab - bc - ca}{p}$$

$$= b + c$$

$$f_y(a, b, c) = \lim_{q \to 0} \frac{f(a, b+q, c) - f(a, b, c)}{q}$$

$$= \lim_{q \to 0} \frac{a(b+q) + (b+q)\,c + ca - ab - bc - ca}{q}$$

$$= a + c$$

$$f_z(a, b, c) = \lim_{r \to 0} \frac{f(a, b, c+r) - f(a, b, c)}{r}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{ab + b\,(c+r) + (c+r)\,a - ab - bc - ca}{r}$$

$$= b + a$$

अगले उदाहरण में हम n चरों वाले फलन के आंशिक अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 3 : मान लीजिए $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ एक फलन है, जो $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ से परिभाषित है।

बिन्दु $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, पर x_i के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज प्राप्त करने के लिए हम लिखते हैं :

$$f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{i-1}^2 + (a_i+h)^2 + a_{i+1}^2 + \ldots + a_n^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2a_i h + h^2}{h}$$

$$= 2a_i.$$

अब आप इन प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E1) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, जो सभी (x, y) के लिए $f(x, y) = c$ से परिभाषित है। दिखलाइए कि सभी बिन्दुओं (a, b) के लिए $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$.

E2) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, जो

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

से परिभाषित है। दिखलाइए कि $f_x(0,0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

E3) मान लीजिए $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ जो

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

से परिभाषित है। दिखलाइए कि $f_x(0, 0) = 1$ और $f_y(0, 0) = 0$.

इन उदाहरणों और अभ्यासों में आपने देखा होगा कि $f_x(x, y)$ फलन $f(x, y)$ का वह अवकलज है, जबकि $f(x, y)$ को केवल एक चर, x वाला फलन माना गया हो और y को अचर माना गया हो। इसी प्रकार, $f_y(x, y)$, $f(x, y)$ का वह अवकलज है, जबकि $f(x, y)$ को केवल एक चर, y वाला फलन माना गया हो और x को अचर माना गया हो। अधिक चरों वाले फलनों के संबंध में $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, x_i के सापेक्ष $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ का वह अवकलज होता है, जबकि अन्य चरों को अचर मान लिया गया हो। इस तरह, आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए हम केवल एक वास्तविक चर वाले फलनों के अवकलज ज्ञात करने की विधियों को लागू कर सकते हैं और इस तरह लंबी सीमांत प्रक्रियाओं से बच सकते हैं।

इस विधि से संबंधित एक उदाहरण हम यहां दे रहे हैं।

उदाहरण 4: आइए हम निम्नलिखित फलनों के आंशिक अवकलज ज्ञात करें :

i) $z = x^3 - 4x^2y^2 + 8y^2$

ii) $z = x \sin y + y \cos x$

iii) $z = xe^y + y e^x$.

कलन पाठ्यक्रम (खंड 1) में आपने देखा है कि बहुपदीय, त्रिकोणमितीय और चर घातांकी फलन अवकलनीय होते हैं।

यहां हम देखते हैं कि इन तीनों स्थितियों में फलन बहुपद, त्रिकोणमितीय अथवा चरघातांकीय फलनों से बने हैं। इससे यह बात सुनिश्चित हो जाती है कि इनके आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। इनका प्रत्यक्ष अवकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -8x^2y + 16y$

ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sin y - y \sin x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cos y + \cos x$

iii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x$

परन्तु ध्यान रहे कि सदा ही आंशिक अवकलज आसानी से ज्ञात नहीं किए जा सकते। कुछ विशेष स्थितियों में हमें सीमांत प्रक्रिया लागू करनी पड़ती है। और अभ्यास से ही आप इन स्थितियों को पहचान सकेंगे। एक ऐसी ही स्थिति आप अगले उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण 5 : मान लीजिए $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ एक फलन है, जो

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$ से परिभाषित है।

आइए हम बिन्दुओं $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ और (a, b) पर, जहां $a \neq 0$, $b \neq 0$, दोनों आंशिक अवकलज प्राप्त करें।

अब, परिभाषा के अनुसार

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

$$f_x(a, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, 0) - f(a, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(a, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, 0+k) - f(a, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{ak}{a^4 + k^4}}{k} = \frac{1}{a^3}$$

$$f_x(0, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, b) - f(0, b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{bh}{b^4 + h^4}}{h} = \frac{1}{b^3}$$

$$f_y(0, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, b+k) - f(0, b)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(a+h)\,b}{(a+h)^4 + b^4} - \frac{ab}{a^4 + b^4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ab+hb)(a^4+b^4) - (ab)(a^4+4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4+b^4)}{h(a^4+b^4)[(a+h)^4 + b^4]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{b(a^4+b^4) - (ab)(4a^3+6a^2h+4h^2a+h^3)}{(a^4+b^4)[(a+h)^4+b^4]}$$

$$= \frac{b^5 - 3a^4b}{(a^4+b^4)^2}$$

$$f_y(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{a(b+k)}{a^4+(b+k)^4} - \frac{ab}{a^4 + b^4}}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{(ab+ak)(a^4+b^4) - (ab)(a^4+b^4+4b^3k+6b^2k^2+4bk^3+k^4)}{k(a^4+b^4)[a^4 + (b+k)^4]}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{a(a^4+b^4) - (ab)(4b^3+6b^2k+4bk^2+k^3)}{(a^4+b^4)[a^4+(b+k)^4]}$$

$$= \frac{a^5 - 3ab^4}{(a^4+b^4)^2}.$$

इस उदाहरण में प्रत्यक्ष अवकलन करके हम $f_x(a, b)$ और $f_y(a, b)$, $(a, b) \neq (0, 0)$, तो प्राप्त कर सकते थे, लेकिन $f_x(0, 0)$ या $f_y(0, 0)$ प्राप्त नहीं कर सकते थे। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है ? $(x, y) \neq (0, 0)$ के लिए $f(x, y)$, दो बहुपदीय फलनों का भागफल है। इसलिए हम इन बिन्दुओं पर के आंशिक अवकलज प्रत्यक्ष अवकलन से परिकलित कर सकते हैं। लेकिन $f_x(0,0)$ और $f_y(0,0)$ का परिकलन करने के लिए हमें $f(0, 0)$ का प्रयोग करना होगा। और $f(0, 0)$ उसी भागफल से परिभाषित नहीं होता है। ध्यान दीजिए कि $f_x(a, b)$ और $f_y(a, b)$ में $a=0$ या $b=0$ प्रतिस्थापित करके हम $f_x(0,b)$, $f_y(0, b)$, $f_x(a, 0)$ और $f_y(a, 0)$ पा सकते थे।

आपको $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तक के कुछ ऐसे फलन देखने को अवश्य मिले होंगे, जिनके कुछ बिन्दुओं पर अवकलज नहीं होते। उदाहरण के लिए, $x=0$, पर $f(x) = |x|$ को अवकलित नहीं किया जा सकता। नीचे हम दो चरों वाले एक फलन का उदाहरण दे रहे हैं, जिनके आंशिक अवकलजों का कुछ बिन्दुओं पर अस्तित्व नहीं होता।

उदाहरण 6 : यदि $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ एक फलन हो जो

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, & y \neq 0, x \neq 0 \\ 0 & , \text{अन्यथा} \end{cases}$$

से परिभाषित हो, तो $f_x(0, 1)$ और $f_y(1, 0)$ का अस्तित्व नहीं होता। आइए अब हम इसे सिद्ध करें।

यहां

$$\frac{f(0+h, 1) - f(0, 1)}{h} = \frac{h + \frac{1}{h} - 0}{h} = 1 + \frac{1}{h^2}$$

और

$$\frac{f(1, 0+k) - f(1, 0)}{k} = \frac{\frac{1}{k} + k - 0}{k} = \frac{1}{k^2} + 1.$$

चूंकि $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t^2} = \infty$, इसलिए न तो

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h, 1) - f(0, 1)}{h}$ का और न ही $\lim\limits_{k \to 0} \frac{f(1, 0+k) - f(1, 0)}{k}$

का अस्तित्व होता है। अतः $f_x(0, 1)$ और $f_y(1,0)$ का अस्तित्व नहीं होता।

अब आप इससे संबंधित कुछ प्रश्न खुद हल कीजिए।

E4) यदि $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, तो विन्दु (1, 2) पर $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

E5) निम्नलिखित फलनों के सभी प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए :

क) $\sin(x^2 - y)$ ख) $\frac{1}{\sqrt{x+y^2+z^2+1}}$

ग) $y \sin xz$ घ) x^y ङ) $x^3y + e^{xy^2}$

E6) दिखलाइए कि फलन $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ प्रतिबंधों $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ को संतुष्ट करते हैं।

E7) मान लीजिए $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ और $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ दो अवकलनीय फलन हैं और मान लीजिए सभी x और y के लिए $F(x, y) = f(x) + g(y)$. दिखलाइए कि $F_x(x, y) = f'(x)$ और $F_y(x, y) = g'(y)$.

E8) मान लीजिए f और g दो वास्तविक फलन हैं, जिनके लिए $f_x(a, b)$ और $g_x(a, b)$ का अस्तित्व है। दिखलाइए कि (a, b) पर $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}$ का अस्तित्व है और वह $f_x(a, b) + g_x(a, b)$ के बराबर है।

क्या इसका विलोम सत्य है ?

इन प्रश्नों को हल करके आपको आंशिक अवकलज परिकलित करने का काफ़ी अभ्यास हो गया होगा। अगले भाग में हम आंशिक अवकलजों का ज्यामितीय विवेचन करेंगे।

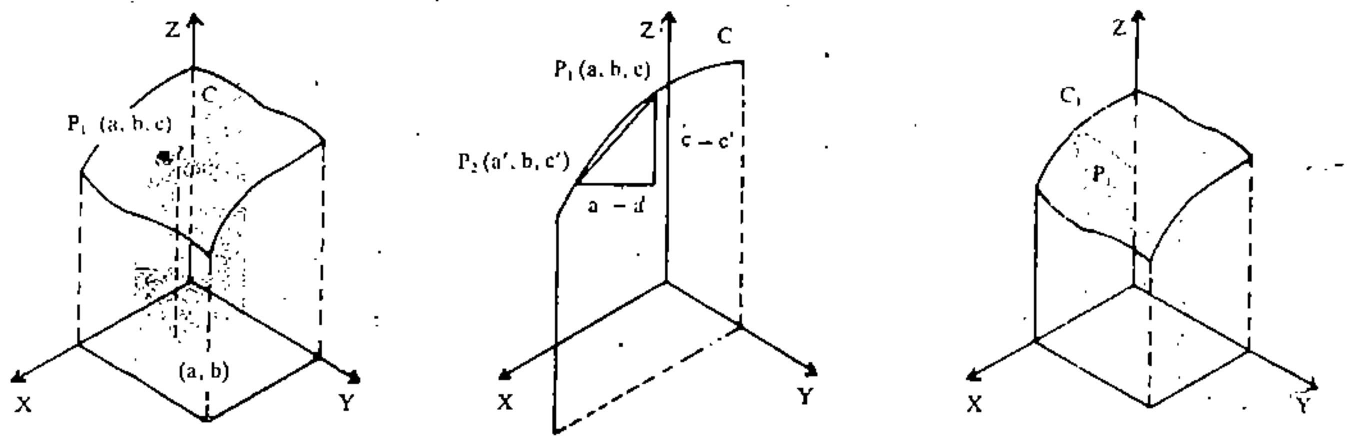
5.2.2 ज्यामितीय विवेचन

आपको पता है कि एक चर वाले वास्तविक मान फलन f के अवकलज $f'(x)$ से हमें वक्र $y = f(x)$ के स्पर्श-रेखा की प्रवणता मिलती है। अब हम दो चरों वाले वास्तविक मान फलन के आंशिक अवकलजों को ज्यामितीय दृष्टि से देखने की कोशिश करेंगे।

आप को याद होगा कि इस प्रकार का फलन $\mathbf{R}^3$ में एक पृष्ठ को निरूपित करता है।

मान लीजिए f(x, y) दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है और $S = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ एक पृष्ठ (surface) है जो $\mathbf{R}^3$ में फलन f(x, y) से निरूपित है। मान लीजिए विन्दु (a, b) पर f(x, y) के दोनों अवकलजों का अस्तित्व है और $c = f(a, b)$. मान लीजिए P_1 पृष्ठ S पर एक विन्दु (a, b, c) है। अब, समतल $y = b$, जोकि XOZ-समतल के समांतर है और P_1 से होकर जाता है, पृष्ठ S को

एक वक्र में प्रतिच्छेद करेगा। मान लीजिए यह वक्र C है, जैसा कि चित्र 2 (क) में दिखाया गया है। वक्र C का विस्तारित रूप आप चित्र 2 (ख) में देख सकते हैं।



(क) (ख) (ग)

चित्र 2

मान लीजिए वक्र C पर P_1 के निकट एक बिन्दु P_2 है जिसके निर्देशांक (a′, b′, c′) हैं। चूँकि बिन्दु P_2 पृष्ठ S और समतल $y=b$ पर स्थित है, इसलिए $b' = b$ और $c' = f(a', b)$. स्पष्ट है कि $P_1 P_2$ समतल $y=b$ में बिन्दुओं (a, c) और (a′, c′) को मिलाने वाली एक रेखा है। इस रेखा की प्रवणता है :

$$\frac{c'-c}{a'-a} = \frac{f(a', b) - f(a, b)}{a'-a}$$

$$= \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \text{ यदि हम } a' = a+h \text{ लिखें।}$$

जैसे-जैसे h, शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, वैसे-वैसे छेदक-रेखा (secant) P_1P_2 वक्र C के बिन्दु P_1 पर स्पर्श रेखा होती जाती है। इसलिए $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$, अर्थात् $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ या $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a, b)}$ से वक्र C के, जोकि पृष्ठ $z=f(x, y)$ और समतल $y=b$ का प्रतिच्छेद है, बिन्दु (a, b, c) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता प्राप्त हो जाती है। इसी प्रकार $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(a, b)}$ वक्र C_1 के, जोकि पृष्ठ $z=f(x, y)$ और समतल $x=a$ का प्रतिच्छेद है, बिन्दु (a, b, c) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है। हम इस तथ्य का प्रयोग नीचे दिए उदाहरण में करेंगे।

उदाहरण 7: मान लीजिए हम समतलों $x=2$ और $y=3$ तथा पृष्ठ $z=xy+3x^2$ के प्रतिच्छेद-वक्रों के बिन्दु (2, 3, 18) पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणताएं ज्ञात करना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि समतल $x = 2$ और पृष्ठ $z=xy+3x^2$ के प्रतिच्छेद-वक्र के बिन्दु (2, 3, 18) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2, 3)}$ होगी।

अब, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2, 3)} = (x)_{(2, 3)} = 2.$

अतः समतल $x = 2$ और पृष्ठ $z = xy+3x^2$ के प्रतिच्छेद-वक्र के बिन्दु (2, 3, 18) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 होगी।

इसी प्रकार, चूँकि $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(2,3)} = (y+6x)_{(2,3)} = 15$, इसलिए समतल $y=3$ और पृष्ठ $z=xy+3x^2$ के प्रतिच्छेद-वक्र के बिंदु (2, 3, 18) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 15 होगी।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E 9) समतल $y=z$ और पृष्ठ $z=2x^2+3y^2$ के प्रतिच्छेद वक्र के बिन्दु (1, 2, 14) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

आप जानते हैं कि अगर $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ किसी बिंदु पर अवकलनीय हो, तो वह उस बिंदु पर संतत भी होता है। क्या ऐसा कोई संबंध $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ तक के फलनों के सांतत्य और आंशिक अवकलजों के अस्तित्व में भी है? आइए देखें।

5.2.3 सांतत्य और आंशिक अवकलज

यदि फलन $f(x, y)$ के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, तो इससे हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

मान लीजिए $f(x, y)$ एक वास्तविक मान फलन है जिसके बिन्दु (a, b) पर आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। तब $h \neq 0$, के लिए $f(a+h, b) - f(a, b) = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} h.$

$$\text{अतः } \lim_{h\to 0} [f(a+h, b) - f(a, b)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} . \lim_{h\to 0} h$$

$$= f_x(a, b).\, 0$$

$$= 0.$$

इसलिए $h \to 0$ होने पर $f(a+h, b) \to f(a, b)$.

अर्थात् x-अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश (x, y) का (a, b) की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x, y) \to f(a,)$. इसी प्रकार, दूसरे आंशिक अवकलज के अस्तित्व से यह पता चलता है कि y-अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश (x, y) का (a, b) की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x, y) \to f(a, b)$. $f_x(a, b)$ और $f_y(a, b)$ के अस्तित्व से हमें और कोई जानकारी नहीं मिलती है। इसलिए हम यह नहीं बता सकते कि किसी और पथ के अनुदिश $(x, y) \to (a, b)$ होने पर $f(x, y)$ की सीमा का अस्तित्व होगा या नहीं। परन्तु इकाई 4 में आप देख चुके हैं कि (a, b) पर $f(x, y)$ तब संतत होगा जबकि किसी भी पथ के अनुदिश $(x, y) \to (a, b)$ होने पर $f(x, y) \to f(a, b)$. और यह आवश्यक नहीं है कि यह पथ एक सरल रेखा ही हो। इस तरह, ऊपर की चर्चा से यह स्पष्ट हो जाता है कि केवल आंशिक अवकलज के अस्तित्व से ही यह बात सुनिश्चित नहीं हो जाती है कि उस बिन्दु पर फलन संतत है। इस तथ्य को नीचे दिए गए उदाहरण में दिखाया गया है। बाद में चलकर हम यह दिखाएंगे कि यदि आंशिक अवकलज कुछ अतिरिक्त आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हों तो उनके अस्तित्व से यह पता चल जाता है कि फलन संतत है।

उदाहरण 8: मान लीजिए $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ एक फलन है जो

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$ से परिभाषित है।

यहां हम यह देखेंगे कि (0, 0) पर f के दोनों आंशिक अवकलजों अर्थात् $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व तो है परन्तु f, (0, 0) पर संतत नहीं है।

अब, $f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$, और

$$f_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि (0, 0) पर f के दोनों प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। परन्तु यह फलन बिन्दु (0, 0) पर संतत नहीं है, क्योंकि $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है (देखिए इकाई 4 का E3 (क))।

हम जानते हैं कि यह आवश्यक नहीं है कि एक वास्तविक चर का वास्तविक मान संतत फलन अवकलनीय भी हो। यही बात अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू होती है। अर्थात्, यह आवश्यक नहीं है कि चरों वाले फलन का, जो एक बिन्दु पर संतत है, उस बिन्दु पर कोई आंशिक अवकलज भी हो।

$f(x) = |x|$, 0 पर संतत है, परन्तु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

इस तथ्य को नीचे दिए गए उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 9 : मान लीजिए $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ एक फलन है, जो $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ से परिभाषित है। यहां हम यह दिखाएंगे कि (0, 0, 0) पर f संतत तो है, लेकिन इसके तीन प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों में से किसी भी अवकलज का अस्तित्व नहीं है। अब, बिन्दु (0, 0, 0) पर

$$f_1(h) = \frac{f(0+h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

इसलिए $\lim_{h\to 0^+} f_1(h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1,$

परन्तु $\lim_{h\to 0^-} f_1(h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1.$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि $\lim_{h\to 0} f_1(h)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार, आप यह जांच कर सकते हैं कि $\lim_{h\to 0} f_2(h)$ और $\lim_{h\to 0} f_3(h)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

इस तरह, हमने देखा कि बिन्दु (0, 0, 0) पर किसी भी प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज का अस्तित्व नहीं है। लेकिन यह फलन (0, 0, 0) पर संतत है, जैसा कि आप इकाई 4 के E7) घ) में देख चुके हैं।

यदि आपने दिए गए उदाहरणों को अच्छी तरह से समझ लिया है तो हम समझते हैं कि आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर पाएंगे।

E10) मान लीजिए सभी $(x, y) \in \mathbf{R}^n$ के लिए $(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$. दिखाइए कि f, (0, 0) पर संतत है, लेकिन $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

E11) मान लीजिए $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

दिखाइए कि $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व है। यह भी दिखाइए कि (0, 0) पर f संतत है।

E12) दिखाइए कि

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{यदि } x^4+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 = y \end{cases}$$

से परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों का अस्तित्व मूल बिन्दु सहित सभी बिन्दुओं पर है, लेकिन मूल बिन्दु पर फलन असंतत है।

E13) मान लीजिए $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|y|}, & \text{यदि } y \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } y = 0. \end{cases}$

क) सिद्ध कीजिए कि (0, 0) पर f संतत है और $f_x(0, 0)$ तथा $f_y(0, 0)$ दोनों का ही अस्तित्व है ।

ख) दिखाइए कि $f_x(1, 0)$ का अस्तित्व है, परन्तु $f_y(1, 0)$ का अस्तित्व नहीं है ।

ऊपर दिए गए उदाहरणों और प्रश्नों में हमने यह देखा है कि आंशिक अवकलज के अस्तित्व से यह अर्थ नहीं निकलता कि फलन संतत भी है ।

फिर भी, यदि आंशिक अवकलज कुछ और प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हों तब हम यह सुनिश्चित कर सकते हैं कि फलन संतत है । इस तथ्य का अध्ययन हम प्रमेय 3 में करेंगे । इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें एक सरल परिणाम की आवश्यकता होती है, जो लगरांज के माध्य मान प्रमेय (कलन के खंड 2, और हाशिए में दी गई टिप्पणी को देखिए) से आसानी से प्राप्त हो जाता है । पहले हम इस परिणाम का कथन देंगे ।

मान लीजिए f वास्तविक मान फलन है जो $[a, a+h]$ पर संतत है, और $]a, a+h[$ पर अवकलनीय है । तब $\exists\ \theta \in\ ]0, 1[$, जिससे कि $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$.

प्रमेय 1 (माध्य मान प्रमेय) : मान लीजिए f, (a, b) के प्रतिवेश N पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है । यदि f_x का N के सभी बिन्दुओं पर अस्तित्व हो और f_y का बिन्दु (a, b), पर अस्तित्व हो तो सभी h, k के लिए जिससे कि (a+h, b+k), N का सदस्य हो,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a+\theta h, b+k) + k(f_y(a, b) + \eta),$$

जहां θ, h और k पर निर्भर करता है और $0 < \theta < 1$. और η, k का एक फलन है, जो $k \to 0$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त करता है ।

आप यह देख सकते हैं कि यह $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}$ तक के फलनों के लिए लगरांज के माध्य मान प्रमेय का एक विस्तार है । इस प्रमेय की परिकल्पना (hypothesis) में x के स्थान पर y और y के स्थान पर x रखने पर हमें एक अन्य प्रमेय प्राप्त होता है, जिसका कथन निम्न है :

प्रमेय 2: मान लीजिए f, (a, b) के प्रतिवेश N पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है । यदि f_y का N के सभी बिन्दुओं पर अस्तित्व हो और f_x का (a, b) पर अस्तित्व हो तो वास्तविक h और k के लिए, जिससे कि $(a+h, b+k) \in N$,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + kf_y(a, b+\theta' k) + h(f_x(a, b) + \eta')$$

जहां θ', h और k पर निर्भर करता है, $0 < \theta' < 1$; और η', h का एक फलन है और $h \to 0$ होने पर यह शून्य की ओर प्रवृत्त करता है ।

प्रमेय 1 और 2 दोनों ही लगरांज के माध्य मान प्रमेय के विस्तार हैं । लेकिन, यहां पर हम इनकी उपपत्तियों के बारे में चर्चा नहीं करेंगे । हम केवल इन प्रमेयों की मदद से प्रमेय 3 को सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय 3 : मान लीजिए f बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जिसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों में से एक अवकलज का अस्तित्व सभी बिन्दुओं $(x, y) \in N$ पर है और वह N पर परिबद्ध है, जबकि दूसरे आंशिक अवकलज का बिन्दु (x, y) पर अस्तित्व है । तब फलन f, बिन्दु (a, b) पर संतत होता है ।

उपपत्ति : व्यापकता में कोई कमी लाए बिना हम यह मान सकते हैं कि f_x का अस्तित्व सभी $(x, y) \in N$ के लिए है और यह N पर परिबद्ध है, जबकि f_y का अस्तित्व बिन्दु (a, b) पर है । प्रमेय 1 के अनुसार, सभी वास्तविक h, k के लिए, जिससे कि $(a+h, b+k) \in N$, हमें प्राप्त होता है :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a+\theta h, b+k) + k(f_y(a, b) + \eta) \quad \ldots(1)$$

जहां $0 < \theta < 1$ और $k \to 0$ होने पर $\eta \to 0$.

चूंकि f_x, N पर परिबद्ध है, इसलिए

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} h f_x(a+\theta h, b+k) = 0.$$

अतः (1) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} f(a+h, b+k) = f(a, b).$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि (a, b) पर फलन f संतत है और हमारी उपपत्ति पूरी हो जाती है ।

प्रमेय 3 को सिद्ध करते समय हमने यह मान लिया था कि f_x का अस्तित्व N के सभी बिन्दुओं पर है तथा

यह N पर परिवद्ध है, और f_y का अस्तित्व (a, b) पर है। इसके स्थान पर यदि हम यह मान लेते हैं कि f_y का अस्तित्व N के सभी बिन्दुओं पर है तथा यह N पर परिवद्ध है, और f_x का अस्तित्व (a, b) पर है, तो प्रमेय 2 का प्रयोग करके हम उपरोक्त प्रमेय को सिद्ध कर सकते थे।

अब हम एक परिणाम दे रहे हैं, जो प्रमेय 3 से आसानी से प्राप्त हो जाता है।

उपप्रमेय 1 : मान लीजिए f, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए f के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व N के सभी बिन्दुओं पर है और इनमें से एक N पर परिवद्ध है। तब फलन f, N पर सर्वत्र संतत होता है।

ध्यान दीजिए कि प्रमेय 3 में दिए गए प्रतिबंध केवल पर्याप्त (sufficient) हैं और आवश्यक नहीं है। यह बात उदाहरण 9 से स्पष्ट हो जाती है। हम उदाहरण 9 में देख चुके हैं कि उस स्थिति में भी फलन संतत हो सकता है, जबकि किसी भी आंशिक अवकलज का अस्तित्व न हो।

अगले उदाहरण में हम उपप्रमेय 1 की सहायता से सिद्ध करेंगे कि दिया हुआ फलन संतत है।

उदाहरण 10 : क्या $f(x, y) = ye^x$ द्वारा परिभाषित फलन सर्वत्र संतत है ? आइए इसकी जांच करें।

पहले हम यह देखते हैं कि $f_x(x, y) = ye^x$ और $f_y(x, y) = e^x$.

मान लीजिए (a, b), $\mathbf{R}^2$ में एक विन्दु है। (a, b) का एक प्रतिवेश

$$N = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < 1\}$$

लीजिए। अब $f_x(x, y)$ और $f_y(x, y)$ का अस्तित्व N के सभी विन्दुओं पर है। और चूंकि

$$|x - a| \leq (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

इसलिए सभी $(x, y) \in N$, के लिए $|x - a| < 1$,

अर्थात् $a - 1 < x < a + 1$,

अर्थात् $e^{a-1} < e^x < e^{a+1}$.

इसलिए f_y, N पर परिवद्ध है। इसलिए, उपप्रमेय 1 के अनुसार f, विन्दु (a, b) पर संतत है। चूंकि (a, b), $\mathbf{R}^2$ का एक स्वेच्छ विन्दु (arbitrary point) था, अतः हम कह सकते हैं कि f, $\mathbf{R}^2$ पर सर्वत्र संतत है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने की कोशिश कीजिए।

E14) उपप्रमेय 1 की सहायता से यह दिखाइए कि निम्नलिखित फलन $\mathbf{R}^2$ पर सर्वत्र संतत हैं :

क) $f(x, y) = xe^y$

ख) $f(x, y) = 3xy$

इस भाग में हमने यह देखा है कि केवल आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होने से ही यह नहीं माना जा सकता है कि फलन संतत भी है। इससे यह पता चलता है कि आंशिक अवकलजों की संकल्पना से $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ के फलनों के अवकलन की संकल्पना का व्यापकीकरण नहीं होता। अगले भाग में हम आपको उस संकल्पना से परिचित कराएंगे, जोकि एक चर वाले वास्तविक मान फलनों के अवकलज की संकल्पना का एक व्यापकीकरण है।

5.3 $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}$ तक के फलनों की अवकलनीयता

जब हम यह कहते हैं कि R से R तक का फलन f विन्दु c पर अवकलनीय है, तो इससे हमारा तात्पर्य क्या होता है ?

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि फलन f विन्दु c पर अवकलनीय होता है, यदि और केवल यदि (फलन f और विन्दु c पर निर्भर) एक ऐसे अचर A का अस्तित्व होता है कि

$f(c + h) - f(c) = Ah + h\,\eta(h)$,

जहां $h \to 0$ होने पर $\eta(h) \to 0$?

इसकी जांच करने पर आप पाएंगे कि A, $f'(c)$ के बराबर है।

एक चर वाले फलन की अवकलनीयता की इस परिभाषा को एक स्वाभाविक विधि से अनेक चरों वाले फलनों पर व्यापक रूप से लागू किया जा सकता है। इस भाग में हम दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों की अवकलनीयता का अध्ययन करेंगे। इसकी औपचारिक परिभाषा यह है :

परिभाषा 2 : मान लीजिए f, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। फलन f को (a, b) पर अवकलनीय कहा जाता है, यदि

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$,

- जहां h और k ऐसी वास्तविक संख्याएं हैं कि $(a+h, b+k) \in N$;
- A और B अचर हैं जो h और k से स्वतंत्र हैं, परन्तु फलन f और बिन्दु (a, b) पर निर्भर करते हैं ;
- ϕ और ψ दो फलन हैं, जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त करते हैं।

अब हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी यहां दे रहे हैं।

टिप्पणी 2: i) कुछ पुस्तकों में आपको अवकलनीयता की एक अन्य परिभाषा भी देखने को मिल सकती है। यह इस प्रकार है :

मान लीजिए f, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब फलन f को बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय कहा जाता है, जबकि (f और बिन्दु (a, b) पर निर्भर) ऐसे दो अचर A और B का अस्तित्व हो कि

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\phi(h, k),$$

जहां $\phi(h, k)$ एक ऐसा वास्तविक फलन है कि $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$.

सर्वसमिका (identity)

$$\sqrt{h^2+k^2} = h\left[\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right] + k\left[\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right]$$

की सहायता से हम इन दो परिभाषाओं की तुल्यता को आसानी से स्थापित कर सकते हैं।

ii) **R** से **R** तक के फलन f के लिए यदि $f'(x_0)$ का अस्तित्व हो तो x_0 के निकट रैखिक फलन $(x-x_0)\,f'(x_0)$ से $f(x) - f(x_0)$ का सन्निकट मान प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, यदि g(x, y), बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय हो तो बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश में रैखिक फलन $(x - a)A + (y - b)B$ से $g(x, y) - g(a, b)$ का सन्निकट मान प्राप्त किया जा सकता है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से अवकलनीयता की परिभाषा को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 11: मान लीजिए $f(x, y) = x^2 + y^2$. तब हम यह दिखा सकते हैं कि f किसी भी बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय है।

किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं h और k के लिए

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = (a+h)^2 + (b+k)^2 - (a^2+b^2)$$

$$= 2ah + 2bk + hh + kk$$

यदि हम $A = 2a$, $B = 2b$, $\phi(h, k) = h$, $\psi(h, k) = k$ लें, तो

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$, जहां A और B अचर हैं जो h और k से स्वतंत्र हैं और $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$ और $\psi(h, k) \to 0$. अतः f, बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय है।

उदाहरण 12 : मान लीजिए $f(x, y) = \frac{x}{y}$. आइए हम यह दिखाएं कि फलन की परिभाषा के प्रांत के सभी बिन्दुओं (a, b) पर f अवकलनीय है।

चूंकि $y=0$ के लिए f परिभाषित नहीं है, इसलिए हम $b \neq 0$ ले लेते हैं। मान लीजिए h और k ऐसी दो वास्तविक संख्याएं हैं कि (a, b) के प्रतिवेश N में $(a+h, b+k)$ एक ऐसा बिन्दु है जो कि f के प्रांत में आविष्ट है। तब $b+k \neq 0$, और

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{a+h}{b+k} - \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a}{b+k} - \frac{a}{b} + \frac{h}{b+k}$$

$$= -\frac{ak}{b(b+k)} + \frac{h}{b+k}$$

$$= -\frac{a}{b^2}\left[1 - \frac{k}{b+k}\right]k + \frac{h}{b}\left[1 - \frac{k}{b+k}\right]$$

$$= \frac{1}{b}h - \frac{a}{b^2}k + h\left(\frac{-k}{b(b+k)}\right) + k\left(\frac{ak}{b^2(b+k)}\right)$$

अब $A = \frac{1}{b}$, $B = -\frac{a}{b^2}$, $\phi(h, k) = \frac{-k}{b(b+k)}$, $\psi(h, k) = \frac{ak}{b^2(b+k)}$

लीजिए। तब $f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$, जहां A और B अचर हैं जो h और k से स्वतंत्र हैं, और $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$ और $\psi(h, k) \to 0$. अतः f, विन्दु (a, b) पर अवकलनीय है।

अब हम एक ऐसे फलन का उदाहरण दे रहे हैं, जो अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 13: यहां हम सिद्ध करेंगे कि $f(x, y) = |x| + |y|$ द्वारा दिया गया फलन विन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है। यदि संभव हो तो हम यह मान लें कि f, विन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है। तब

$$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k),$$

जहां A और B अचर हैं और $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$ और $\psi(h,k) \to 0$.
इसलिए, $|h| + |k| = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$.

मान लीजिए $h = 0$ और $k > 0$. तब

$$k = Bk + k\psi(0, k),$$

अर्थात् $1 = B + \psi(0, k)$.

$(h, k) \to (0, 0)$ होने पर दोनों ओर सीमाएं लेने पर हमें $B = 1$ प्राप्त होता है, क्योंकि $\psi(0, k) \to 0$.

अब, मान लीजिए $h = 0$ और $k < 0$. तब

$$-k = Bk + k\psi(0, k)$$

या $\quad -1 = B + \psi(0, k)$.

$(h, k) \to (0, 0)$ होने पर दोनों ओर सीमाएं लेने पर हमें $B = -1$ प्राप्त होता है, क्योंकि $\psi(0, k) \to 0$.

इस तरह, यह मान लेने से कि दिया हुआ फलन विन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है, हमें एक अंतर्विरोध, अर्थात् $B = 1 = -1$ प्राप्त होता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि $|x| + |y|$, विन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

आइए अब देखें कि नीचे दिए गए प्रश्नों को आप हल कर सकते हैं अथवा नहीं।

E15) हमने नीचे की सारणी के पहले स्तंभ में एक वास्तविक चर वाले वास्तविक मान फलनों की अवकलनीयता से संबंधित कुछ परिणाम दिए हैं। दूसरे स्तंभ में आप दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों के लिए अनुरूप कथन दीजिए और जांच कीजिए कि इनमें से प्रत्येक कथन सत्य है अथवा नहीं।

एक चर	दो चर
क) एक अचर फलन सर्वत्र अवकलनीय होता है।	
ख) यदि f, $a \in \mathbf{R}$, पर अवकलनीय हो तो $cf\ (c \in \mathbf{R})$ भी a पर अवकलनीय होता है।	
ग) यदि f और g, $a \in \mathbf{R}$ पर अवकलनीय है, तो $f \pm g$ भी a पर अवकलनीय होता है।	
घ) यदि f, g, $a \in \mathbf{R}$ पर अवकलनीय है, तो fg भी a पर अवकलनीय होता है।	

E16) दिखाइए कि फलन x^2+y+xy, बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है।

E17) दिखाइए कि $\cos(x+y)$, बिन्दु $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ पर अवकलनीय है।

E18) दिखाइए कि नीचे दिया गया फलन f, बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

एक वास्तविक चर वाला वास्तविक मान फलन यदि संतत हो तो उससे यह निष्कर्ष नहीं निकलता है कि वह अवकलनीय भी है। यही बात दो चरों वाले वास्तविक मान फलन पर भी लागू होती है। उदाहरण 13 का फलन $f(x, y) = |x|+|y|$ लीजिए। इकाई 4 के E7 (क) के अनुसार यह फलन (0, 0) पर संतत है। और उदाहरण 13 में हम यह देख चुके हैं कि यह (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है। अतः एक बिन्दु पर फलन संतत होने से यह निष्कर्ष नहीं निकलता है कि उस बिन्दु पर फलन अवकलनीय भी है। लेकिन इसका विलोम सत्य है। अर्थात्, प्रत्येक फलन, जो एक बिन्दु पर अवकलनीय होता है, वह उस बिन्दु पर संतत भी होता है। इस तथ्य को नीचे दिए गए प्रमेय में सिद्ध किया गया है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए f, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। यदि f, (a, b) पर अवकलनीय है तो यह (a, b) पर संतत है।

उपपत्ति : मान लीजिए h और k ऐसी दो वास्तविक संख्याएं है कि $(a+h, b+k) \in N$. तब (a, b) पर f की अवकलनीयता से यह अर्थ निकलता है कि दो अचरों A और B का अस्तित्व है और ऐसे दो फलनों $\phi(h, k)$, और $\psi(h, k)$ का अस्तित्व है कि

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k), \qquad \ldots(2)$$

जहां $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$, $\psi(h, k) \to 0$.

अब $(h, k) \to (0, 0)$, होने पर (2) के दोनों ओर सीमा लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} (f(a+h, b+k) - f(a, b)) = 0, \text{ अथवा}$$

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

इससे यह पता चलता है कि फलन f, (a, b) पर संतत है।

हम इस परिणाम को एक दिए हुए बिन्दु पर फलन की अनावकलनीयता (non-differentiability) स्थापित करने में लागू कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, हम भाग 4.4.2 में यह देख चुके हैं कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{यदि } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = y = 0, \end{cases}$$

(0, 0) पर संतत नहीं है। इस तरह, प्रमेय 4 से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यह फलन बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय भी नहीं है।

अब आप प्रमेय 4 की सहायता से इस प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E19) यह दिखाकर कि नीचे दिए गए फलन, बिन्दु (0, 0) पर असंतत हैं, सिद्ध कीजिए कि ये फलन बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं हैं :

क) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ख) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ग) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$

घ) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

अभी तक हमने एक बिन्दु पर फलन की अवकलनीयता की परिभाषा में आने वाले अचरों के मानों के बारे में कुछ नहीं कहा है। अब हम यह दिखाएंगे (प्रमेय 5) कि परिभाषा 2 में उल्लेखित अचर A और B एक बिन्दु पर विचाराधीन फलन के दो आंशिक अवकलज हैं। इससे विशेष रूप से यह पता चलता है कि यदि एक फलन एक बिन्दु पर अवकलनीय है तो उस बिन्दु पर उसके दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है। क्या इसका विलोम भी सत्य है ? अर्थात् यदि एक बिन्दु पर किसी फलन के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो तो क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उस बिन्दु पर फलन अवकलनीय है ? इसका उत्तर "नहीं" में है। जैसा कि हम उदाहरण 8 में देख चुके हैं, आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से फलन के सांतत्य को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता। और जब सांतत्य ही सुनिश्चित नहीं है तो अवकलनीयता कैसे सुनिश्चित हो सकती है ?

उदाहरण 11, 12 और 13 में आप जांच कर सकते हैं कि $A = f_x(a, b)$ और $B = f_y(a, b)$.

अब आप नीचे दिए गए प्रमेय पर ध्यान दीजिए।

प्रमेय 5: मान लीजिए f, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। यदि f, (a, b) अवकलनीय है तो (a, b) पर f के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए h, k ऐसी वास्तविक संख्याएं हैं कि $(a+h, b+k) \in N$. चूंकि f, बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय है, इसलिए

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$.

जहां A और B अचर है और $(h, k) \to (0,0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$, $\psi(h, k) \to 0$.

आप चित्र 3 से यह देख सकते हैं कि यदि $(a+h, b+k) \in N$, तो $(a+h, b)$ और $(a, b+k)$ दोनों ही N के सदस्य होंगे। इसलिए यदि ऊपर दिए गए समीकरण में हम $k = 0$ लें तो

$f(a+h, b) - f(a, b) = Ah + h\phi(h, 0)$

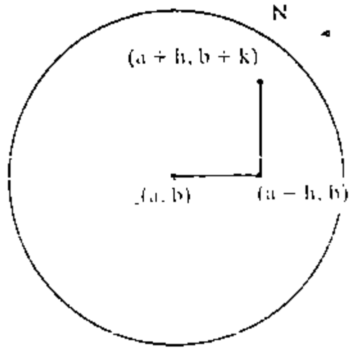
अर्थात् $\dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A + \phi(h, 0)$, $h \neq 0$ के लिए।

इसलिए $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A$.

अर्थात् $f_x(a, b) = A$.

इसी प्रकार h = 0 लेकर और ऊपर की प्रक्रिया लागू करके हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि $f_y(a, b) = B$.

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।



चित्र 3

प्रमेय 5 के अनुसार, यदि f, बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय हो, तो

$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$

जहां $(h, k) \to (0,0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$ और $\psi(h, k) \to 0$.

इससे हम यह पाते हैं कि h और k के लघु मानों के लिए व्यंजक $h f_x(a, b) + kf_y(a, b)$ से हम $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ का सन्निकट मान प्राप्त कर सकते हैं। इस व्यंजक को एक विशेष नाम दिया गया है, जैसा कि आप परिभाषा 3 में देखेंगे।

परिभाषा 3: मान लीजिए $f(x, y)$, बिन्दु (a, b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। यदि $f(x, y)$, (a, b) पर अवकलनीय हो, तो

$T(h, k) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$

से परिभाषित रैखिक फलन $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ को **(a, b)** पर **f** का अवकल कहते हैं। इसे **df (a, b)** से दर्शाया जाता है।

अब हम यह दिखाने के लिए एक उदाहरण देंगे कि फलन के दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व तो है, फिर भी फलन अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 14: यदि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

तो बिन्दु (a, b) पर f के दोनों प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों का अस्तित्व तो है परन्तु (0, 0) पर यह फलन अवकलनीय नहीं है।

अब, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h - 0}{h} = 1$

और $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{-k - 0}{k} = -1$

अतः बिन्दु (0, 0) पर दोनों प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है और
$f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = -1$.

यदि संभव हो तो हम यह मान लें कि f, बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है। तब टिप्पणी 2(i) से हम लिख सकते हैं कि

$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = hf_x(0, 0) + kf_y(0, 0) + \sqrt{h^2+k^2}\,\phi(h, k)$

जहां $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$.

अब $\phi(h, k) = \dfrac{f(h, k) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(h, k) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

अब, यदि $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$, तब

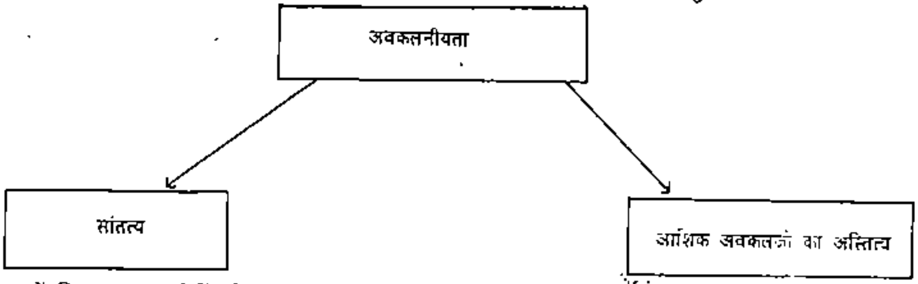
$$\frac{f(h, k) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \cos^3\theta - \sin^3\theta - \cos\theta + \sin\theta$$

इसलिए $0 = \lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \dfrac{f(h, k) - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{r \to 0} (\cos^3\theta - \sin^3\theta - \cos\theta + \sin\theta)$ ...(3)

अब, चूंकि व्यंजक $\cos^3\theta - \sin^3\theta - \cos\theta + \sin\theta$, r से स्वतंत्र है, इसलिए (3) से यह पता चलता है कि सभी θ के लिए $\cos^3\theta - \sin^3\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$. लेकिन यह सत्य नहीं है। इस तरह

हमें एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है, जिससे यह सिद्ध हो जाता है कि दिया हुआ फलन विन्दु (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है ।

अब हम इस भाग में प्राप्त परिणामों को निम्नलिखित संचित्र (chart) के रूप में प्रस्तुत करते हैं ।



इस संचित्र में दिखाए गए तीरों को उलटा नहीं किया जा सकता । अब हम यहां एक पर्याप्त प्रतिबंध-समुच्चय (उपपत्ति दिए विना) देंगे जिससे यह सुनिश्चित हो जाएगा कि दिया हुआ फलन अवकलनीय है ।

प्रमेय 6: यदि f, (a, b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन हो, जिससे कि

i) f_x, (a, b) पर संतत हो; और

ii) f_y का (a, b) पर अस्तित्व हो,

तो f, विन्दु (a, b) पर अवकलनीय होता है ।

इसी प्रकार, हम यह दिखा सकते हैं कि f, विन्दु (a, b) पर अवकलनीय होता है, यदि f_x का (a, b) पर अस्तित्व हो और f_y, (a, b) पर संतत हो । अतः एक आंशिक अवकलज का सांतत्य और दूसरे का अस्तित्व फलन की अवकलनीयता को सुनिश्चित कर देता है । अगर किसी फलन के दोनों आंशिक अवकलज संतत हों तो उसे एक विशिष्ट नाम दिया जाता है । इसकी परिभाषा निम्न है ।

परिभाषा 4: दो चरों वाले एक वास्तविक मान फलन को विन्दु (a, b) पर **संततत: अवकलनीय** (continuously differentiable) कहा जाता है, यदि (a, b) के प्रतिवेश में दोनों प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो और वे विन्दु (a, b) पर संतत हों ।

ध्यान दीजिए कि ऊपर दी गई परिभाषा तभी लागू की जा सकती है जबकि दिए हुए फलन के प्रांत D में (a b) का एक प्रतिवेश आविष्ट हो ।

परिभाषा 4 और प्रमेय 6 को एक साथ लेने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

प्रमेय 7: वह फलन, जो एक विन्दु पर संततत: अवकलनीय है, उस विन्दु पर अवकलनीय होता है ।

अब हम ऊपर की चर्चा को और अच्छी तरह से समझने के लिए यहां कुछ उदाहरण दे रहे हैं ।

उदाहरण 15: मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}$ एक फलन है जो

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{यदि } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 = y \end{cases}$$

से परिभाषित है । हम यह दिखाएंगे कि f, (0, 0) पर अवकलनीय है ।

हम इस परिणाम को प्रमेय 6 की सहायता से सिद्ध करेंगे ।

अब, $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$= 0$

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = 0$ और $(x, y) \neq (0, 0)$ के लिए

$$f_x(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

ध्रुवी निर्देशांक $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$|f_x(x, y)| = r\,(\cos^4\theta \sin\theta + 4\cos^2\theta \sin^3\theta - \sin^5\theta)|$

$\leq 6\sqrt{x^2+y^2}$, क्योंकि $\sin\theta \leq 1$ और $\cos\theta \leq 1$.

$|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{72}}$ और $|y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{72}}$ लेकर हम इसे, दिए हुए ε से भी छोटा बना सकते हैं।

इसलिए $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f_x(x, y) = 0 = f_x(0, 0)$.

इससे यह अर्थ निकलता है कि f_x, (0, 0) पर संतत है। अतः प्रमेय 6 के अनुसार (0, 0) पर f अवकलनीय है।

उदाहरण 16: अब हम यह दिखाएंगे कि

$f(x, y) = e^{x+y}\sin x + x^2 + 2xy$ सर्वत्र अवकलनीय है।

चूँकि $f_x(x, y) = e^{x+y}\sin x + e^{x+y}\cos x + 2x + 2y$ और

$f_y(x, y) = e^{x+y}\sin x + 2x$

सर्वत्र संतत हैं, अतः प्रमेय 6 के अनुसार f सर्वत्र अवकलनीय है।

नीचे दिए गए उदाहरण से यह पता चलता है कि प्रमेय 6 में बताए गए प्रतिबंध पर्याप्त हैं, परन्तु आवश्यक नहीं हैं। कहने का अर्थ है कि एक बिन्दु पर फलन के आंशिक अवकलज संतत न होने पर भी वह फलन उस बिन्दु पर अवकलनीय हो सकता है।

उदाहरण 17 : फलन $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ लीजिए, जो

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} + y^2\sin\dfrac{1}{y}, & \text{यदि } xy \neq 0 \\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \text{ और } y = 0 \\ y^2\sin\dfrac{1}{y}, & \text{यदि } x = 0 \text{ और } y \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 = y \end{cases}$$

से परिभाषित है।

यहां हम यह सिद्ध करेंगे कि (0, 0) पर f अवकलनीय है, लेकिन न तो f_x और न ही f_y, (0, 0) पर संतत है।

$$\text{यहां } f_x(x, y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{और } \quad f_y(x, y) = \begin{cases} 2y\sin\dfrac{1}{y} - \cos\dfrac{1}{y}, & \text{यदि } y \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } y = 0 \end{cases}$$

चूँकि $\lim\limits_{t\to 0} \cos\frac{1}{t}$ का अस्तित्व नहीं है, और

$\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$, इसलिए $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f_x(x, y)$ और $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} f_y(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसलिए (0, 0) पर f_x और f_y असंतत हैं। फिर भी,

$$f(h, k) - f(0, 0) = 0.h + 0.k + h\left(h\sin\frac{1}{h}\right) + k\left(k\sin\frac{1}{k}\right),$$

जहां

$$\lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} h\sin\frac{1}{h} = 0 = \lim_{(h,\,k)\to(0,\,0)} k\sin\frac{1}{k}.$$

अतः f, (0, 0) पर अवकलनीय है।

क्या आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं?

यदि f(x) और g(x) की सीमा का x = a पर अस्तित्व न हो तब भी (f−g) (x) की सीमा का x→a पर अस्तित्व हो सकता है।

इसलिए $\lim\limits_{t\to 0} \cos\frac{1}{t}$ का अस्तित्व न होना और $\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$, से दोनों ही बात नोट करना आवश्यक हो जाता है।

E20) दिखाइए कि

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & y = 0, \ x \neq 0 \\ y \sin \frac{1}{y}, & x = 0, \ y \neq 0 \\ 0, & x = 0 = y \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f: $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}$ मूल बिन्दु पर संतत तो है, परन्तु अवकलनीय नहीं है।

E21) मूल बिन्दु पर निम्नलिखित फलनों के सांतत्य और अवकलनीयता की जांच कीजिए :

क) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ख) $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ y, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

E22) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन सर्वत्र अवकलनीय हैं :

क) $f(x, y) = e^{x+y}$

ख) $f(x, y) = 2 \sinh x + 3 \cosh y$

अगले अनुभाग में हम तीन या तीन से अधिक चरों वाले फलनों की अवकलनीयता की चर्चा करेंगे।

5.4 $\mathbf{R}^n$ से $\mathbf{R}$ (n > 2 तक के फलनों की अवकलनीयता

पिछले भाग में हमने दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों की अवकलनीयता को परिभाषित किया है और उसका अध्ययन किया है। पिछले भाग में स्थापित अधिकांश परिणामों को तीन अथवा अधिक चरों वाले वास्तविक मान फलनों पर भी लागू किया जा सकता है। आइए अब हम अपना अध्ययन तीन या अधिक चरों वाले वास्तविक मान फलनों की अवकलनीयता को परिभाषित करके प्रारंभ करें।

परिभाषा 5: मान लीजिए f, बिन्दु $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। फलन f को बिन्दु a पर अवकलनीय कहा जाता है; जबकि (फलन f और बिन्दु a पर निर्भर) ऐसे अचर $A_1, A_2, \ldots, A_n$ का अस्तित्व हो कि

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i A_i + \sum_{i=1}^{n} h_i \phi_i (h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n)$$

जहां $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to (0, 0, \ldots, 0)$ होने पर प्रत्येक $\phi_i \to 0$.

दो चरों की तरह तीन या अधिक चरों के फलनों के लिए भी हमें कुछ परिणाम प्राप्त होते हैं जो हम यहां दे रहे है। आपको इन परिणामों को सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं है।

i) $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ पर $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

ii) यदि f, a पर अवकलनीय होता है, तो f, a पर संतत होता है।

iii) f, a पर अवकलनीय होता है, यदि और केवल यदि

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i A_i + |h|\, \phi(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

जहां $h \to 0$ होने पर $\phi(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to 0$,

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \text{ और } |h| = \sqrt{\sum h_i^2}$$

iv) यदि f, a पर अवकलनीय है तो a पर f के सभी आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है।

v) यदि f के आंशिक अवकलज a पर संतत हैं तो f, a पर अवकलनीय होता है।

दो चरों वाले फलनों की तरह यहां

$$T(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)\, h_i$$

से परिभाषित रैखिक फलन T को **a पर f का अवकल** कहते हैं और इसे **d f(a)** से प्रकट करते हैं।

यहां हम कुछ उदाहरण दे रहे हैं, जिनसे आप परिभाषा 5 को और अच्छी तरह से समझ सकते हैं।

उदाहरण 18: मान लीजिए $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$.

हम सिद्ध करेंगे कि f सर्वत्र अवकलनीय है।

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) - hf_x(x, y, z) - kf_y(x, y, z) - lf_z(x, y, z)$$
$$= (x+h)^2 + (y+k)^2 + (z+l)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 2hx - 2ky - 2lz$$
$$= h^2 + k^2 + l^2$$
$$= h\,\phi_1(h, k, l) + k\phi_2(h, k, l) + l\phi_3(h, k, l)$$

जहां $\phi_1(h, k, l) = h$, $\phi_2(h, k, l) = k$, $\phi_3(h, k, l) = l$,

और $(h, k, l) \to (0, 0, 0)$ होने पर इनमें से प्रत्येक 0 की ओर प्रवृत्त होता है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि दिया हुआ फलन प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है।

उदाहरण 19 : मान लीजिए $f(x, y, z) = |x+y+z|$. अब हम यह दिखाएंगे कि उन सभी बिन्दुओं (a, b, c) पर f अवकलनीय है, जिनके लिए $a+b+c \neq 0$. हम यह भी दिखाएंगे कि उन बिन्दुओं (a, b, c) पर f(x, y, z) अवकलनीय नहीं होता, जिनके लिए $a+b+c=0$.

मान लीजिए, बिन्दु (a, b, c) ऐसा है कि $a+b+c = 0$. तब, परिभाषा के अनुसार

$$f_x(a, b, c) = \lim_{p \to 0} \frac{f(a+p, b, c) - f(a, b, c)}{p},$$

जबकि, इस सीमा का अस्तित्व हो। अब

$f(a+p, b, c) - f(a, b, c) = |a+p+b+c| - |a+b+c| = |p|$,

क्योंकि $a+b+c = 0$. इसलिए

$$\lim_{p \to 0} \frac{f(a+p, b, c) - f(a, b, c)}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{|p|}{p}.$$

हम जानते हैं कि $\lim_{p \to 0} \frac{|p|}{p}$ का अस्तित्व नहीं होता। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि $a+b+c=0$, तो $f_x(a+b+c)$ का अस्तित्व नहीं होता। अतः इन बिन्दुओं पर f अवकलनीय नहीं है।

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जबकि $a+b+c < 0$. तब चूंकि फलन $(x, y, z) \to x+y+z$ सर्वत्र संतत है, इसलिए (a, b, c) के एक ऐसे प्रतिवेश N का अस्तित्व होता है जिसके किसी भी बिन्दु (x, y, z) के लिए $x+y+z<0$. (इकाई 4 का प्रमेय 6 देखिए)। अतः उन (p, q, r) के लिए, जिनके लिए $(a+p, b+q, c+r) \in N$, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$f(a+p, b+q, c+r) - f(a, b, c) = -p - q - r$
$= p f_x(a, b, c) + q f_y(a, b, c) + r f_z(a, b, c),$

क्योंकि $f_x(a, b, c) = \lim\limits_{p \to 0} \frac{|a+p+b+c| - |a+b+c|}{p}$

$= \lim \frac{-p}{p} = -1.$

$a+b+c < 0$ और $a+p+b+c < 0$, इसलिए $|a+b+c| = -a-b-c$ और $|a+p+b+c| = -a-p-b-c$.

इसी प्रकार,

$f_y(a, b, c) = -1 = f_z(a, b, c).$

इस तरह यह स्पष्ट है कि (a, b, c) पर f अवकलनीय होता है, जबकि $a+b+c < 0$.

शेष स्थिति अर्थात्, जबकि $a+b+c > 0$, का हल भी इसी प्रकार है।

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E23) क) दिखाइए कि प्रत्येक अचर फलन अवकलनीय होता है।

ख) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ऐसे दो फलन हैं कि बिन्दु (a, b, c) पर प्रत्येक अवकलनीय है। दिखाइए कि $f+g$ भी अवकलनीय है।

ग) मान लीजिए $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ एक अवकलनीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि फलन λf अवकलनीय है, जहां λ एक अचर है।

E24) दिखाइए कि $\mathbf{R}^3$ से $\mathbf{R}$ तक के निम्नलिखित फलन सर्वत्र अवकलनीय हैं :

क) $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$

ख) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

E25) सिद्ध कीजिए कि $f(x, y, z) = \frac{e^x + e^y}{z}$ से परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, (0, 0, 0) पर अवकलनीय नहीं है।

इस इकाई में हमने जो अध्ययन किया है उसका संक्षिप्त विवरण अब हम दे रहे हैं।

5.5 सारांश

इस इकाई में हमने अवकलज की संकल्पना को अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू किया है। इसके लिए हमने:

1) एक बिन्दु पर फलन के प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलज को परिभाषित किया है :
   यदि $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$ को

जबकि इसका अस्तित्व हो, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ पर f का i वां आंशिक अवकलज कहा जाता है।

2) एक बिन्दु पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज के अस्तित्व को सिद्ध करने और उन्हें ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा की है।

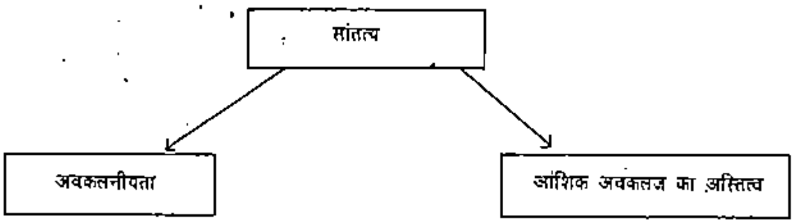
3) यह दिखाने के लिए कुछ उदाहरण दिए हैं कि एक बिन्दु पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से यह नहीं माना जा सकता कि उस बिन्दु पर फलन संतत भी है।

4) अनेक चरों वाले अवकलनीय फलन को परिभाषित किया है:
   f, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ पर अवकलनीय है, यदि $\exists$ अचर $A_1, A_2, \ldots, A_n$, जिससे कि

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i A_i + \sum_{i=1}^{n} h_i \phi_i(h_1, \ldots, h_n),$$

$(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to 0$ होने पर प्रत्येक $\phi_i \to 0$.

5) एक फलन के आंशिक अवकलज के अस्तित्व, अवकलनीयता और सांतत्य में संबंध स्थापित किया है :



5.6 हल और उत्तर

E1) फलन $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, x और y में एक बहुपद है। अतः इसके आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। प्रत्यक्ष अवकलन से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 4y.$$

इसलिए, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,\,2)} = 4 - 2 = 2 \; ; \; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,\,2)} = -1 + 8 = 7.$

E2) क) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos (x^2 - y) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = -\cos (x^2 - y)$

ख) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2y}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}} = -\frac{y}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{2z}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}} = -\frac{z}{(x + y^2 + z^2 + 1)^{3/2}}$$

ग) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz \cos xz \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \sin xz \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = xy \cos xz$

घ) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$

ङ) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2e^{xy^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy\, e^{xy^2}$

E3) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. चूंकि u और v में निहित फलन चरघातांकी फलन और त्रिकोणमितीय फलन हैं, इसलिए आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। तब,

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ और

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ और $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$

अतः $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

E4) $$f_x (a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

इसी प्रकार $f_y (a, b) = 0.$

E5) परिभाषा के अनुसार

$$f_x (0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

चूंकि $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, इसलिए $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0} \frac{1}{k}$

का अस्तित्व नहीं है।

E6) $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$

और $f_y(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$

E7) $$F_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(y) - (f(x) + g(y))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$F_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{F(x, y+k) - F(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(x) + g(y+k) - (f(x) + g(y))}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y).$$

E8) परिभाषा से

$$\left(\frac{\partial (f+g)}{\partial x}\right)_{(a, b)} = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h, b) - (f+g)(a, b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} + \frac{g(a+h, b) - g(a, b)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h, b) - g(a, b)}{h}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a, b)} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(a, b)}$$

यह आवश्यक नहीं है कि इसका विलोम सही हो।

निम्नलिखित फलन f और g लीजिए :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तब, सभी (x, y) के लिए $(f+g)(x, y) = 1$.

E6) में यह दिखाया गया है कि $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है। इसी प्रकार, हम यह दिखा सकते हैं कि $g_x(0, 0)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

फिर भी, (0, 0) पर $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)$ का अस्तित्व होता है, क्योंकि $f+g$ एक अचर फलन है।

E9) समतल $y=2$ और पृष्ठ $z=2x^2+3y^2$ के प्रतिच्छेद वक्र के बिन्दु (1, 2, 14) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,2,14)}$ है। अब, $z = 2x^2+3y^2$

इसलिए $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$.

अतः $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,2,14)} = 4$. इस तरह प्रवणता 4 है।

E10) यह दिखाने के लिए कि (0, 0) पर f संतत है, मान लीजिए $\varepsilon > 0$ एक दी हुई वास्तविक संख्या है।

$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$ लीजिए।

तब $|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}, |y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

इसलिए, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2} = 0 = f(0, 0)$.

अतः (0, 0) पर f संतत है। अब, परिभाषा के अनुसार

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

चूंकि $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ का अस्तित्व नहीं है, इसलिए $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं होगा।

इसी प्रकार, $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं होगा।

E11) $$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

इसी प्रकार $f_y(0, 0) = 0$. अब हमें यह दिखाना है कि f, (0, 0) पर संतत है। यहां

$$\left| x \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{y} \right| \le |x| + |y|.$$

इससे यह पता चलता है कि $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{y}\right) = 0 = f(0, 0)$.

अतः f, (0, 0) पर संतत है।

E12) $$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0.$$

इसी प्रकार, $f_y(0, 0) = 0$.

इसी प्रकार अगर कोई बिन्दु (x, y) इस प्रकार का है कि $xy=0$, तो हमें $f_x(x, y) = f_y(x, y) = ($ प्राप्त होता है। अब, मान लीजिए $x \neq 0 \neq y$. तब (x, y) पर दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है, क्योंकि f(x, y), x और y वाले दो अवकलनीय फलनों का भागफल है। प्रत्यक्ष अवकलन से

$$f_x(x, y) = \frac{(x^4+y^2) \cdot (2xy) - x^2y \cdot (4x^3)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^5y + 2xy^3 - 4x^5y}{(x^4+y^2)^2}$$

और

$$f_y(x, y) = \frac{(x^4+y^2)(x^2) - x^2y(2y)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

लेकिन $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है क्योंकि यदि हम $y = x$ रखें,

तो $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = 0$, और यदि हम $y = x^2$ रखें,

तो $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$.

E13) क) चूंकि सभी $y \neq 0$ के लिए $\left|\frac{xy}{y}\right| = \frac{|x|\ |y|}{|y|} = |x|$, इसलिए

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{|y|} = 0 = f(0, 0)$. अतः f, (0, 0) पर संतत है।

और $f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

इसी प्रकार $f_y(0, 0) = 0$.

ख) $f_x(1, 0) = 0$. मगर $f_y(1, 0)$ का अस्तित्व नहीं है क्योंकि

$$\frac{f(1, k) - f(1, 0)}{k} = \frac{\frac{k}{|k|} - 0}{k} = \frac{1}{|k|}$$ और

$\lim_{k \to 0} \frac{1}{|k|}$ का अस्तित्व नहीं है।

E14) क) $f(x, y) = xe^y \Rightarrow f_x(x, y) = e^y$, और $f_y(x, y) = xe^y$. अब उदाहरण 10 में दिए हुए तर्क के अनुसार हम दिखा सकते हैं कि f_x और f_y दोनों का ही सभी बिन्दुओं पर अस्तित्व है, और f_x, $\mathbf{R}^2$ के किसी भी बिन्दु के किसी भी प्रतिवेश में परिबद्ध है। इसलिए उपप्रमेय 1 से f सर्वत्र संतत है।

ख) अब, $f(x, y) = 3xy \Rightarrow f_x(x, y) = 3y$ और $f_y(x, y) = 3x$.
दोनों ही आंशिक अवकलज f_x और f_y उपप्रमेय 1 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।
अतः f सर्वत्र संतत है।

E15) क) दो चरों वाला अचर फलन सर्वत्र अवकलनीय होता है।

ख) यदि f, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ पर अवकलनीय है, तो cf $(c \in \mathbf{R})$ भी (a, b) पर अवकलनीय होता है।

ग) यदि f और g, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ पर अवकलनीय हैं, तो $f+g$ भी (a, b) पर अवकलनीय होता है।

घ) यदि f और g, (a, b) पर अवकलनीय हैं तो fg भी (a, b) पर अवकलनीय होता है।

अब हम इन कथनों की सत्यता की जांच करेंगे।

क) मान लीजिए $f(x, y) = c$ दिया हुआ अचर फलन है। मान लीजिए (a, b), $\mathbf{R}^2$ का एक एक बिन्दु है। तब

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = c - c = 0$$

$$= 0.h + 0.k + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$$

जहां सभी h और k के लिए $\phi(h, k) = 0 = \psi(h, k)$
चूंकि (a, b), $\mathbf{R}^2$ का एक स्वेच्छ बिन्दु है, इसलिए f सर्वत्र अवकलनीय है।

ख) मान लीजिए f, (a, b) पर अवकलनीय है। तब अचर A और B और फलन ϕ तथा ψ का अस्तित्व होता है ताकि $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$, $\psi(h, k) \to 0$ और $f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$.

यदि $c \neq 0$, एक अचर है तो ऊपर दिए गए समीकरण को c से गुणा करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$(cf)(a+h, b+k) - (cf)(a, b) = A'h + B'k + h\phi'(h, k) + k\psi'(h, k)$$

जहां $A' = cA$, $B' = cB$, $\phi' = c\phi$ और $\psi' = c\psi$.

इकाई 4 में हमने यह देखा है कि यदि $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर ϕ और ψ शून्य की ओर प्रवृत्त होते हों तो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर ϕ' और ψ' भी शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः जब कभी भी c एक शून्येतर अचर होता है, तब cf अवकलनीय होता है। यदि c शून्य है, तो cf एक अचर फलन होता है, जो प्रत्येक बिन्दु को शून्य की ओर ले जाता है। अतः यह अवकलनीय होता है।

ग) चूंकि f, (a, b) पर अवकलनीय है, इसलिए अचर A' और B' तथा फलन $\phi'(h, k)$ और $\psi'(h, k)$ का अस्तित्व होता है, जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त करते हैं, जिससे कि

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = A'h + B'k + h\phi'(h, k) + k\psi'(h, k).$$

इसी प्रकार, चूंकि g, (a, b) पर अवकलनीय है, इसलिए अचर A'' और B'' तथा फलन $\phi''(h, k)$ और $\psi''(h, k)$ का अस्तित्व होता है, जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त करते हैं जिससे कि

$$g(a+h, b+k) - g(a, b) = A''h + B''k + h\phi''(h, k) + k\psi''(h, k)$$

तब, $(f \pm g)(a+h, b+k) - (f \pm g)(a, b)$

$$= (A' \pm A'')h + (B' \pm B'')k + h[\phi'(h, k) \pm \phi''(h, k)]$$

$$+ k[\psi'(h, k) \pm \psi''(h, k)]$$

$$= Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$$

जहां $A = A' \pm A''$, $B = B' \pm B''$, $\phi(h, k) = \phi'(h, k) \pm \phi''(h, k)$ और

$\psi(h, k) = \psi'(h, k) \pm \psi''(h, k)$.

अब, चूंकि A और B अचर हैं और $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर फलन ϕ और ψ शून्य की ओर प्रवृत्त करते हैं, इसलिए $f+g$ और $f-g$, (a, b) पर अवकलनीय हैं।

घ) ग) की तरह प्रक्रिया लागू कीजिए। तब,

$$fg(a+h, b+k) - fg(a, b) = f(a+h, b+k)\, g(a+h, b+k)$$

$$- f(a+h, b+k)\, g(a, b) + f(a+h, b+k)\, g(a, b)$$

$$- f(a, b)\, g(a, b).$$

$$= f(a+h, b+k)[g(a+h, b+k) - g(a, b)] + g(a, b)[f(a+h, b+k) - f(a, b)]$$

$= [f(a, b) + A'h + B'k + h\phi'(h, k) + k\psi'(h, k)]\, [A''h + B''k$
$+ h\phi''(h, k) + k\psi''(h, k)] + g(a, b)\, [A'h + B'k + h\phi'(h, k) + k\psi'(h, k)]$
$= Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k).$

जहां $A = A'' f(a, b) + A'g(a, b)$, $B = B''f(a, b) + B'g(a, b)$,
$\phi(h, k) = [A' + \phi'(h, k)]\, [A''h + B''k + h\phi''(h, k) + k\psi''(h, k)]$
$+ f(a, b)\, \phi''(h, k) + g(a, b)\, \phi'(h, k)$,
और $\psi(h, k) = [B' + \psi'(h, k)]\, [A''h + B''k + h\phi''(h, k) + k\psi''(h, k)]$
$+ f(a, b)\, \psi''(h, k) + g(a, b)\, \psi'(h, k).$

E16) यहां $f(h, k) - f(0, 0) = h^2 + k + hk = 0.h + 1.k + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$,
जहां सभी h, k के लिए $\phi(h, k) = h = \psi(h, k)$ और $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर
$\phi(h, k) \to 0$, $\psi(h, k) \to 0$.
इस तरह, f, (0, 0) पर अवकलनीय है।

E17) मान लीजिए $f(x, y) = \cos(x+y)$.

$$f\left(\frac{\pi}{4} + h, \frac{\pi}{4} + k\right) - f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + h + \frac{\pi}{4} + k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + h + k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin(h+k)$$

$$= -h - k + h\left[1 - \frac{\sin(h+k)}{h+k}\right] + k\left[1 - \frac{\sin(h+k)}{h+k}\right]$$

$$= Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k),$$

जहां $A = -1$, $B = -1$, $\phi(h, k) = \psi(h, k) = 1 - \dfrac{\sin(h+k)}{(h+k)}$.

अब $\displaystyle \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \phi(h, k) = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \psi(h, k)$

$$= 1 - \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{\sin(h+k)}{h+k}$$

$$= 1 - 1 = 0,$$

क्योंकि $\displaystyle \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{\sin(h+k)}{h+k} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, जहां $t = h+k$.

इसलिए f, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ पर अवकलनीय है।

E18) यदि संभव हो तो मान लीजिए f, बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है। तब अचर A और B तथा फलन ϕ और ψ का अस्तित्व होता है जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त करते हैं, जिससे कि

$$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$$

अर्थात् $\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = Ah + Bk + h\phi(h, k) + k\psi(h, k).$

$h = 0, k \neq 0$ लीजिए। तब $0 = Bk + k\psi(0, k)$.
अर्थात् $B + \psi(0, k) = 0.$

$k \to 0$ होने पर सीमा लेने पर हमें $B=0$ प्राप्त होता है । इसी प्रकार $h \neq 0$, $k=0$ रखने पर हमें $A=0$ प्राप्त होता है ।

अब, यदि हम $h=k \neq 0$ लें, तो

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = Ah + Bh + h\phi(h, h) + h\psi(h, h)$$

अर्थात्, $\frac{1}{\sqrt{2}} = A + B + \phi(h, h) + \psi(h, h)$,

क्योंकि $A = 0 = B$

इस तरह, हमें एक अन्तर्विरोध प्राप्त होता है । अतः f, (0, 0) पर अवकलनीय नहीं हो सकता

E19) क) आप इकाई 4 के उदाहरण 3 में यह देख चुके हैं कि (0, 0) पर $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ का

अस्तित्व नहीं है । इससे यह पता चलता है कि (0, 0) पर फलन असंतत है । अतः यह (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है ।

ख) यदि हम $y = mx$ लें, तो $f(x, y) = \frac{2}{1+m^2}$.

इसका अर्थ है कि $y=mx$ के अनुदिश $(x, y) \to (0, 0)$ होने पर (x, y) की सीमा $\frac{2}{1+m^2}$ है और m के अलग-अलग मानों के लिए इसका मान अलग-अलग होता है । इसलिए

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ का अस्तित्व नहीं है । अतः (0, 0) पर f संतत नहीं है ।

ग) यदि हम $y=mx$, $m \neq 1$ लें, तो

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^2)}{1-m} = 0.$$ लेकिन $f(0, 0) = 1$.

इसलिए (0, 0) पर f असंतत है ।

घ) $x^4+y^4 \leq x^4 \Rightarrow |f(x, y)| \leq \left|\frac{x^5}{x^4}\right| = |x|$.

इसलिए $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, और यह $f(0, 0) = 3$ के बराबर नहीं है ।

अतः f, (0, 0) पर असंतत है ।

E20) सभी स्थितियों में $|f(x, y)| \leq |x| + |y|$.

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$. अतः f, (0, 0) पर संतत है । अब हमें दिखाना है कि f, (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है । प्रमेय 5 के अनुसार यह दिखाना काफ़ी होगा कि f_x या f_y में से एक का अस्तित्व नहीं है । यहां $f_x(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है क्योंकि

$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$ और $h \to 0$ पर इसकी सीमा का अस्तित्व नहीं होता ।

E21) क) $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.

$(x,y) \neq (0,0)$ पर $f_x(x, y) = \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ और $f_y(x,y) = \frac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ लेने पर हमें प्राप्त होता है :

$$|f_x(x, y)| = r\,|\sin^5\theta - \cos^2\theta \sin^3\theta| \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f_x(x,y) = f_x(0,0).$

$\therefore$ f_x, (0, 0) पर संतत है और $f_y(0, 0)$ का अस्तित्व है। अतः प्रमेय 6 के अनुसार f, (0, 0) पर अवकलनीय है और इसलिए संतत भी है।

ख) चूंकि $|f(x,y)| \le |y|$, इसलिए f, (0, 0) पर संतत है।
अब $f_x(0, 0) = 0$ और $f_y(0, 0) = 1$.

यदि संभव हो, तो मान लीजिए कि (0, 0) पर f अवकलनीय है। तब फलन ϕ, ψ का अस्तित्व होता है, जो $(h, k) \to (0, 0)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं, ताकि
$f(h,k) - f(0,0) = 0.h + 1.k + h\phi(h,k) + k\psi(h,k)$.

यदि $h = k \ne 0$, तो

$$h \sin \frac{1}{h} = h + h\phi(h,h) + h\psi(h,h)$$

या $$\sin \frac{1}{h} = 1 + \phi(h,h) + \psi(h,h)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} = 1.$ परंतु हमें पता है कि इस सीमा का अस्तित्व नहीं है।

E22) क) चूंकि $f_x(x,y) = e^{x+y} = f_y(x,y)$, इसलिए f_x और f_y सर्वत्र संतत हैं। इसलिए f सर्वत्र अवकलनीय है।

ख) $f_x(x,y) = 2\cosh x$ and $f_y(x,y) = 3\sinh y$.

f_x और f_y सर्वत्र संतत होने के कारण f सर्वत्र अवकलनीय है।

E23) क) मान लीजिए $f(x,y,z) = k$ एक अचर फलन है। तब $f(x+h_1, y+h_2, z+h_3) - f(x,y,z)$

$$= k - k = \sum_{i=1}^{3} h_i A_i + \sum_{i=1}^{3} h_i \phi_i,$$

जहां $A_i = 0, i = 1, 2, 3$ और $\phi_i(x,y,z) = 0, i = 1, 2, 3$.
अतः f सर्वत्र अवकलनीय है।

ख) चूंकि f, (a,b,c) पर अवकलनीय है, इसलिए (a, b, c) का एक प्रतिवेश N_1 ऐसा होता है कि सभी h_i, i = 1, 2, 3, जिनके लिए $(a+h_1, b+h_2, c+h_3) \in N_1$, ऐसे अचरों A_i', i = 1, 2, 3, और फलनों $\phi_i' : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, i = 1, 2, 3, (जो $(h_1, h_2, h_3) \to (0, 0, 0)$, होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं)
का अस्तित्व होता है, कि

$$f(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{3} h_i A_i' + \sum_{i=1}^{3} h_i \phi_i'$$

इसी प्रकार, चूंकि g, (a, b, c) पर अवकलनीय है, इसलिए (a, b, c) का प्रतिवेश N_2, अचर A_i^2, i = 1, 2, 3, फलन ϕ_i'', i = 1, 2, 3, ऐसे होते हैं जिससे कि

$$g(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - g(a,b,c) = \sum_{i=1}^{3} h_i A_i'' + \sum_{i=1}^{3} h_i \phi_i''.$$

मान लीजिए $N = N_1 \cap N_2$. तब N, बिंदु (a, b, c) का एक ऐसा प्रतिवेश है कि सभी h_i, i = 1, 2, 3, जिनके लिए $(a+h_1, b+h_2, c+h_3) \in N$, हमें प्राप्त होता है कि

$$(f+g)(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - (f+g)(a,b,c)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} h_i (A_i' + A_i'') + \sum_{i=1}^{3} h_i (\phi_i' + \phi_i''),$$
$$= \sum_{i=1}^{3} h_i A_i + \sum_{i=1}^{3} h_i \phi_i,$$

जहां $A_i = A_i' + A_i''$, $i=1, 2, 3$, अचर हैं और $\phi_i = \phi_i' + \phi_i''$, $i=1, 2, 3$, फलन $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ हैं जो $(x, y, z) \to (a, b, c)$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः (a, b, c) पर $f+g$ अवकलनीय है।

ग) क और ख) की तरह सिद्ध किया जा सकता है।

E24) क) मान लीजिए (a, b, c) एक विन्दु है और मान लीजिए फलन $f(x, y, z) = x+2y+4z$ (a, b, c) के प्रतिवेश N में परिभाषित है। मान लीजिए h_1, h_2, h_3 ऐसी संख्याएं हैं कि विन्दु $(a+h_1, b+h_2, c+h_3) \in N$.

तब $f(a+h_1, b+h_2, c+h_3) - f(a, b, c)$

$$= (a+h_1) + 2(b+h_2) + 4(c+h_3) - a - 2b - 4c$$

$$= h_1 + 2h_2 + 4h_3$$

$$= Ah_1 + Bh_2 + Ch_3 + h_1\phi + h_2\psi + h_3\xi$$

जहां $A = 1, B = 2, C = 4$ और $\phi(x,y,z) = \psi(x,y,z) = \xi(x,y,z) = 0$ अचर फलन हैं।

अतः f, (a, b, c) पर अवकलनीय है। चूंकि (a, b, c) एक स्वेच्छ विन्दु है, इसलिए f सर्वत्र अवकलनीय है।

ख) $f(x, y, z) = xy+yz+zx$

एक स्वेच्छ विन्दु (a, b, c) लीजिए।

$$f_x(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a,b,c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)b+bc+c(a+h) - (ab+bc+ca)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{bh+ch}{h}$$

$$= b+c$$

इसी प्रकार

$$f_y(a, b, c) = c+a$$

$$f_z(a, b, c) = a+b.$$

अर्थात् $f_x(a, b, c)$, $f_y(a, b, c)$ और $f_z(a, b, c)$ का अस्तित्व है और वे संतत हैं। अतः f, (a, b, c) पर अवकलनीय है। यह बात $\mathbf{R}^3$ के सभी विन्दुओं के लिए लागू होती है। इसलिए f सर्वत्र अवकलनीय है।

E25) $(0, 0)$ पर f अनावकलनीय है यह दिखाने के लिए यह दिखाना काफी होगा कि $(0, 0, 0)$ पर f_x, f_y और f_z में से किसी एक का अस्तित्व नहीं है।

$$f_z(0,0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{f(0,0,r) - f(0,0,0)}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2}{r^2}.$$

चूंकि इस सीमा का अस्तित्व नहीं है, इसलिए $(0, 0, 0)$ पर f_z का अस्तित्व नहीं है। अतः $(0, 0, 0)$ पर f अवकलनीय नहीं है।

इकाई 6 उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों और अनेक चरों वाले फलनों की अवकलनीयता के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्रायः स्वयं फलन होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि

$f(x, y) = 3x^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 6$, तो $f_x(x, y) = 9x^2 + 2y^2$

और $f_y(x, y) = 4xy + 10y$ भी दो चरों वाले वास्तविक मान फलन हैं जिनका प्रांत $\mathbf{R}^2$ है। इस तरह हम इन नए फलनों के प्रथम कोटि वाले आंशिक अवकलजों पर चर्चा कर सकते हैं। यदि हम दो चरों वाला एक फलन लें, तब दो प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं। इनसे फिर चार और आंशिक अवकलज प्राप्त होते हैं जो पुनः फलन हो सकते हैं। यदि यह शृंखला चलती रहे तो हमें इसी प्रकार उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त होते जाएंगे।

इस इकाई में हम इसी विषय पर अध्ययन करेंगे। अगले खंड में हम इन आंशिक अवकलजों का प्रयोग करेंगे। इस इकाई में आप ऑयलर, श्वार्ज और यंग के प्रमेयों का भी अध्ययन करेंगे। इन प्रमेयों में कुछ प्रतिबंध दिए गए हैं। जब कोई फलन f इन प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, उसके मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर होते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप:

- उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज परिभाषित कर सकेंगे और उनका मान ज्ञात कर सकेंगे,
- ऑयलर-प्रमेय का कथन देकर उसे सिद्ध कर सकेंगे,
- श्वार्ज और यंग के प्रमेयों का कथन दे सकेंगे,
- विभिन्न चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलज प्राप्त करने की संक्रियाओं की क्रमविनिमेयता के बारे में निर्णय ले सकेंगे।

6.2 उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज

प्रस्तावना में आप यह देख चुके हैं कि फलन $f(x, y) = 3x^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 6$ का आंशिक अवकलज f_x पुनः x और y का एक फलन होता है। व्यापक रूप में मान लीजिए $D \subset \mathbf{R}^2$ और मान लीजिए कि फलन $f : D \to \mathbf{R}$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज का D के प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व है। तब हमें एक नया फलन, $g = f_x$ प्राप्त होता है, जो D पर परिभाषित है। इस नए फलन g के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो सकता है अथवा नहीं भी हो सकता है। यदि इसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, तो g_x और g_y को f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज कहा जाता है और इन्हें क्रमशः f_{xx} और f_{xy} से प्रकट किया जाता है। इसी प्रकार यदि D के प्रत्येक बिन्दु पर f के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज f_y का अस्तित्व हो, तो f_y से एक नया फलन परिभाषित होता है।

और, यदि इस नए फलन के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, तो हमें दो और द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज, अर्थात् f_{yx} और f_{yy} प्राप्त होते हैं। इस तरह, हम यह देखते हैं कि यदि $f(x, y)$, (a, b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन हो जिसके दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व प्रतिवेश के सभी बिन्दुओं पर हो, तो

$$f_{xx}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(a+h, b) - f_x(a, b)}{h}$$

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(a, b+k) - f_x(a, b)}{k}$$

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}$$

$$f_{yy}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(a, b+k) - f_y(a, b)}{k}$$

यदि इनमें से प्रत्येक सीमा का अस्तित्व हो।

f_{xy}, f_{yx} को मिश्रित आंशिक अवकलज भी कहते हैं।

f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों को निम्न रूप में भी प्रकट किया जाता है :

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; ; \; f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \; ;$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \; ; \; f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \, .$$

यदि हमें उस विशेष बिन्दु का निर्देश करना हो जिस पर ये द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज लिए गए हैं, तो हम लिखते हैं,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,\, b)}, \; \frac{\partial^2 f\,(a, b)}{\partial x^2}\,, \; f_{xx}(a, b), \; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{(a,\, b)}$$

$$\frac{\partial^2 f\,(a, b)}{\partial x\, \partial y}\,, \; f_{xy}(a, b), \text{ आदि}$$

इसी प्रकार दो से अधिक कोटि के आंशिक अवकलज भी परिभाषित किए जाते है। उदाहरण के लिए

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

अर्थात् $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial x\, \partial y}$, x के सापेक्ष $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ का आंशिक अवकलज है और इसे $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x\, \partial y}$ के रूप में लिखा जाता है।

इसी प्रकार हम उच्चतर कोटि वाले के आंशिक अवकलजों की संकल्पना को दो से अधिक चरों वाले फलनों पर भी लागू कर सकते हैं। व्यापक रूप में, यदि f, $D \subset \mathbf{R}^n$ पर परिभाषित n चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ वाला एक फलन हो, तो $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$, x_i और x_j के सापेक्ष f के उस द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज को प्रकट करता है, जो x_i के सापेक्ष आंशिक अवकलज $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ को आंशिकतः अवकलित करने पर प्राप्त होता है। और $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}$, चरों x_i, x_j और x_k के सापेक्ष के तृतीय कोटि के आंशिक अवकलज को प्रकट करेगा और यह चर x_i के सापेक्ष $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}$ का आंशिक अवकलन करने पर प्राप्त होगा, आदि-आदि।

नीचे दिए गए उदाहरणों में हम यह दिखाएंगे कि इन उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलनों का परिकलन किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 1: आइए हम निम्नलिखित फलनों के सभी द्वितीय कोटि वाले आंशिक अवकलज ज्ञात करें।

i) $U(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$, जहां a एक अचर है।

ii) $U(x, y, z) = x^2 + yz + xz^3$.

आइए इन्हें हम एक-एक करके लें।

i) स्पष्ट है कि $U(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ के लिए

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 3ay \; ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + 3ax.$$

इसलिए

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3ay) = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3ay) = 3a = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \; ;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 3ax) = 6y.$$

ii) $U(x, y, z) = x^2 + yz + xz^3$ के लिए

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + z^3 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial y} = z \text{ और } \frac{\partial U}{\partial z} = y + 3xz^2.$$

इसलिए, $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + z^3) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + z^3) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(2x + z^3) = 3z^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 3xz^2) = 3z^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(y + 3xz^2) = 1$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(y + 3xz^2) = 6xz.$$

उदाहरण 2: यदि $f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

तो हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

यहां $$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 . \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{1}{x} - 2y \tan^{-1}\frac{x}{y} - y^2 . \frac{1}{1 + x^2/y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 2y \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$= x - 2y \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

इसलिए, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2y\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)$$

$$= 1 - 2y.\frac{1}{1 + x^2/y^2}\cdot\frac{1}{y}$$

$$= 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

अगले उदाहरण में हम तृतीय कोटि वाला आंशिक अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 3: यदि $u(x, y, z) = e^{xyz}$, तो हम यह दिखा सकते हैं कि

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}.$$

अब $u(x, y, z) = e^{xyz}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}$$

अब, $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x\,e^{xyz} + x^2yz\,e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz} + xyz\,e^{xyz} + 2xyz\,e^{xyz} + x^2y^2z^2\,e^{xyz}$$

$$= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\,e^{xyz}$$

हमें विश्वास है कि अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

E1) निम्नलिखित फलनों के सभी द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

क) $f(x, y) = \cos\frac{y}{x}$

ख) $f(x, y) = x^5 + y^4\sin x^6$

ग) $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \cos xz$

घ) $f(x, y, z) = xyz^2 + xyz + x^3y$

E2) यदि $V(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, तो दिखाइए

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

E3) सत्यापित कीजिए कि नीचे दिए गए प्रत्येक फलन के लिए

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

क) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

ख) $f(x, y) = \tan(xy^3)$

E4) यदि $x^xy^yz^z = c$, तो दिखाइए कि उन सभी बिन्दुओं (x, y, z) पर, जहां $x = y = z$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -(x \ln ex)^{-1}$$

(संकेत : दोनों ओर लधुगणक लेकर अवकलन कीजिए ।)

इकाई 5 में आप यह देख चुके हैं कि प्रत्यक्ष अवकलन (direct differentiation) से सदा ही प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त नहीं किए जा सकते (इकाई 5 के उदाहरण 5 और 6 देखिए) । यही बात कुछ फलनों के उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों के साथ भी लागू होती है । नीचे दिए गए उदाहरण इस बात की पुष्टि करते हैं ।

उदाहरण 4 : फलन $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

लीजिए । अब हम (0, 0) पर f के द्वितीय कोटि वाले आंशिक अवकलज ज्ञात करेंगे ।

चूंकि $f_{xx}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h}$

इसलिए पहले हम $f_x(h, 0)$ और $f_x(0, 0)$ ज्ञात करेंगे ।

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$f_x(h, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(h + t, 0) - f(h, 0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

इसलिए, $f_{xx}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0 - 0}{h} = 0$

अब चूंकि $f_{xy}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$, इसलिए पहले हम $f_x(0, k)$ ज्ञात करेंगे ।

अब, $f_x(0, k) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t, k) - f(0, k)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{tk(t^2 - k^2)}{t^2 + k^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{k(t^2 - k^2)}{t^2 + k^2}$$

$$= -\frac{k^3}{k^2}$$

$$= -k.$$

इसलिए, $f_{xy}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{-k - 0}{k} = -1.$

अब चूंकि $f_{yx}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h}$

इसलिए पहले हम $f_y(h, 0)$ और $f_y(0, 0)$ ज्ञात करेंगे।

अब, $$f_y(0, 0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0, s) - f(0, 0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0 - 0}{s} = 0$$

$$f_y(h, 0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(h, s) - f(h, 0)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\dfrac{hs(h^2 - s^2)}{h^2 + s^2} - 0}{s}$$

$$= \frac{h^3}{h^2}$$

$$= h.$$

इसलिए, $$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

चूंकि, $$f_{yy}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(0, k) - f_y(0, 0)}{k},$$

इसलिए पहले हम $f_y(0, k)$ ज्ञात करेंगे।

अब, $$f_y(0, k) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0, k+s) - f(0, k)}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{0 - 0}{s}$$

$$= 0.$$

इसलिए $$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

इस तरह, आप यह देख सकते हैं कि इस फलन के आंशिक अवकलज प्राप्त करने के लिए हमें आंशिक अवकलज की परिभाषा के अनुसार प्रक्रिया लागू करनी पड़ी थी और प्रत्यक्ष अवकलन नहीं किया जा सकता था।

अगले उदाहरण में हम एक फलन लेंगे जो कुछ जटिल है।

उदाहरण 5: आइए हम $$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \tan^{-1}(y^2/x^2), & x \neq 0 \\ \dfrac{\pi y^4}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

से परिभाषित फलन f के लिए $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात करें।

पहले हम यह देखते हैं कि

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0, \text{ और}$$

$$f_x(0, k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, k) - f(0, k)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^4 + k^4) \tan^{-1}(k^2/t^2) - \pi k^4/2}{t}$$

लोपिताल नियम के अनुसार

$$f_x(0, k) = \lim_{t \to 0} \frac{4t^3 \tan^{-1} \dfrac{k^2}{t^2} + (k^4 + t^4) \cdot \dfrac{1}{1 + k^4/t^4} \left(- \dfrac{2k^2}{t^3} \right)}{1}$$

$$= \lim_{t \to 0} [4t^3 \tan^{-1} (k^2/t^2) - 2k^2 t]$$

$$= 0$$

यहां हमने लोपिताल नियम लागू किया है, क्योंकि $t \to 0$ होने पर $\dfrac{t^4 + k^4 \tan^{-1} (k^2/t^2) - \pi k^4/2}{t}$, $\dfrac{0}{0}$ के रूप का होता है।

इसलिए $\quad f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \dfrac{0 - 0}{k} = 0.$

अब $f_y(0, 0) = \lim_{s \to 0} \dfrac{f(0, s) - f(0, 0)}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{(\pi s^4/2) - 0}{s}$$

$$= 0$$

और $f_y(h, 0) = \lim_{s \to 0} \dfrac{f(h, s) - f(h, 0)}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{(h^4 + s^4) \tan^{-1} (s^2/h^2) - 0}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{4s^3 \tan^{-1} (s^2/h^2) + (h^4 + s^4) \cdot \left[\dfrac{1}{1 + s^4/h^4} \right] (2s/h^2)}{1}$$

$$= \lim_{s \to 0} [4s^3 \tan^{-1} (s^2/h^2) + 2sh^2] = 0.$$

अतः $f_{yx}(0, 0) = \lim_{s \to 0} \dfrac{f_y(s, 0) - f_y(0, 0)}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{0 - 0}{s}$$

$$= 0.$$

आपने इकाई 5 में कुछ ऐसे फलनों के उदाहरण देखे हैं जिनके आंशिक अवकलज f_x, f_y का अस्तित्व नहीं है (इकाई 5 का उदाहरण 6 देखिए)। यहां हम एक ऐसे फलन का उदाहरण देंगे जिसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व तो है लेकिन उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व नहीं है। इस उदाहरण से आप यह भी देखेंगे कि एक विशेष कोटि के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से यह निष्कर्ष नहीं निकलता कि समान कोटि वाले अन्य आंशिक अवकलजों का भी अस्तित्व हो।

उदाहरण 6: आइए हम यह जांच करें कि (0, 0) पर f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है कि नहीं, जबकि $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

से परिभाषित है।

जब, $\quad f_x(0, 0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

इस प्रकार $h \neq 0$ के लिए, $f_x(h, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(h+t, 0) - f(h, 0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

इसलिए, $f_{xx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = 0.$

अब f_{xy} के अस्तित्व की जांच करने के लिए हमें देखना होगा कि क्या

$\lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$ का अस्तित्व है ?

अतः आइए हम $k \neq 0$ के लिए $f_x(0, k)$ ज्ञात करें।

$k \neq 0$ के लिए, $f_x(0, k) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, k) - f(0, k)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{tk^2/\sqrt{t^2+k^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{k^2}{\sqrt{t^2+k^2}}$$

$$= \frac{k^2}{\sqrt{k^2}}$$

$$= |k|.$$

अब, $\lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{|k|}{k}$$

लेकिन इस सीमा का अस्तित्व नहीं है। इससे यह पता चलता है कि (0, 0) पर f_{xy} का अस्तित्व नहीं है।

अब, $f_y(0, 0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0, s) - f(0, 0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0 - 0}{s} = 0,$

और $h \neq 0$ के लिए, $f_y(h, 0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(h, s) - f(h, 0)}{s}$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{\frac{hs^2}{\sqrt{h^2+s^2}} - 0}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{hs}{\sqrt{h^2+s^2}} = 0.$$

इसलिए, $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$

इसी प्रकार चूंकि $k \neq 0$ के लिए, $f_y(0, k) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0, k+s) - f(0, k)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{0 - 0}{s} = 0.$

इसलिए, $f_{yy}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(0, k) - f_y(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$

इस तरह, (0, 0) पर f_{xx}, f_{yy} और f_{yx} का अस्तित्व है और ये 0 के बराबर हैं, जबकि $f_{xy}(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए।

E5) दिखाइए कि
$$\begin{cases} \dfrac{xy^5}{x^2+y^4}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \;, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

से परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के लिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

E6) जांच कीजिए कि (0, 0) पर निम्नलिखित फलनों के f_{xy} और f_{yx} बराबर है कि नहीं।

क) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \;, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ख) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^4}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \;, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

E7) दिखाइए कि, $$f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{यदि } |y| \leq |x| \\ -xy, & \text{यदि } |y| > |x| \end{cases}$$

से परिभाषित फलन f के लिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

ऊपर दिए गए उदाहरणों और प्रश्नों के अध्ययन से आप यह अवश्य समझ गए होंगे कि जिन चरों के सापेक्ष उच्चतर कोटि के अवकलज लिए जाते हैं उनके क्रम के बारे में हमें काफ़ी सावधानी रखनी होती है। मिसाल के तौर पर, उदाहरण 4 से यह स्पष्ट है कि f_{xy} और f_{yx} का मान अलग-अलग हो सकता है। उदाहरण 6 में दिए गए फलन के लिए आपने देखा है कि (0, 0) पर f_{xy} का अस्तित्व तो है कि लेकिन f_{yx} का अस्तित्व नहीं है। फिर उनके बराबर होने का प्रश्न ही नहीं उठता। यदि आप बिन्दु (a, b) पर f_{xy} और f_{yx} की परिभाषाओं को और अधिक ध्यान से देखें तो आप जान जाएंगे कि $f_{xy}(a, b)$ और $f_{yx}(a, b)$ की समता की आशा करना क्यों व्यर्थ है।

परिभाषा के अनुसार,

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(a, b+k) - f_x(a, b)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \left[\frac{1}{k} \left\{ \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \right\} \right]$$

$$= \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b)}{hk} \right\} \right]$$

इसी प्रकार,

$$f_{yx}(a, b) = \lim_{h \to 0} \left[\lim_{k \to 0} \left\{ \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) - f(a,b)}{hk} \right\} \right]$$

और हम इकाई 4 में यह देख चुके हैं कि व्यापक रूप में पुनरावृत्त सीमाएँ बराबर नहीं होती।

अगले भाग में हम उन प्रतिबंधों का अध्ययन करेंगे जिनके अधीन ये मिश्रित आंशिक अवकलज समान होते हैं।

6.3 मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता

अब यहां हम कुछ ऐसे पर्याप्त प्रतिबंध दे रहे हैं जिनके अधीन उन चरों के क्रम का कोई महत्व नहीं होता जिनके सापेक्ष उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज लिए जाते हैं। अर्थात् इन प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले फलनों के मिश्रित आंशिक अवकलज समान होंगे।

प्रमेय 1: मान लीजिए $f(x, y)$ एक ऐसा वास्तविक मान फलन है जिनके द्वितीय कोटि के मिश्रित आंशिक अवकलज f_{xy} और f_{yx} एक बिन्दु (a, b) पर संतत हैं। तब

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

उपपत्ति : (a, b) पर f_{xy} और f_{yx} के सांतत्य से यह पता चलता है कि (a, b) के लिए एक प्रतिवेश, मान लीजिए D, में f_x, f_y, f_{xy} और f_{yx} का अस्तित्व है।
व्यंजक

$$\psi(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

लीजिए जो कि उन सभी वास्तविक संख्याओं h, k के लिए परिभाषित है जिनके लिए $(a+h, b+k) \in D$.

मान लीजिए $h>0$ या $h<0$ के अनुसार I_h संवृत अंतराल $[a, a+h]$ या $[a+h, a]$ को प्रकट करता है। मान लीजिए $G(x)$ संवृत अंतराल I_h पर

$$G(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$$

से परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब हम पाते हैं कि

$$G(a+h) - G(a) = \psi(h, k).$$

चूंकि I_h के सभी x के लिए बिन्दु $(x, b+k)$ और (x, b), D के सदस्य हैं, इसलिए यह पता चलता है कि सभी $x \in I_h$ के लिए $f_x(x, b+k)$ और $f_x(x, b)$ का अस्तित्व है। अब हम कह सकते हैं कि संवृत अंतराल I_h पर $G'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(a, b)$. अतः फलन $G(x)$ अवकलनीय है। इस तरह हम यह पाते हैं कि $G(x)$ लगरांज के माध्य मान प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है। इसलिए हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned}\psi(h, k) &= G(a+h) - G(a) = h\,G'(a+\theta h)\\ &= h\,[f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)], \qquad \ldots(1)\end{aligned}$$

जहां $0 < \theta < 1$.

अब हम $F(t) = f_x(a+\theta h, t)$

से एक फलन $F = I_k \to \mathbf{R}$ को परिभाषित करते हैं, जहां $k > 0$ या $k < 0$ के अनुसार I_k संवृत अंतराल $[b, b+k]$ या $[b+k, b]$ होता है। चूंकि D पर f_{xy} का अस्तित्व है, इसलिए I_k पर फलन F अवकलनीय होगा। अतः लगरांज के माध्य मान प्रमेय से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।
किसी θ', $0 < \theta' < 1$ के लिए

$$F(b+k) - F(b) = kF'(b+\theta' k)$$

अर्थात् $f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b) = k\,f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$

समीकरण (1) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।
$\psi(h, k) = hk\,f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$

अतः

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\psi(h, k)}{hk} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)\\ &= f_{xy}(a, b),\end{aligned}$$

क्योंकि (a, b) पर f_{xy} संतत है। $y \in I_k$ के लिए फलन

$H(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$
लेकर और ठीक ऊपर की प्रक्रिया लागू करके हम यह सिद्ध कर सकते हैं :
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \psi(h, k) = f_{yx}(a, b)$

जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

1734 में द्रवगतिकी (hydrodynamics) के कुछ प्रश्नों को हल करने के दौरान ऑयलर ने इस परिणाम को सिद्ध किया था। बाद में चलकर जर्मन गणितज्ञ हर्मन एमैण्डस श्वार्ज (1843 – 1921) ने मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता से संबंधित एक अन्य प्रमेय को सिद्ध किया। ऑयलर-प्रमेय की अपेक्षा श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंध कुछ कम कड़े हैं। यहां हम श्वार्ज-प्रमेय का केवल कथन देंगे।

एल· ऑयलर (1707 – 1783)

प्रमेय 2 (श्वार्ज-प्रमेय) : मान लीजिए $f(x, y)$, (a, b) के प्रतिवेश में परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है जो निम्न प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

i) f_y का (a, b) के प्रतिवेश में अस्तित्व है।

ii) f_{xy}, (a, b) पर संतत है।

तब (a, b) पर f_{yx} का अस्तित्व होगा और $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$.

अगले उदाहरण में आप इस प्रमेय का अनुप्रयोग देख सकते हैं।

उदाहरण 7 : आइए हम $f(x, y) = x^4+x^2y^2+y^6$ से परिभाषित फलन f के लिए बिन्दु (x, y) पर f_{xy} ज्ञात करें। और तब हम श्वार्ज -प्रमेय का प्रयोग करके बिन्दु (x, y) पर f_{yx} का मान ज्ञात करेंगे। प्रत्यक्ष अवकलन करके हम यह आसानी से देख सकते हैं कि $f_x(x, y) = 4x^3+2xy^2$. इसलिए $f_{xy}(x, y) = 4xy$. चूंकि $4xy$ एक बहुपद है, इसलिए f_{xy} एक संतत फलन होगा।

और $f_y(x, y) = 2x^2y + 6y^5$ का अस्तित्व है। अतः f श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए $f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 4xy$.

अब आप एक प्रश्न के लिए तैयार हो जाइए।

E8) निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक फलन के लिए बिन्दु (x, y) पर f_{xy} ज्ञात कीजिए।

क) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

ख) $f(x, y) = e^x \cos y - e^y \sin x$

ग) $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x \neq 0, y \neq 0$

सत्यापित कीजिए कि इनमें से प्रत्येक फलन श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है और फिर $f_{yx}(x,y)$ ज्ञात कीजिए।

ऑयलर-प्रमेय में हम यह मान लेते हैं कि दोनों मिश्रित आंशिक अवकलज संतत हैं। जबकि श्वार्ज-प्रमेय में हम यह मान लेते हैं कि इनमें से केवल एक, मान लीजिए f_{xy} संतत है और f_y का अस्तित्व होता है। हालांकि श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंध कम कड़े होते हैं, फिर भी ये प्रतिबंध भी मिश्रित आंशिक अवकलज की समता के लिए आवश्यक नहीं होते। दूसरे शब्दों में, हमें ऐसे फलन प्राप्त हो सकते हैं जिनके मिश्रित आंशिक अवकलज कुछ बिन्दुओं पर बराबर तो होते हैं लेकिन वे श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट नहीं करते। इस प्रकार का एक फलन हम नीचे के उदाहरण में दे रहे हैं।

उदाहरण 8 : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , x = 0 = y \end{cases}$

से परिभाषित फलन f लीजिए।

हम यह दिखाएंगे कि $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$. हालांकि f श्वार्ज-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट नहीं करता।

अब, $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h}$$

$$= 0.$$

और $y \neq 0$ के लिए

$$f_x(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 y^2}{h^2+y^2} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{hy^2}{h^2+y^2}$$

$$= 0.$$

इसलिए $f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k}$

$$= 0.$$

इसी प्रकार हम यह जांच कर सकते हैं कि

$f_y(0, 0) = 0$ और $x \neq 0$ के लिए

$$f_y(x, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{x^2 k^2}{x^2+k^2} \cdot \frac{1}{k}$$

$$= 0.$$

इससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h}$$

$$= 0.$$

इस तरह हमने यह दिखाया है कि

$f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$.

अब हम यह दिखाएंगे कि f श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट **नहीं** करता है। अब, हम $x \neq 0$, $y \neq 0$ के लिए प्रत्यक्ष अवकलन करके (x, y) पर f के आंशिक अवकलज प्राप्त कर सकते हैं। अतः

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)\, xy^2 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

और $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right]$

$$= \frac{8x(x^2+y^2)^2\, y^3 - 8xy^5(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{8xy^3\,(x^2+y^2)\,[x^2+y^2 - y^2]}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

अब, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$ का अस्तित्व नहीं है। $\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$ में $y=mx$ लेने और $x\to 0$ होने पर सीमा लेने पर आप पाएंगे कि m के अलग-अलग मानों के लिए सीमा अलग-अलग है।

इसलिए हम कह सकते हैं कि $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि (0, 0) पर f_{xy} संतत नहीं है।

मिश्रित आंशिक अवकलजों की समानता की जांच करने के लिए एक अन्य निकष (criterion) भी हमें उपलब्ध है। इसका कथन अब हम प्रमेय 3 में दे रहे हैं।

प्रमेय 3 (यंग-प्रमेय) : मान लीजिए $f(x, y)$, बिन्दु (a, b) के प्रतिवेश में परिभाषित एक ऐसा वास्तविक मान फलन है कि दोनों ही प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज f_x और f_y, (a, b) पर अवकलनीय हैं। तब $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

श्वार्ज-प्रमेय की तरह यंग-प्रमेय में दिए गए प्रतिबंध प्रमेय 1 के प्रतिबंधों की अपेक्षा कम प्रतिबंधित है। फिर भी, मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के लिए ये प्रतिबंध भी आवश्यक नहीं हैं। नीचे दिया गया उदाहरण इसी तथ्य से संबंधित है।

उदाहरण 9 : उदाहरण 8 का फलन f लीजिए।

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$$

हमने यह देखा है कि $f_x(0, 0) = 0$ और $f_{xy}(0, 0) = 0$. आप आसानी से जांच कर सकते हैं कि $f_x(h, 0) = 0$. अब हम यह सिद्ध करेंगे कि (0, 0) पर f_x अवकलनीय नहीं है।

आइए हम यह मानकर चलें कि (0, 0) पर f_x अवकलनीय है। तब ऐसे फलनों $\phi(h, k)$ और $\psi(h, k)$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि

$$f_x(h, k) - f_x(0, 0) = h f_{xx}(0, 0) + k f_{xy}(0, 0) + h\phi(h, k) + k\psi(h, k) \quad \ldots(2)$$

और $(h, k) \to (0,0)$ होने पर $\phi(h, k) \to 0$

$(h, k) \to (0, 0)$ होने पर $\psi(h, k) \to 0$.

आइए अब हम $f_{xx}(0, 0)$ का मान ज्ञात करें।

$$f_{xx}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h}$$

$$= 0$$

इसलिए (2) से हमें प्राप्त होता है,

$f_x(h, k) = h\phi(h, k) + k\psi(h, k)$,

या $\frac{2hk^4}{(h^2+k^2)^2} = h\,\phi(h, k) + k\,\psi(h, k)$

अब, यदि हम $h = r\cos\theta$ और $k = r\sin\theta$ लें, तो

$$2\cos\theta\,\sin^4\theta = \cos\theta\,\phi(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\,\psi(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \ldots(3)$$

अब, यदि $r\to 0$, तो $r\cos\theta \to 0$ और $r\sin\theta \to 0$. इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि $r\to 0$ तो $h\to 0$ और $k\to 0$. अतः $\phi(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$ और $\psi(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$.

इस तरह, $r\to 0$ होने पर (3) की सीमा लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

सभी θ के लिए $2\cos\theta\,\sin^4\theta = 0$.

लेकिन यह संभव नहीं है। अतः f_x अवकलनीय नहीं है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि हालांकि $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, फिर भी फलन यंग-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट नहीं करता।

जिन फलनों से हमारा वास्ता पड़ता है, उनमें से अधिकांश फलनों के सभी आंशिक अवकलज संतत होते हैं। और इसलिए जिन चरों के सापेक्ष आंशिक अवकलज लिए गए हैं उनके क्रम में परिवर्तन करने पर भी मिश्रित आंशिक अवकलज के मान में कोई परिवर्तन नहीं आता। आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 10

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3 + yz^2}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

से परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ लीजिए।

हम यह दिखाएंगे कि $f_{xy}(0, 0, 0) \neq f_{yx}(0, 0, 0)$ जबकि $f_{xz}(0, 0, 0) = f_{zx}(0, 0, 0)$.

आइए पहले हम $f_{xy}(0, 0, 0)$ का परिकलन करें। इसके लिए पहले हमें $f_x(0, 0, 0)$ और $f_x(0, k, 0)$ ज्ञात करना होता है। अब,

$$f_x(0, 0, 0) = \lim_{p \to 0} \frac{f(p, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{0-0}{p} = 0 \text{ और}$$

$$f_x(0, k, 0) = \lim_{p \to 0} \frac{f(p, k, 0) - f(0, k, 0)}{p}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{\dfrac{p^3k - pk^3}{p^2+k^2} - 0}{p}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{p^2k - k^3}{p^2+k^2} = -k.$$

इसलिए $$f_{xy}(0, 0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k, 0) - f_x(0, 0, 0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{-k-0}{k}$$

$$= -1.$$

अब हम $f_{yx}(0, 0, 0)$ ज्ञात करेंगे। इसके लिए हमें $f_y(h, 0, 0)$ और $f_y(0, 0, 0)$ ज्ञात करना होता है।

अब, $$f_y(0, 0, 0) = \lim_{q \to 0} \frac{f(0, q, 0) - f(0, 0, 0)}{q} = 0, \text{ और}$$

$$f_y(h, 0, 0) = \lim_{q \to 0} \frac{f(h, q, 0) - f(h, 0, 0)}{q}$$

$$= \lim_{q \to 0} \frac{\dfrac{h^3q - hq^3}{h^2+q^2} - 0}{q}$$

$$= \lim_{q \to 0} \frac{h^3 - hq^2}{h^2+q^2}$$

$$= h.$$

इसलिए,

$$f_{yx}(0, 0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0, 0) - f_y(0, 0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

अतः $f_{xy}(0, 0, 0) \neq f_{yx}(0, 0, 0)$.

अब $f_z(0, 0, 0) = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{f(0, 0, r) - f(0, 0, 0)}{r} = 0$ और

$$f_z(h, 0, 0) = \lim_{r \to 0} \frac{f(h, 0, r) - f(h, 0, 0)}{r} = 0.$$

इसलिए $f_{zx}(0, 0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_z(h, 0, 0) - f_z(0, 0, 0)}{h} = 0.$

साथ ही हम देख सकते हैं कि

$$f_x(0, 0, r) = \lim_{p \to 0} \frac{f(p, 0, r) - f(0, 0, r)}{p} = 0.$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$f_{xz}(0, 0, 0) = \lim_{r \to 0} \frac{f_x(0, 0, r) - f_x(0, 0, 0)}{r} = 0.$$

अतः $f_{xz}(0, 0, 0) = f_{zx}(0, 0, 0)$.

हम नीचे एक और उदाहरण दे रहे हैं कि जिसमें यह दिखाया गया है कि प्रमेय I के प्रतिबंध मिश्रित आंशिक अवकलज की समता के लिए आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 11 : आइए हम यह दिखाएं कि $f_{xy}(0, 0, 0) = f_{yx}(0, 0, 0)$, जबकि

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}, & x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0. \\ 0 & , \text{अन्यथा} \end{cases}$$

से परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ के लिए (0, 0, 0) पर न तो f_{xy} और न ही f_{yx} संतत है।

अब, $f_x(0, 0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = 0$, और

$$f_x(0, k, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, k, 0) - f(0, k, 0)}{h} = 0.$$

इसलिए, $f_{xy}(0, 0, 0) = 0$.

इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि $f_{yx}(0, 0, 0) = 0$. फिर भी, $y \neq 0, z \neq 0$ के लिए

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, y, z) - f_y(0, y, z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1/y^2}{h}$$

का अस्तित्व नहीं है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि $f_{yx}(0, y, z)$ का अस्तित्व नहीं है। चूंकि (0, 0, 0) के किसी भी प्रतिवेश में ऐसे बिन्दु (0, y, z) होते हैं, जहां $y \neq 0$, $z \neq 0$, इसलिए इससे यह पता चलता है कि (0, 0, 0) के किसी भी प्रतिवेश में f_{yx} परिभाषित नहीं है। अतः f_{yx} (0, 0, 0) पर f_{yx} संतत नहीं हो सकता। इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि (0, 0, 0) पर f_{xy} भी संतत नहीं है।

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{y^2 h}$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-1}{y^2 h} = -\infty$ और इसलिए $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-1}{y^2 h} = \infty$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E9) मान लीजिए $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}, & y \neq 0,\ z \neq 0 \\ 0 & , \text{अन्यथा} \end{cases}$$

से परिभाषित एक फलन है।
दिखाइए कि मूल बिन्दु पर f_{xy}, f_{yx}, f_{xz} और f_{zx} का अस्तित्व है, लेकिन f_{zy} अथवा f_{yz} का अस्तित्व नहीं है।
है।

इस इकाई में हमने जो कुछ अध्ययन किया है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे दें।

6.4 सारांश

इस इकाई में हमने

1) एक से अधिक कोटि के आंशिक अवकलजों से आपको परिचित कराया है।
2) विभिन्न फलनों के लिए उच्चतर कोटि के आंशिक अवकलज प्राप्त किए हैं।
3) कुछ उदाहरणों द्वारा यह दिखाया है कि व्यापक रूप में, चरों के क्रम में परिवर्तन करने पर प्राप्त एक से अधिक कोटि के दो आंशिक अवकलज बराबर नहीं होते, हालांकि इन दोनों का अस्तित्व होता है।
4) $f_{xy}(a, b)$ और $f_{yx}(a, b)$ की समानता की जांच करने के लिए निम्न पर्याप्त प्रतिबंधों का अनुप्रयोग किया है।
   - ऑयलर-प्रमेय के अनुसार कि यदि f_{xy} और f_{yx} दोनों ही बिन्दु (a, b) पर संतत हों, तो $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.
   - श्वार्ज-प्रमेय के अनुसार यदि (a, b) पर f_{xy} संतत हो और यदि (a, b) पर f_y का अस्तित्व हो, तो $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$.
   - यंग-प्रमेय के अनुसार यदि (a, b) पर f_x और f_y अवकलनीय हों, तो $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.
5) उदाहरणों की सहायता से यह देखा है कि ऊपर के तीन प्रमेयों में उल्लेख किये गये प्रतिबंध केवल पर्याप्त प्रतिबंध हैं, आवश्यक नहीं हैं।

6.5 हल और उत्तर

E1) क) $f(x, y) = \cos \frac{y}{x}$.

$$f_x = -\sin\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}$$

$$f_y = -\sin\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$$

$$f_{xx} = \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \left(-\frac{2y}{x^3}\right) \sin \frac{y}{x}$$

$$= -\frac{y^2}{x^4} \cos \frac{y}{x} - \frac{2y}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$f_{yx} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \left(\cos \frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \left(\cos \frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x}$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x}$$

ख) $f(x, y) = x^5 + y^4 \sin(x^6)$

$\therefore f_x = 5x^4 + 6x^5y^4 \cos(x^6)$

$f_y = 4y^3 \sin x^6$

$f_{xx} = 20x^3 + 30x^4y^4 \cos(x^6) - 36x^{10}y^4 \sin(x^6)$

$f_{yx} = 24x^5y^3 \cos(x^6) = f_{xy}$

$f_{yy} = 12y^2 \sin(x^6)$

ग) $f(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \cos xz$

$\therefore f_x = y \cos xy - z \sin xz$

$f_y = x \cos xy + z \cos yz$

$f_z = y \cos yz - x \sin xz$

$f_{xx} = -y^2 \sin xy - z^2 \cos xz$

$f_{yx} = \cos xy - xy \sin xy = f_{xy}$

$f_{zx} = -\sin xz - xz \cos xz = f_{xz}$

$f_{yy} = -x^2 \sin xy - z^2 \sin yz$

$f_{zy} = \cos yz - yz \sin yz = f_{yz}$

$f_{zz} = -y^2 \sin yz - x^2 \cos xz$

घ) $f(x, y, z) = xyz^2 + xyz + x^3y$

$f_x = yz^2 + yz + 3x^2y$

$f_y = xz^2 + xz + x^3$

$f_z = 2xyz + xy$

$f_{xx} = 6xy$

$f_{yx} = z^2 + z + 3x^2 = f_{xy}$

$f_{zx} = 2yz + y = f_{xz}$

$f_{zz} = 2xy$

$f_{yy} = 0$

$f_{zy} = 2xz + x = f_{yz}$

E2) $v(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x) = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \cdot x$$

$$= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} ; \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

इसलिए, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

E3) क) $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^2 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3x^2 + 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

इसलिए, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$

ख) $f(x, y) = \tan(xy^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \sec^2(xy^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 3y^2 \sec^2(xy^3) + 6xy^5 \sec^2(xy^3) \tan(xy^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 \sec^2(xy^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3y^2 \sec^2(xy^3) + 6xy^5 \sec^2(xy^3) \tan(xy^3)$$

इसलिए, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

E4) $x^x y^y z^z = c$.

दोनों तरफ लघुगणक लेकर $x \ln x + y \ln y + z \ln z = \ln c$.

z को x और y का फलन मान कर उसे 5 के सापेक्ष अवकलित करके हमें प्राप्त होता है

$$\ln y + y \cdot \frac{1}{y} + \left[\ln z + z \frac{1}{z}\right] \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\ln y + 1}{\ln z + 1}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\ln y + 1}{(\ln z + 1)^2} \cdot \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\ln ey \ln ex}{z(\ln ez)^3}$$

$x = y = z$, रखने पर

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{x \ln ex} = -(x \ln ex)^{-1}$$

E5) $f_x(0, 0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$. $f_y(0, 0) = 0$. इसी प्रकार $k \neq 0$ के लिए

$$f_x(0, k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{} = 1$$

अतः $f_{yx}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 1.$

और $h \neq 0$ के लिए $f_y(h, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(h, k) - f(h, 0)}{k}$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{hk^4}{h^2 + k^4} = 0$$

अतः $f_{xy}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 0.$

इसलिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

E6) क) $f_x(0, 0) = 0$.

$k \neq 0$ के लिए $f_x(0, k) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{hk^2}{\sqrt{h^4 + k^4}} = 0.$

अतः $f_{yx}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 0$

इसी प्रकार, $f_{xy}(0, 0) = 0$.

इसलिए $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$

ख) $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$

$k \neq 0$ के लिए $f_x(0, k) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k^3}{\sqrt{h^2 + k^4}} = k.$

अतः $f_{yx}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = 1$

$h \neq 0$ के लिए $f_y(h, 0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{hk^2}{\sqrt{h^2 + k^4}} = 0$

अतः $f_{xy}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 0$

इसलिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

E7) $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$

$k \neq 0$ के लिए $f_x(0, k) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, k) - f(0, k)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-hk - 0}{h}$ (चूंकि यहां k का मान स्थिर है, हम मान सकते हैं कि $|h| < |k|$)

$= -k$.

$h \neq 0$ के लिए $f_y(h, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k}$

$= \lim_{k \to 0} \frac{hk - 0}{k}$ (चूंकि यहां h का एक स्थिर मान है, हम मान सकते हैं कि $|k| < |h|$)

$= h.$

इसलिए, $f_{yx}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$

और $f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$

अतः $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

E8) क) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. तब

$f_y(x, y) = x + 2y$

$f_{xy}(x, y) = 1$

f_y का सर्वत्र अस्तित्व है। और f_{xy}, अचर होने के कारण संतत है। अतः f श्वार्ज-प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए श्वार्ज-प्रमेय से हम कह सकते हैं कि f_{yx} का अस्तित्व है और $f_{yx} = f_{xy} = 1$.

ख) $f(x, y) = e^x \cos y - e^y \sin x$

$\therefore f_y(x, y) = -e^x \sin y - e^y \sin x$

और $f_{xy}(x, y) = -e^x \sin y - e^y \cos x$

आप आसानी से देख सकते हैं कि f_y का अस्तित्व है और f_{xy} संतत है। अतः श्वार्ज-प्रमेय से f_{yx} का अस्तित्व है और

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = -e^x \sin y - e^y \cos x.$$

ग) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$f_y(x, y) = \frac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

चूंकि सभी $(x, y) \neq (0, 0)$ के लिए f_y का अस्तित्व है और f_{xy} संतत है, इसलिए जब $x \neq 0$, $y \neq 0$, तब श्वार्ज-प्रमेय से हमें प्राप्त होता है :

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

E9) अब $f_x(0, 0, 0) = f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = 0$.

$k \neq 0$ के लिए $f_x(0, k, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, k, 0) - f(0, k, 0)}{h} = 0$

इसी प्रकार $f_{yx}(0, 0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k, 0) - f_x(0, 0, 0)}{k} = 0.$

इसी प्रकार $f_{xy}(0, 0, 0) = f_{xz}(0, 0, 0) = f_{zx}(0, 0, 0) = 0.$

$r \neq 0$ के लिए $f_y(0, 0, r) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k, r) - f(0, 0, r)}{k}$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{k/r}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

अतः $f_{zy}(0, 0, 0) = \lim_{r \to 0} \dfrac{f_y(0, 0, r) - f_y(0, 0, 0)}{r} = \lim_{r \to 0} \dfrac{1}{r^2}$

लेकिन $\lim_{r \to 0} \dfrac{1}{r^2}$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः $f_{zy}(0, 0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है।

चूंकि $f_z(0, k, 0) = \lim_{r \to 0} \dfrac{f(0, k, r) - f(0, k, 0)}{r} = k \lim_{r \to 0} \dfrac{1}{r^2}$.

अतः $f_z(0, k, 0)$ का अस्तित्व नहीं है क्योंकि $\lim_{r \to 0} \dfrac{1}{r^2}$ का अस्तित्व नहीं है।

इसलिए $f_{yz}(0, 0, 0) = \lim_{k \to 0} \dfrac{f_z(0, k, 0) - f_z(0, 0, 0)}{k}$ का अस्तित्व नहीं है।

इकाई 7 शृंखला-नियम और दिक्-अवकलज

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

आप शृंखला-नियम से अच्छी तरह परिचित हैं। इसका प्रयोग फलन के फलन का अवकलज ज्ञात करने में किया जाता है (कलन, इकाई 3)। इस इकाई में हम ऐसे अनेक चरों वाले फलनों के आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए शृंखला-नियम का अध्ययन करेंगे जहां प्रत्येक चर स्वयं अनेक स्वतंत्र चरों वाला एक फलन है। मान लीजिए $u, v, w, \ldots\ldots$ एक चर t के फलन हैं। तब $f(u, v, w, \ldots\ldots..)$, चर t का एक फलन, $F(t)$ है। संपूर्ण अवकलज (total derivative) $F'(t)$ प्राप्त करने की विधि की भी हम यहां चर्चा करेंगे। इन परिणामों की सहायता से हम समघात फलनों से संबंधित ऑयलर-प्रमेय को सिद्ध करेंगे। अंत में हम आपको दिक्-अवकलज की संकल्पना से परिचित कराएंगे और आंशिक अवकलज के साथ, जिसका अध्ययन आप इकाई 5 में कर चुके हैं, इसके संबंध की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप –

- शृंखला-नियम को लागू करके फलन के संपूर्ण अवकलज को परिभाषित कर सकेंगे और उसका मान ज्ञात कर सकेंगे,
- अनेक चरों वाले फलनों के शृंखला-नियम का कथन दे सकेंगे और शृंखला-नियम पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे,
- समघात फलनों को परिभाषित कर सकेंगे और उन्हें पहचान सकेंगे,
- समघात फलनों से संबद्ध ऑयलर-प्रमेय का कथन देकर उसे सिद्ध कर सकेंगे,
- दिए हुए फलनों के दिक्-अवकलजों को परिभाषित कर सकेंगे और उनका मान ज्ञात कर सकेंगे।

7.2 शृंखला-नियम

इस भाग में हम शृंखला नियम (chain rule) पर विचार करेंगे जिसकी सहायता से अनेक चरों वाले फलनों के अवकलज ज्ञात किये जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक चर स्वयं एक स्वतंत्र चर का फलन होता है। आपको याद होगा कि आपने कलन पाठ्यक्रम में एक चर वाले फलन के शृंखला-नियम का अध्ययन किया है। इस नियम के अनुसार, यदि हम एक फलन $y = f(x)$ लें; जहां x, t का एक फलन, मान लीजिए $x = g(t)$ है, तो y को भी t का एक फलन, $y = F(t)$, माना जा सकता है, और तब

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

या, दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि $F'(t) = f'(x)\, g'(t)$.

अब हम एक चर वाले फलनों के शृंखला-नियम का विस्तार करके उसे अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू करेंगे। हमने भाग 3.3 में अनेक चरों वाले फलनों के संयोजन को परिभाषित किया है। वहाँ हमने यह देखा है कि संयुक्त फलन अनेक विधियों से प्राप्त किए जा सकते हैं।

उदाहरण के लिए,

स्थिति 1 : मान लीजिए $f(x, y) = x^2+xy+y^2$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का एक फलन है और $g(t) = \sin t$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का एक फलन है। तब

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = \sin (x^2 + xy + y^2)$$

द्वारा परिभाषित फलन $g \circ f$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का एक फलन है।

स्थिति 2 : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का फलन $\phi(x, y) = x^y + y^x$ लीजिए और $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ का फलन $g(t) = (\sin t, \tan t)$ लीजिए। तब

$$\phi \circ g(t) = \phi(g(t)) = \phi(\sin t, \tan t) = (\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का एक फलन है।

चूंकि संयुक्त फलन अनेक विधियों से प्राप्त किए जा सकते हैं, इसलिए हमें प्रत्येक विधि के लिए अलग-अलग शृंखला-नियम प्राप्त करना होगा। नीचे दिए गए प्रमेय 1 में हम स्थिति 1 के संयुक्त फलनों के अवकलज ज्ञात करने के लिए शृंखला-नियम प्राप्त करेंगे। बाद में प्रमेय 2 में हम स्थिति 2 के लिए शृंखला-नियम प्राप्त करेंगे। आइए, अब हम प्रमेय 1 का कथन देकर उसे सिद्ध करें।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $f(x, y)$ एक वास्तविक मान फलन है जिसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज, बिन्दु (a, b) पर संतत हैं। और मान लीजिए g एक वास्तविक चर वाला वास्तविक मान फलन है जो बिन्दु $f(a, b)$ पर अवकलनीय है। तब (a, b) पर संयुक्त फलन $\phi = g \circ f$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व होता है और

$$\phi_x(a, b) = g'(f(a, b))\, f_x(a, b)$$

$$\phi_y(a, b) = g'(f(a, b))\, f_y(a, b).$$

उपपत्ति : सबसे पहले आप इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि फलन $f(x, y)$, बिन्दु (a, b) के एक प्रतिवेश में परिभाषित है और फलन g किसी $\delta > 0$ के लिए विवृत अंतराल
$I =]\, f(a, b) - \delta,\ f(a, b) + \delta\, [$ में परिभाषित है।

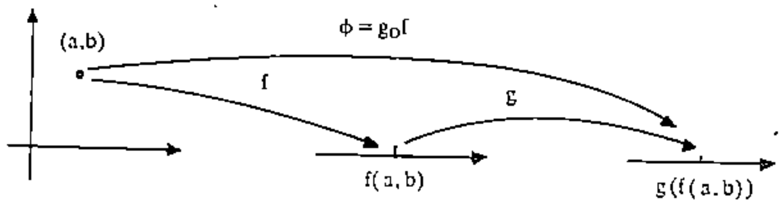
चूंकि (a, b) पर $f(x, y)$ के आंशिक अवकलज संतत होते हैं, इसलिए यह पता चलता है कि f, (a, b) पर संतत है।

फलस्वरूप, (a, b) के एक ऐसे प्रतिवेश N का अस्तित्व होता है कि $(x, y) \in N$ के लिए वास्तविक संख्या $f(x, y) \in I$. इससे यह अर्थ निकलता है कि संयुक्त फलन $\phi = g \circ f$, (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित है और हम (a, b) पर इसके आंशिक अवकलजों पर विचार कर सकते हैं।

यहां $\phi = g \circ f$ दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है।

(चित्र 1 भी देखिए)।

फलन $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ संतत होता है, यदि $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, जिससे कि $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
अर्थात् f, a पर संतत होता है, यदि $f(a)$ के प्रत्येक प्रतिवेश I के लिए a का एक प्रतिवेश N होता है जिससे कि $x \in N \Rightarrow f(x) \in I$.



चित्र 1

आइए पहले हम x के सापेक्ष ϕ का आंशिक अवकलज ज्ञात करें।

चूंकि फलन g, $f(a, b)$ पर अवकलनीय है, इसलिए एक ऐसे फलन $\psi(k)$ का अस्तित्व होता है कि

$$g(f(a, b) + k) - g(f(a, b)) = kg'(f(a, b)) + k\psi(k) \qquad \ldots(1)$$

जहां $k \to 0$ होने पर $\psi(k) \to 0$ (इकाई 5 का भाग 5.3 देखिए)।

$k = k(h) = f(a+h, b) - f(a, b)$, $h \neq 0$, लीजिए। $\qquad (2)$

अब x के सापेक्ष ϕ का आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए हमें

$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(a+h, b) - \phi(a, b)}{h}$ ज्ञात करना होता है। अतः आइए हम भागफल

$\frac{\phi(a+h, b) - \phi(a, b)}{h}$ पर विचार करें।

अब,
$$\frac{\phi(a+h, b) - \phi(a, b)}{h} = \frac{g(f(a+h, b)) - g(f(a, b))}{h}$$
$$= \frac{g(f(a, b)+k) - g(f(a, b))}{h}$$
$$= \frac{g'(f(a, b))\,k + k\psi(k)}{h}, \text{ (1) से।}$$

(2) में दिए गए k के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :
$$\frac{\phi(a+h, b) - \phi(a, b)}{h} = g'(f(a, b)) \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} + \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \psi(k) \quad \ldots(3)$$

(2) से हम यह भी देख सकते हैं कि चूंकि $f(x, y)$, (a, b) पर संतत है, इसलिए $h \to 0$ होने पर $k(h) \to 0$ और फिर इससे यह पता चलता है कि $h \to 0$ होने पर $\psi(k) \to 0$.

इसलिए $h \to 0$ होने पर (3) का अंतिम पद शून्य की ओर प्रवृत्त करता है और हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\phi_x(a, b) = g'(f(a, b))\, f_x(a, b).$$

शेष भाग की उपपत्ति भी इसी प्रकार की है।

इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने के लिए यहाँ पर हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 1 : आइए हम स्थिति I में दिया गया संयुक्त फलन $\phi(x, y) = \sin(x^2+xy+y^2)$ लें और $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a, b)$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ज्ञात करें। यहाँ $\phi = g \circ f$, जहां $f(x, y) = x^2+xy+y^2$ और $g(t) = \sin t$. फलन f और फलन g दोनों ही प्रमेय 1 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं।

अतः प्रमेय 1 के अनुसार
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(a, b) = g'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$
$$= \cos(a^2 + ab + b^2).(2a + b)$$
$$= (2a + b)\cos(a^2 + ab + b^2)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(a, b) = g'(f(a, b)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$
$$= \cos(a^2 + ab + b^2) \cdot (a + 2b)$$
$$= (a + 2b)\cos(a^2 + ab + b^2)$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E1) मान लीजिए $f(x, y) = x^2+3xy+y^2$ और

$g(t) = \cos t$. $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ पर $\phi = g \circ f$ के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

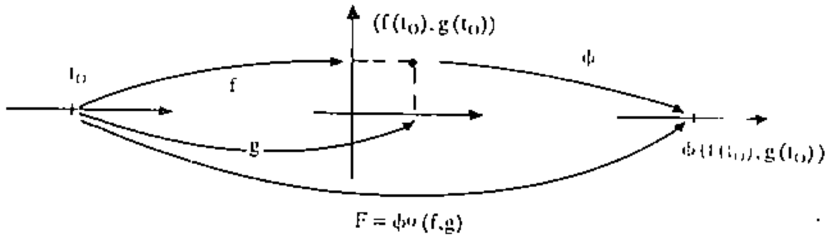
अब हम नीचे स्थिति 2 के शृंखला-नियम का कथन देंगे। इस प्रमेय की उपपत्ति इस पाठ्यक्रम के क्षेत्र के बाहर है।

प्रमेय 2: यदि $f(t)$ और $g(t)$ दो वास्तविक मान फलन हैं जो बिन्दु t_0 पर अवकलनीय हैं, और यदि $\phi(x, y)$ दो चरों वाला वास्तविक मान फलन है जो बिन्दु $(f(t_0), g(t_0))$ पर अवकलनीय है, तब फलन

$F(t) = \phi(f(t), g(t))$ t_0 पर अवकलनीय है और

$$F'(t_0) = f'(t_0)\, \phi_x (f(t_0), g(t_0)) + g'(t_0)\, \phi_y (f(t_0), g(t_0)).$$

चित्र 2 में प्रमेय 2 में लिए गए फलनों को दर्शाया गया है।



चित्र 2

यदि हम $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = F(t) = \phi(f(t), g(t)) = \phi(x, y)$, लिखें, तो ऊपर के प्रमेय के परिणाम को

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। इसे **आंशिक अवकलजों का शृंखला-नियम** कहा जाता है। अवकल $\frac{dz}{dt}$ को z का **संपूर्ण अवकलज** (total derivative) भी कहा जाता है।

इसी प्रकार का परिणाम n चरों $(n > 2)$ वाले फलनों पर भी लागू होता है। परिणाम यह है : मान लीजिए, z, n चरों $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ वाला एक फलन है और प्रत्येक x_i, t का एक फलन है। तब

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

जबकि z बिन्दु $(x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t))$, पर अवकलनीय हो और प्रत्येक x_i, t पर अवकलनीय हो।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : आइए हम फलन $f(x, y) = x^2y - 2x + 3y - 4$, का संपूर्ण अवकलज ज्ञात करें, जहाँ $x = t-2$ और $y = t^2$.

आप यह आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि प्रमेय 2 की सभी आवश्यकताएं संतुष्ट हो गई है।

अतः

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= (2xy-2)(1) + (x^2+3)(2t) \\
&= (2(t-2)t^2-2) + ((t-2)^2+3)(2t) \\
&= 2t^3-4t^2-2+2t^3-8t^2+14t \\
&= 4t^3-12t^2+14t-2
\end{aligned}$$

अगले उदाहरण में हम तीन चरों वाला एक फलन लेंगे।

उदाहरण 3 : $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ लीजिए, जहाँ $x = t$, $y = e^t$, $z = e^{-t}$. इस फलन का संपूर्ण अवकलज ज्ञात करने के लिए n चरों के शृंखला-नियम को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (y+z)(1) + (x+z)e^t - (x+y)e^{-t}$$

$$= e^t + e^{-t} + (t+e^{-t})e^t - (t+e^t)e^{-t}$$

$$= (1+t)e^t + (1-t)e^{-t}$$

उदाहरण 4 : आइए हम फलन $z = xy$ का संपूर्ण अवकलज ज्ञात करें, जहाँ $x = \cos t$, $y = t^2$.

शृंखला-नियम से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{dz}{dt} = y(-\sin t) + x.\ 2t$$

ध्यान दीजिए कि हम $\frac{dz}{dt}$ को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$$

इस सूत्र से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। यह एक चर वाले फलनों के अवकलन का गुणनफल नियम है।

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 2, 3 और 4 में शृंखला-नियम लागू करने के स्थान पर पहले हम t के पदों में x, y और/या z को प्रतिस्थापित कर सकते थे और तब परिणामी फलन को t के सापेक्ष अवकलित कर सकते थे। इस तरह, उदाहरण 3 के फलन, अर्थात्

$f(x, y, z) = xy + yz + zx$, जहां $x = t$, $y = e^t$, $z = e^{-t}$, को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$f(t) = te^t + e^t e^{-t} + e^{-t}t$$

$$= te^t + 1 + te^{-t}$$

अतः $f'(t) = (1+t)e^t + (1-t)e^{-t}$

आप देख सकते हैं कि यह ठीक उस संपूर्ण अवकलज के समान है जिसे हमने उदाहरण 3 में शृंखला-नियम से प्राप्त किया था।

अब आपके मन में यह प्रश्न उठ सकता है कि $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात करने के लिए एक अतिरिक्त (जटिल) विधि का पता लगाने के लिए हमने इतनी अधिक मेहनत क्यों की है ? इसके अनेक कारण हैं।

- पहला कारण तो यह है कि x अथवा y को t के पदों में स्पष्ट रूप में व्यक्त करना सदा संभव नहीं है।
- दूसरा कारण यह है कि x और y के लिए प्रतिस्थापन करने पर प्राप्त z का व्यंजक काफ़ी जटिल हो सकता है। अतः $\frac{dz}{dt}$ का मान निकालने की प्रक्रिया काफ़ी लंबी और क्लिष्ट हो सकती है। हम अपने सूत्र में जिस प्रकार के परिकलन करते हैं वे z को t के फलन के रूप में व्यक्त करने के बाद $\frac{dz}{dt}$ के मान ज्ञात करने के लिए लागू किए गए परिकलनों की तुलना में काफ़ी सरल हैं।

इसे अब हम एक उदाहरण की सहायता से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 5 : मान लीजिए हम $(\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$ का अवकलज ज्ञात करना चाहते हैं।

मान लीजिए $F(t) = (\sin t)^{\tan t} + (\tan t)^{\sin t}$ हम $F(t)$ को $F(t) = \phi(f(t), g(t))$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ

$\phi(x, y) = x^y + y^x$, $x = f(t) = \sin t$ और $y = g(t) = \tan t$.

तब ϕ, f और g प्रमेय 2 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

अतः शृंखला-नियम के अनुसार

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \left[yx^{y-1} + (\ln y)\, y^x\right]\cos t + \left[(\ln x)\, x^y + xy^{x-1}\right]\sec^2 t$$

$$= (\tan t)\,\frac{(\sin t)^{\tan t}}{\sin t}\cos t + (\ln \tan t)\,(\tan t)^{\sin t}\cos t$$

$$+ (\ln \sin t)\,(\sin t)^{\tan t}\,(\sec^2 t) + \sin t\,\frac{(\tan t)^{\sin t}}{\tan t}\,(\sec^2 t)$$

$$= \left[1 + \sec^2 t \ln \sin t\right](\sin t)^{\tan t}$$

$$+ \left[\cos t \ln \tan t + \sec t\right](\tan t)^{\sin t}$$

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि F को संयुक्त फलन के रूप में लिखे बिना ही अगर हम $\frac{dF}{dt}$ का परिकलन करते, तो उसमें कितना समय लगता ?

अब यदि आपने ऊपर दिए गए उदाहरणों को अच्छी तरह से समझ लिया है तो आप नीचे दिए गए प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

E2) नीचे दी गई प्रत्येक स्थिति में t के सापेक्ष संपूर्ण अवकलज ज्ञात कीजिए।

क) $z = x^2 + 3xy + y^2$ यदि $x = 2 + \cos\frac{\pi t}{8}$, $y = 3 + \sin\frac{\pi t}{8}$.

ख) $z = \frac{2x+3}{3y-2}$ यदि $x = e^t + t$, $y = e^{-t} - t$.

ग) $u = xyz$ यदि $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$.

घ) $u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, यदि $x = t^2 + 1$, $y = 2t$, $z = e^t$, $w = t^5$.

E3) निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए।

क) $z = \ln(x^2 + 3xy)$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$

ख) $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, $x = \ln t$, $y = e^t$

ग) $w = e^{xy^2 + yz}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = \cos t + \sin t$

E4) संपूर्ण अवकलज की संकल्पना को लागू करके नीचे दिए गए फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

क) $t^{3\sin t} + (\sin t)^{t^3}$

ख) $t^{2t} + (t+1)^{t^2}$

ग) $e^{t^4} + t^{4\cos t}$

अस्पष्ट फलन (implicit function) द्वारा दिए गए वक्रों की प्रवणता ज्ञात करने में शृंखला-नियम काफ़ी उपयोगी होता है। शृंखला-नियम को हम दो चरों वाले कुछ संयुक्त फलनों, जबकि ये चर अस्पष्टतः संबंधित हों, के संपूर्ण अवकलज प्राप्त करने में भी लागू कर सकते हैं। हालांकि आप कलन में अस्पष्ट फलन के अवकलन का अध्ययन कर चुके हैं, फिर भी यहां हम अस्पष्ट फलन के बारे में संक्षिप्त विवरण दे रहे है।

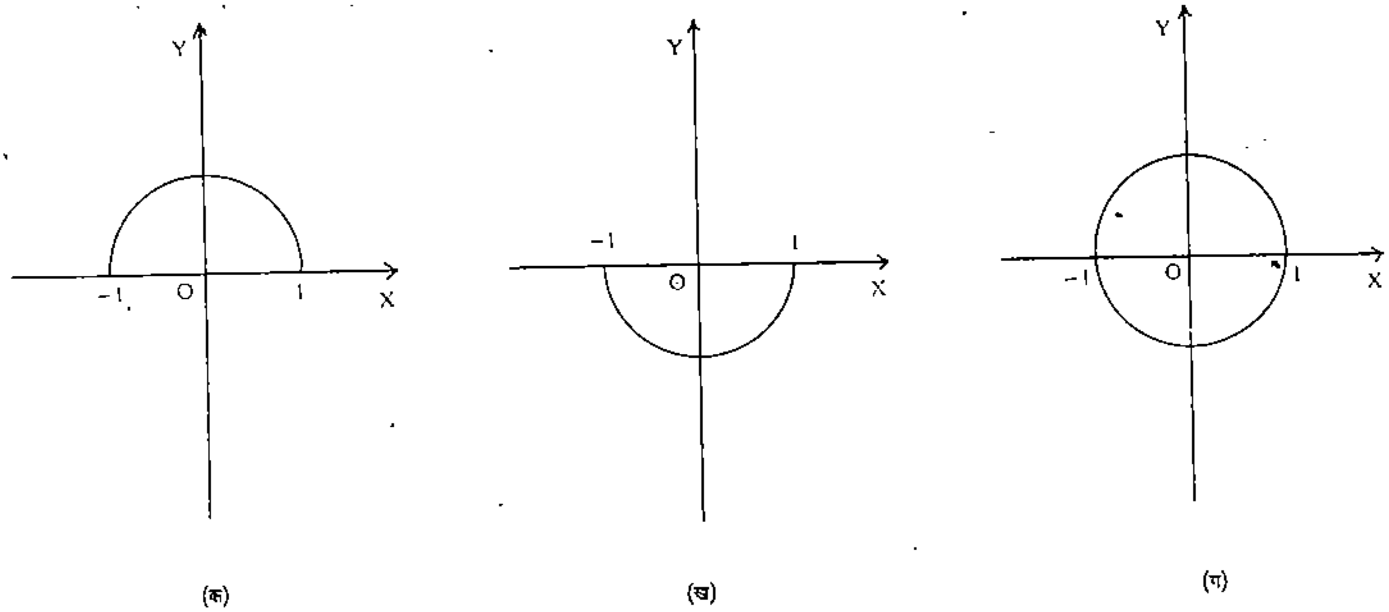
अनेक बार आपने $x + e^{xy} + 3xy = 0$ के प्रकार के समीकरण देखे हैं। यदि x का कोई मान दिया हुआ हो तो y का एक ऐसा अद्वितीय मान होता है जिससे कि ऊपर दिया गया समीकरण संतुष्ट हो जाता है। इस

तरह, y, x का एक फलन तो है पर इसे हम स्पष्ट रूप में व्यक्त नहीं कर सकते, अर्थात् इसे हम $y = f(x)$ के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते। ऐसी स्थिति में हम यह कहते हैं कि y, x का एक अस्पष्ट फलन है, जो दिए हुए समीकरण द्वारा अस्पष्टतः परिभाषित है।

आइए हम समीकरण $x^2 + y^2 - 1 = 0$ लें। तब, यदि x का कोई मान दिया हुआ हो तो y के ऐसे दो मान होते हैं, जो ऊपर दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अतः हम एक ऐसा $f(x)$ नहीं प्राप्त कर सकते जिससे कि $y = f(x)$ और $(x, f(x))$ से प्राप्त सभी बिन्दु ऊपर दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हों। वस्तुतः ऐसे दो फलन

$y_1 = \sqrt{1-x^2}$ और $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$

होते हैं जिनसे प्राप्त सभी बिन्दु मिल कर ऊपर दिए गए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। (देखिए चित्र 3) ।



चित्र 3

कलन पाठ्यक्रम में ठीक नियम को जाने बिना ही आपने अस्पष्ट फलनों को अवकलित किया।

इस तरह हम देखते हैं कि यदि दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन $F(x, y)$ दिया हुआ हो, तो हम एक ऐसा फलन $f(x)$ प्राप्त करने की आशा नहीं कर सकते जिससे कि सभी x के लिए $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$. बाद में इकाई 10 में हम यह देखेंगे कि उपयुक्त प्रतिबंधों के अधीन, यदि कोई बिन्दु x_0 दिया हुआ हो तो x_0 के प्रतिवेश में परिभाषित एक ऐसे फलन का अस्तित्व होता है कि ऊपर बताए गए प्रतिवेश में सभी बिन्दुओं के लिए $F(x, \phi(x)) = 0$. ऐसी स्थिति में शृंखला-नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

अतः

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}, \text{ यदि } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \qquad \ldots(\cdot)$$

और किसी बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}$ से समीकरण $F(x, y) = 0$ द्वारा दिए गए समतल वक्र की प्रवणता प्राप्त हो जाती है।

ध्यान दीजिए कि x के पदों में y को स्पष्ट रूप से जाने बिना ही हमने $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त किया है।

आइए इस विधि से संबंधित कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 6 : मान लीजिए y, समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ और $hx + by \neq 0$ द्वारा परिभाषित का एक अस्पष्ट फलन है। आइए हम $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हम $f(x, y) = ax^2+2hxy+by^2-1$, लेते हैं, जिससे कि $f(x, y) = 0$ दिए हुए अस्पष्ट फलन को निरूपित करता है। अब चूँकि $hx+by \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2hx + 2by \neq 0$.

अतः सूत्र (•) के अनुसार

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{2ax+2hy}{2hx+2by} = -\frac{ax+hy}{hx+by}.$$

अगले उदाहरण में हम तीन चरों वाले अस्पष्ट फलन से संबंधित एक सरल परिणाम को सिद्ध करेंगे।

उदाहरण 7 : मान लीजिए $f(x, y, z) = 0$ तीन चरों वाला एक समीकरण है जिसके लिए $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ और $\frac{\partial f}{\partial z}$ शून्येतर हैं।

हम यह दिखाएंगे कि

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_z \left(\frac{dz}{dy}\right)_x \left(\frac{dx}{dz}\right)_y = -1,$$

जहाँ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_z$, x के सापेक्ष y के अवकलज को प्रकट करता है जबकि z को एक अचर माना गया हो, आदि आदि।

पहले हम यह देखते हैं कि यदि z को अचर माना गया हो, तो हम y को समीकरण $f(x, y, z) = 0$ द्वारा निर्धारित x का एक स्पष्ट फलन मान सकते हैं।

अतः सूत्र (•) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_z = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

इसी प्रकार $\left(\frac{dx}{dz}\right)_y = -\frac{\partial f/\partial z}{\partial f/\partial x}$

और $\left(\frac{dz}{dy}\right)_x = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}.$

फलस्वरूप

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_z \left(\frac{dx}{dz}\right)_y \left(\frac{dz}{dy}\right)_x = -1.$$

अगले उदाहरण में हम दो चरों वाला एक संयुक्त फलन लेंगे, जबकि वे चर अस्पष्टतः संबंधित हैं।

उदाहरण 8 : आइए हम $u=\sin(x^2+y^2)$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें जहाँ x और y समीकरण $a^2x^2+b^2y^2=c^2$ को संतुष्ट करते हैं।

यहाँ u दो चरों, x और y वाला एक फलन है, जहाँ $x=x$ और y, $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ द्वारा दिया गया x का एक अस्पष्ट फलन है। तब u, जिसे एक चर-x वाला फलन माना गया है, प्रमेय 2 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। अतः हम

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \ldots(4)$$

लिख सकते हैं। अब हम प्रमेय 1 की सहायता से $\frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात करेंगे। ध्यान दीजिए कि u, दो फलनों $g(x, y) = x^2 + y^2$ और $f(t) = \sin t$ का संयुक्त फलन है। स्पष्ट है कि $u = \sin(x^2+y^2)$ प्रमेय 1 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है, क्योंकि x^2+y^2 के [illegible] कोटि के आंशिक अवकलज होते हैं और फलन $\sin t$ सर्वत्र अवकलनीय है।

अतः प्रमेय 1 से

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2+y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cos(x^2+y^2).$$

अंत में, $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त करने के लिए हम $\phi(x, y) = a^2x^2+b^2y^2 - c^2$ लिखते हैं । तब सूत्र (*) से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{a^2x}{b^2y}, \; y \neq 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{dy}{dx}$ के व्यंजकों को (4) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos(x^2+y^2) + 2y \cos(x^2+y^2)\left(-\frac{a^2x}{b^2y}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) x \cos(x^2+y^2).$$

अब हम आपके अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न दे रहे हैं ।

E5) यदि $y^x + x^y = a^b$, तो दिखाइए कि

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \ln y + yx^{y-1}}{xy^{x-1} + x^y \ln x}$$

E6) यदि $f(x, y) = 0$, $\phi(y, z) = 0$, तो दिखाइए कि

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

(संकेत : $\frac{dz}{dx}$ का परिकलन करने के लिए $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{dz}{dy}$ ज्ञात कीजिए)

E7) यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हों जिससे कि $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = k$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\tan C - \tan B}{\tan A - \tan C}$$

E8) नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में $\frac{du}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

क) $u = x^2 - xy + y^2$, $y = 3x+2$
(यहाँ u, x और y वाला एक फलन है, जहाँ x और y, x के फलन हैं : $x=x$ और $y=3x+2$).

ख) $u = x^2 - y^3$, $y = \ln x$

ग) $u = x \ln xy$, जहाँ $x^3+y^3+3xy = 1$.

अभी तक हमने कुछ विशिष्ट स्थितियों में ही संयुक्त फलनों के अवकलजों के बारे में चर्चा की है । अब हम शृंखला-नियम के अति व्यापक रूप से आपको परिचित कराएंगे । लेकिन परिणाम का कथन देने से पहले आइए हम सदिश मान फलन की अवकलनीयता की परिभाषा पर विचार करें ।

मान लीजिए g एक बिन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ के प्रतिवेश N में परिभाषित एक सदिश मान फलन है जिसके मान $\mathbf{R}^m$ में हैं । हम जानते हैं कि g को $x \in N$ के लिए $g(x) = (g_1(x),\ldots,g_m(x))$ के रूप में व्यक्त किया

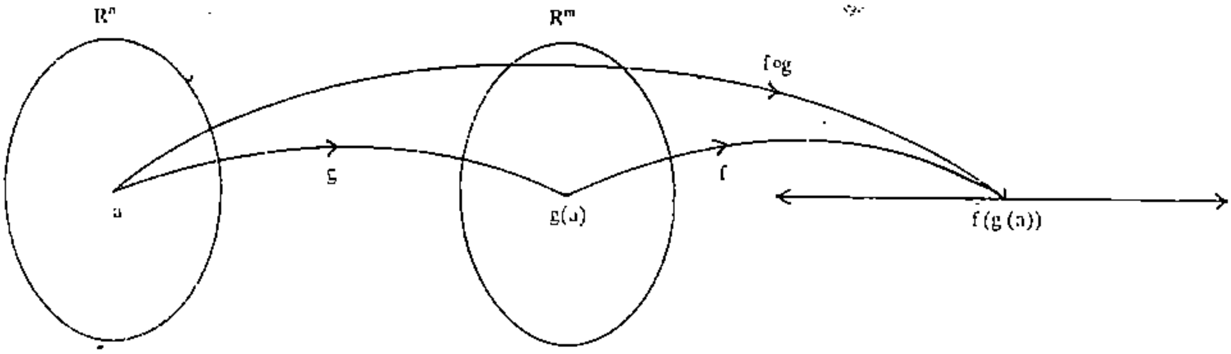
जा सकता है, जहाँ $g_1, g_2, \ldots, g_m$, g द्वारा अद्वितीयतः निर्धारित वास्तविक मान फलन हैं। यदि a पर प्रत्येक g_i अवकलनीय है, तो **सदिश मान फलन g को a पर अवकलनीय** कहा जाता है।

अब हम प्रमेय का कथन दे रहे हैं।

प्रमेय 3 (शृंखला-नियम) : मान लीजिए $g = (g_1, \ldots, g_m)$, n चरों वाला एक सदिश मान फलन है, जिसके मान $\mathbf{R}^m$ में हैं और जो बिन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ पर अवकलनीय है। मान लीजिए f, m चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जिसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलजों का बिन्दु $g(a) = (g_1(a), \ldots, g_m(a))$ पर अस्तित्व है (चित्र 4 भी देखिए)। तब $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ पर संयुक्त फलन $\phi = f \circ g$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का $\mathbf{R}^n$ के बिन्दु a पर अस्तित्व होता है और

$$D_j \phi(a) = \sum_{k=1}^{m} D_k f(g_1(a), \ldots, g_m(a))\, D_j(g_k(a)),\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

जहाँ $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ के लिए $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$



चित्र 4

देखने में यह व्यंजक आपको कठिन लग सकता है। परन्तु यदि आप आगे टिप्पणी 1 (i) और (ii) में दिए गए स्थितियों $n = 1, m = 2$ और $n = 2, m = 1$ के व्यंजकों को देखें, तो चित्र स्पष्ट हो जाएगा।

हालांकि हमने व्यापक रूप में प्रमेय का कथन दिया है, यहाँ हम केवल दो और तीन चरों वाले फलनों के उदाहरणों पर ही विचार करेंगे। इसके लिए हमने टिप्पणी 1(iii) में स्थिति $n = m = 2$ के लिए प्रमेय 3 का कथन फिर से दिया है।

टिप्पणी 1: (i) यदि $n = 2, m = 1$, तो हमें प्रमेय 1 प्राप्त हो जाता है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि इस स्थिति में g, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ पर एक फलन है, f एक वास्तविक मान फलन है और $\phi = f \circ g$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ पर एक फलन है। तब प्रमेय 3 के अनुसार

$D_1\phi(a) = D_1 f(g(a))\, D_1 g(a)$ और

$D_2\phi(a) = D_2 f(g(a))\, D_2 g(a)$.

लेकिन $D_1\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x$, $D_1 g = g_x$,

$D_2\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y$ और $D_2 g = g_y$.

इसलिए $\phi_x(a, b) = f'(g(a, b))\, g_x(a, b)$ और

$\phi_y(a, b) = f'(g(a, b))\, g_y(a, b)$,

और यही प्रमेय 1 का कथन है।

(ii) यदि $n = 1, m = 2$, तो हमें प्रमेय 2 प्राप्त होता है। इस स्थिति में $g = (g_1, g_2)$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ पर एक सदिश मान फलन है और f, $\mathbf{R}^2$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब $\phi = f \circ g$, $\mathbf{R}$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। प्रमेय 3 से हम यह लिख सकते हैं कि

$$D\phi(a) = D_1 f(g_1(a), g_2(a)) D(g_1(a)) + D_2 f(g_1(a), g_2(a)) D(g_2(a))$$

$$= f_x(g_1(a), g_2(a)) g_1'(a) + f_y(g_1(a), g_2(a)) g_2'(a),$$

और यही प्रमेय 2 का कथन है ।

(iii) यदि $n = 2$, $m = 2$, तो प्रमेय 3 का कथन यह हो जाता है :

मान लीजिए $g = (g_1, g_2)$ दो चरों वाला एक सदिश मान फलन है । मान लीजिए f दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है, जिसके आंशिक अवकलज विन्दु $g(a) = (g_1(a), g_2(a))$ पर संतत हैं । तब $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ पर संयुक्त फलन $\phi = f \circ g$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का विन्दु a पर अस्तित्व होता है, और ये निम्नलिखित हैं :

$$D_1\phi(a) = D_1 f(g_1(a), g_2(a)) D_1 g_1(a) + D_2 f(g_1(a), g_2(a)) D_1 g_2(a) \quad \ldots(5)$$

$$D_2\phi(a) = D_1 f(g_1(a), g_2(a)) D_2 g_1(a) + D_2 f(g_1(a), g_2(a)) D_2 g_2(a) \quad \ldots(6)$$

यदि व्यंजक (5) और (6) में हम $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ और $z = \phi(u, v)$ लें, तो z को दो चरों x और y वाला एक फ़लन माना जा सकता है ।

तब प्रमेय 3 से हम यह लिख सकते हैं :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

यह सूत्र दो चरों के फलनों के लिए काफ़ी सुविधाजनक होता है, जैसा कि आप नीचे दिए गए उदाहरणों में देखेंगे ।

उदाहरण 9 : मान लीजिए $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$.

आइए हम $\frac{\partial f}{\partial s}$ और $\frac{\partial f}{\partial t}$ ज्ञात करें ।

टिप्पणी 1(iii) से

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (3x^2 - 3y^2)(2s) + (-6xy)(2t)$$

$$= 6s[(s^2 - t^2)^2 - 4s^2t^2] - 12t(s^2 - t^2)(2st)$$

$$= 6s^5 + 6st^4 - 36s^3t^2 - 24s^3t^2 + 24st^4$$

$$= 6s(s^4 - 10s^2t^2 + 5t^4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 3x^2 - 3y^2)(-2t) + (-6xy)(2s)$$

$$= -6t[(s^2 - t^2)^2 - 4s^2t^2] - 12s(s^2 - t^2)(2st)$$

$$= -30s^4t + 60s^2t^3 - 6t^5$$

$$= 6y(t^4 - 10s^2t^2 + 5s^4)$$

अगले उदाहरण में हम तीन चरों वाला एक फलन लेंगे जिसमें प्रत्येक चर दो चरों वाला एक फलन है ।

उदाहरण 10 : मान लीजिए हम $z = u^2 + v^2 + w^2$ के $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ $u = ye^x$, $v = xe^{-y}$, $w = \frac{y}{x}$.

टिप्पणी 1(iii) की तरह हम यह लिख सकते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \text{ और}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

इसलिए

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u\, ye^x + 2ve^{-y} + 2w\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= 2y^2e^{2x} + 2xe^{-2y} - \frac{2y^2}{x^3} \text{ और}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ue^x + 2v\,(-xe^{-y}) + 2s\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2ye^{2x} - 2x^2e^{-2y} + \frac{2y}{x^2}.$$

अब हम उच्च कोटि के आंशिक अवकलजों से संबंधित एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 11: मान लीजिए $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ और V, x और y चरों का एक संततत: अवकलनीय फलन है, जिसके आंशिक अवकलज भी संततत: अवकलनीय हैं। हम यह दिखा सकते हैं कि

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

यहाँ V, x और y का एक फलन है, जहाँ x और y पुनः r और θ के फलन हैं। अतः शृंखला-नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \ldots(7)$$

अब, $\frac{\partial V}{\partial x}$ और $\frac{\partial V}{\partial y}$, x और y के फलन हैं जहाँ x और y दोनों ही r और θ के फलन हैं। इसलिए शृंखला-नियम को फिर से लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= (\cos\theta)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + (\sin\theta)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= (\cos\theta)\left[(\cos\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\sin\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\right] +$$

$$(\sin\theta)\left[(\cos\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (\sin\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]$$

$$= (\cos^2\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad \ldots(8)$$

ध्यान दीजिए कि चूंकि V, इकाई 6 के प्रमेय 1 के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, इसलिए

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}.$$

इसी प्रकार,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= (-r \sin \theta) \frac{\partial V}{\partial x} + (r \cos \theta) \frac{\partial V}{\partial y}, \text{ अतः}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

$$= (-r \cos \theta) \frac{\partial V}{\partial x} + (-r \sin \theta) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$$

$$+ (-r \sin \theta) \frac{\partial V}{\partial y} + (r \cos \theta) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$$

या

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\cos \theta \frac{\partial V}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial V}{\partial y} - (\sin \theta) \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} \right)$$

$$+ (\cos \theta) \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r} + r \sin^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2 r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} + r \cos^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

(समीकरण (7) से प्रतिस्थापित करने पर)

अतः

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad \ldots(9)$$

(8) और (9) को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है ।

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए ।

E9) नीचे दिए गए प्रत्येक फलन के लिए $\frac{\partial u}{\partial r}$ और $\frac{\partial u}{\partial s}$ ज्ञात कीजिए ।

क) $u = x^2 + xy + y^2$, $x = r + s$, $y = r - s$.

ख) $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, $x = r + s$, $y = rs$

ग) $u = \cos xy$, $x = r^2 s$, $y = e^{rs}$

E10) यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

E11) निम्नलिखित फलनों के लिए $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ और $\frac{\partial w}{\partial t}$ ज्ञात कीजिए ।

क) $w = \frac{x + y}{z}$, $x = r - 2s + t$, $y = 2r + s - 2t$, $z = r^2 + s^2 + t^2$

ख) $w = xy + yz + zx$, $x = r \cos s$, $y = r \sin t$, $z = st$

E12) यदि $z = f(u, v)$, जहाँ $u = e^x \cos y$ और $v = e^x \sin y$, तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

अगले भाग में हम शृंखला-नियम के एक अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे ।

7.3 समघात फलन

इस भाग में हम अनेक चरों वाले एक विशेष प्रकार के फलनों पर विचार करेंगे । इन फलनों को समघात फलन कहते हैं । यहाँ हम मुख्यतः ऑयलर-प्रमेय नामक प्रमेय का अध्ययन करेंगे । इस प्रमेय में समघात फलनों के एक अभिलक्षण की चर्चा की गई है और इसके लिए शृंखला-नियम का उपयोग किया गया है ; परंतु समघात फलन होता क्या है ?

आप विभिन्न संदर्भों में $ax+by$, $2x^2+3xy+5y^2$ के प्रकार के अनेक बहुपद देख चुके हैं । ध्यान दीजिए कि $ax+by$ के प्रत्येक पद की घात 1 है और $2x^2+3xy+5y^2$ के प्रत्येक पद की घात 2 है । मान लीजिए हम पहले बहुपद में x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करते हैं । तब हमें $atx+bty = t\,(ax+by)$ प्राप्त होता है । इसी प्रकार दूसरे बहुपद में x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$2t^2x^2 + 3tx\,ty + 5t^2y^2 = t^2\,(2x^2 + 3xy + 5y^2).$$

ये घात 1 और घात 2 वाले समघात बहुपदों के सरलतम उदाहरण हैं । व्यापक रूप में, दो चरों x और y में वास्तविक गुणांकों वाले बहुपद को घात h वाला समघात बहुपद (homogeneous polynomial) कहा जाता है, यदि बहुपद का प्रत्येक पद घात h वाला हो ।

x, y में घात h वाला एक अति व्यापक बहुपद यह है –

$$p\,(x, y) = \sum_{\substack{\lambda+\mu=h \\ \lambda\geq 0,\ \mu\geq 0}} a_{\lambda\mu}\, x^{\lambda}\, y^{\mu}$$

यहाँ हम यह भी देखते हैं कि यदि हम x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करें, तो हमें $p\,(tx, ty) = t^h\, p(x, y)$ प्राप्त होता है । इस तरह, हम यह पाते है कि यदि p(x, y), घात h वाला एक समघात बहुपद हो तो किसी वास्तविक संख्या t के लिए x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करने पर p(x, y), t^h से गुणा हो जाता है । ऐसी स्थिति बहुपदों के अतिरिक्त अन्य फलनों की भी हो सकती है । उदाहरण के लिए, यदि

यदि $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, तो

सभी $t>0$ के लिए $f(tx, ty) = tf(x, y)$

हम $\sqrt{x^2+y^2}$ को घात 1 वाला समघात फलन कहते हैं ।
आइए समघात फलन की औपचारिक परिभाषा देखें ।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $f : D \to \mathbf{R}$ और D, $\mathbf{R}^n$ का एक ऐसा उप-समुच्चय है कि यदि $(x_1, x_2,\ldots,x_n) \in D$, तो सभी $t > 0$ के लिए $(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n) \in D$.

यदि सभी बिन्दुओं $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in D$ और सभी $t > 0$ के लिए एक $h \in \mathbf{R}$ ऐसा है कि $f(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n) = t^h f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, तो f को **घात h वाला समघात फलन** कहा जाता है ।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें ।

उदाहरण 12 : आइए हम यह दिखाएं कि नीचे दिए गए फलन समघात फलन हैं ।

i) $f(x, y) = \tan \dfrac{y}{x}$

ii) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4+3y^4}$

iii) $f(x, y) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x^2\,y}{x^3+y^3}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)}$

iv) $f(x, y, z) = \dfrac{xy^2+yz^2+zx^2}{x+y+z}$

आइए हम एक-एक फलन लेकर विचार करें।

i) यदि t एक धन वास्तविक संख्या हो, तो x के स्थान पर tx और y के स्थान पर ty प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$f(tx, ty) = \tan \frac{ty}{tx} = \tan \frac{y}{x} = t^0 f(x, y)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि f(x, y), दो चरों का शून्य घात वाला एक समघात फलन है।

ii) $f(tx, ty) = \sqrt[3]{t^4x^4+3t^4 y^4}$

$$= (t^4)^{1/3} \sqrt[3]{x^4+3y^4}$$

$$= t^{4/3} f(x, y)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि f(x, y), दो चरों का घात 4/3 वाला एक समघात फलन है।

iii) $f(tx, ty) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{t^2x^2 .\, ty}{t^3x^3+t^3y^3}\right)}{\ln\left(\dfrac{tx+ty}{tx}\right)}, \; t > 0$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{t^3 x^2 y}{t^3 (x^3+y^3)}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}\right)}{\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)}$$

$$= t^0 f(x, y).$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि f(x, y) शून्य घात वाला एक समघात फलन है।

iv) $f(tx, ty, tz) = \dfrac{tx.\, t^2y^2+ty.\, t^2z^2 + tz.\, t^2x^2}{tx+ty+tz}, \; t > 0$

$$= \frac{t^3 (xy^2+yz^2+zx^2)}{t(x+y+z)}$$

$$= t^2 f(x, y, z).$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि f(x, y, z) तीन चरों का घात दो वाला एक समघात फलन है।

क्या आपने इस बात की ओर ध्यान दिया है कि i), iii) और iv) के फलनों की समघातता की घात पूर्णांक है जबकि ii) के फलन की घात पूर्णांक नहीं है ?

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E13) निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन समघात हैं ? यदि फलन समघात हैं तो समघातता की घात मालूम कीजिए।

क) $f(x, y, z, u, v, w) = \dfrac{xu+yv+zw}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$

ख) $f(x, y) = \max \left\{\frac{x}{y}, y\right\}$

ग) $f(x, y) = \dfrac{\sin x}{\sin y}$

घ) $f(x, y) = x^{1/3} y^{-5/3}$

ङ) $f(x, y) = 3x^2y + xy^2 - \pi y^3$

च) $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + xy + 4y^3$

अब हम ऑयलर-प्रमेय का कथन देंगे जो समघात फलनों का एक सुन्दर अभिलक्षण प्रदान करता है। सरलता के लिए यहाँ हम केवल स्थिति $n = 2$ के लिए इस प्रमेय का अध्ययन करेंगे।

प्रमेय 5 : (ऑयलर-प्रमेय) : मान लीजिए D, $\mathbf{R}^2$ का एक ऐसा उपसमुच्चय है कि

i) किसी $(x, y) \in D$ के लिए, D में आविष्ट केन्द्र (x, y) और त्रिज्या r वाली एक विवृत चक्रिका (open disc) होती है, और

ii) किसी बिन्दु $(x, y) \in D$ के लिए, सभी $t > 0$ पर बिन्दु $(tx, ty) \in D$.

मान लीजिए $f: D \to \mathbf{R}$ एक फलन है जिसके प्रथम कोटि के संतत आंशिक अवकलजों का D के सभी बिन्दुओं पर अस्तित्व है। तब $f(x, y)$ घात h वाला समघात फलन होता है, यदि और केवल यदि D के किसी भी बिन्दु (a, b) के लिए

$$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = hf(a, b)$$

उपपत्ति : मान लीजिए $f(x, y)$, घात h वाला एक समघात फलन है।

अब $F(t) = f(at, bt) = f(u(t), v(t))$

से परिभाषित एक फलन $F:]0, \infty[\to \mathbf{R}$ लीजिए, जहाँ (a, b), D का एक बिन्दु है और $u(t) = at$, और $v(t) = bt$.

F को दो चरों, x और y का फलन मानकर, जहाँ $x = u(t) = at$, $y = v(t) = bt$, आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि F, प्रमेय 2 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इस तरह हम यह पाते हैं कि

$$\begin{aligned} F'(t) &= u'(t)\, f_x(u(t), v(t)) + v'(t)\, f_y(u(t), v(t)) \\ &= af_x(u(t), v(t)) + b f_y(u(t), v(t)), \text{ क्योंकि } u'(t) = a \text{ और } v'(t) = b. \\ &= af_x(at, bt) + bf_y(at, bt) \qquad \ldots(10) \end{aligned}$$

लेकिन चूँकि $f(x, y)$ घात h वाला एक समघात फलन है, इसलिए

$F(t) = f(at, bt) = t^h f(a, b)$

और $F'(t) = ht^{h-1} f(a, b)$ $\qquad \ldots(11)$

(10) और (11) की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है। सभी $t > 0$ के लिए

$$af_x(at, bt) + bf_y(at, bt) = ht^{h-1} f(a, b) \qquad \ldots(12)$$

(12) में $t = 1$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = hf(a, b).$$

विलोमतः यह मान लीजिए कि फलन $f(x, y)$, D के सभी (a, b) के लिए

$$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = hf(a, b) \qquad \ldots(13)$$

को संतुष्ट करता है।

ऊपर परिभाषित फलन $F(t)$ के लिए

$$F'(t) = af_x(at, bt) + bf_y(at, bt),$$

जहाँ (a, b), D का एक बिन्दु है। चूंकि $(a, b) \in D$ से यह पता चलता है कि $(at, bt) \in D$, इसलिए (13) से निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$atf_x(at, bt) + bt\,f_y(at, bt) = hf\,(at, bt)$.

फलस्वरूप,

$tF'(t) = hf(at, bt) = h\,F(t)$

या $F'(t) = \dfrac{h}{t} F(t)$.

$t > 0$ के लिए फलन $\phi(t) = t^{-h} F(t)$ लीजिए।

स्पष्ट है कि $\phi'(t) = t^{-h} F'(t) - h\,t^{-h-1} F(t)$

$$= t^{-h}\left[F'(t) - \frac{h}{t} F(t)\right]$$

$= 0$, सभी $t > 0$ के लिए।

अतः सभी $t > 0$ के लिए $\phi(t)$ एक अचर फलन है।

परन्तु $\phi(1) = F(1) = f(a, b)$. इसलिए सभी $t > 0$ के लिए $\phi(t) = f(a, b)$

अर्थात् $t^{-h} F(t) = f(a, b)$, सभी $t > 0$ के लिए।

अर्थात् $F(t) = t^h f(a, b)$, सभी $t > 0$ के लिए।

इसलिए किसी भी बिन्दु $(a, b) \in D$ के लिए

$f(at, bt) = t^h f(a, b)$.

इससे यह अर्थ निकलता है कि f घात h वाला एक समघात फलन है।

टिप्पणी 2 : यदि हम $z = f(x, y)$ लिखें, तो ऑयलर-प्रमेय के अनुसार $f(x, y)$, घात n वाला एक समघात फलन होता है यदि और केवल यदि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

इस संबंध को **ऑयलर-संबंध** कहते हैं।

अब आगे बढ़ने से पहले इस प्रश्न को हल कीजिए।

E14) यदि D, $\mathbf{R}^2$ का एक उपसमुच्चय हो जो प्रमेय 5 के (i) और (ii) को संतुष्ट करता हो और यदि $f : D \to \mathbf{R}$ घात n वाला एक समघात फलन हो जिसके द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज संतत हों, तो $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ घात $n-1$ वाले समघात फलन होते हैं।

इस प्रश्न से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1 : मान लीजिए $f : D \to \mathbf{R}$ जहाँ D, $\mathbf{R}^2$ का एक उपसमुच्चय है जैसा कि प्रमेय 5 के कथन में बताया गया है। यदि f घात n वाला समघात फलन हो और D के सभी बिन्दुओं पर f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज संतत हों, तो सभी बिन्दुओं $(x, y) \in D$ के लिए,

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z,$$

जहाँ $z = f(x, y)$.

उपपत्ति : चूंकि z घात n वाला एक समघात फलन है और D के सभी बिन्दुओं पर इसके द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज संतत हैं, इसलिए $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ दोनों ही घात $n-1$ वाले समघात फलन हैं।

(देखिए E14)) और D के सभी बिन्दुओं पर इनके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज संतत हैं। अतः फलन $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ पर ऑयलर-प्रमेय लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = (n-1) \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \ldots(14)$$

और $$x \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (n-1) \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \ldots(15)$$

परंतु चूँकि श्वार्ज-प्रमेय (इकाई 5 का प्रमेय 2) के अनुसार

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, इसलिए (14) को x से और (15) को y से गुणा करके जोड़ने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (n-1) \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

लेकिन $\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = nz$. इसलिए

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)\, z\, .$$

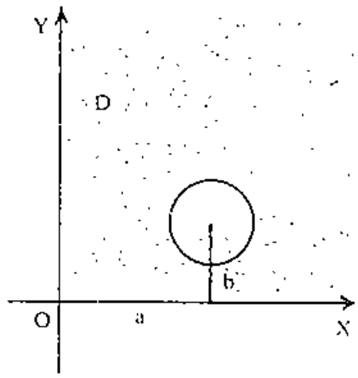
अब हम ऑयलर-प्रमेय से संबंधित कुछ उदाहरण यहाँ देंगे।

उदाहरण 13 : पहले हम यह दिखाएंगे कि फलन $\frac{xy}{x+y}$, $x > 0$, $y > 0$, ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है और तब सीधे परिकलन करके ऑयलर-संबंध को सत्यापित करेंगे।

मान लीजिए $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ और $f : D \to \mathbf{R}$: $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ से परिभाषित है। तब

i) सभी $t > 0$ के लिए $(x, y) \in D \Rightarrow (tx, ty) \in D$.

ii) यदि $(a, b) \in D$, तो केन्द्र (a, b) और त्रिज्या $r = \frac{1}{2} \min\{a, b\}$ वाली चक्रिका D में आविष्ट होती है। चित्र 5 भी देखिए।



चित्र 5

अब चूंकि

$$f(tx, ty) = \frac{t^2xy}{t(x+y)} = tf(x, y),$$

इसलिए दिया हुआ फलन घात 1 वाला समघात फलन है। और बिन्दु $(x, y) \in D$ के लिए सरल परिकलन करने पर यह पता चलता है कि

$$f_x(x, y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} \text{ और } f_y(x, y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}\, .$$

स्पष्ट है कि ये D पर संतत हैं। इस तरह, हम यह पाते हैं कि ऑयलर-प्रमेय की सभी आवश्यकताएं संतुष्ट हो जाती हैं।

ऑयलर-संबंध को सत्यापित करने के लिए हमें यह सिद्ध करना होगा कि

$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = 1.f(x, y)$

अब,

$$\begin{aligned} xf_x(x, y) + yf_y(x, y) &= x \frac{y^2}{(x+y)^2} + y \frac{x^2}{(x+y)^2} \\ &= xy \left[\frac{x+y}{(x+y)^2} \right] \\ &= \frac{xy}{(x+y)} \\ &= 1.\ f(x, y) \end{aligned}$$

इस तरह ऑयलर-संबंध सिद्ध हो जाता है।

अगले दो उदाहरणों में हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन लेंगे ।

उदाहरण 14 : $D = \{(x, y) \mid 0 < x < y\}$ पर परिभाषित फलन $z = \sin^{-1}\dfrac{x}{y} + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ के लिए हम यह सिद्ध करेंगे कि $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

पहले हम यह देखते हैं कि D, ऑयलर-प्रमेय के प्रतिबंध (i) और (ii) को संतुष्ट करता है । मान लीजिए

$$f(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

तब चूँकि (i) सभी $(x, y) \in D$, $t > 0$ के लिए $(tx, ty) \in D$, और ii) सभी $(x, y) \in D$ के लिए $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$. इसलिए हम यह कह सकते हैं कि $z = f(x, y)$, घात 0 वाला समघात फलन है ।

और,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{y^2}}}\right) - \frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}\right)$$

चूँकि $(x, y) \in D$ ऐसा है कि $0 < x < y$, इसलिए D के सभी बिन्दुओं पर f_x परिभाषित और संतत होता है ।

इसी प्रकार,

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{y^2}}}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \left(\frac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{x}{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{y^2}}}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}\right)$$

D के सभी बिन्दुओं पर परिभाषित और संतत है । इस तरह, ऑयलर-प्रमेय के अनुसार

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

उदाहरण 15: यदि $u = \sin^{-1}\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, तो आइए हम यह सिद्ध करें कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u$.

मान लीजिए $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ और $f : D \to \mathbf{R}$

$f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ से परिभाषित है । तब $z = f(x, y)$, घात 1 वाला एक समघात फलन है और यह ऑयलर-प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है । इसलिए सभी $(x, y) \in D$ के लिए

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad \ldots(16)$$

अब $D' = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ लीजिए ।

तब $D' \subset D$ और इस तरह विशेष रूप से सभी $(x, y) \in D'$ के लिए समीकरण (16) सत्य होता है । और, सभी $(x, y) \in D'$ के लिए

$$\sin u = \frac{x^2 + y^2}{x + y} = z$$

इसलिए $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos u \dfrac{\partial u}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos u \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

फलस्वरूप, (16) में इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है ।

$$\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos u = \sin u$$

या $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u.$

अब आप कुछ प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए ।

E15) यदि $z = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$, तो दिखाइए कि $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{20} z.$

E16) परिकलन करके फलनों

क) $u = \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$,

ख) $u = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$

के लिए ऑयलर-संबंध को सत्यापित कीजिए ।

E17) यदि $z = \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, तो दिखाइए कि $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

E18) यदि $z = \tan^{-1} \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$, तो दिखाइए कि $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z.$

अगले भाग में हम अनेक चरों वाले फलनों के अवकलज को परिभाषित करने के एक और तरीके की चर्चा करेंगे ।

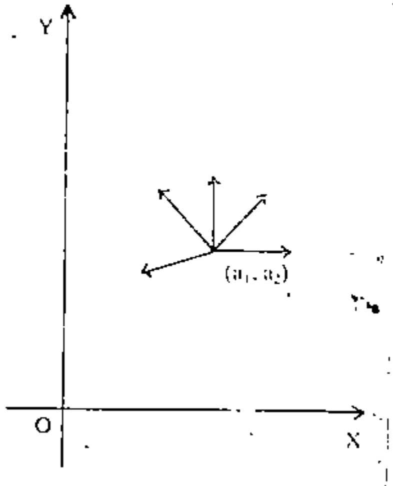
7.4 दिक्-अवकलज

इस भाग में आप दिक्-अवकलज (directional derivative) की संकल्पना का अध्ययन करेंगे । पहले हम $\mathbf{R}^2$ से संबंधित संकल्पना की व्याख्या करेंगे । यहाँ आप देखेंगे कि फलन f(x, y) के आंशिक अवकलजों को, जिनका अध्ययन आप अभी तक करते आ रहे हैं, x-अक्ष और y-अक्ष की दिशाओं में दिक्-अवकलज माना जा सकता है ।

ध्यान दीजिए कि कार्तीय समतल के सदिशों और $\mathbf{R}^2$ के विन्दुओं में एकैकी संगति होती है जैसा कि भाग 3.2 में बताया गया है ।

आप शब्द "एकक सदिश" (unit vector) से परिचित हैं ही । खंड 1 के भाग 3.2 में आपने देखा है कि सदिश (a, b) एकक सदिश होता है, यदि $|(a, b)| = 1$. आपको याद होगा कि विन्दुओं $e_1 = (1, 0)$ और $e_2 = (0,1)$ को क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष की दिशा में एकक सदिश माना जाता है ।

व्यापक रूप में, $\mathbf{R}^2$ का कोई भी एकक सदिश, सदिश $(\cos\theta, \sin\theta)$ से प्राप्त होता है जहां θ वह कोण है जो वह एकक सदिश x-अक्ष की धन दिशा से बनाता है । यदि हम $\theta = 0$ लें, तो हमें x-अक्ष की दिशा में एकक सदिश $e_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = (1,0)$ प्राप्त होता है । और जब हम $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ लेते हैं तो हमें y-अक्ष की दिशा में एकक सदिश $e_2 = (0, 1)$ प्राप्त होता है । यहाँ हम सदा एकक सदिश को v से प्रकट करेंगे ।



चित्र 6

अब मान लीजिए $a = (a_1, a_2)$, $\mathbf{R}^2$ का एक विन्दु है और $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathbf{R}^2$ में एक एकक सदिश है । तब समुच्चय

$\{a + tv \mid t \in \mathbf{R}\} = \{(a_1 + t\cos\theta, a_2 + t\sin\theta \mid t \in \mathbf{R}\}$ से a और a + v को मिलाने वाली रेखा पर स्थित सभी विन्दु प्राप्त हो जाते हैं । v में परिवर्तन लाकर हम a से होकर जाने वाली सभी रेखाएं अर्थात् सभी एकक सदिशों की दिशा में रेखाएं प्राप्त कर सकते हैं (देखिए चित्र 6) ।

अब हम दिक्-अवकलज परिभाषित करेंगे ।

परिभाषा 3 : मान लीजिए $f(x, y)$, $\mathbf{R}^2$ में केन्द्र $a=(a_1, a_2)$ वाली विवृत चक्रिका $S(a, r)$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है और मान लीजिए $v=(\cos\theta, \sin\theta)$ एक एकक सदिश है । यदि

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t\cos\theta, a_2+t\sin\theta) - f(a_1, a_2)}{t}$$

का अस्तित्व हो, तो हम यह कह सकते हैं कि v की दिशा में a पर f के दिक्-अवकलज का अस्तित्व है । और इस सीमा के मान को v की दिशा में a पर f का **दिक्-अवकलज** कहा जाता है । $v=(\cos\theta, \sin\theta)$ की दिशा में बिन्दु a पर f के दिक्-अवकलज को हम $f_v(a)$ या $D_\theta f(a)$ से प्रकट करेंगे ।

सभी बिन्दु $a+tv$, जहां $|t| < r$, $S(a,r)$ के सदस्य होते हैं, क्योंकि $|a+tv-a| = |tv| = |t||v| = |t| < r$. विशेष रूप से, अगर $v=(\cos\theta, \sin\theta)$, तो $(a_1+t\cos\theta, a_2+t\sin\theta) \in S(a, r)$.

टिप्पणी 3 : ध्यान दीजिए कि $|t| < r$ के लिए बिन्दु $(a_1+t\cos\theta, a_2+t\sin\theta) \in S(a, r)$, जो कि f का प्रांत है । अतः फलन

$$\phi(t) = \frac{f(a_1+t\cos\theta, a_2+t\sin\theta) - f(a_1, a_2)}{t}$$

ऐसे सभी t के लिए परिभाषित हैं, जिनके लिए $|t| < r$. अतः $t\to 0$ होने पर इसकी सीमा के बारे में हम विचार कर सकते हैं ।

ii) $\theta=0$ के लिए $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ की दिशा में दिक्-अवकलज है :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

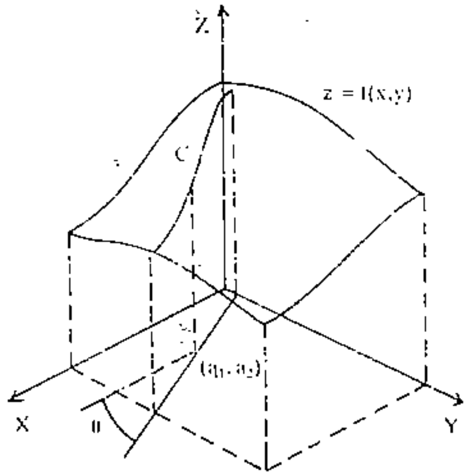
यह f_x, अर्थात् x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज है । इस तरह हम यह देखते हैं कि x-अक्ष की दिशा में f का दिक्-अवकलज वही होता है जो कि x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज है ।

iii) इसी प्रकार जब $\theta=\frac{\pi}{2}$, तो हमें y-अक्ष की दिशा में दिक्-अवकलज प्राप्त होता है । यह है –

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2+t) - f(a_1, a_2)}{t},$$

जो कि आंशिक अवकलज f_y है ।

iv) हम बिन्दु a पर के दिक्-अवकलजों का ज्यामितीय विवेचन कर सकते हैं । भाग 5.2.2 में आप आंशिक अवकलज f_x और f_y, जो क्रमशः दिशाओं $\theta=0$ और $\phi=\frac{\pi}{2}$ में दिक्-अवकलज हैं, का ज्यामितीय विवेचन देख चुके हैं । $f_x(a, b)$ से पृष्ठ $z=f(x, y)$ और समतल $x=a$ के प्रतिच्छेद वक्र के बिन्दु $(a,b, f(a, b))$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता प्राप्त होती है । इसी प्रकार का ज्यामितीय विवेचन दिक्-अवकलजों का भी होता है । मान लीजिए बिन्दु $a=(a_1, a_2)$ और सदिश $v=(\cos\theta, \sin\theta)$ दिए हुए हैं । v की दिशा में f का दिक्-अवकलज उस वक्र की प्रवणता को निरूपित करता है जो कि पृष्ठ $z=f(x, y)$ और एकक सदिश v की दिशा में (a_1, a_2) से होकर जाने वाली रेखा को आविष्ट करने वाले तथा z-अक्ष के समांतर समतल का प्रतिच्छेद-वक्र है । देखिए चित्र 7.



चित्र 7

v) सदिश संकेतन-पद्धति में दिशा v में दिक्-अवकलज को $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ के रूप में लिखा जाता है।

टिप्पणी 3 (v) को लागू करके हम दिक्-अवकलज की संकल्पना को अनेक चरों वाले फलनों पर लागू करते है।

परिभाषा 4: मान लीजिए $f(x)$, केन्द्र $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ और त्रिज्या r वाले विवृत गोले $S(a, r)$ में परिभाषित n-चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए
$v = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)$, $\mathbf{R}^n$ में एक एकक सदिश है,

अर्थात् $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$. यदि

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

का अस्तित्व हो, तो हम यह कहते हैं कि एकक सदिश v की दिशा में a पर f का एक दिक्-अवकलज है। सीमा के मान को v की दिशा में a पर f का **दिक्-अवकलज** कहा जाता है। हम इस दिक्-अवकलज को $f_v(a)$ से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि दो चरों वाली स्थिति की तरह $|t| < r$ के लिए सभी बिन्दु $a+tv$, $S(a, r)$ के सदस्य होते हैं, क्योंकि

$$|a+tv-a| = |tv| = |t| < r.$$

अतः फलन $\phi(t) = \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ ऐसे सभी t के लिए परिभाषित होता है जिनके लिए $|t| < r$. और तब हम $t \to 0$ होने पर इसकी सीमा के बारे में विचार कर सकते हैं।

अब हम कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 16: मान लीजिए $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

आइए हम यह दिखाएं कि $f(x, y)$ के (0, 0) पर सभी दिशाओं में दिक्-अवकलज हैं और इनमें से प्रत्येक $f_x(0, 0)$ और $f_y(0, 0)$) का रैखिक संयोजन है। मान लीजिए $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ एक एकक सदिश है।

तब

$$\phi(t) = \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t}$$

$$= \frac{\left(\frac{t^3\cos^3\theta - t^3\sin^3\theta}{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}\right) - 0}{t}$$

$$= \cos^3\theta - \sin^3\theta.$$

अतः $\lim_{t \to 0} \phi(t) = \cos^3\theta - \sin^3\theta.$

फलस्वरूप, $f_v(0, 0) = \cos^3\theta - \sin^3\theta.$

हम इकाई 5 के उदाहरण 14 में यह देख चुके हैं कि इस फलन के लिए

$f_x(0, 0) = 1$ और $f_y(0, 0) = -1.$

अतः हम लिख सकते है कि $f_v(0, 0) = \cos^3\theta - \sin^3\theta$

$$= \cos^3\theta.\ f_x(0, 0) + \sin^3\theta.\ f_y(0, 0)$$

इससे यह पता चलता है कि (0, 0) पर दिक्-अवकलज f_v, f_x और f_y का एक रैखिक संयोजन है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

E19) नीचे दिए गए प्रत्येक फलन का दिए गए बिन्दु पर दी हुई दिशा में दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए।

क) $u = x^2 - xy + y^2, (3, 1), \theta = \frac{\pi}{3}$.

ख) $u = e^y \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \theta = -\frac{\pi}{6}$.

E20) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के सभी दिक्-अवकलजों का (0, 0) पर अस्तित्व है।

E21) वे दिशाएँ ज्ञात कीजिए जिनमें

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित f के दिक्-अवकलजों का (0, 0) पर अस्तित्व है।

यह परिणाम $n > 2$ के लिए भी सत्य है।

इससे पहले हमने दिक्-अवकलज की संकल्पना पर कोई विशेष चर्चा नहीं की थी, बल्कि आंशिक अवकलज के अध्ययन की ओर ही विशेष ध्यान दिया था। यह इसलिए, कि अधिकांश स्थितियों में आंशिक अवकलजों के अस्तित्व से यह पता चल जाता है कि सभी दिक्-अवकलजों का भी अस्तित्व है। और, यदि हमें एक बिन्दु पर आंशिक अवकलज ज्ञात हों तो हम सभी दिक्-अवकलजों का परिकलन आसानी से कर सकते हैं। वस्तुतः प्रमेय 6 में हम यह सिद्ध करेंगे कि $n=2$ के लिए एक बिन्दु पर फलन के दिक्-अवकलज उस बिन्दु पर उस फलन के आंशिक अवकलजों के रैखिक संयोजन होते हैं।

प्रमेय 6 : यदि वास्तविक मान फलन $f(x, y)$, बिन्दु (a, b) पर अवकलनीय हो, तो (a, b) पर f के सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व होता है और ये अवकलज $f_x(a, b)$ और $f_y(a, b)$ के रैखिक संयोजन होते हैं।

उपपत्ति : इस परिकल्पना (hypothesis) से, कि $f(x, y)$, (a, b) पर अवकलनीय है, यह पता चलता है कि $f(x, y)$, (a, b) के प्रतिवेश N में परिभाषित है। मान लीजिए $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbb{R}^2$ में एक एकक सदिश है। यदि N, त्रिज्या r वाली एक विवृत चक्रिका हो, तो $|\delta| < r$ वाले सभी δ के लिए बिन्दु $(a+\delta \cos\alpha, b+\delta \sin\alpha)$, N का सदस्य है जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, (पृष्ठ 97 के हाशिए पर दी गई टिप्पणी देखिए)। चूँकि $f(x, y)$, (a, b) पर अवकलनीय है, इसलिए

$$f(a+\delta\cos\alpha, b+\delta\sin\alpha) - f(a, b)$$
$$= \delta\cos\alpha\, f_x(a, b) + \delta\sin\alpha\, f_y(a, b) + \delta\cos\alpha\, \phi_1(\delta, \alpha) + \delta\sin\alpha\, \phi_2(\delta, \alpha) \quad \ldots(17)$$

जहाँ ϕ_1, और ϕ_2, δ और α के फलन हैं जो $(\delta\cos\alpha, \delta\sin\alpha) \to 0$ होने पर 0 की ओर प्रवृत्त करते हैं। अब $\delta \to 0$ हो, तो $(\delta\cos\alpha, \delta\sin\alpha) \to 0$. इससे यह पता चलता है कि $\delta \to 0$ होने पर (17) के अंतिम दो पद शून्य की ओर प्रवृत्त करते है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि

$$|\cos\alpha\,\phi_1 + \sin\alpha\,\phi_2| \leq |\phi_1| + |\phi_2|,$$

और $(\delta\cos\alpha, \delta\sin\alpha) \to 0$ होने पर दोनों $\phi_1, \phi_2 \to 0$.

अतः $$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(a+\delta\cos\alpha, b+\delta\sin\alpha) - f(a, b)}{\delta}$$
$$= \cos\alpha\, f_x(a, b) + \sin\alpha\, f_y(a, b).$$

इसलिए (a, b) पर $f(x, y)$ के सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है और एकक सदिश $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ के लिए

$$f_\alpha(a, b) = D_\alpha f(a, b) = \cos\alpha\, f_x(a, b) + \sin\alpha\, f_y(a, b).$$

उपप्रमेय 2 : यदि (a, b) पर f(x, y) के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज संतत हों, तो (a, b) पर सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व होता है और एकक सदिश $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ के लिए

$$D_\alpha f(a, b) = \cos\alpha\, f_x(a, b) + \sin\alpha\, f_y(a, b)$$

उपपत्ति : परिकल्पना से यह पता चलता है कि (a, b) पर फलन अवकलनीय है (इकाई 5 का प्रमेय 7 देखिए)। अतः प्रमेय 6 से परिणाम प्राप्त हो जाता है।

अब हम एक उदाहरण की सहायता से यह दिखाएंगे कि प्रमेय 7 लागू करके हम दिक्-अवकलज का परिकलन सरलता से कर सकते हैं।

उदाहरण 17 : मान लीजिए $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$.

आइए हम $\alpha = \frac{\pi}{3}$ की दिशा में (1, – 2) पर f का दिक्-अवकलज ज्ञात करें।

पहले हम यह देखते हैं कि फलन $f(x, y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, (1,–2) पर अवकलनीय है, क्योंकि यह x और y वाला एक बहुपद है।

और, चूँकि

$f_x(x, y) = 8x - y$ और $f_y(x, y) = -x + 6y$,

इसलिए $f_x(1, -2) = 8 + 2 = 10$ और $f_y(1, -2) = -1 - 12 = -13$.

तब प्रमेय 7 लागू करने पर हमें निम्नलिखित दिक्-अवकलज प्राप्त होता है:

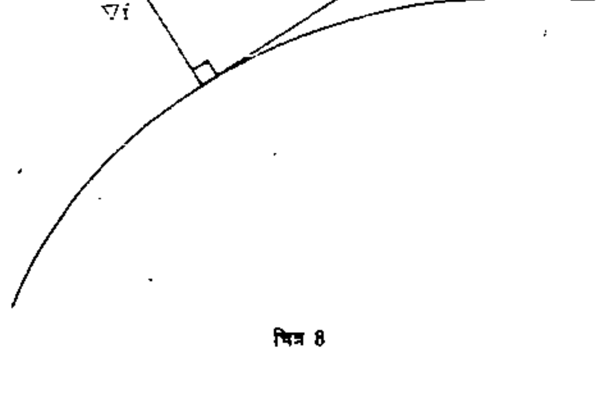
$$\begin{aligned} D_{\pi/3} f(1, -2) &= \cos\frac{\pi}{3} f_x(1, -2) + \sin\frac{\pi}{3} f_y(1, -2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-13) \\ &= 5 - \frac{13\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{10 - 13\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

दो चरों वाले फलन के सभी दिक्-अवकलजों में x-अक्ष और y-अक्ष की दिशाओं वाले अवकलज, अर्थात् आंशिक अवकलज f_x और f_y एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। यही कारण है कि सदिश (f_x, f_y) को एक विशेष नाम दिया गया है। इसे फलन का ग्रेडिएण्ट कहा जाता है। और इसे ∇f से प्रकट किया जाता है।

इसलिए $\nabla f = (f_x, f_y)$.

ध्यान दीजिए कि फलन ∇f, $\mathbf{R}^2$ के उन सभी बिन्दुओं के समुच्चय पर परिभाषित होता है जहाँ f के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। इस फलन का मान कार्तीय समतल में एक सदिश होता है। ज्यामितीय रूप में हम किसी भी बिन्दु पर फलन के ग्रेडिएण्ट का विवेचन निम्नलिखित विधि से कर सकते हैं।

फलन $z = f(x,y)$ लीजिए। आप जानते हैं कि $f(x,y) = k$, जहाँ k एक अचर है, एक समतल वक्र को परिभाषित करता है। तब f के प्रांत में बिन्दु (a, b) पर का ग्रेडिएण्ट फलन f(x, y) के उस समतल वक्र पर के अभिलंब को निरूपित करता है जो बिन्दु (a, b) से होकर जाता है। देखिए चित्र 8.



चित्र 8

भौतिकी में फलन के ग्रेडिएण्ट की संकल्पना के काफ़ी अनुप्रयोग देखने को मिलते हैं। इसका प्रयोग विद्युत-चुंबकीय परिघटनाओं (electro-magnetic phenomena) और ऊष्मा-चालन के अध्ययन में किया जाता है। यहाँ हम ग्रेडिएण्ट का अध्ययन विस्तार में नहीं करेंगे क्योंकि इसके लिए सदिश कलन की जानकारी आवश्यक है।

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 22) प्रमेय 7 की सहायता से दी हुई दिशा में दिए गए बिन्दु पर निम्नलिखित प्रत्येक फलन के दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए।

क) $u = x^2+y^2-4$, $(2, -1)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

ख) $u = e^{x+y} - e^{-x-y}$, $(\ln 3, \ln 2)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

ग) $u = \tan x + \sec y$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

E 23) मान लीजिए $f(x, y)$ एक वास्तविक मान फलन है जो (a, b) के प्रतिवेश में परिभाषित है। मान लीजिए किसी θ के लिए $F(t) = f(a+t\cos\theta, b+t\sin\theta)$. सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ की दिशा में $f(x, y)$ के दिक्-अवकलज का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि 0 पर $F(t)$ अवकलनीय हो। और तब (a, b) पर दिक्-अवकलज $D_\theta f(a, b)$, $F'(0)$ के बराबर होता है।

E 24) यदि (a, b) पर $f(x, y)$ के सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है, तो क्या इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि f संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि में कारण दीजिए।

आइए अब हम इस इकाई के प्रमुख मुद्दों को एक बार दोहरा लें।

7.5 सारांश

इस इकाई में हमने

1) संयुक्त फलनों का अवकलन करने के लिए शृंखला-नियम के निम्न रूपों का प्रयोग किया है:

नियम-1 : यदि $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ और $\phi = f\circ g$ तब संयुक्त फलन $\phi = f\circ g : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ के आंशिक अवकलज हैं :

$$\phi_x (a, b) = g'(f(a, b))\, f_x (a, b)$$

$$\phi_y (a, b) = g'(f(a, b))\, f_y (a, b).$$

नियम 2 : यदि $f : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ और $\phi = f\circ g$, तो

$$\phi'(t_0) = f'(t_0)\, \phi_x (f(t_0), g(t_0)) + g'(t_0)\, \phi_y(f(t_0), g(t_0))$$

नियम 3 : यदि $f : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $g : \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ और $\phi = f\circ g$, तो

$$\phi_x (a) = D_1\, \phi(a) = D_1 f(g_1 (a), g_2 (a))\, D_1\, g_1(a) + D_2\, f(g_1 (a), g_2 (a))\, D_1\, g_2 (a)$$

$$\phi_y (a) = D_2\, \phi(a) = D_1\, f(g_1 (a), g_2 (a))\, D_2\, g_1 (a)+D_2\, f(g_1 (a), g_2 (a))\, D_2\, g_2 (a).$$

2) अनेक चरों वाले फलनों के संपूर्ण अवकलज की संकल्पना का अध्ययन किया है। मान लीजिए z, n चरों $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ वाला एक वास्तविक मान फलन है, जहाँ प्रत्येक x_i, t का एक फलन है। तब z का संपूर्ण अवकलज होता है:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

3) अनेक चरों वाले समघात फलनों को परिभाषित किया है: f, घात h वाला समघात फलन होता है, यदि

$f(tx_1, tx_2, \ldots\ldots\ldots, tx_n) = t^h f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \; \forall \; t > 0.$
(जहाँ h एक वास्तविक संख्या है)

4) समघात फलनों के लिए ऑयलर-प्रमेय को सिद्ध किया है और अनुप्रयुक्त किया है।

5) दो चरों वाले फलन के दिक्-अवकलज परिभाषित किए हैं और उनके मान ज्ञात किए हैं।

$$f_v(a_1, a_2) = D_\theta f(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t\cos\theta, a_2+t\sin\theta) - f(a_1, a_2)}{t},$$

जहाँ $a = (a_1, a_2)$ और $v = (\cos\theta, \sin\theta)$.

6) दो चरों वाले फलन के दिक्-अवकलजों और आंशिक अवकलजों के बीच संबंध स्थापित किया है:

$$D_\theta f(a_1, a_2) = \cos\theta \, f_x(a_1, a_2) + \sin\theta \, f_y(a_1, a_2).$$

7.6 हल और उत्तर

E1) क) प्रमेय 1 के अनुसार

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = g'\left[f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]. \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= -5\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = g'\left[f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right] \times \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= -\left(3\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= -5\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

E2) क) $$\frac{dz}{dt} = \frac{-\pi}{8}(2x+3y)\sin\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{8}(3x+2y)\cos\frac{\pi t}{8}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[12\cos\frac{\pi t}{8} - 13\sin\frac{\pi t}{8} + 3\left(\cos^2\frac{\pi t}{8} - \sin^2\frac{\pi t}{8}\right)\right]$$

ख) $$\frac{dz}{dt} = \frac{2}{3y-2}(e^t+1) + (2x+3)\left(-\frac{3}{(3y-2)^2}\right)(-e^{-t}-1)$$

$$= \frac{(2e^t+2)(3e^{-t}-3t-2) + (2e^t+2t+3)(3e^{-t}+3)}{(3e^{-t}-3t-2)}$$

$$= \frac{17-6te^t+6te^{-t}+2e^t+15e^{-t}}{(3e^{-t}-3t-2)^2}$$

ग) $$\frac{du}{dt} = yz.\,e^t - xz\,e^{-t} + xy.\,1$$

$$= t.e^{-t}.\,e^t - te^t\,e^{-t} + e^t\,e^{-t}$$

$$= 1.$$

घ) $\frac{du}{dt} = 2x.\ 2t + 2y.2 + 2z.\ e^t + 2w.\ 5t^4$

$= 2(t^2+1)\ 2t + 2(2t).\ 2 + 2e^t.\ e^t + 2t^5.\ 5t^4$

$= 10t^9 + 4t^3 + 12t + 2e^{2t}$

E3) क) $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x^2+3yx}.\ (2x+3y)\ e^t + \frac{1}{x^2+3xy}.\ 3x(-e^{-t})$

$= \frac{(2e^t+3e^{-t})\ e^t - 3e^t\ e^{-t}}{e^{2t}+3e^t.\ e^{-t}}$

$= \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+3}$

ख) $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).\ \frac{1}{t} + \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right).\ e^t$

$= \frac{-e^t\frac{1}{t} + e^t.\ \ln t}{(\ln t)^2+e^{2t}} = \frac{e^t\ (t\ln t - 1)}{t\ [(\ln t)^2+e^{2t}]}$

ग) $\frac{dw}{dt} = e^{xy^2+yz}.\ y^2(\cos t - t\sin t) + e^{xy^2+yz}\ (2xy+z)\ (\sin t + t\cos t)$

$+ e^{xy^2+yz}\ .y\ (-\sin t + \cos t)$

$= e^{t^3\cos t\ \sin^2 t + t\sin t\ (\cos t\ +\ \sin t)}$

$[t^2\sin^2 t\cos t - t^3\sin^3 t + (2t^2\sin t\cos t + \sin t + \cos t)$

$(\sin t + t\cos t) - t\sin^2 t + t\sin t\cos t]$

E4) क) $f(x, y) = x^y + y^x$ लीजिए, जहाँ $x = t^3$, $y = \sin t$. तब f को t का फलन मान कर हम उसका अवकलज परिकलित करते हैं।

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$= [\ yx^{y-1} + \ln x.\ y^x]\ 3t^2 + [\ln y.\ x^y + xy^{x-1}]\ \cos t$

$= [\ (\sin t)\ t^{3(\sin t-1)} + \ln t^3.\ (\sin t)^{t^3}]\ 3t^2$

$+ [\ln \sin t.\ t^{3\sin t} + t^3(\sin t)^{t^3-1}]$

ख) $f(x, y) = x^{y-1} + y^x$, लीजिए, जहाँ $x = t^2$, $y = t+1$

तब $\frac{df}{dt} = [\ (y-1)\ x^{y-2} + y^x\ln y]\ 2t + [\ln x.\ x^{y-1} + xy^{x-1}]$

$= [t.t^{2(t-1)} + (t-1)^{t^2}\ \ln(t+1)]\ 2t$

$+ [\ln t^2.\ t^{2t} + t^2\ (t+1)^{t^2-1}]$

$= 2t^{2t} + 2t(t+1)^{t^2}\ \ln(t+1) + t^{2t}\ \ln t^2 + t^2\ (t+1)^{t^2-1}$

ग) $f(x, y) = e^x + x^y$ लीजिए, जहाँ $x = t^4$, $y = \cos t$.

तब $\frac{df}{dt} = [\ e^x + yx^{y-1}]\ (4t^3) + (x^y\ \ln x)\ (-\sin t)$

$= 4t^3\ e^{t^4} + 4t^3\cos t\ t^{4(\cos t-1)} - \sin t.\ t^{4\cos t}\ \ln t^4$

E5) $f(x, y) = y^x + x^y - a^b = 0$ लीजिए।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{y^x \ln y + yx^{y-1}}{xy^{x-1} + x^y \ln x}$$

E6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}, \frac{dz}{dy} = -\frac{\partial \phi/\partial y}{\partial \phi/\partial z}$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \phi/\partial y}{\partial \phi/\partial z} \cdot \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

E7) चूँकि A, B, C त्रिभुज के कोण हैं, इसलिए

$A + B + C = \pi$.

$f(A, B) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - k$ लेने पर,

$$f(A, B) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(\pi - A - B) - k$$
$$= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A + B) - k,$$

तब $f(A, B) = 0$. और इसलिए हम A को B का अस्पष्ट फलन मान सकते हैं।

फलस्वरूप,

$$\frac{dA}{dB} = -\frac{\partial f/\partial B}{\partial f/\partial A}$$

$$= -\frac{2\sin B\cos B + 2\sin (A+B) \cos(A+B)}{2\sin A\cos A + 2\sin(A+B) \cos (A+B)}$$

$$= -\frac{\sin 2B + \sin 2(A+B)}{\sin 2A + \sin 2(A+B)}$$

$$= -\frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A - \sin 2C}, \text{ since } A + B + C = \pi$$

$$= -\frac{2\sin (B-C) \cos (B+C)}{2\sin(A-C) \cos (A+C)}$$

$$= -\frac{\cos A\ [\sin B\cos C - \sin C\cos B]}{\cos B\ [\sin A\cos C - \sin C\cos A]}$$

$$= -\frac{\tan B - \tan C}{\tan A - \tan C}$$

$$= \frac{\tan C - \tan B}{\tan A - \tan C}$$

E8) क), ख), ग), इन तीनों स्थितियों में हम u को x और y का फलन मान सकते हैं, जहाँ x = x और y, x का एक अस्पष्ट फलन है। इसलिए

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

क) $\frac{du}{dx} = 2x - y + (-x + 2y)(3) = 5y - x$

ख) $\frac{du}{dx} = 2x - 3y^2 \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3y^2}{x}$

ग) $\frac{du}{dx} = \ln xy + 1 + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$

यदि $\phi(x, y) = x^3+y^3+3x^2y-1$, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = -\frac{3x^2+6xy}{3y^2+3x^2} = -\frac{x^2+2xy}{y^2+x^2}$$

इसलिए $\frac{du}{dx} = 1 + \ln xy - \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2+2xy}{y^2+x^2}$

$$= 1 + \ln xy - \frac{x^2(x+2y)}{y(y^2+x^2)}$$

E9) क) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)(1) + (x+2y)(1)$

$= 3x+3y$

$= 3(r+s) + 3(r-s) = 6r$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(1) + (x+2y)(-1)$

$= x-y$

$= r+s-(r-s) = 2s.$

ख) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).1 + \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right)s$

$= \frac{-rs+(r+s)s}{(r+s)^2+r^2s^2} = \frac{s^2}{(r+s)^2+r^2s^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right).1 + \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right).r$

$= \frac{-y+xr}{x^2+y^2} = \frac{r^2}{(r+s)^2+r^2s^2}$

ग) $\frac{\partial u}{\partial r} = -y\sin xy.\,2rs - x\sin xy.\,se^{rs}$

$= [-2rs\,e^{rs} - r^2s^2e^{rs}]\sin(r^2se^{rs})$

$= -(2+rs)\,rs\,e^{rs}\sin(r^2 s\,e^{rs})$

$\frac{\partial u}{\partial s} = -y\sin xy.\,r^2 - x\sin xy.\,re^{rs}$

$= -[r^2+r^3 s]\,e^{rs}\sin(r^2 se^{rs})$

$= -(r+s)\,r^2e^{rs}\sin(r^2se^{rs})$

E10) $u = f(t, r, s)$ लीजिए, जहाँ $t = y-z,\ r = z-x,\ s=x-y$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial r}.(-1) + \frac{\partial f}{\partial s}(1) = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial r}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial s}(-1) = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial s}\cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

E11) क) $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{z} \cdot 1 + \frac{1}{z} \cdot 2 - \frac{x+y}{z^2}\, 2r$

$$= \frac{3(r^2+s^2+t^2) - 2r\,(r-2s+t+2r+s-2t)}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

$$= \frac{3s^2+3t^2-3r^2+2rs+2rt}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{z} \cdot (-2) + \frac{1}{z} \cdot 1 - \frac{x+y}{z^2} \cdot 2s$$

$$= \frac{-(r^2+s^2+t^2) - 2s\,(r-2s+t+2r+s-2t)}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-r^2-t^2+2st-6sr}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{z} \cdot 1 + \frac{1}{z}(-2) - \frac{x+y}{z^2} \cdot 2t$$

$$= \frac{-(r^2+s^2+t^2) - 2t(r-2s+t+2r+s-2t)}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

$$= \frac{t^2-r^2-s^2+2ts-6tr}{(r^2+s^2+t^2)^2}$$

ख) $\frac{\partial w}{\partial r} = (y+z)\cos s + (x+z)\sin t + (x+y)\,.\,0$

$$= (r\sin t + st)\cos s + (r\cos s + st)\sin t$$

$$= 2r\sin t\cos s + st\,(\cos s + \sin t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (y+z)(-r\sin s) + (x+z)\cdot 0 + (x+y)\,t$$

$$= (r\sin t + st)(-r\sin s) + (r\cos s + r\sin t)\,t$$

$$= -r^2 \sin t\sin s - rst\sin s + rt\cos s + rt\sin t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (y+z).\,0 + (x+z)(r\cos t) + (x+y)\cdot s$$

$$= (r\cos s + st)(r\cos t) + (r\cos s + r\sin t)s$$

$$= r^2 \cos s\cos t + rst\cos t + rs\cos s + rs\sin t.$$

E12) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(e^x \cos y) + \frac{\partial f}{\partial v}(e^x \sin y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-e^x \sin y) + \frac{\partial f}{\partial v}(e^x \cos y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(e^x \cos y)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(e^x \cos y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(e^x \sin y)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}(e^x \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(-e^x \sin y)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(-e^x \cos y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(e^x \cos y)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}(-e^x \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} e^{2x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} e^{2x}$$

$$= (u^2+v^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right), \text{ क्योंकि } u^2 + v^2 = e^{2x}$$

E13) क) $f(tx, ty, tz, tu, tv, tw) = \dfrac{t^2 (xu+yv+zw)}{t^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{u^2+v^2+w^2}}$

$$= \frac{(xu+yv+zw)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

$$= t^0 f(x, y, z, u, v, w).$$

$\therefore$ f, घात 0 वाला समघात फलन है।

ख) $t > 0,\ f(tx, ty) = \max\left\{\dfrac{tx}{ty}, ty\right\}$

$$= \max\left\{\frac{x}{y}, ty\right\}$$

$$\neq t f(x, y) \quad (x=2,\ y=1,\ t=2 \text{ लेकर जांच कीजिए।})$$

$\therefore$ f समघात फलन नहीं है।

ग) चूँकि किसी भी n के लिए $f(tx, ty) = \dfrac{\sin tx}{\sin ty} \neq t^n \dfrac{\sin x}{\sin y} = t^n f(x, y)$,

इसलिए f समघात फलन नहीं है।

$x=\pi,\ y = \dfrac{\pi}{2},\ t = \dfrac{1}{2}$ लेकर जांच कीजिए।

घ) $f(tx, ty) = (tx)^{1/3} (ty)^{-5/3}$

$$= t^{-4/3} x^{1/3} y^{-5/3}$$

$$= t^{-4/3} f(x, y)$$

इसलिए f, घात $-\dfrac{4}{3}$ वाला एक समघात फलन है।

ङ) f, घात 3 वाला समघात फलन है।

च) f समघात फलन नहीं है।

E14) क्योंकि f घात n वाला एक समघात फलन है और इसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज संतत हैं, इसलिए हम f पर ऑयलर-प्रमेय लागू कर सकते हैं। अतः

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

ऊपर के समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = n\frac{\partial f}{\partial x}$$

चूँकि f के द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज संतत होते हैं, इसलिए श्वार्ज-प्रमेय (इकाई 6) के अनुसार

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

फलस्वरूप,

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$$

अतः ऑयलर-प्रमेय लागू करने पर हम यह पाते हैं कि $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, घात (n–1) वाला एक समघात

फलन है। इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि $\frac{\partial f}{\partial y}$ भी घात n-1 वाला एक समघात फलन है।

E15) ध्यान दीजिए कि z, घात $\frac{1}{20}$ वाला एक समघात फलन है।

अतः ऑयलर-प्रमेय से $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{20}z$ प्राप्त होता है।

E16) क) ध्यान दीजिए कि u, घात 2 वाला एक समघात फलन है। हमें ऑयलर-संबंध

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ को सत्यापित करना है। अब,

i) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2(x+y)-(x^3+y^3)}{(x+y)^2} = \frac{2x^3+3x^2y-y^3}{(x+y)^2}$$

ii) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2(x+y)-(x^3+y^3)}{(x+y)^2} = \frac{-x^3+3xy^2+2y^3}{(x+y)^2},$$

$$\therefore x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^4+2x^3y+2xy^3+2y^4}{(x+y)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{x^3+y^3}{(x+y)} = 2u.$$

ख) u घात 0 वाला एक समघात फलन है। अब,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2/x^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$ इस तरह

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.u$. इस तरह ऑयलर-संबंध सिद्ध हो जाता है।

E17) मान लीजिए $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$
तब D ऑयलर-प्रमेय की आवश्यकताओं (i) और (ii) को संतुष्ट करता है। और फलन

$$z(x, y) = \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

घात 0 वाला एक समघात फलन है और D पर इसके आंशिक अवकलज संतत है। अतः ऑयलर प्रमेय लागू करने पर

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

E18) मान लीजिए $D = \{(x, y) \mid x \neq y\}$ और $f : D \to \mathbf{R} : f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x-y}$ से परिभाषित है।

तब f घात 2 वाला एक समघात फलन है और इसके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज संतत हैं। अतः ऑयलर-प्रमेय के अनुसार

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

अब, चूंकि $\tan z = f$, इसलिए $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sec^2 z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sec^2 z \dfrac{\partial z}{\partial y}$

(•) में $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ के लिए प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है –

$$x \sec^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y \sec^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \tan z$$

अर्थात् $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z.$

E19) क) $\phi(t) = \dfrac{f(3+t\cos \pi/3,\ 1+t\sin \pi/3) - f(3,\ 1)}{t}$

$$= \frac{1}{t}\left[\left(3 + t\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(3 + t\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(1 + t\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(1 + t\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 - 3^2 + 3 - 1\right]$$

$$= t\left(1 - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore D_{\pi/3} f(3,\ 1) = \lim_{t\to 0}\phi(t) = 5\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

ख) $\phi(t) = \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{2} + t\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right),\ 0 + t\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) - f\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)}{t}$

$$= -\frac{1}{t}e^{-t\sin\pi/6}\sin\left(t\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore D_{-\pi/6} f\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right) = \lim_{t\to 0}\phi(t) = -\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t\sin\pi/6}\times\sin(t\cos\pi/6)}{t}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6}\lim_{t\to 0}e^{-t\sin\pi/6}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t\cos\pi/6)}{t\cos\pi/6}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t\cos\pi/6)}{t\cos\pi/6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

E20) अब $\phi(t) = \dfrac{f(t\cos\theta,\ t\sin\theta) - f(0,\ 0)}{t}$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{2t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta + t^4\sin^4\theta}\right]$$

$$= \frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + t^2\sin^4\theta}$$

$$\therefore \lim_{t \to 0} \phi(t) = \begin{cases} 2 \sin \theta \tan \theta, & \text{यदि } \cos \theta \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } \cos \theta = 0 \end{cases}$$

अतः सभी दिशाओं में f के दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है।

E21) $$\phi(t) = \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \frac{2t^2 \sin\theta \cos\theta}{t^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = \frac{\sin 2\theta}{t}$$

तब, $\lim_{t\to 0} \phi(t)$ का अस्तित्व होता है यदि और केवल यदि $\sin 2\theta = 0$,

अर्थात्

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

फलस्वरूप, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ की दिशाओं में (0, 0) पर f के दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है।

E 22) ध्यान दीजिए कि तीनों प्रश्नों के फलन दिए गए बिन्दुओं पर अवकलनीय है, अतः इनमें से प्रत्येक स्थिति में हम प्रमेय 6 को लागू कर सकते हैं।

क) $$D_{\pi/4}\, u(2,-1) = (u_x)_{(2,-1)} \cos\frac{\pi}{4} + (u_y)_{(2,-1)} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

ख) $$D_{\pi/4}\, u(\ln 3, \ln 2) = (u_x)_{(\ln 3, \ln 2)} \cos\frac{\pi}{4} + (u_y)_{(\ln 3, \ln 2)} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \left[e^{(\ln 3 + \ln 2)} + e^{(-\ln 3 - \ln 2)} \right] \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$+ \left[e^{(\ln 3 + \ln 2)} + e^{(-\ln 3 - \ln 2)} \right] \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{37\sqrt{2}}{6}$$

ग) $$D_{\pi/2}\, u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = (u_x)_{(\pi/4, \pi/3)} \cos\frac{\pi}{2} + (u_y)_{(\pi/4, \pi/3)} \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= (\sec y \cdot \tan y)_{(\pi/4, \pi/3)}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

E23) मान लीजिए f, (a, b) के ε-प्रतिवेश N में परिभाषित है। मान लीजिए N_1 0 का एक ε-प्रतिवेश है। तब

$$|t - 0| < \varepsilon \Rightarrow |t| < \varepsilon \Rightarrow |(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - (a, b)| < \varepsilon$$

इस तरह, $(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)$, N का सदस्य है। चूँकि f, N पर परिभाषित है, इसलिए फलन

$$F(t) = f(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)$$

किसी नियत θ के लिए 0 के ε-प्रतिवेश N' में परिभाषित है।

अब, $$\phi(t) = \frac{f(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - f(a, b)}{t}$$

$$= \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

अतः $\lim_{t \to 0} \phi(t)$ का अस्तित्व होता है यदि और केवल यदि 0 पर F(t) अवकलनीय हो। अब, θ की दिशा में (a, b) पर फलन का दिक्-अवकलज होता है यदि और केवल यदि $\lim_{t \to 0} \phi(t)$ का अस्तित्व हो। अतः हम यह देखते हैं कि θ की दिशा में (a, b) पर फलन f(x, y) का दिक्-अवकलज होता है यदि और केवल यदि 0 पर संगत F(t) अवकलनीय हो। और दिक्-अवकलज $F'(0)$ के बराबर होता है।

E24) यदि बिन्दु (a, b) पर f(x, y) के सभी दिक्-अवकलज हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि (a, b) पर f संतत भी हो।
(देखिए E20)। वहाँ हमने यह दिखाया है कि (0, 0) पर f के सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है। $y^2 = mx$ रखकर यह आसानी से सत्यापित किया जा सकता है कि (0, 0) पर f संतत नहीं है।

शब्दावली

अवकलनीय	differentiable
अस्पष्ट फलन	implicit function
आंशिक अवकलज	partial derivative
दिक्-अवकलज	directional derivative
ध्रुवांतर रेखा	radius vector
निष्कासित प्रतिवेश	deleted neighbourhood
परिसर	range
पुनरावृत्त सीमाएं	repeated limits
प्रवणता	slope
मिश्रित आंशिक अवकलज	mixed partial derivative
युगपत सीमा	simultaneous limit
शृंखला नियम	chain rule
संपूर्ण अवकलज	total derivative
समघात फलन	homogeneous function

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-07
उच्चस्तरीय कलन

खंड

3

आंशिक अवकलजों के अनुप्रयोग

खंड 3 आंशिक अवकलजों के अनुप्रयोग

इस पाठ्यक्रम के पिछले खंड में हमने अनेक चरों वाले फलनों के लिए सभी कोटि के आंशिक अवकलज परिभाषित किए हैं। वहां हमने आंशिक अवकलज, अवकलनीयता और सांतत्य के बीच के संबंध को भी प्रदर्शित किया है। मिश्रित आंशिक अवकलजों की समता के लिए आवश्यक प्रतिबंध का उल्लेख भी हमने किया है। हमने समघात फलन परिभाषित किए हैं और आंशिक अवकलजों की सहायता से समघात फलनों से संबंधित कुछ सरल परिणाम प्राप्त किए हैं।

इस खंड में हम अभी तक प्राप्त परिणामों को अनेक चरों वाले फलनों से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण परिणामों को सिद्ध करने में लागू करेंगे।

इकाई 8 में हमने दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों के सापेक्ष उच्चिष्ठ (relative maximum) और निम्निष्ठ (minimum) की परिभाषा दी है और सापेक्ष चरम मान (relative extremum) के अस्तित्व के लिए आवश्यक प्रतिबंध प्राप्त किया है। यह प्रतिबंध एक चर वाले फलनों के लिए प्राप्त किए गए प्रतिबंध के ही समान है। हमने स्तब्ध बिन्दुओं (stationary points) (एक चर वाले फलन में क्रांतिक बिन्दु (critical point)) की प्रकृति मालूम करने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध (sufficient conditions) भी प्राप्त किए हैं। ये प्रतिबंध द्वितीय अवकलज परीक्षण के समान हैं।

हमने इकाई 9 में आपको जैकोबियन से परिचित कराया है। यह वह अभिधारणा है जिसका एक चर वाले फलनों के कलन में कोई अनुरूप नहीं है। अनेक चरों वाले फलनों के संपूर्ण सिद्धांत में जैकोबियन एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। चूंकि इस खंड में हमने अपना अध्ययन केवल दो चरों वाले फलनों तक ही सीमित रखा है, इसलिए यहां जैकोबियन की भूमिका की सार्थकता का पता ठीक-ठीक नहीं चल पाता। लेकिन अगले खंड में, जहां हम आपको दो और अधिक चरों वाले फलनों के समाकलन-सिद्धांत से परिचित कराएंगे, जैकोबियन का प्रयोग काफ़ी किया जाएगा।

अंतिम इकाई में हमने दो अति महत्वपूर्ण प्रमेयों अर्थात् अस्पष्ट फलन प्रमेय और प्रतिलोम फलन प्रमेय, का कथन दिया है। हमने सिर्फ़ सरलतम रूप में अस्पष्ट फलन प्रमेय को सिद्ध किया है। दो चरों वाले फलनों की फलनिक आश्रितता के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध भी हमने प्राप्त किया है।

इस खंड में हमने अधिकांश परिणामों को केवल दो चरों वाले फलनों के लिए सिद्ध किया है ताकि उपपत्तियों के महत्वपूर्ण चरण तकनीकी ब्योरों में न खो जाएं। अधिक चरों वाले फलनों से संबंधित केवल उन परिणामों को हमने शामिल किया है, जिनकी आवश्यकता अगले खंड में पड़ेगी।

संकेत और प्रतीक

$P_n(x)$	n-वां टेलर वहुपद
$R_{n+1}(x)$	टेलर प्रसार में $n+1$ पदों के बाद का शेष पद
$\|X\|$	आव्यूह X का सारणिक
$JF = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$	$F = (f,g)$ का x और y के सापेक्ष जैकोबियन

इकाई 8 टेलर-प्रमेय

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम अनेक चरों वाले वास्तविक मान फलन के लिए टेलर-प्रमेय का कथन देंगे। यह प्रमेय इन फलनों के सापेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ प्राप्त करने का एक मुख्य साधन है। इस इकाई में हम संक्षेप में लगरांज गुणक-विधि पर भी चर्चा करेंगे। इस विधि से हम स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं, जबकि चरों पर कुछ अतिरिक्त प्रतिबंध लगे हों।

इस इकाई में हम दो चरों वाले फलनों तक अपनी चर्चा सीमित रखेंगे। हालांकि प्राप्त परिणाम किसी भी संख्या में लिए गए चरों के लिए सही होते हैं, परन्तु इनकी उपपत्ति में जो विधि लागू होती है, उसे इस स्तर पर आसानी से नहीं समझा जा सकता है। अतः सरलता के लिए हम अपना ध्यान केवल दो चरों वाले फलनों पर ही केन्द्रित करेंगे।

पहले हम अपनी चर्चा एक चर वाले फलन से शुरू करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- एक या दो चरों वाले फलनों के लिए टेलर-बहुपद प्राप्त कर सकेंगे,
- एक और दो चरों वाले फलनों के लिए टेलर-प्रमेय का कथन दे सकेंगे और उसे लागू कर सकेंगे,
- फलन के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कर सकेंगे,
- स्तब्ध बिन्दुओं की प्रकृति मालूम करने के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण लागू कर सकेंगे,
- दो चरों वाले फलनों के स्तब्ध बिन्दु मालूम करने के लिए लगरांज-गुणक तकनीक लागू कर सकेंगे।

8.2 टेलर-प्रमेय

कलन पाठ्यक्रम की इकाई 6 में आपने देखा है कि यदि बिन्दु 0 पर फलन f और उसके अवकलजों के मान ज्ञात हों तो बिन्दु 0 के निकट फलन के मान के लिए हम एक व्यंजक प्राप्त कर सकते हैं। आंशिक अवकलजों का प्रयोग करके दो चरों के फलनों के लिए भी हम इसी प्रकार का व्यंजक प्राप्त कर सकते हैं। अठारहवीं शताब्दी के महान अंग्रेज गणितज्ञ ब्रुक टेलर ने पहले पहल यह व्यंजक प्राप्त किया। अब हम एक चर वाले फलनों के टेलर-प्रमेय की चर्चा करेंगे।

टेलर (1685-1731)

8.2.1 एक चर वाले फलनों के लिए टेलर-प्रमेय

आप भी हमारी इस बात से सहमत होंगे कि कलन में बहुपद ही सबसे सरल फलन होते हैं। जोड़, घटाना, गुणा और भाग जैसी चार आधारभूत संक्रियाओं को लागू करके एक बिन्दु पर बहुपद का मान हम ज्ञात कर सकते हैं। परंतु यदि फलन e^x, $\ln x$, $\sin x$ आदि जैसे फलन हों तो मान निकालने की क्रिया इतनी आसान नहीं होती। लेकिन इन फलनों का प्रयोग गणित की सभी शाखाओं में इतना अधिक होता है कि अब इनके सन्निकट मानों को सारणी रूप में प्रस्तुत कर दिया गया है और ये सारणियां बनाने के लिए उन बहुपदों को ज्ञात करना पड़ता है जो विचाराधीन बिन्दु के प्रतिवेश में इन फलनों के सन्निकट मान प्रस्तुत करते हैं।

आप लगरांज माध्यमान प्रमेय से अच्छी तरह से परिचित हैं। इस प्रमेय के अनुसार, यदि $f(x)$, विन्दु x_0 के किसी प्रतिवेश N में अवकलनीय है, तो उन सभी x के लिए, ताकि $[x_0, x]$ या $[x, x_0]$, N में आविष्ट हो, हम पाते हैं कि

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(\xi)$$

यहां ξ, x_0 और x के बीच स्थित एक विन्दु है।

यदि N में f दो बार अवकलनीय हो, तो फलन f' पर फिर से माध्यमान प्रमेय लागू करके हम एक चरण और आगे बढ़ सकते हैं और यह लिख सकते हैं कि

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(\zeta)\,(x-x_0)^2$$

जहां ζ, N में x_0 और x के बीच स्थित एक विन्दु है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि पहली स्थिति में बहुपद $f(x_0)$, N में $f(x)$ का सन्निकटन करता है, जबकि दूसरी स्थिति में बहुपद $f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$, N में $f(x)$ का सन्निकटन करता है। वास्तविक मान (actual value) और सन्निकटित मान (approximated value) के अंतर को त्रुटि पद (error term) कहा जाता है।

पहली स्थिति में त्रुटि पद $f'(\xi)\,(x-x_0)$ है और दूसरी स्थिति में यह $\frac{1}{2} f''(\zeta)\,(x-x_0)^2$ है। यदि f' और f'' परिबद्ध (bounded) हों तो हम इन त्रुटि पदों का आकलन (estimation) कर सकते हैं।

टेलर-प्रमेय के अनुसार, यदि x_0 के किसी प्रतिवेश में $f(x)$ के $n+1$ तक की सभी कोटियों के अवकलज हों, तो हम क्रमशः घात $0, 1, \ldots\ldots, n$ वाले बहुपद $P_0(x), P_1(x), \ldots\ldots, P_n(x)$ प्राप्त कर सकते हैं, जिससे कि त्रुटि पद $f(x) - P_r(x)$, $r + 1$ से कम या बराबर घात वाला एक बहुपद हो। ध्यान दीजिए कि यहां हमने बहुपद 0 को घात शून्य वाला बहुपद माना है। सामान्यतः ऐसा नहीं किया जाता। यहां ऐसा करने का कारण व्यंजक में समरूपता लाना है। परिशुद्ध रूप में टेलर-प्रमेय का कथन देने से पहले हम एक परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा 1 : मान लीजिए $f(x)$, विन्दु x_0 पर कोटि n तक के अवकलज वाला एक वास्तविक मान फलन है $(n \geq 1)$। बहुपद $P(x)$ को x_0 पर $f(x)$ का r **वां टेलर-बहुपद** कहा जाता है, यदि

(i) $P(x)$ की घात $\leq r$, $r \leq n$,

(ii) $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$, $0 \leq j \leq r$ के लिए,

जहां $P^{(0)}(x_0) = P(x_0)$ और $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

आपको याद होगा कि बहुपद $P(x)$ एक व्यंजक है, जिसे इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n, \qquad \ldots\ldots (1)$$

जहां $c_0, c_1, \ldots\ldots, c_n$ वास्तविक संख्याएं हैं। इनके अतिरिक्त व्यंजक

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots\ldots + c_n(x-x_0)^n, \qquad \ldots\ldots (2)$$

जहाँ $x_0, c_0, c_1, \ldots\ldots, c_n$ वास्तविक संख्याएं हैं और $x_0 \neq 0$, को भी बहुपद कहा जाता है। यहां आप देख सकते हैं कि घातों $(x-x_0)^2, \ldots\ldots, (x-x_0)^n$ का प्रसार करके (2) को (1) के रूप में पुनः लिखा जा सकता है। हम (1) के व्यंजक को शून्य पर बहुपद कहते हैं और (2) के व्यंजक को x_0 पर बहुपद कहते हैं।

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे और उसे सिद्ध करेंगे, जिसके अनुसार दिए हुए फलन के टेलर-बहुपद अद्वितीय होते हैं। इस प्रमेय की सहायता से दिए हुए फलन के टेलर-बहुपद भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$, $(r+1)$ वास्तविक संख्याएं हैं। तब एक ऐसे अद्वितीय बहुपद $P(x)$ का अस्तित्व होता है कि

(i) $P(x)$ की घात $\leq r$.

(ii) $P^{(j)}(x_0) = a_j$, $0 \leq j \leq r$,

जहां x_0 एक नियत वास्तविक संख्या है। और, तब $P(x) = \sum_{m=0}^{r} \frac{a_m}{m!}(x-x_0)^m$

उपपत्ति : हम x_0 पर एक बहुपद को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots\ldots + b_r(x-x_0)^r, \qquad \ldots\ldots (3)$$

जहां $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_r$ वास्तविक संख्याएं हैं। अब हमें ऐसे $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_r$ मालूम करने हैं जिससे कि $0 \leq j \leq r$ के लिए $P^{(j)}(x_0) = a_j$. यदि हम (3) के व्यंजक को j बार अवकलित करें, तो हमें प्राप्त होता है,

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{r} k(k-1)\ldots\ldots(k-j+1)\, b_k\,(x-x_0)^{k-j}, \; 1 \leq j \leq r.$$

और तब

$P^{(j)}(x_0) = j!b_j,\ 1 \le j$ –

इस तरह,

$$b_j = \frac{P^{(j)}(x_0)}{j!},\ 1 \le j \le r$$

और

$$b_0 = P(x_0) = \frac{P^{(0)}(x_0)}{0!}$$

अतः

$$0 \le j \le r \text{ के लिए } b_j = \frac{P^{(j)}(x_0)}{j!} \qquad \text{..... (4)}$$

b_j के मान को (3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{P^{(j)}(x_0)\,(x-x_0)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{r} \frac{a_j}{j!}(x-x_0)^j \qquad \text{..... (5)}$$

ध्यान दीजिए कि बहुपद $P(x)$ की घात r होगी, यदि और केवल यदि $a_r \neq 0$. अब (4) से हम यह निष्कर्ष भी निकाल सकते हैं कि यह बहुपद अद्वितीय है।

प्रमेय 1 के निम्नलिखित उपप्रमेय (corollary) की सहायता से हम दिए हुए फलन के टेलर-बहुपद ज्ञात कर सकते हैं।

उपप्रमेय 1 : यदि $f(x)$ एक वास्तविक मान है जिसके n $(n \ge 1)$ तक की सभी कोटियों के अवकलजों का अस्तित्व हो, तो x_0 पर $f(x)$ का mवां टेलर-बहुपद होता है:

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)\,(x-x_0)^j}{j!},\ 0 \le m \le n.$$

उपपत्ति : मान लीजिए प्रमेय 1 में $a_j = f^{(j)}(x_0),\ 0 \le j \le m.$

तब f का mवां टेलर-बहुपद, यदि उसका अस्तित्व हो, समीकरण (5) के रूप का होता है। इस तरह,

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)\,(x-x_0)^j}{j!},\ 0 \le m \le n.$$

इस चर्चा से यह पता चलता है कि दिए हुए फलन के टेलर-बहुपद संबंध

$$P_{m+1}(x) = P_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

का प्रयोग करके चरणशः (step by step) प्राप्त किए जा सकते हैं और, यदि $P_m(x)$, बिन्दु x_0 पर $f(x)$ का mवां टेलर-बहुपद हो, तो आप यह जांच सकते हैं कि x_0 पर $P_m(x)$ का अवकलज, x_0 पर $f(x)$ का $(m-1)$वां टेलर-बहुपद होता है।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : आइए हम $x = 3$ पर $f(x) = x^3-2x^2+4x+1$ के टेलर-बहुपद ज्ञात करें।

यहां हम प्रमेय 1 लागू करते हैं, जहां $x_0=3$.

चूंकि $f^{(0)}(3) = f(3) = 22$,

$f^{(1)}(3) = 19$

$f^{(2)}(3) = 14$

$f^{(3)}(3) = 6$, और

$f^{(r)}(3) = 0$, सभी $r > 3$ के लिए,

इसलिए

$$P_0(x) = 22,\ P_1(x) = 22 + \frac{19}{1!}(x-3)$$

$$P_2(x) = 22 + \frac{19}{1!}(x-3) + \frac{14}{2!}(x-3)^2$$

$$P_3(x) = 22 + \frac{19}{1!}(x-3) + \frac{14}{2!}(x-3)^2 + \frac{6}{3!}(x-3)^3$$ और

$P_r(x) = P_3(x)$, सभी $r > 3$ के लिए।

उदाहरण 2 : आइए $x = 0$ पर $f(x) = \sqrt{1+x}$ का चौथा टेलर-बहुपद T_4 ज्ञात करें।

चूंकि $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$,

$f''(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$ और

$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}(1+x)^{-7/2}$, इसलिए

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = \frac{-1}{4},\ f^{(3)}(0) = \frac{3}{8},\ f^{(4)}(0) = \frac{-15}{16}.$$

अतः अपेक्षित बहुपद है,

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{4!}\frac{15}{16}x^4.$$

उदाहरण 3 : आइए अब हम $x_0 = \pi$ पर $\cos x$ के लिए $T_8(x)$ ज्ञात करें।

अब $\cos \pi = -1$ और π पर $\cos x$ के प्रथम आठ अवकलज हैं :

0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1.

गुणांक 0 वाले पदों को हटाकर हमें निम्नलिखित बहुपद प्राप्त होता है :

$$T_8(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \frac{(x-\pi)^6}{6!} - \frac{(x-\pi)^8}{8!}$$

उदाहरण 4 : आइए हम $x_0 = 0$ पर f का $T_5(x)$ ज्ञात करें, जहां

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}.$$

f के अवकलज ज्ञात करने पर हमें प्राप्त होता है :

$f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$,

$f^{(3)}(x) = 3.2\,(1-x)^{-4}$, $f^{(4)}(x) = 4!\,(1-x)^{-5}$,

$f^{(5)}(x) = 5!\,(1-x)^{-6}$

इस तरह, 0 पर f के उत्तरोत्तर अवकलज हैं :

1!, 2!, 3!, 4!, 5!, ...

चूंकि $f(0) = 1$, इसलिए

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{5!}{5!}x^5$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E1) $x = 2$ पर फलन e^x का n-वां टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए।

E2) $x = 0$ पर $\sin x$ का छठा टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए।

E3) बताए गए बिन्दुओं पर निम्नलिखित फलन के rवें टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए (दिए हुए r के मान के लिए) :

क) $x^2 - 3x + 4$, $a = -2$, $r = 2$.

ख) $x^4 - 5x^3 + 3$, $a = 1$, $r = 4$.

E4) घात 2 वाला एक बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जो $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$ और $f''(1) = 2$ को संतुष्ट करता हो।

अब हम टेलर-प्रमेय का कथन देंगे जो किसी बिन्दु पर एक फलन और उसके टेलर-बहुपद के बीच संबंध स्थापित करता है।

प्रमेय 2 (टेलर-प्रमेय) : मान लीजिए f विवृत अंतराल $]a,b[$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए अंतराल $]a,b[$ में f के $n+1$ तक की (जिसमें $n+1$ भी शामिल है), सभी कोटियों वाले अवकलजों का अस्तित्व है। मान लीजिए x_0, अंतराल $]a,b[$ का एक बिन्दु है। तब $]a,b[$ के किसी x के लिए

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad \ldots\ldots (6)$$

जहां c, x_0 और x के बीच का एक बिन्दु है। (6) के दक्षिण पक्ष वाले व्यंजक को x_0 पर f का टेलर-प्रसार (Taylor's expansion) कहते हैं।

यहां हम इस प्रमेय की उपपत्ति का पूरा ब्यौरा नहीं दे रहे हैं। हम केवल यह बताना चाहेंगे कि $x_0 < x$ या $x < x_0$ के अनुसार अंतराल $[x_0, x]$ या $[x, x_0]$ पर परिभाषित फलन

$$\phi(X) = f(X) + \frac{(x-X)}{1!} f'(X) + \ldots\ldots + \frac{(x-X)^n}{n!} f^{(n)}(X) + (x-X)^{n+1}A$$

पर, जहां A एक ऐसा अचर है कि $\phi(x_0) = \phi(x)$, रोल-प्रमेय को लागू करके प्रमेय 2 को हम सिद्ध कर सकते हैं।

चूंकि प्रमेय 2 का बिन्दु c, फलन $\phi(X)$ पर रोल-प्रमेय लागू करने पर प्राप्त होता है, इसलिए हम केवल इस बिन्दु के अस्तित्व की गारंटी दे सकते हैं। इसका ठीक-ठीक स्थान निर्धारण नहीं कर सकते।

अब हम समीकरण (6) को निम्न रूप में लिखते हैं :

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

जहां $P_n(x)$, बिन्दु x_0 पर $f(x)$ का n-वां टेलर-बहुपद है और

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

तब $R_{n+1}(x)$ का मान x, x_0 और n पर निर्भर करता है। हम $R_{n+1}(x)$ को x_0 पर $f(x)$ के टेलर-प्रसार में $n+1$ पदों के बाद वाले शेष पदों का लगरांज-रूप कहते हैं।

यदि हम x के स्थान पर x_0+h लिखें, तो टेलर-प्रसार निम्न रूप का हो जाता है :

$$f(x_0+h) = \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x_0) \frac{h^r}{r!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h),$$

जहां $0 < \theta < 1$ और θ एक ऐसी वास्तविक संख्या है, जो x_0 और h पर निर्भर करती है।

ध्यान दीजिए कि यदि $f(x)$, घात m वाला एक बहुपद हो, तो $r > m$ के लिए $f^{(r)}(x) = 0$. अतः सभी x और x_0 के लिए $R_{n+1}(x) = 0$, जबकि $n \geq m$. इस तरह हम यह पाते हैं कि इस स्थिति में x_0 पर $m+1$ पदों तक $f(x)$ का टेलर-प्रसार ज्ञात करना, $f(x)$ को x_0 पर R के गुणांकों वाले एक बहुपद के रूप में व्यक्त करने के समान है।

शेष $R_{n+1}(x)$ का आकलन करके हम यह मालूम कर सकते हैं कि $f(x)$ अपने n-वें टेलर-बहुपद के कितना निकट है।

कलन पाठ्यक्रम (इकाई 6) में आप दिए हुए फलन की टेलर या मैक्लॉरिन श्रेणी लिखना सीख चुके हैं। वहां आपको यह बताया गया था कि एक दिए हुए फलन की टेलर-श्रेणी मान्य (valid) न होने की भी संभावना होती है। वास्तव में फलन की टेलर-श्रेणी और उसके परिमित टेलर-प्रसार में काफ़ी निकट का संबंध होता है। मान लीजिए x_0 पर $f(x)$ की सभी कोटियों के अवकलजों का अस्तित्व है। यदि

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

बिन्दु x_0 पर f का टेलर-प्रसार हो और हम यह सिद्ध कर सकते हों कि

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

तो हम कहते हैं कि x_0 पर $f(x)$ की टेलर-श्रेणी उन सभी x के लिए दिए हुए फलन की ओर अभिसरित (converge) होती है, जिनके लिए

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

और, इस स्थिति में तब हम लिखते हैं :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

गुणांक $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ को x_0 पर $f(x)$ के टेलर-प्रसार में **n-वां टेलर-गुणांक** कहा जाता है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से टेलर-प्रमेय को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 5 : आइए हम अंतराल $]-1, 1[$ में $x = 0$ के आस-पास फलन $f(x) = e^x$ पर टेलर-प्रमेय लागू करें।

कलन पाठ्यक्रम से हम जानते हैं कि फलन $f(x) = e^x$, वास्तविक रेखा पर सर्वत्र संतत होता है और

$f(x) = f'(x) = \ldots\ldots = f^{(n)}(x) = \ldots\ldots = e^x$.

इस तरह हम यह पाते हैं कि f के सभी कोटियों वाले अवकलजों का अस्तित्व है और वे अंतराल $]-1, 1[$ में संतत हैं। अब टेलर-प्रमेय के अनुसार, यदि $x \in]-1, 1[$ और $n \in \mathbf{N}$ दिया हुआ हो तो 0 और x के बीच एक ऐसे बिन्दु c का अस्तित्व होता है कि

$e^x = T_n(x) + R_{n+1}(x)$,

जहां

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

क्या आप इस उदाहरण में शेषफल $R_{n+1}(x)$ के बारे में कोई विशेष बात बता सकते हैं? आइए इस प्रश्न का उत्तर देने की कोशिश करें।

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \right|$$

$$\leq e^c \left| \frac{1}{(n+1)!} \right| \text{ क्योंकि } |x| < 1.$$

अब चूंकि c, 0 और x के बीच स्थित है, इसलिए $e^c < e^{|x|}$.

तब $|R_{n+1}(x)| < e^{|x|} \left| \frac{1}{(n+1)!} \right|$

अब, n को बड़े से बड़ा लेकर $\frac{1}{(n+1)!}$ को छोटे से छोटा बनाया जा सकता है। अर्थात् $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$.

इससे यह अर्थ निकलता है कि $n \to \infty$ पर $R_{n+1}(x) \to 0$. अतः फलन $f(x) = e^x$ के लिए हम लिख सकते हैं :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

आइए अब हम एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : आइए हम $x = 0$ पर $x \in]-1, 1[$ के लिए $f(x) = \ln(1+x)$ का टेलर-प्रसार ज्ञात करें।

कलन पाठ्यक्रम (इकाई 6) से हम यह जानते हैं कि

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

ज़िससे कि

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

अतः

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{(n-1)}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

जहां

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\zeta)^{n+1}}x^{n+1}.$$

स्पष्ट है कि $x \in]-1, 1[$ के लिए

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

इससे यह पता चलता है कि $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

इस तरह, किसी $x \in]-1, 1[$ के लिए

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E5) अंतराल $]-\frac{1}{2}, 1[$ में $x = 0$ के आस-पास $f(x) = \frac{1}{1+x}$ का टेलर-प्रसार प्राप्त कीजिए।

E6) $x = \frac{\pi}{6}$ के आस-पास $f(x) = \sin x$ का टेलर-प्रसार प्राप्त कीजिए।

अब तक हमने यह देखा है कि एक चर वाले फलनों के टेलर-प्रसार किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। अगले उपभाग में हम दो चरों वाले फलनों के टेलर-प्रमेय पर चर्चा करेंगे।

8.2.2 दो चरों वाले फलनों के लिए टेलर-प्रमेय

इस उपभाग में हम टेलर-प्रमेय को दो चरों वाले फलनों पर लागू करेंगे। इसके लिए आइए पहले हम टेलर-बहुपद की अभिधारणा को दो चरों वाले फलनों पर लागू करें। आप भाग 3.3 में n चरों वाले बहुपद की परिभाषा से परिचित हो चुके हैं। यहां हम दो चरों वाले बहुपद पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

परिभाषा 2 : मान लीजिए x और y दो चर हैं। तब $a_{jk}x^jy^k$ के रूप के व्यंजक को, जहां j और k, ऋणेतर पूर्णांक (non-negative integers) हैं और $a_{jk} \in \mathbf{R}$, एकपदी (monomial) कहा जाता है। पूर्णांक $j+k$ को एकपदी की घात कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, x^2y^3 घात 5 वाला एक एकपदी है,
x^4 घात 4 वाला एक एकपदी है,
y^7 घात 7 वाला एक एकपदी है।

ऐसे एकपदियों का परिमित योगफल लेकर ही x और y चरों में बहुपद बनता है। अब हम इसकी औपचारिक परिभाषा देंगे।

परिभाषा 3 : वास्तविक गुणांकों वाला x और y में दो चरों वाला बहुपद निम्न प्रकार का एक व्यंजक होता है :

$$\begin{aligned}P(x,y) = a_{00} &+ (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \ldots\ldots + \\ &(a_{i0}x^i + a_{(i-1)1}x^{i-1}y + \ldots\ldots + a_{0i}y^i) + \ldots\ldots + \\ &(a_{n0}x^n + \ldots\ldots + a_{0n}y^n),\end{aligned}$$

जहां a_{ij} वास्तविक संख्याएं हैं।

यहां आप देख सकते हैं कि समान घात वाले एकपदियों को हमने एक साथ रखा है। पहले कोष्ठक में प्रत्येक पद घात 1 वाला एकपदी है। दूसरे कोष्ठक में प्रत्येक पद घात 2 वाला एकपदी है, आदि-आदि।

उदाहरण के लिए, $P(x,y) = 1 + 2xy + x^2y$,

दो चरों वाला एक बहुपद है। यह बहुपद तीन एकपदियों का, जिनके घात क्रमशः 0, 2 और 3 हैं, योगफल है। तब संख्या 3 को, जो इन तीन संख्याओं में सबसे बड़ी है, इस बहुपद की घात कहा जाता है।

व्यापक परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा 4 : बहुपद $P(x,y)$ के एकपदियों के अधिकतम घात को $P(x,y)$ की घात कहा जाता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को आसानी से हल कर सकते हैं।

E7) निम्नलिखित बहुपदों के घात ज्ञात कीजिए :

(क) $1 + y + x^2y + xy^2 + y^5$

(ख) $2 + x^3 + y^3$

(ग) $7 + x + xy + x^3y + x^4$

अब हम दो चरों वाले फलन के n-वें टेलर-बहुपद की परिभाषा देंगे।

परिभाषा 5 : मान लीजिए $f(x,y)$ दो चरों वाला वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए इसके बिन्दु (x_0, y_0) के किसी प्रतिवेश में n से कम या उसके बराबर कोटियों वाले सभी प्रकार के आंशिक अवकलज संतत हैं। अतः

$$T_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i+j\le n} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)\right](x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

को (x_0, y_0) पर f का **n-वां टेलर-बहुपद** कहा जाता है।

विशेष रूप से, यदि $f(x,y)$, घात n वाला बहुपद हो तो $m > n$ के लिए कोटि m वाले सभी आंशिक अवकलज शून्य होंगे। अतः, सभी $m \ge n$ के लिए,

$T_m(x,y) = T_n(x,y)$.

साथ ही, एक चर की तरह आप यहां भी देख सकते हैं कि (0,0) पर $T_n(x,y)$, $f(x,y)$ के बराबर है। परिभाषा से आप यह भी देख सकते हैं कि

$$T_{n+1}(x,y) = T_n(x,y) + \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=n+1}} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)\right](x-x_0)^i (y-y_0)^j,$$

जिससे कि दिए हुए फलन $f(x,y)$ के टेलर-बहुपद का चरणशः परिकलन किया जा सकता है। इसे हम एक उदाहरण की सहायता से समझाएंगे।

उदाहरण 7 : आइए हम (1, 1) पर फलन $P(x,y) = 1 + 2xy + x^2y$ के टेलर-बहुपद ज्ञात करें।

यहां पहले हम यह देखते हैं कि

$P(1,1) = 4$. अतः $T_0(x,y) = P(1,1) = 4$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2y + 2xy, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(1,1)} = 4.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2, \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(1,1)} = 3.$$

इसलिए

$$T_1(x,y) = T_0(x,y) + \frac{(x-1)}{1!}\frac{\partial P}{\partial x}(1,1) + \frac{(y-1)}{1!}\frac{\partial P}{\partial y}(1,1)$$

$= 4 + 4(x-1) + 3(y-1)$.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2y, \ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 2 + 2x, \ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

इसलिए

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{(x-1)^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(1,1) + \frac{(x-1)}{1!}\frac{(y-1)}{1!}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(1,1) + \frac{(y-1)^2}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(1,1)$$

$= 4 + 4(x-1) + 3(y-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)(y-1)$.

चूंकि

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} = 0, \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y} = 2, \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ और } \frac{\partial^3 P}{\partial y^3} = 0,$$

इसलिए

$T_3(x,y) = T_2(x,y) + (x-1)^2(y-1)$.

क्या अब आप जांच सकते हैं कि सभी $r \ge 3$ के लिए $T_r(x, y) = T_3(x,y)$?

आइए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : आइए (0, 0) पर फलन $\sin(x+y)$ का टेलर-बहुपद $T_3(x,y)$ ज्ञात करें।

हम $f(x,y) = \sin(x+y)$ लेते हैं। यह स्पष्ट है कि f के सभी कोटियों वाले आंशिक अवकलज संतत हैं। (0, 0) पर इन अवकलजों का परिकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

इसलिए

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\sin(x+y)\Big|_{(0,0)} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = -\cos(x+y)\Big|_{(0,0)} = -1.$$

अतः (0, 0) पर $\sin(x+y)$ का तृतीय टेलर-बहुपद है :

$$T_3(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i+j=3} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)\right] x^i y^j$$

$$= \frac{1}{0!\,0!} f(0,0) + \frac{x}{1!\,0!}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{y}{1!\,0!}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$+ \frac{x^2}{2!\,0!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{xy}{1!\,1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{y^2}{2!\,0!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + \ldots..$$

सरल करने पर यह निम्नलिखित रूप का हो जाता है :

$$T_3(x,y) = (x+y) - \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$= (x+y) - \frac{(x+y)^3}{3!}$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E8) (0, 0) पर e^{x+y} का द्वितीय टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए।

E9) (1,1) पर $f(x,y) = 2 + x^3 + y^3$ के टेलर-बहुपद ज्ञात कीजिए।

E10) मान लीजिए $f(x,y)$, घात 2 वाला एक बहुपद है। सिद्ध कीजिए कि (0, 0) पर $T_2(x,y)$, $f(x,y)$ के बराबर है।

आइए हम दो चरों वाला एक फलन $f(x,y)$ लें और, यह मान लें कि बिन्दु (x_0, y_0) के प्रतिवेश में किसी पूर्णांक n के लिए n से कम या इसके बराबर सभी कोटियों वाले इसके संतत आंशिक अवकलज हैं। तब n-वें टेलर बहुपद

$$T_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i+j\le n} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)\right] (x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

का (x_0, y_0) पर मान वही है जोकि $f(x,y)$ का है और (x_0, y_0) पर n से कम या उसके बराबर सभी कोटियों वाले आंशिक अवकलज वही हैं जोकि (x_0, y_0) पर f के हैं। एक चर वाली स्थिति की तरह यहां भी हम यह जानना चाहेंगे कि क्या हम f का सन्निकटन संगत टेलर बहुपद से कर सकते हैं? दूसरे शब्दों में हम फलन

$$R_{n+1}(x,y) = f(x,y) - T_n(x,y)$$

के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं।

टेलर-प्रमेय के अनुरूप से, जिसका कथन हम नीचे दे रहे हैं, फलन के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त हो जाती है।

प्रमेय 3 (दो चरों वाले फलन का टेलर-प्रमेय) :

मान लीजिए f दो चरों x और y वाला एक वास्तविक मान फलन है जिसके $\bar{x} = (x_0, y_0)$ के प्रतिवेश $S(\bar{x}, r)$ में कोटियों $\le n+1$ वाले संतत आंशिक अवकलज हैं। तब $S(\bar{x}, r)$ में दिए हुए $(x, y) \ne (x_0, y_0)$ के लिए (x_0, y_0) और (x,y) को मिलाने वाले रेखा खंड पर एक ऐसा बिन्दु (c_1, c_2) होता है कि

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_{n+1}(x,y), \qquad \ldots..(7)$$

जहां

$$T_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^{i+j\le n} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)\right] (x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

और

$$R_{n+1}(x,y) = \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{i!j!}\left[\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}(c_1,c_2)\right](x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

अर्थात्

$$R_{n+1}(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(c_1,c_2)\right](x-x_0)^{n+1}$$

$$+ \frac{1}{n!\,1!}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^n \partial y}(c_1,c_2)\right](x-x_0)^n (y-y_0) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}(c_1,c_2)\right](y-y_0)^{n+1}$$

इस तरह, आप यह देख सकते हैं कि $R_{n+1}(x,y)$ में बिन्दु (c_1, c_2) पर ज्ञात किए गए सभी $(n+1)$वीं कोटि वाले आंशिक अवकलज होते हैं।

(7) के दाएं पक्ष को (x_0, y_0) पर f का **n-वां टेलर-प्रसार** कहा जाता है। यह प्रसार देखने में आपको कुछ जटिल लग सकता है। परन्तु इससे परेशान होने की कोई आवश्यकता नहीं है, क्योंकि आप देखेंगे कि इस पाठ्यक्रम में ज्यादातर हम फलनों के केवल द्वितीय टेलर-प्रसार पर ही ध्यान देंगे। यदि आप $R_3(x,y)$ के व्यंजक को देखें तो आप पाएंगे कि इसमें $(x-x_0)$ और $(y-y_0)$ के घात होते हैं। अब, यदि हम (x_0, y_0) के काफ़ी समीप एक बिन्दु (x,y) लें तो $(x-x_0)$ और $(y-y_0)$ काफ़ी लघु होगा। अतः द्वितीय घात बहुपद से हमें $f(x,y)$ का एक काफ़ी अच्छा सन्निकटन प्राप्त हो सकता है। दूसरी तरफ़, n को काफ़ी बृहत् लेकर हम एक बहुपद से $f(x,y)$ का अच्छे से अच्छा सन्निकटन कर सकते हैं।

अब हम $T_2(x,y)$ के व्यंजक और (x_0,y_0) पर $f(x,y)$ के द्वितीय टेलर-प्रसार को स्पष्ट रूप में लिखेंगे, क्योंकि हमें इनका बार-बार प्रयोग करना पड़ेगा।

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + R_3(x,y)$$

अब यह उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 9 : मान लीजिए हम $(2, 1)$ के निकट के बिन्दुओं के लिए फलन $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$ का द्वितीय टेलर-प्रसार ज्ञात करना चाहते हैं।

आइए हम एक-एक आंशिक अवकलज ज्ञात करें। यहां

$f(2,1) = \ln 5.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x+2y},\ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{1+x+2y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(1+x+2y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{-1}{25}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4}{(1+x+2y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = \frac{-4}{25}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2}{(1+x+2y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = \frac{-2}{25}$$

अतः f का द्वितीय टेलर-प्रसार होगा :

$$f(x,y) = \ln 5 + \left[\frac{1}{5}(x-x_0) + \frac{2}{5}(y-y_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{25}(x-x_0)^2 + 2\left(\frac{-2}{5}\right)(x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{-4}{25}\right)(y-y_0)^2\right]$$

क्या अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं?

E11) $(1, \frac{\pi}{2})$ के निकट फलन $f(x,y) = xy^2 + \cos xy$ का द्वितीय टेलर-प्रसार ज्ञात कीजिए।

E12) $(0, 0)$ के निकट एक द्वितीय घात बहुपद से फलन $f(x,y) = e^x \sin y$ का एक सन्निकटन ज्ञात कीजिए।

अगले भाग में हम दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के बारे में चर्चा करेंगे। कलन पाठ्यक्रम के खंड 2 में आप एक चर वाले फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। वहां हमने स्थानिक उच्चिष्ठ और स्थानिक निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए प्रथम और द्वितीय अवकलज परीक्षणों को लागू किया था। यहां आप देखेंगे कि दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ की परिभाषाएं ठीक वैसी ही हैं जैसी कि एक चर से संबंधित परिभाषाएं। यहां हम उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिए आवश्यक प्रतिबंध (necessary condition) प्राप्त करेंगे, जोकि एक चर वाली स्थिति के ही समान है। इस भाग में अध्ययन किए गए फलनों के टेलर-प्रसार की सहायता से हम उच्चिष्ठ बिन्दु और निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात करने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध भी प्राप्त करेंगे। ये प्रतिबंध द्वितीय अवकलज परीक्षण के अनुरूप हैं, जिसका अध्ययन आप एक चर वाले फलनों के लिए कर चुके हैं।

8.3 उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ

इस भाग में हम दो चरों वाले फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ की संकल्पना पर विचार करेंगे। एक चर वाली स्थिति से आप जानते हैं कि फलन के आलेखन में उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ (या चरम मान) का अध्ययन काफ़ी उपयोगी होता है।

एक चर वाली स्थिति की तरह यहां भी हम फलन के निरपेक्ष चरम मान (absolute extremum) का नहीं, बल्कि स्थानिक चरम मान का अध्ययन करना चाहेंगे। अतः आइए हम दो चरों वाले फलनों के स्थानिक या सापेक्ष चरम मानों (local or relative extrema), अर्थात् सापेक्ष उच्चिष्ठ बिन्दु या सापेक्ष निम्निष्ठ बिन्दु का अध्ययन करें।

8.3.1 सापेक्ष चरम मान

पहले हम दो चरों वाले फलनों के स्थानिक उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ की संकल्पनाओं को समझने की कोशिश करेंगे।

इसके लिए आइए पहले हम कुछ सरल फलन लें।

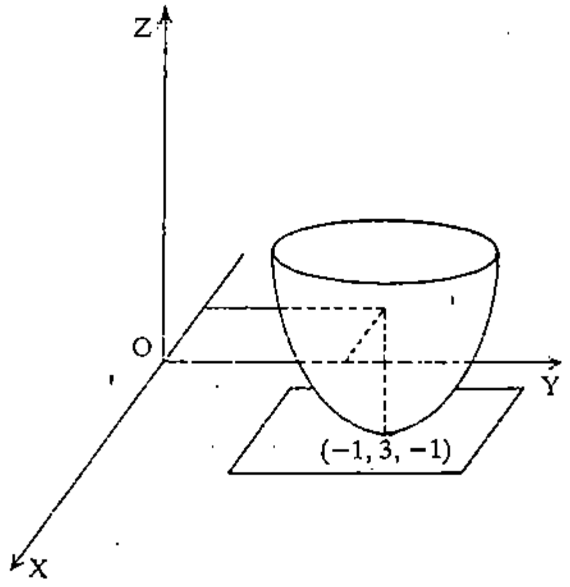
फलन $f(x,y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 - 1$ लीजिए।

अब $f(-1, 3) = -1$.

चूंकि $x \neq -1$ और $y \neq 3$ के लिए $(x+1)^2$ और $(y-3)^2$ सदा की धनात्मक होते हैं, इसलिए $(x,y) \neq (-1, 3)$ के लिए $(x+1)^2 + (y-3)^2 - 1 > -1$.

अर्थात् सभी (x,y) के लिए $f(x,y) \geqslant f(-1, 3)$.

तब इस स्थिति में हम यह कहते हैं कि f का निम्निष्ठ $(-1, 3)$ पर है। चित्र 1 देखिए।



चित्र 1

चित्र में आप यह देख सकते हैं कि (−1, 3, −1) पर पृष्ठ का स्पर्श समतल (tangent plane) क्षैतिज है।

अब, $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$

से परिभाषित एक अन्य फलन लीजिए।

यहां $f(0, 0) = 1/2$. वृत्त $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ लीजिए। इस वृत्त का केन्द्र (0, 0) पर है। तब वृत्त के अंदर किसी बिन्दु $(x,y) \neq (0, 0)$ के लिए

$\sin(x^2 + y^2) > 0.$

अतः

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2) < \frac{1}{2} = f(0, 0).$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि वृत्त के अंदर के सभी बिन्दुओं (x,y) के लिए $f(x,y) \leq f(0, 0)$. ध्यान दीजिए कि यदि बिन्दु (x, y) वृत्त के बाहर है तो $f(x, y)$, $\frac{1}{2}$ से बड़ा हो सकता है।

इस स्थिति में हम यह कहते हैं कि f का (0, 0) पर स्थानिक उच्चिष्ठ है। इस संबंध में अब हम निम्नलिखित परिभाषा देंगे।

परिभाषा 6 : मान लीजिए f, दो चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है। बिन्दु $P(x_0, y_0)$ पर f का **एक स्थानिक उच्चिष्ठ होता है,** यदि f के परिभाषा-प्रांत (domain of definition) में आविष्ट एक ऐसे विवृत चक्रिका $S(\bar{x}, r)$ का, जहां $\bar{x} = (x_0, y_0)$ और $r > 0$, अस्तित्व हो, कि सभी $(x, y) \in S(\bar{x}, r)$ के लिए

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

हम समझते हैं कि अब आप स्वयं स्थानिक निम्निष्ठ को परिभाषित कर सकते हैं। E13) देखिए। अपनी परिभाषा का, भाग 8.6 में दी गई परिभाषा के साथ मिलान करना न भूलिए।

E13) दो चरों वाले फलन का स्थानिक निम्निष्ठ परिभाषित कीजिए।

आपको याद होगा कि एक चर वाले फलनों के संबंध में हमने विवृत चक्रिका के स्थान पर विवृत अंतराल लिया था। इस तरह, दो चरों वाले फलनों के स्थानिक उच्चिष्ठ और स्थानिक निम्निष्ठ की हमारी अभिधारणा एक चर वाली स्थिति की अभिधारणा का एक प्राकृतिक व्यापकीकरण है।

टिप्पणी 1 : i) यदि D, f का प्रांत हो और सभी $(x, y) \in D$ के लिए $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, तो हम कहते हैं कि बिन्दु (x_0, y_0) f का **सार्वत्रिक या निरपेक्ष उच्चिष्ठ** (global या absolute maximum) है। इसी प्रकार हम **सार्वत्रिक निम्निष्ठ** को परिभाषित कर सकते हैं।

ii) किसी फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मानों को फलन के चरम मान कहा जाता है। ऐसी स्थिति में हम यह कहते हैं कि एक दिए हुए बिन्दु पर फलन का चरम मान होता है यदि उस बिन्दु पर फलन का एक उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ है।

यदि बिन्दु (x_0, y_0) पर फलन का निरपेक्ष उच्चिष्ठ (अथवा निम्निष्ठ) हो और यह बिन्दु ऐसा हो कि f के प्रांत में आविष्ट (x_0, y_0) का एक प्रतिवेश हो, तो (x_0, y_0), फलन f का सापेक्ष उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ) भी होता है। लेकिन प्रत्येक सापेक्ष उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ), निरपेक्ष उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ) नहीं होता।

एक चर वाले फलनों के संबंध में आप जानते हैं कि प्रत्येक स्थानिक उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ पर फलन के अवकलज का (यदि इसका अस्तित्व है) लोपन हो जाता है। इसी प्रकार का परिणाम दो चरों वाले फलनों के लिए भी प्राप्त होता है। हम इस परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं।

प्रमेय 4 : मान लीजिए f दो चरों वाला एक फलन है। मान लीजिए किसी बिन्दु (x_0, y_0) पर f का एक चरम मान है और इस बिन्दु पर f के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है। तब

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

उपपत्ति : आइए हम यह मान लें कि $\bar{x} = (x_0, y_0)$ पर f(x,y) का एक सापेक्ष निम्निष्ठ है। तब f(x,y) विवृत चक्रिका $S = S(\bar{x}, r)$, $r > 0$ में परिभाषित होता है और सभी $(x,y) \in S$ के लिए $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$. अतः ऐसे विवृत अंतराल I_1 और I_2, जहां $I_1 =]x_0-r, x_0+r[$, $I_2 =]y_0-r, y_0+r[$ होते हैं कि $x \in I_1 \Rightarrow (x,y_0) \in S$ और $y \in I_2 \Rightarrow (x_0,y) \in S$.

अब I_1 पर $g_1(x) = f(x,y_0)$ से परिभाषित फलन g_1 लीजिए।

g_1, एक चर वाला फलन है।

इसी प्रकार I_2 पर $g_2(y) = f(x_0,y)$ से परिभाषित फलन g_2 भी एक चर वाला फलन है।

g_1 और g_2 की परिभाषाओं से हम यह देख सकते हैं कि सभी $x \in I_1$ के लिए
$g_1(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = g_1(x_0)$ और सभी $y \in I_2$ के लिए $g_2(y) = f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) = g_2(y_0)$.

इससे यह अर्थ निकलता है कि फलन g_1 और g_2 के सापेक्ष उच्चिष्ठ क्रमशः विन्दु x_0 और बिन्दु y_0 पर हैं।

अब हम जानते हैं कि (x_0, y_0) पर f के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है।

इससे यह अर्थ निकलता है कि g_1 और g_2 क्रमशः x_0 और y_0 पर अवकलनीय हैं। इस तरह,

$g_1'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$ और

$g_2'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$

क्योंकि आप जानते हैं कि यदि एक बिन्दु पर एक चर वाले फलन का सापेक्ष चरम मान हो और उस बिन्दु पर वह फलन अवकलनीय हो, तो उस बिन्दु पर फलन के अवकलज का मान शून्य होता है।

यदि $f(x,y)$ का एक सापेक्ष निम्निष्ठ हो तो g_1 और g_2 के भी क्रमशः x_0 और y_0 पर सापेक्ष निम्निष्ठ होते हैं और तब ऊपर की तरह ही हम यहां भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

हम यह देखने के लिए इस प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं कि किसी विन्दु पर दिए हुए फलन का चरम मान है कि नहीं। इसके लिए हमें केवल यह देखना होता है कि उस विन्दु पर इसके आंशिक अवकलजों का (यदि इनका अस्तित्व है) लोपन हो जाता है कि नहीं। हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस तथ्य को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 10 : मान लीजिए हम यह देखना चाहते हैं कि

$$f(x, y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$$

द्वारा दिए गए फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान हैं कि नहीं।

दिया हुआ फलन $f(x, y) = x^2 - 2x + \frac{y^2}{4}$ सर्वत्र अवकलनीय है। प्रमेय 4 के अनुसार, हमें ऐसे विन्दु (x,y) ज्ञात करने होते हैं कि

$$f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y).$$

अब,

$$f_x(x, y) = 2x - 2, \ f_y(x,y) = \frac{y}{2}$$

इसलिए $f_x(x,y)$ और $f_y(x,y)$ का लोपन केवल तभी होगा जबकि $x = 1$ और $y = 0$. अतः बिन्दु $(1, 0)$ ही केवल वह संभव विन्दु है जहां f का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान हो सकता है। आइए हम यह देखें कि $(1,0)$, f का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ विन्दु है कि नहीं।

हम $f(x,y)$ को निम्न रूप में पुनः लिखते हैं :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} \\ &= x^2 - 2x + 1 + \frac{y^2}{4} - 1 \\ &= (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \end{aligned}$$

इससे यह पता चलता है कि सभी (x,y) के लिए $f(x,y) \geq -1 = f(1,0)$. इस तरह, हम यह पाते हैं कि फलन का $(1, 0)$ पर एक सार्वत्रिक निम्निष्ठ है और वहां निम्निष्ठ मान $f(1, 0) = -1$ है। इस फलन का कोई उच्चिष्ठ मान नहीं है।

इस तरह, यदि किसी विन्दु पर $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ या $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, तो हम सीधे यह कह सकते हैं कि उस विन्दु पर फलन का कोई चरम मान नहीं है। लेकिन यदि किसी बिन्दु पर $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$, तो इससे यह सावित नहीं होता कि उस विन्दु पर फलन का एक चरम मान है ही। संभव है कि किसी विन्दु (x_0, y_0) पर फलन के सभी प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज शून्य हों, फिर भी वह विन्दु उस फलन का एक चरम विन्दु न हो। कहने का अर्थ यह है कि प्रमेय 5 का विलोम सही नहीं है। इसे हम एक उदाहरण की सहायता से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 11 : $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$

से परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ लीजिए।

चूंकि इस फलन के लिए

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \text{ और } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

इसलिए

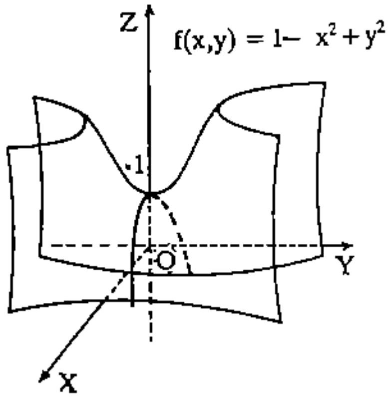
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

आइए अब हम यह देखें कि $(0, 0)$ पर f का चरम मान है कि नहीं। यहां $f(0, 0) = 1$ और सभी शून्येतर x_1 और y_1 के लिए $f(x_1, 0) < 1$ और $f(0,y_1) > 1$. परन्तु $(0, 0)$ के किसी भी प्रतिवेश में हम $(x_1, 0)$ और $(0, y_1)$ के प्रकार के बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं। इस तरह $(0, 0)$ के किसी ऐसे प्रतिवेश N का अस्तित्व नहीं होता जिसके लिए, सभी $(x,y) \in N$ के लिए $f(x, y) \leq f(0, 0)$ या $f(x, y) \geq f(0, 0)$.

(चित्र 2 भी देखिए)

इस तरह हम यह पाते हैं कि हालांकि $(0, 0)$ पर f के दोनों आंशिक अवकलजों का लोपन हो जाता है, परंतु $(0, 0)$ पर f का न तो उच्चिष्ठ बिन्दु है और न ही निम्निष्ठ बिन्दु।

चित्र 2 में आप f का आलेख देख सकते हैं।

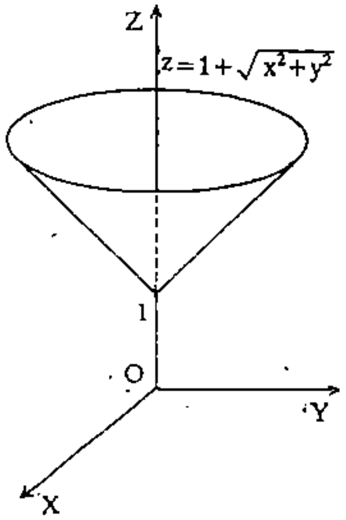


चित्र 2

यह संभव है कि किसी बिन्दु पर फलन के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व न हो, परंतु उस बिन्दु पर फलन का चरम मान हो। नीचे दिए गए उदाहरण में हमने इसी प्रकार के फलन के बारे में चर्चा की है।

उदाहरण 12 : $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$

द्वारा दिया गया फलन लीजिए।



चित्र 3

चित्र 3 में आप इस फलन का आलेख देख सकते हैं।

आलेख से यह ज़ाहिर है कि $(0, 0)$ पर f का निम्निष्ठ है। आइए अब हम

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ और $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ज्ञात करें।

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \sqrt{h^2} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

लेकिन हम जानते हैं कि $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ का अस्तित्व नहीं है। अतः $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ का अस्तित्व नहीं है। इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ का भी अस्तित्व नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए।

E14) वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर फलन

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-4}$$

के आंशिक अवकलजों का लोपन हो जाता है।

E15) दिखाइए कि फलन $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 18$ का एक सार्वत्रिक निम्निष्ठ है।
(संकेत : x और y वाले पदों के वर्ग पूर्ण कीजिए)

अभी तक हमने यह देखा है कि यदि (a, b) पर फलन f का एक चरम मान है, तो या तो

(i) (a,b) पर f के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व नहीं होता, या

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

इस इकाई में आगे अब हम केवल उन फलनों को ही लेंगे, जिनके आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो। इस तरह, प्रतिबंध (ii) चरम मान के अस्तित्व का एक आवश्यक प्रतिबंध हो जाता है। चूंकि इस प्रतिबंध का काफ़ी महत्व है, इसलिए इस प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाले बिन्दुओं को हम एक विशेष नाम देते हैं।

परिभाषा 7 : मान लीजिए f दो चरों वाला एक फलन है। बिन्दु (x,y) को f का **स्तब्ध बिन्दु** (stationary point) कहा जाता है, यदि (x, y) पर दोनों आंशिक अवकलज शून्य हों।

आप इस बात से सहमत होंगे कि यदि (a, b) पर f का एक चरम मान हो तो (a, b), f का एक स्तब्ध बिन्दु होता है। लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि किसी फलन के सभी स्तब्ध बिन्दु उसके चरम मान बिन्दु हों। आप इस तरह की स्थिति उदाहरण 11 में देख चुके हैं।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

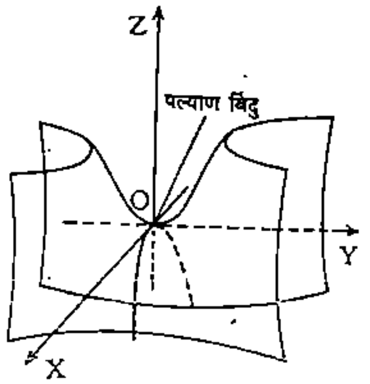
E16) निम्नलिखित फलनों के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए :

क) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^3$

ख) $f(x, y) = (x + y) e^{-xy}$

आइए अब हम कुछ ऐसे स्तब्ध बिन्दुओं पर विचार करें जो चरम मान बिन्दु नहीं हैं। मान लीजिए (a, b), फलन $f(x,y)$ का एक स्तब्ध बिन्दु है, परंतु इसका चरम मान बिन्दु नहीं है।

इस स्थिति में भी यह संभव है कि फलन $f(x, b)$ या $f(a, y)$ में, जहां a और b नियत (fixed) हैं, किसी एक फलन का (a, b) पर उच्चिष्ठ हो और दूसरे फलन का (a, b) पर निम्निष्ठ हो। उदाहरण के लिए चित्र 4 में दिया गया पृष्ठ देखिए, जिसका समीकरण $f(x,y) = y^2-x^2$ है।



चित्र 4

यहां $(0, 0)$, $f(x,y)$ का एक स्तब्ध बिन्दु है। अब x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश पृष्ठ को देखिए। यदि हम $y = 0$ नियत कर लें तो $f(x,0) = -x^2$, जो एक चर वाला एक फलन है और इसका 0 पर एक उच्चिष्ठ है। परंतु

f का (0,0) पर कोई उच्चिष्ठ नहीं है और यदि हम $x = 0$ को नियत कर लें तो $f(0,y) = y^2$ का 0 पर एक निम्निष्ठ है लेकिन f का (0,0) पर कोई निम्निष्ठ नहीं है। ऐसे स्तब्ध बिन्दुओं को **पल्याण बिन्दु** (saddle point) कहा जाता है। चित्र 4 से आप यह देख सकते हैं कि f का आलेख स्तब्ध बिन्दु (0,0) के आसपास पल्याण से मिलता-जुलता है। यही कारण है कि (0,0) पर f का कोई चरम मान नहीं होता, हालांकि $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

हम कहते हैं कि (x_0,y_0) पर f का एक पल्याण होता है, यदि केन्द्र (x_0,y_0) वाली एक ऐसी चक्रिका हो कि

i) चक्रिका के एक व्यास पर f का उच्चिष्ठ केवल (x_0,y_0) पर हो, और

ii) चक्रिका के दूसरे व्यास पर f का निम्निष्ठ केवल (x_0,y_0) पर हो।

इस तरह यह ज़रूरी नहीं है कि हर स्तब्ध बिन्दु चरम मान का बिन्दु हो। अगले उपभाग में हम वे प्रतिबंध ज्ञात करने का प्रयास करेंगे, जिनके अधीन स्तब्ध बिन्दु या तो उच्चिष्ठ बिन्दु होता है, या निम्निष्ठ बिन्दु।

8.3.2 द्वितीय अवकलज परीक्षण

इस उपभाग में हम वह विधि प्राप्त करेंगे जिसकी सहायता से हम यह परीक्षण कर सकते हैं कि कोई बिन्दु उच्चिष्ठ बिन्दु है या निम्निष्ठ बिन्दु। आप देखेंगे कि यह परीक्षण द्वितीय अवकलज पर आधारित है।

आपको याद होगा कि एक चर वाली स्थिति में भी उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का परीक्षण करने के लिए हमें द्वितीय अवकलज परीक्षण करना पड़ा था। इस परीक्षण के अनुसार, यदि f एक चर वाला एक ऐसा फलन हो कि

$f'(x_0) = 0$, तो f का

x_0 पर एक स्थानिक निम्निष्ठ होता है, यदि $f''(x_0) > 0$,

x_0 पर एक स्थानिक उच्चिष्ठ होता है, यदि $f''(x_0) < 0$,

इसी प्रकार का परीक्षण दो चरों वाले फलन के लिए भी है। लेकिन इस स्थिति में परीक्षण इतना आसान नहीं होता जितना कि एक चर वाली स्थिति में है।

आप समघात फलन से अच्छी तरह से परिचित हैं (इकाई 7 देखिए)। स्तब्ध बिन्दुओं की प्रकृति मालूम करने के पर्याप्त प्रतिबंध ज्ञात करने के लिए हमें दो चरों में घात 2 वाले समघात बहुपद द्वारा धारण किए गए मानों के चिह्नों से संबंधित एक सरल परिणाम की ज़रूरत पड़ेगी। हम n चरों में घात 2 वाले और वास्तविक गुणांकों वाले समघात बहुपद को n चरों में **वास्तविक द्विघात रूप** (real quadratic form) कहते हैं। दो चरों में द्विघात रूप को **द्विचर रूप** (binary form) या **द्विचर द्विघात रूप** भी कहा जाता है। इस तरह, द्विचर रूप निम्न प्रकार का एक व्यंजक होता है :

$ax^2 + bxy + cy^2$, जहां a,b,c वास्तविक संख्याएं हैं।

अब हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे जिसके अनुसार हम द्विघात रूप के गुणांकों को देखकर ही उसका चिह्न मालूम कर सकते हैं।

प्रमेय 5 : मान लीजिए $q(x,y)$ एक द्विचर द्विघात रूप है। तब

i) $b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow q(\alpha,\beta) \geqslant 0 \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ या $q(\alpha,\beta) \leqslant 0 \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

ii) $b^2 - 4ac > 0 \Longrightarrow q(x,y)$ के धनात्मक तथा ऋणात्मक, दोनों ही मान होते हैं।

iii) $b^2 - 4\,ac < 0$ और $a > 0$ या $c > 0 \Longrightarrow q(\alpha,\beta) > 0 \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

iv) $b^2 - 4\,ac < 0$ और $a < 0$ या $c < 0 \Longrightarrow q(\alpha,\beta) < 0 \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

उपपत्ति : (i) यदि $b^2 - 4\,ac = 0$, तो a और c दोनों शून्य नहीं हो सकते। व्यापकता में कोई कमी लाए बिना आइए हम यह मान लें कि $a \neq 0$.

तब

$$q(x,y) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)y^2\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2$$

इसका अर्थ यह है कि $q(\alpha,\beta)$ का चिह्न वही होता है, जोकि a का है, यदि a शून्येतर है। वस्तुतः हम यह प्राप्त करते हैं कि सभी $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha,\beta) \geqslant 0$ यदि $a > 0$ और सभी $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha,\beta) \leqslant 0$ यदि $a < 0$.

(ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में ऐसे $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व होता है, जिससे कि $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ और $q(\alpha,\beta) = 0$.
($\alpha = \frac{-b}{2a}$ और $\beta = 1$ लेकर आप इसकी जांच कर सकते हैं।)

x के स्थान पर y और y के स्थान पर x लेकर हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि

सभी $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha,\beta) \geq 0$, यदि $c > 0$ और सभी $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha, \beta) \leq 0$, यदि $c < 0$.

ii) $b^2 - 4ac > 0$. यदि a और c दोनों शून्य हों तो $q(x,y) = bxy$. अतः $q(1, -1) = -b$, $q(-1, -1) = b$. इससे यह पता चलता है कि $q(x, y)$ के धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों मान होते हैं।

अब मान लीजिए $a \neq 0$. तब

$$q(x,y) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)y^2\right]$$

यदि $\alpha = \frac{-b}{2a}$ और $\beta = 1$, तो $q(\alpha, \beta) = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

और यदि $\alpha_1 = 1$ और $\beta_1 = 0$, तो $q(\alpha_1, \beta_1) = a$.

इस तरह, हम यह पाते हैं कि $q(\alpha, \beta)$ और $q(\alpha_1, \beta_1)$ विपरीत चिह्न वाले हैं। इस तरह, स्थिति (i) सिद्ध हो जाती है, जबकि $a \neq 0$. इसी प्रकार हम स्थिति (ii) को सिद्ध कर सकते हैं, जबकि $c \neq 0$.

(iii) और (iv) : यदि $b^2 - 4ac < 0$, तो न तो a और न ही c शून्य हो सकता है। चूंकि $a > 0 \Leftrightarrow c > 0$, इसलिए $a > 0$ या $a < 0$ की स्थिति में परिणाम को सिद्ध कर देना ही पर्याप्त है। जैसा कि हम पहले देख चुके हैं,

$$q(x,y) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)y^2\right]$$

तब, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ होने पर कोष्ठक के अंदर का व्यंजक धनात्मक होता है, और $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ पर शून्य होता है।

इस तरह, यदि $a > 0$, तो प्रत्येक $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha, \beta) \geq 0$. और यदि $a < 0$, तो प्रत्येक $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ के लिए $q(\alpha, \beta) \leq 0$.

इस तरह, प्रमेय 5 की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

अब हम इस प्रमेय का प्रयोग स्तब्ध बिन्दुओं की प्रकृति मालूम करने के पर्याप्त प्रतिबंध प्राप्त करने में करेंगे।

प्रमेय 6 : मान लीजिए $f(x, y)$ दो चरों वाला एक ऐसा फलन है कि इसके, बिन्दु (x_0, y_0) को आविष्ट करने वाली चक्रिका N में कोटि दो तक के संतत आंशिक अवकलज होते हैं। मान लीजिए बिन्दु (x_0, y_0), $f(x, y)$ का स्तब्ध बिन्दु है, अर्थात्

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

और मान लीजिए

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = a,\ \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = b \text{ तथा } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = c.$$

तब

i) $f(x,y)$ का (x_0, y_0) पर एक निम्निष्ठ (उच्चिष्ठ) होता है, यदि $b^2 - 4ac < 0$ और $a > 0$ $(a < 0)$ या $c > 0$ $(c < 0)$.

ii) $f(x,y)$ का (x_0, y_0) पर न तो कोई उच्चिष्ठ और न ही कोई निम्निष्ठ होता है, यदि $b^2 - 4ac > 0$. अर्थात् (x_0, y_0) एक पल्याण बिन्दु है।

उपपत्ति : आइए पहले हम फलन

$g_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $g_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $g_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ लें।

ये फलन $(x_0, y_0) \in N$ पर संतत हैं और

$g_1(x_0, y_0) = a$, $2g_2(x_0, y_0) = b$, $g_3(x_0, y_0) = c$.

इसलिए फलन $g_2^2 - g_1 g_3$ भी N पर संतत है और

$4(g_2^2 - g_1 g_3)(x_0, y_0) = b^2 - 4ac$.

अतः इकाई 4 के प्रमेय 6 के अनुसार N में आविष्ट (x_0, y_0) का एक ऐसा प्रतिवेश N_1 होता है, जिससे कि N_1 में $g_2^2 - g_1g_3$ का वही चिह्न होगा जोकि $(g_2^2 - g_1g_3)(x_0, y_0)$ का है। इसी प्रकार,

(i) हम g_1 के संगत N में आविष्ट (x_0, y_0) का एक ऐसा प्रतिवेश N_2 प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि N_2 में फलन g_1 का वही चिह्न होगा जो कि $g_1(x_0, y_0)$ का है।

(ii) हम g_2 के संगत, N में आविष्ट, (x_0, y_0) का एक ऐसा प्रतिवेश N_3 प्राप्त कर सकते हैं कि N_3 में g_2 का वही चिह्न होगा, जोकि $g_2(x_0, y_0)$ का है।

मान लीजिए $N_0 = N_1 \cap N_2 \cap N_3$. तब f, N_0 में टेलर-प्रमेय की सभी परिकल्पनाओं को संतुष्ट करता है। अतः द्वितीय टेलर-प्रसार से हमें प्राप्त होता है :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y_0 + k - y_0) \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta)(x_0+h-x_0)^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta)(x_0+h-x_0)(y_0+k-y_0) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta)(y_0 + k - y_0)^2 \right],$$

जहां h और k ऐसी संख्याएं हैं कि (x_0+h, y_0+k), N_0 का सदस्य होता है, और

(ξ, η), बिन्दुओं (x_0, y_0) और (x_0+h, y_0+k) को मिलाने वाले रेखा-खंड पर एक बिन्दु है।

चूंकि (x_0, y_0) एक स्तब्ध बिन्दु है, इसलिए

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

अतः

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}[g_1^2(\xi, \eta)h^2 + 2g_2(\xi, \eta)hk + g_3^2(\xi, \eta)k^2]$$
$$= q(h, k), \text{ (मान लीजिए)} \qquad \ldots\ldots (8)$$

आइए अब हम स्थितियों (i) और (ii) को एक-एक करके लें।

स्थिति (i) : मान लीजिए $b^2 - 4ac < 0$ और $a > 0$. तब $(g_2^2 - g_1g_3)(x_0, y_0) = \dfrac{b^2 - 4ac}{4} < 0$. इसलिए N_0 के सभी बिन्दुओं पर $g_2^2 - g_1g_3$ ऋणात्मक होगा। विशेष रूप से, $(g_2^2 - g_1g_3)(\xi, \eta) < 0$, क्योंकि $(\xi, \eta) \in N_0$. और, चूंकि $a = g_1(x_0, y_0) > 0$, इसलिए समान तर्क देकर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $g_1(\xi, \eta) > 0$.
अतः प्रमेय 5 के अनुसार, द्विघाती व्यंजक $q(h,k) \geq 0$.

इससे यह पता चलता है कि उन सभी h, k के लिए, जिनसे कि $(x_0+h, y_0+k) \in N_0$,
$f(x_0+h, y_0+k) \geq f(x_0, y_0)$.

अतः (x_0, y_0) पर f का एक स्थानिक निम्निष्ठ है। इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि यदि $c > 0$, तो (x_0, y_0) पर f का एक स्थानिक निम्निष्ठ होता है। इसी प्रकार का तर्क देकर हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यदि $a < 0$ या $c < 0$, तब (x_0, y_0) पर f का एक स्थानिक उच्चिष्ठ होता है।

स्थिति (ii) : मान लीजिए $b^2 - 4ac > 0$.

$b^2 - 4ac = 4(g_2^2 - g_1g_3)(x_0, y_0) > 0$ से यह पता चलता है कि N_0 के सभी बिन्दुओं पर $g_2^2 - g_1g_3$ धनात्मक होता है। तब $(g_2^2 - g_1g_3)(\xi, \eta) > 0$. अतः प्रमेय 5 के प्रतिबंध (iii) के अनुसार $q(h, k)$ के धनात्मक और ऋणात्मक दोनों मान होते हैं। इस तरह समीकरण (8) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि इस स्थिति में f का कोई चरम मान नहीं होता। इस तरह, प्रमेय की स्थिति (ii) सिद्ध हो जाती है।

यहां आपके मन में यह प्रश्न उठ सकता है कि हमने $b^2 - 4ac = 0$ वाली स्थिति पर विचार क्यों नहीं किया। यदि $b^2 - 4ac = 0$, तो हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि $g_2^2 - g_1g_3 = 0$. वस्तुतः N_0 के अलग-अलग बिन्दुओं के लिए द्विघाती रूप $q(h, k)$ के अलग-अलग चिह्न हो सकते हैं। इस तरह हम यह पाते हैं कि $b^2 - 4ac = 0$ एक संदेहास्पद स्थिति है।

अब हम यहां कुछ उदाहरण दे रहे हैं। चरम मान बिन्दुओं को ज्ञात करने में प्रमेय 6 किस प्रकार सहायक होता है, यह इन उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 13 : आइए हम फलन $f(x,y)$ के स्थानिक चरम मान ज्ञात करें, जहां

$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 4.$

यहां

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - 2$, और

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y + 2.$

दोनों आंशिक अवकलज शून्य हों, इसके लिए यह आवश्यक है कि

$2x - 2y - 2 = 0$ और

$-2x + 4y + 2 = 0.$

इन समीकरणों को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$2y = 0$ या $y = 0.$

तब $x = 1$ अवश्य होगा। इस तरह हम यह पाते हैं कि केवल $(1, 0)$ ही, f का स्तव्ध विन्दु है।

द्वितीय अवकलज का परिकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2,\qquad b = \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 4$, और

$c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 4$

इसलिए $b^2 - 4ac = -16 < 0.$

चूंकि $a = 2 > 0$, इसलिए प्रमेय 6 के अनुसार $(1, 0)$ पर f का एक स्थानिक निम्निष्ठ होता है।

उदाहरण 14 : हम यह दिखाएंगे कि फलन

$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 - y^3 + 2x^7$

का $(0, 0)$ पर न तो कोई उच्चिष्ठ है और न ही कोई निम्निष्ठ। स्पष्ट है कि $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. अर्थात् $(0, 0)$ एक स्तव्ध विन्दु है और, $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$, $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$, $b = \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -4$, ताकि $b^2 - 4ac = 0$. जिससे यह पता चलता है कि प्रमेय 6 को लागू नहीं किया जा सकता। लेकिन

$f(x,y) = (x - y)^2 + (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2x^7.$

इसलिए

$f(x,x) = 2x^7$

अतः $(0, 0)$ के प्रत्येक प्रतिवेश में ऐसे विन्दुओं (x, y) का अस्तित्व होता है कि $y = x$ और $f(x,x)$ के धनात्मक और ऋणात्मक दोनों मान होते हैं। इससे यह पता चलता है कि $(0,0)$ पर $f(x,y)$ का न तो कोई उच्चिष्ठ है और न ही कोई निम्निष्ठ।

अब हम एक ऐसे फलन का उदाहरण देंगे, जिसके लिए एक दिए हुए विन्दु पर $b^2 - 4ac = 0$, लेकिन उस विन्दु पर फलन का चरम मान होता है।

उदाहरण 15 : फलन $f(x,y) = y^2 + x^2y + x^4$ लीजिए।

यहां $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ और

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$

इसलिए, $(0, 0)$ पर

$4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) - 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0.$

परंतु $f(x,y) = \left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4$. इसलिए सभी x,y के लिए $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$. इससे यह पता चलता है कि $(0,0)$, $f(x,y)$ का निम्निष्ठ है।

अगले उदाहरण में आप चरम मानों की संकल्पना का अनुप्रयोग देखेंगे।

उदाहरण 16 : आइए हम नियत परिमाप (perimeter) वाले सभी त्रिभुजों में अधिकतम क्षेत्रफल वाला त्रिभुज ज्ञात करें।

यदि त्रिभुज की भुजाएं x, y, z हों, तो क्षेत्रफल A निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त हो जाता है :

$A^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)$,

जहां $s = \frac{1}{2}(x+y+z)$ अर्ध परिमाप है।

इस तरह,

$2s = x + y + z$, या

$s - z = x + y - s$.

$\therefore A^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$.

यहां s एक अचर है और x और y चर हैं। इसलिए A का उच्चिष्ठ विन्दु वही होगा जो

$f(x,y) = (s-x)(s-y)(x+y-s)$

का उच्चिष्ठ विंदु है।

अब,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (s-y)(2s-2x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (s-x)(2s-2y-x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2(s-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3s + 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(s-x)$$

चूंकि त्रिभुज में $s \neq x$ और $s \neq y$, इसलिए समीकरण $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$ से यह प्राप्त होता है कि

$2x + y = 2s,\ x + 2y = 2s.$

फलस्वरूप,

$x = y = \frac{2}{3}s.$

इससे f के स्तव्ध विन्दु प्राप्त हो जाते हैं।

x, y के इन मानों के लिए हमें प्राप्त होता है,

$$a = c = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2s}{3} < 0 \text{ और}$$

$$b = \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2s}{3}$$

$$\therefore b^2 - 4ac = \frac{4}{9}s^2 - \frac{16}{9}s^2 = -\frac{4}{3}s^2 < 0.$$

इन प्रतिबंधों से यह सुनिश्चित हो जाता है कि उच्चिष्ठ का अस्तित्व है। अब,

यदि $x = y = \frac{2s}{3}$, तो $c = 2s - x - y = \frac{2s}{3}$

अतः $x = y = z$. अर्थात् त्रिभुज समबाहु है।

अगले भाग में आप कुछ प्रतिबंधों के अधीन अनेक चरों वाले फलनों के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ प्राप्त करने की विधि का अध्ययन करेंगे। परन्तु इससे पहले आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E17) निम्नलिखित फलनों के स्तव्ध विन्दु और स्थानिक चरम मान ज्ञात कीजिए।

क) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$

ख) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - 2x$

ग) $f(x,y) = y + x \sin y$.

E18) मूल बिन्दु पर फलन

$f(x,y) = 2\cos(x + y) + e^{xy}$

के व्यवहार पर चर्चा कीजिए।

E19) मान लीजिए n $(n \geq 2)$ एक पूर्णांक है और मान लीजिए

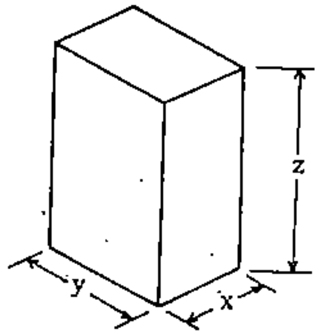
$f(x,y) = ax^n + cy^n$, जहां $ac \neq 0$.

क) f के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए।

ख) स्थानिक चरम मान ज्ञात कीजिए, जबकि

i) $a > 0, c > 0$ ii) $a < 0, c < 0$.

8.4 लगरांज-गुणांक



चित्र 5

मान लीजिए हम क्षेत्रफल A वाले एक टिन के टुकड़े से अधिकतम आयतन वाले समांतर षट्फलक (parellelopiped) के रूप में एक बंद बक्स बनाना चाहते हैं। मान लीजिए x, y, z बक्स की क्रमशः लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई है। अब हमें फलन

$f(x,y,z) = xyz$

का अधिकतम मान ज्ञात करना होगा, जबकि यह दिया हुआ है कि

$$2xy + 2xz + 2yz = A \qquad \text{..... (9)}$$

चित्र 5 में आप एक बंद बक्स देख सकते हैं। इस बक्स का आयतन xyz है और इसका पृष्ठ क्षेत्रफल (surface area) $2xy + 2xz + 2yz$ है।

इस भाग में हम दो चरों वाले फलनों से संबंधित ऐसी समस्याओं का अध्ययन करेंगे, जिनमें वे चर कुछ अतिरिक्त प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हों, जैसा कि (9) में दिया गया है। अर्थात् हम फलन

$z = f(x,y)$

के अधिकतम और निम्नतम मान ज्ञात करने की विधि पर चर्चा करेंगे, जबकि x और y समीकरण

$g(x,y) = 0$

से संबंधित हों।

यदि हम संबंध $g(x,y) = 0$ की सहायता से समीकरण $z = f(x,y)$ से एक चर का निराकरण कर सकें, तो z, एक चर वाला फलन हो जाएगा और फिर उसके चरम मान हम आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

इसे समझने के लिए यहां हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 17 : मान लीजिए हम एकक वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर फलन $f(x,y) = x^2+2y^2 - x$ के चरम मान ज्ञात करना चाहते हैं।

पहले हम फलन

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x \qquad \text{..... (10)}$$

को एक चर वाले फलन में बदलने के लिए प्रतिबंध $x^2 + y^2 = 1$ का प्रयोग करेंगे।

इस तरह, $f(x,y) = x^2 + 2(1-x^2) - x$

$= 2 - x^2 - x$.

यहां $g(x) = 2-x^2-x$, अंतराल $[-1, 1]$ पर परिभाषित एक चर वाला फलन है। अब हम $g(x)$ के चरम बिन्दु ज्ञात करेंगे। इसके लिए $g'(x) = -2x-1 = 0$ को हल करने पर हम यह पाते हैं कि $x = \frac{-1}{2}$, $g(x)$ का एक स्तब्ध बिन्दु है। तब यह देखने के लिए कि $x = \frac{-1}{2}$ उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ, हम $g''(x)$ ज्ञात करते हैं।

अब $g''(x) = -2$.

इस तरह $g''\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$. अतः एक चर के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण से हम यह पाते हैं कि $x = \frac{-1}{2}$, g का

उच्चिष्ठ है और g का कोई निम्निष्ठ नहीं है। अब समीकरण (10) में मान $x = \frac{-1}{2}$ को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ और } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दो बिन्दुओं $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ और $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ पर फलन का उच्चिष्ठ है और

$$f\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = f\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

अतः एकक वृत्त पर फलन का अधिकतम मान $\frac{9}{4}$ है।

आपको इस उदाहरण को समझने में कोई कठिनाई नहीं हुई होगी। परंतु इस प्रक्रिया को लागू करना हमेशा ही ठीक नहीं होता। दिए हुए प्रतिबंध को लागू करके दिए हुए फलन को एक चर वाले फलन में समानीत करना कभी-कभी काफ़ी कठिन होता है और कभी-कभी ऐसा करना संभव ही नहीं होता।

यहां हम एक वैकल्पिक विधि दे रहे हैं, जोकि प्रायः अधिक सुविधाजनक है। इस विधि को **लगरांज गुणक विधि** कहा जाता है।

मान लीजिए हम प्रतिबंध $g(x,y) = 0$ के अधीन फलन $z = f(x,y)$ का अधिकतमीकरण अथवा निम्नतमीकरण करना चाहते हैं। सैद्धांतिक रूप में z एक चर (मान लीजिए x) वाला फलन है और चरम मान पर $\frac{dz}{dx} = 0$, अर्थात्

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad \ldots\ldots (11)$$

संबंध $g(x,y) = 0$ से हम यह पाते हैं कि चरम मान पर

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad \ldots\ldots (12)$$

समीकरण (12) को एक निर्धारित गुणक λ से गुणा करके इसे समीकरण (11) में जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots\ldots (13)$$

λ ऐसा लीजिए जिससे कि (13) में $\frac{dy}{dx}$ के गुणांक का लोपन हो जाए।

(ऐसा करना संभव है और यह बात आपको तब स्पष्ट हो जाएगी जबकि आप इकाई 10 में अस्पष्ट फलन प्रमेय का अध्ययन कर लेंगे।)

अतः चरम मान बिन्दुओं पर

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad \ldots\ldots (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \qquad \ldots\ldots (15)$$

$$g(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots (16)$$

इन समीकरणों से हम तीन अज्ञात राशि x, y, λ ज्ञात कर सकते हैं। x,y के मानों से हमें स्तब्ध बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। λ की अब कोई भूमिका नहीं रह जाती। अतः आगे हमें इसकी आवश्यकता नहीं पड़ती। यहां हम यह बात और कह सकते हैं कि यह आवश्यक नहीं है कि इस तरह ज्ञात किया गया प्रत्येक स्तब्ध बिन्दु एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ ही हो। कभी-कभी समीकरण $z = f(x,y)$ को देखकर ही इनकी प्रकृति हम जान सकते हैं। कुछ स्थितियों में आश्रित चर का निराकरण करके हम द्वितीय अवकलज परीक्षण लागू कर सकते हैं।

आप देख सकते हैं कि x,y और λ को आश्रित चर मानकर फलन

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

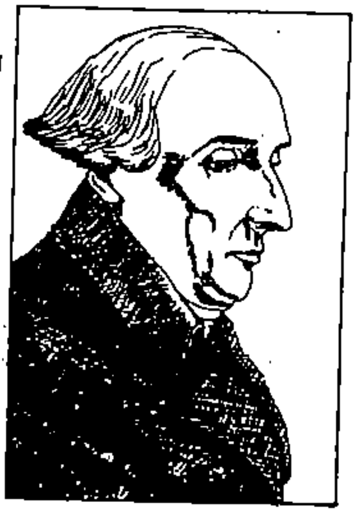
के आंशिक अवकलजों को शून्य के बराबर करके समीकरण (14), (15) और (16) प्राप्त हो जाते हैं। इस विधि की सरल व्याख्या हम इस प्रकार कर सकते हैं :

मान लीजिए फलन $f(x,y)$ दिया हुआ हो और प्रतिबंध $g(x,y) = 0$ के अधीन हमें f के चरम मान ज्ञात करने हों।

अब हम फलन

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad (17)$$

लेते हैं, जहां λ अज्ञात है। तब हम $F(x,y,\lambda)$ के तीन आंशिक अवकलज प्राप्त करते हैं और उन्हें शून्य के बराबर लेते हैं। अब हम इन तीन समीकरणों को हल करते हैं। इस तरह प्राप्त (x,y) के मान दिए हुए प्रतिबंध के अधीन दिए हुए फलन के स्तब्ध बिन्दु होते हैं।



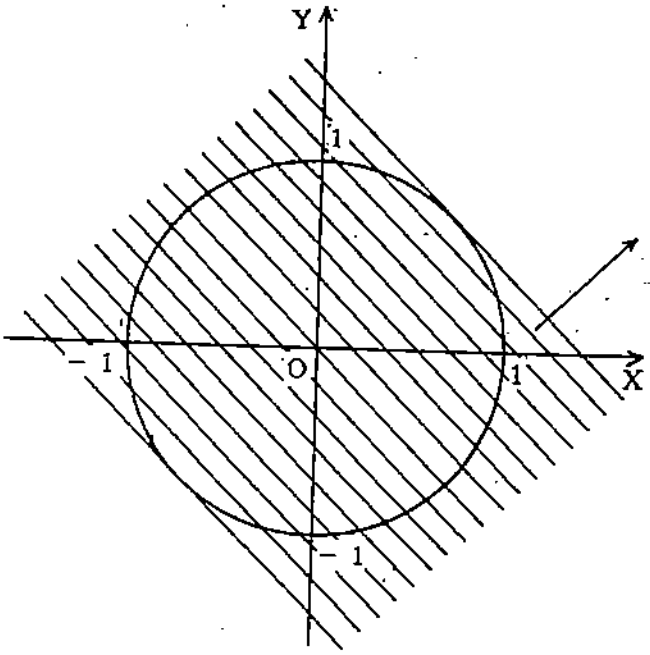
लगरांज (1736-1813)

संख्या λ को **लगरांज गुणक** (Lagrange's multiplier) कहते हैं।

जोज़फ लुई लगरांज अठारहवीं शताब्दी के एक प्रमुख गणितज्ञ थे। उन्होंने यह विधि विकसित की थी।

नीचे दिए गए उदाहरणों से यह प्रक्रिया स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 18: आइए हम वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर $f(x,y) = x+2y$ के अधिकतम और निम्नतम मान ज्ञात करें।



चित्र 6

चित्र 6 में आप देख सकते हैं कि f का अधिकतम मान प्रथम चतुर्थांश के एक बिन्दु पर और निम्नतम मान तृतीय चतुर्थांश के एक बिन्दु पर होता है।

यहां

$f(x,y) = x + 2y$ और $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

अब

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ और $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

अतः हम फलन

$F(x,y,\lambda) = (x+2y) + \lambda\,(x^2+y^2-1)$ को लेते हैं।

स्तब्ध बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें समीकरण निकाय (14), (15) और (16) को हल करना होता है। अर्थात्

$1 + \lambda\, 2x = 0$

$2 + \lambda\, 2y = 0$

$x^2 + y^2 = 1.$

पहले दो समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$x = \frac{-1}{2\lambda}, y = \frac{-1}{\lambda}$ और $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1.$

तीसरे समीकरण का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$\lambda^2 = \frac{5}{4}$, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

मान $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ लेने पर हम पाते हैं,

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x,y) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

मान $\lambda = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ से प्राप्त होता है

$x = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $f(x,y) = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$.

इस तरह, हम यह पाते हैं कि स्तब्ध बिन्दु $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ और $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ हैं और, चूंकि

$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$ और $f\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$, इसलिए सबसे बड़ा मान $\sqrt{5}$ है और सबसे छोटा मान $-\sqrt{5}$ है।

उदाहरण 19 : मान लीजिए हम पृष्ठ $g(x,y)$ पर फलन $f(x,y) = xy$ के चरम मान ज्ञात करना चाहते हैं, जहां

$g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$

पहले हम फलन $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$ को लेते हैं।

अब हमें निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करना होता है :

$y + \frac{\lambda x}{4} = 0$

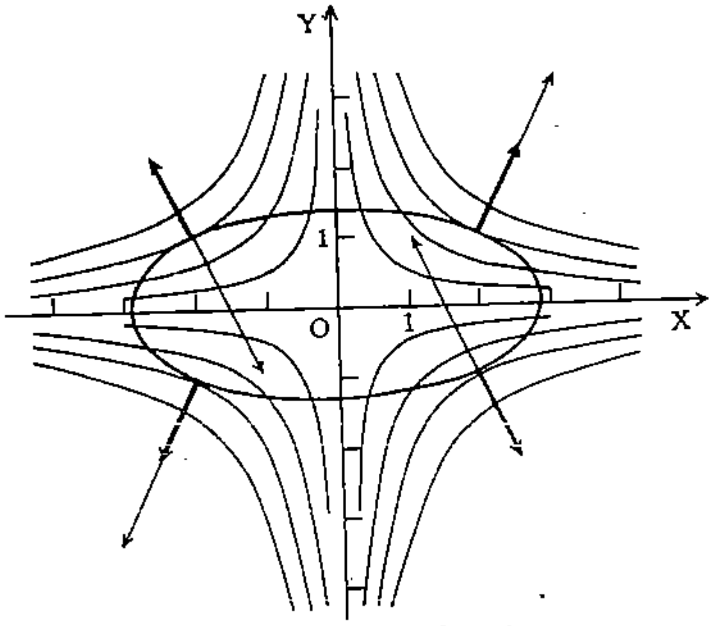
$x + \lambda y = 0$

और

$x^2 + 4y^2 = 8$

$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 8$

पहले और दूसरे समीकरण को हल करने पर हमें $x = \frac{\lambda^2}{4}x$, या $\lambda = \pm 2$ प्राप्त होता है।



$f(x,y) = xy,\ g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1$

चित्र 7

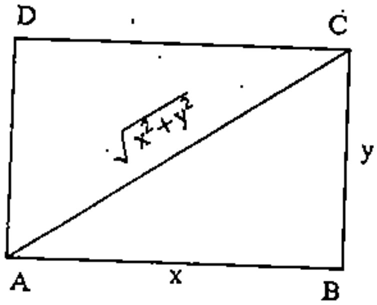
तब $x = \pm 2y$. इसे तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है
$4y^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 1.$

और, तब $x = \pm 2$. इस तरह, चरम मान चार बिन्दुओं (2, 1), (2, −1), (−2, 1) और (−2, −1) पर प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं पर अलग-अलग मान $f(x,y) = 2$ और $f(x,y) = -2$ प्राप्त होते हैं। इसलिए अधिकतम मान 2 है और निम्नतम मान −2 है।

ध्यान दीजिए कि $f(x,y) = xy$ एक अतिपरवलयज (hyperboloid) को निरूपित करता है और $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ एक दीर्घवृत्त (ellipse) को। चित्र 7 में आप $g(x,y) = 0$ के प्रतिबंध के अधीन f के चरम मान बिन्दु देख सकते हैं।

उदाहरण 20 : आइए हम अधिकतम क्षेत्रफल वाला एक समकोण त्रिभुज ज्ञात करें, जिसका परिमाप (perimeter) 1 है।

मान लीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका परिमाप 1 है (चित्र 8 देखिए)।



चित्र 8

मान लीजिए त्रिभुज की भुजाएं $x, y, \sqrt{x^2+y^2}$ हैं। AC को विकर्ण मानकर आयत ABCD बनाइए। तब

$f(x,y) = \Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ xy.$

त्रिभुज का परिमाप $= x + y + \sqrt{x^2+y^2}$

हम जानते हैं कि

$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 1.$$

हमें प्रतिबंध $g(x,y) = x + y + \sqrt{x^2+y^2} - 1 = 0$

के अधीन $f(x,y)$ का अधिकतम मान ज्ञात करना है।

आइए हम इस f और g के लिए समीकरण-निकाय प्राप्त करें।

$$\frac{1}{2}y + \lambda\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}x + \lambda\left[1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = 0$$

$$x + y + \sqrt{x^2+y^2} - 1 = 0.$$

पहले और दूसरे समीकरण से हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\frac{1}{2}y}{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{\frac{1}{2}x}{1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

या $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2} + y}$

या $\frac{y}{1-y} = \frac{x}{1-x}$

या $y - xy = x - xy$

या $x = y$

इसलिए भुजाएं x, x और $\sqrt{2}$ x हैं जिससे कि $x + x + \sqrt{2}\, x = 1$.

अर्थात् $(2 + \sqrt{2})\, x = 1$

अर्थात् $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

अतः अभीष्ट भुजाएं हैं $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ और $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने से आपको लगरांज गुणक विधि का काफ़ी अभ्यास हो जाएगा।

E20) $2x + y = 8$ पर $f(x,y) = 3xy$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

E21) सभी संख्याओं में, जिनका योगफल 70 हो, ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल अधिकतम हो।

E22) $2x^2 + y^2 = 1$ पर फलन $f(x,y) = x+y^2$ का निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

E23) परवलय $y - x^2 = 0$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए, जो फलन $f(x,y) = 2x - y$ का उच्चिष्ठ बिन्दु हो।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसे हम जल्दी से दोहरा लें।

8.5 सारांश

इस इकाई में हमने :

1) दो चरों वाले किसी भी कोटि के फलनों के टेलर-बहुपद परिभाषित किए हैं।

2) दो चरों वाले फलनों के टेलर-प्रमेय का कथन दिया है। द्वितीय टेलर-प्रसार

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right] + R_3(x,y).$$

3) दो चरों वाले फलनों के लिए "स्थानिक उच्चिष्ठ", "स्थानिक निम्निष्ठ" और "स्तब्ध बिन्दु" जैसे शब्दों को परिभाषित किया है और उनके परस्पर संबंध के बारे में चर्चा की है।

4) चरम मान बिन्दुओं के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण प्राप्त किया है।

   i) $f(x,y)$ का एक निम्निष्ठ (उच्चिष्ठ) होता है, यदि $b^2 - 4ac < 0$ और $a > 0$ $(a < 0)$.

   ii) $f(x,y)$ का न तो कोई उच्चिष्ठ होता है और न ही निम्निष्ठ, यदि $b^2 - 4ac > 0$.

5) दो चरों वाले फलन के अधिकतम और निम्नतम मान ज्ञात करने के लिए लगरांज गुणक विधि का प्रयोग किया है।

8.6 हल और उत्तर

E1) $f(x) = e^x$ के विभिन्न अवकलज हैं

$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$

इस तरह, $f'(2) = e^2, f''(2) = e^2, \ldots, f^{(n)}(2) = e^2, \ldots$

तब, n-वां टेलर-बहुपद यह होता है :

$$P_n(x) = e^2 + \frac{e^2}{1!}(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \ldots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

$$= e^2\left[1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n!}\right]$$

E2) $f(x) = \sin x$ के विभिन्न अवकलज हैं

$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$

$f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{3}(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$
और $f^{(6)}(x) = -\sin x$.
इस तरह $f(0) = 0, f'(0) = 1, f^{(2)}(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, f^{(5)}(0) = 1$
और $f^{(6)}(x) = 0$.

इससे यह पता चलता है कि सम अवकलज शून्य होते हैं, जबकि विषम अवकलज बारी-बारी से $+1$ और -1 होते हैं।

इस तरह, f का 6-वां टेलर-बहुपद यह होता है :
$P_6(x) = x - x^3 + x^5$.

E3) क) मान लीजिए $f(x) = x^2 - 3x + 4$. तब

$f'(x) = 2x - 3$

और $f''(x) = 2$.

इसलिए $f(-2) = 14$, $\frac{f'(-2)}{1!} = -7$ और $\frac{f''(-2)}{2!} = 1$.

अतः बहुपद है :

$P_2(x) = 14 - 7(x + 2) + 1(x + 2)^2$

ख) $P_4(x) = -1 - 11(x - 1) - 9(x - 1)^2 - (x - 1)^3 + (x - 1)^4$.

E4) प्रमेय 1 के अनुसार, एक अद्वितीय बहुपद $P(x)$ का अस्तित्व होता है, जो यह है :

$$P(x) = \sum_{m=0}^{2} \frac{f^m(1)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 2 - 1(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2$$

$$= 2 - x + 1 + (x^2-2x+1)$$

$$= x^2-3x+4$$

E5) यहां $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \; f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{1.2}{(1+x)^3}, \; f''(0) = 1.2$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+x)^4}, \; f'''(0) = (-1)^3\, 1 \times 2 \times 3$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(1+x)^{n+1}}, \; f^{(n)}(0) = (-1)^n\, 1 \times 2 \times \dots\dots \times n$$

$]-\frac{1}{2},1[$ में फलन $f(x)$ और उसके विभिन्न कोटियों वाले अवकलज संतत हैं। इसलिए, टेलर-प्रमेय के अनुसार

$$f(x) = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n\, 1 \times 2 \times \dots \times n}{n!}x^n$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}\, 1 \times 2 \times \dots \times n+1}{(n+1)!\,(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$$

जहां c, 0 और x के बीच का एक बिन्दु है।

E6) हमने E2) में फलन $f(x) = \sin x$ के कोटि 6 तक के अवकलज परिकलित किए हैं। इन्हें देखने से यह पता चलता है कि सम कोटि के अवकलज बारी-बारी से $\sin x$ और $-\sin x$ होते हैं, जबकि विषम कोटि के अवकलज बारी-बारी से $-\cos x$ और $\cos x$ होते हैं। इसलिए,

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$.

और, किसी भी कोटि के अवकलज संतत होते हैं तथा सभी n और सभी x के लिए $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. इसलिए टेलर-प्रमेय के अनुसार,

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 +$$

$$\ldots\ldots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$$

जहां c, $\frac{\pi}{6}$ और x के बीच का एक बिन्दु है।

E7) क) 5

ख) 3

ग) 4

E8) $f(x,y) = e^{x+y}$

$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = f_y(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = e^{x+y}$.

इस तरह, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 1$.

अतः f का द्वितीय टेलर बहुपद है :

$$P_2(x,y) = 1 + [x+y] + \frac{1}{2}[x^2 + 2xy + y^2]$$
$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

E9) $f(x,y) = 2 + x^3 + y^3$, $\quad f(1,1) = 4$

$f_x(x,y) = 3x^2$, $\quad f_x(1,1) = 3$

$f_y(x,y) = 3y^2$, $\quad f_y(1,1) = 3$

$f_{xy}(x,y) = 0$, $\quad f_{xy}(1,1) = 0$

$f_{xx}(x,y) = 6x$, $\quad f_{xx}(1,1) = 6$

$f_{yy}(x,y) = 6y$, $\quad f_{yy}(1,1) = 6$.

टेलर बहुपद ये हैं :

$P_0(x,y) = f(1,1) = 4$.

$P_1(x,y) = 4 + 3(x-1) + 3(y-1) = 3x + 3y - 2$.

$$P_2(x,y) = P_1(x,y) + \frac{1}{2}[6(x-1)^2 + 6(y-1)^2]$$
$$= 3x + 3y - 2 + 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2$$

$m \geqslant 2$ के लिए

$P_m(x,y) = P_2(x,y)$

E10) मान लीजिए $P(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + [a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2]$

$P(0,0) = a_{00}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(0,0)} = a_{10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a_{01} + 2a_{02}y + a_{11}x, \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(0,0)} = a_{01}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2a_{20}, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = 2a_{20}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = a_{11}, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\right)_{(0,0)} = a_{11}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2a_{02}, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = 2a_{02}$$

इस तरह, P का द्वितीय टेलर बहुपद है :

$$T_2(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}[2a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + 2a_{02}y^2]$$
$$= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + [a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2]$$
$$= P(x,y)$$

E11) $f(x,y) = xy^2 + \cos xy$

$$f(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - y \sin xy, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1, \pi/2)} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x \sin xy, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1, \pi/2)} = \pi - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \cos xy, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1, \pi/2)} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - [\sin xy + yx \cos xy]$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(1, \pi/2)} = \pi - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - x^2 \cos xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, \pi/2) = 2$$

द्वितीय टेलर प्रसार है

$$f(x,y) = \frac{\pi^2}{4} + \left[\frac{(\pi^2 - 2\pi)}{4}(x-1) + (\pi - 1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[0 + 2(\pi-1)(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]\right].$$

E12) $f(x,y) = e^x \sin y$

$$f(0,0) = 0. \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = 1.$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(0,0) = 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(0,0) = 1, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(0,0) = 0.$$

तब अभीष्ट बहुपद है : $y + xy$.

E13) मान लीजिए f दो चरों वाला एक फलन है। तब $P(x_0, y_0)$ पर f का एक स्थानिक निम्निष्ठ होता है यदि f के प्रांत में आविष्ट एक ऐसे विवृत चक्रिका $S(P,r)$, $r \in \mathbf{R}^+$ का अस्तित्व होता है कि सभी $(x,y) \in S(P,r)$ के लिए $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

E14) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 - 4}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{[x^2 + y^2 - 4 - 2x^2]}{(x^2 + y^2 - 4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 - 4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow y^2 - x^2 - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow y^2 - (4 + x^2) = 0$$

$$\Longrightarrow y^2 = 4 + x^2 \quad \ldots\ldots (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 2xy = 0 \Longrightarrow xy = 0.$$

इससे यह पता चलता है कि या तो $x = 0$ या $y = 0$. परंतु y शून्य नहीं हो सकता, क्योंकि समीकरण (*) से $y^2 > 0$.

इसलिए $x = 0$. तब $y^2 = 4$ और $y = \pm 2$.

अतः बिन्दु हैं : $(0, 2)$ और $(0, -2)$.

E15) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 18$ समतल पर सर्वत्र अवकलनीय है।

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 8, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow x = 4, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow y = 1.$$

(4,1) उच्चतम विन्दु है या निम्नतम, इसकी जांच करें।

$f(4, 1) = 16 + 1 - 32 - 2 + 18 = 1.$

अब, $f(x,y)$ को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - 8x + y^2 - 2y + 18 \\ &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 + 1 \\ &= (x-4)^2 + (y-1)^2 + 1 \\ &\geqslant 1 = f(4, 1) \end{aligned}$$

अतः (4, 1), f का एक सार्वत्रिक निम्निष्ठ है।

E16) क) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^3$. तब

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2.$$

स्तब्ध विन्दु निम्नलिखित के हल हैं :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \text{ और } \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 = 0.$$

यह तभी होता है यदि और केवल यदि $x = 0$ और $y = 0$. इस तरह केवल (0, 0) ही f का स्तब्ध विन्दु है।

ख) $f(x, y) = (x+y)\, e^{-xy}$. तब

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} & (x+y)(-y)\, e^{-xy} + e^{-xy} \\ &= (-xy - y^2 + 1)\, e^{-xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= (x+y)(-x)\, e^{-xy} + e^{-xy} \\ &= (-xy - x^2 + 1)\, e^{-xy} \end{aligned}$$

तब स्तब्ध विन्दु निम्नलिखित के हल होते हैं

$-xy - y^2 + 1 = 0$ और $-xy - x^2 + 1 = 0.$

इस तरह,

$xy + y^2 = 1$ और $xy + x^2 = 1.$

यह तभी होता है, यदि और केवल यदि $x^2 = y^2$ इसलिए $x = \pm y$. लेकिन $x \neq -y$. चूंकि यदि $x = -y$, तो $1 = xy + y^2 = -y^2 + y^2 = 0$. इसलिए पिछले किसी भी समीकरण में $x = y$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

इस तरह विन्दु हैं

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ और } \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

E17) क) समतल पर सर्वत्र फलन $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ के किसी भी कोटि के संतत आंशिक अवकलज हैं।

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

स्तब्ध विन्दु हैं $2x - 1 = 0$ और $4y = 0$.

अर्थात् $x = \frac{1}{2}$ और $y = 0$

इस तरह $(\frac{1}{2}, 0)$, f का स्तब्ध बिन्दु है। अब,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2. \therefore a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \therefore b = \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4. \therefore c = 4.$$

इससे यह पता चलता है कि $b^2 - 4ac = -32 < 0$ और $a > 0$. इसलिए प्रमेय 6 के अनुसार $(\frac{1}{2}, 0)$ पर f का निम्निष्ठ है। चरम मान है $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{-1}{4}$.

ख) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - 2x.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2 - 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ और } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 2x + 3y^2 - 2 = 0 \ldots\ldots (*)$$

$3y^2 + 6xy = 0 \ldots\ldots (**)$

(**) से, $3y(y+2x) = 0 \Longrightarrow y = 0$ या $y = -2x$

(*) में y=0 प्रतिस्थापित करने पर हमें x=1 प्राप्त होता है। इस तरह, (1,0) एक स्तब्ध बिन्दु है।
अब (*) में $y = -2x$ प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$2x + 12x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ या } x = \frac{-1}{2}.$$

जब $x = \frac{1}{3}$, तब $y = \frac{-2}{3}$. और जब $x = \frac{-1}{2}$, तब $y = 1$.

अतः स्तब्ध बिन्दु हैं $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ और $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

पहले हम चरम मान के लिए बिन्दु (1, 0) की जांच करते हैं :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 6x.$$

तब

$$a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(1, 0) = 2, b = \left(\frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(1, 0) = 0,$$

$$c = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(1, 0) = 6. \therefore b^2 - 4ac = -48 < 0 \text{ और } a > 0.$$

इसलिए (1, 0) पर फलन का स्थानिक निम्निष्ठ है।

निम्नतम मान है $f(1, 0) = -1$.

अब $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ पर $a = 2, b = -8, c = -2.$

$b^2 - 4ac = 64 + 16 > 0$ और $a > 0$.

इसलिए $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ पर फलन का कोई चरम मान नहीं होता है।

अब, $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ पर $a = 2, b = 12, c = 3.$

$b^2 - 4ac = 12^2 - 24 > 0.$

$\therefore \left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ पर f का कोई चरम मान नहीं है।

ग) $f(x,y) = y + x \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x\cos y = 0.$$

$\sin y = 0$ से यह परिलक्षित होता है कि $y = 2n\pi$ या $y = (2n+1)\pi$, जहां n एक पूर्णांक है। तब $\cos(2n+1)\pi = -1$ और $\cos 2n\pi = 1$. इसलिए $x = 1$ या $x = -1$. इस तरह, स्तब्ध बिन्दु हैं $(1, 2n\pi)$ और $(-1, (2n+1)\pi)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \frac{2\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2\cos y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\sin y$$

इसलिए $a = 0, b = \pm 2, c = 0$.

और $b^2 - 4ac > 0$.

इस तरह, f का कोई चरम मान नहीं है।

E18) $f(x,y) = 2\cos(x+y) + e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(x+y) + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin(x+y) + xe^{xy}$$

(0,0) एक स्तब्ध बिन्दु है क्योंकि $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ का (0,0) पर लोपन होता है।

अब $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\cos(x+y) + y^2e^{xy},\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(0,0) = -2.$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -2\cos(x+y) + (e^{xy}+yxe^{xy}),\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)(0,0) = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\cos(x+y) + x^2e^{xy},\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(0,0) = -2.$$

तब $b^2 - 4ac = -12 < 0$ और $a < 0$. इसलिए प्रमेय 6 के अनुसार (0,0) पर फलन का एक स्थानिक उच्चिष्ठ होता है।

E19) $f(x,y) = ax^n + cy^n,\ n \geqslant 2.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = na\,x^{n-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = nc\,y^{n-1}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow nax^{n-1} = 0$ और $ncy^{n-1} = 0$. यह तभी संभव है जबकि $x = 0$ और $y = 0$,

क्योंकि $a \neq 0 \neq c$. इस तरह, केवल (0, 0) ही f का स्तब्ध बिन्दु है।

यहां हम यह देखते हैं कि (0, 0) पर

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

इसलिए यहां हम प्रमेय 6 लागू नहीं कर सकते। $f(0,0) = 0$.

i) जब $a > 0$ और $c > 0$, तब $f(x,y) = ax^n + cy^n > 0 = f(0,0)$ यदि n सम हो। इससे यह पता चलता है कि यदि n सम है, तो (0, 0) पर फलन का एक निम्निष्ठ होता है। निम्नतम मान 0 है।

यदि n विषम है, तो (0, 0) के हर प्रतिवेश में f के धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों मान होते हैं।

$x < 0$ और $y < 0$ के लिए $f(x,y) < 0$ और

$x > 0$ और $y > 0$ के लिए $f(x,y) > 0$.

इसलिए यदि n विषम है, तो (0,0), f का पल्याण बिन्दु होता है।

ii) जब $a < 0, c < 0$, तब $f(x,y) = ax^n + cy^n \leqslant 0 = f(0, 0)$ यदि n सम हो। इसलिए यदि n सम हो तो f का (0, 0) पर उच्चिष्ठ होता है। यदि n विषम हो, तो (0, 0), f का पल्याण बिन्दु होता है।

E20) $f(x,y) = 3xy,\ g(x,y) = 2x + y - 8.$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y,\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x,\quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

अब हमें निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल करना है :

$3y + 2\lambda = 0$

$3x + \lambda = 0$

$2x + y - 8 = 0$

तब, $y = \frac{-2}{3}\lambda$, $x = \frac{-1}{3}\lambda$. तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापन करने पर

$-\frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}\lambda - 8 = 0$

या $\frac{-4}{3}\lambda = 8$, या $\lambda = -6$.

तब $x = 2$, $y = 4$ और $f(2,4) = 24$.

इसलिए (2, 4) एक चरम बिन्दु है। आइए अब जांच करें कि यह उच्चिष्ठ है अथवा निम्निष्ठ। अब $g(1, 6) = 0$ और $f(1, 6) = 18 \leq f(2, 4)$. इसलिए $f(2, 4) = 24$, f का उच्चतम मान है।

E21) मान लीजिए x और y दो संख्याएं हैं, जिनका योगफल 70 है।

मान लीजिए $f(x,y) = xy$ और $g(x,y) = x+y$. यहां $x+y = 70$. $f(x,y)$ का अधिकतमीकरण करने के लिए हम लगरांज गुणक विधि का प्रयोग करते हैं और निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करते हैं :

$y + \lambda = 0$

$x + \lambda = 0$

$x + y = 70$

तब $-2\lambda = 70$. इस तरह $\lambda = -35$. इसलिए $x = 35$ और $y = 35$. और अधिकतम मान है $f(35, 35) = 1225$. जांच कीजिए कि यह मान उच्चतम है।

E22) $f(x,y) = x+y^2$, $g(x,y) = 2x^2 + y^2 -1$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 4x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

समीकरण निकाय है

$1 + \lambda 4x = 0$

$2y + \lambda 2y = 0$

$2x^2 + y^2 - 1 = 0$

$2y = -\lambda 2y \Longrightarrow \lambda = -1$. इसलिए $x = \frac{1}{4}$. तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$y^2 = 1 - 2x^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $\therefore y = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$

चरम मान है, $f\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$. जांच कीजिए कि यह f का निम्नतम मान है।

E23) बिन्दु $(-1, 1)$ है।

इकाई 9 जैकोबियन

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

इस इकाई का मुख्य उद्देश्य जैकोबियन की महत्वपूर्ण अभिधारणा से आपको परिचित कराना है। यहां हम आपको दिखाएंगे कि किस प्रकार जैकोबियन की सहायता से अस्पष्टतः परिभाषित फलनों के अवकलज प्राप्त किए जा सकते हैं। हम फलनिक आश्रितता और जैकोबियन के बीच संबंध भी स्थापित करेंगे। इसके लिए हमें एक सहायक, लेकिन महत्वपूर्ण परिणाम की आवश्यकता होती है — यदि किसी प्रांत के सभी बिन्दु फलन के स्तब्ध बिन्दु हों, तो फलन अचर होगा। इस संबंध में प्रांत को परिभाषित करना आवश्यक हो जाता है जो कि हम इस इकाई के एक उपभाग में करेंगे।

जैकोबियन की वास्तविक महत्ता और उपयोगिता की ठीक जानकारी आपको अगली इकाई में मिलेगी, जहाँ इन जैकोबियनों का प्रयोग फलनों की व्युत्क्रमणीयता और अस्पष्टतः परिभाषित फलनों के स्पष्ट निर्धारण के अध्ययन में किया जाएगा। अगले खंड में बहुसमाकलों में चर-परिवर्तन के अध्ययन के दौरान भी आपको जैकोबियन का प्रयोग करना पड़ेगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- दो या तीन चरों वाले फलनों के जैकोबियन, यदि उनका अस्तित्व है, का परिकलन कर सकेंगे,
- अनेक फलनों के जैकोबियन परिकलित करने और अस्पष्टतः परिभाषित फलनों के अवकलजों के लिए सूत्र ज्ञात करने में जैकोबियन के शृंखला नियम का प्रयोग कर सकेंगे,
- $\mathbf{R}^2$ में प्रांत पहचान सकेंगे,
- यह मालूम कर सकेंगे कि दो फलन एक दूसरे पर आश्रित हैं कि नहीं।

9.2 जैकोबियन

R से **R** पर के फलनों की निम्नलिखित दो स्थितियों पर ध्यान दीजिए।

1) आइए हम विवृत अंतराल $]a,b[$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन f लें। अब, यदि किसी $x_0 \in]a,b[$ के लिए $f'(x_0) \neq 0$, तो या तो $f'(x_0) > 0$ या $f'(x_0) < 0$. इसका यह अर्थ है कि $f(x)$, x_0 के किसी प्रतिवेश में या तो निरंतर वर्धमान (strictly increasing) या निरंतर ह्रासमान (strictly decreasing) है। अतः हम यह कह सकते हैं कि एक ऐसी वास्तविक संख्या $\delta > 0$ का अस्तित्व है जिससे कि विवृत अंतराल $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ पर f एकैकी (one-one) हो। इससे यह अर्थ निकलता है कि x_0 के इस δ-प्रतिवेश में फलन f व्युत्क्रमणीय (invertible) है।

2) इसी प्रकार यदि समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ में $x = \phi(t)$ प्रतिस्थापित करें तो समाकल्य (integrand)

$f(\phi(t))\,\phi'(t)$ हो जाता है और $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt$, जहां $a = \phi(\alpha)$ और $b = \phi(\beta)$.

(कलन पाठ्यक्रम का भाग 11.3 देखिए)।

अब यह प्रश्न उठ सकता है :

मान लीजिए $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ जिससे कि $(x,y) \to (u,v)$, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का एक रूपांतरण (transformation) हो। फलन f और g पर हमें कौन-सा प्रतिबंध लगाना होगा, ताकि बिन्दु (x_0, y_0) को आविष्ट करने वाली किसी विवृत चक्रिका में रूपांतरण $(x,y) \to (u, v)$ व्युत्क्रमणीय हो?

इसी प्रकार का प्रश्न तब भी उठेगा जबकि हम दो चरों वाले फलनों के समाकल परिभाषित कर लेने पर समाकलन के चर में परिवर्तन करना चाहेंगे। इस भाग में हम आपको जैकोबियन की अभिधारणा से परिचित कराएँगे जिसका एक चर वाले फलन सिद्धांत में कोई अनुरूप नहीं है। फिर भी, जैकोबियन वही भूमिका निभाता है जो कि ऊपर दिए गए दो प्रश्नों में अवकलज निभाता है। इसके अन्य बहुत से अनुप्रयोग हैं। इनमें से कुछ पर हम यहाँ चर्चा करेंगे।

9.2.1 परिभाषा और उदाहरण

परिशुद्ध परिभाषा देने से पहले आइए हम एक विशेष उदाहरण पर विचार कर लें। मान लीजिए

$u = ax + by$ ..... (1)

$v = cx + dy$ ..... (2)

तब समीकरण (1) और (2) $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ पर एक रैखिक रूपांतरण $\phi : (x,y) \to (u,v)$ को परिभाषित करते हैं। रैखिक समीकरणों के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि रूपांतरण ϕ व्युत्क्रमणीय होता है, यदि और केवल यदि सारणिक (determinant)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

परन्तु आप यह देख सकते हैं कि $a = \frac{\partial u}{\partial x}, b = \frac{\partial u}{\partial y}; c = \frac{\partial v}{\partial x}, d = \frac{\partial v}{\partial y}$. अतः हम यह कह सकते हैं कि (1) और (2) द्वारा परिभाषित रूपांतरण व्युत्क्रमणीय होता है यदि और केवल यदि आव्यूह (matrix)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

का सारणिक शून्येतर हो।

अब यदि u और v, x, y के रैखिक फलन होने के बजाय x, y के कोई भी वास्तविक मान फलन हों तब भी हम इस ऊपर दिए गए आव्यूह और उसके सारणिक के बारे में सोच सकते हैं। बाद में, अर्थात इकाई 10 में हम यह देखेंगे कि यदि इस आव्यूह का सारणिक शून्येतर हो तो किसी भी बिन्दु $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$ के लिए एक ऐसे प्रतिवेश N का अस्तित्व होता है जिस पर रूपांतरण ϕ व्युत्क्रमणीय हो। इस तरह हम यह पाते हैं कि यह एक नई अभिधारणा है जिससे हमें इस भाग के शुरू में उठाए गए प्रथम प्रश्न का कुछ उत्तर मिल जाता है। इसी अभिधारणा से दूसरे प्रश्न का उत्तर भी मिल जाएगा। लेकिन इसके लिए आपको अगले खंड तक प्रतीक्षा करनी होगी। अब हम यहां परिशुद्ध परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा 1 : मान लीजिए $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ वाले n वास्तविक मान फलन हैं जिनके बिन्दु $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ पर प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज हैं। तब आव्यूह

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

को $a_1, a_2, \ldots, a_n$ पर फलन $f_1, f_2, \ldots, f_n$ का **जैकोबी आव्यूह** कहा जाता है। इस आव्यूह के सारणिक को $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ पर इन फलनों का **जैकोबियन** कहा जाता है।

आंशिक अवकलजों की तरह, यदि हमारे मन में कोई विशिष्ट बिन्दु $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ न हो, तो जैकोबी आव्यूह को

जैकोबी (1804-1851)

जर्मन गणितज्ञ, कार्ल गुस्ताव जेकब जैकोबी ने सर्वप्रथम जैकोबियन की संकल्पना की चर्चा की।

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

के रूप में लिखा जाता है और जैकोवियन को $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ से प्रकट किया जाता है।

भाग 3.3 (टिप्पणी 4) में हमने यह देखा है कि फलन $f_1, f_2, \ldots, f_n$ एक अद्वितीय फलन $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ को निर्धारित करते हैं जिससे कि $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$.
a पर $f_1, f_2, \ldots, f_n$ के जैकोबी आव्यूह को a पर f का जैकोबी आव्यूह भी कहा जाता है और इसे $\mathbf{J}_f(\mathbf{a})$ से प्रकट किया जाता है।

जैकोबियन के गुणधर्मों पर चर्चा करने से पहले हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 1 : समतल में रूपांतरण $(r, \theta) \to (x, y)$, जहां

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta, \qquad \ldots\ldots (3)$$

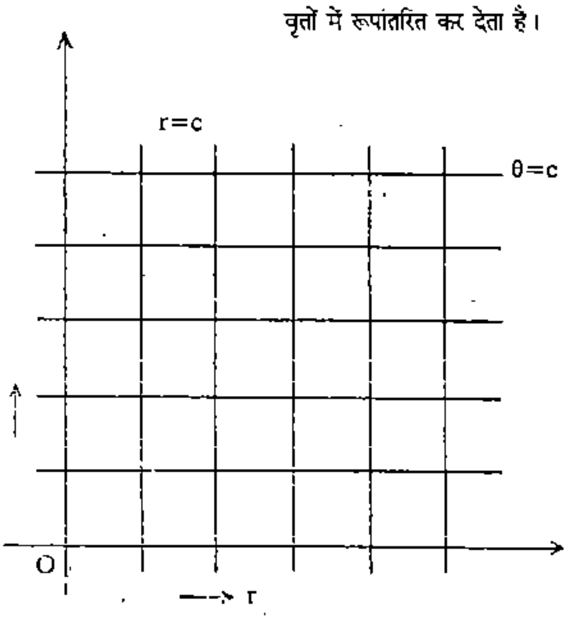
लीजिए। इस रूपांतरण का जैकोबियन $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ है :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

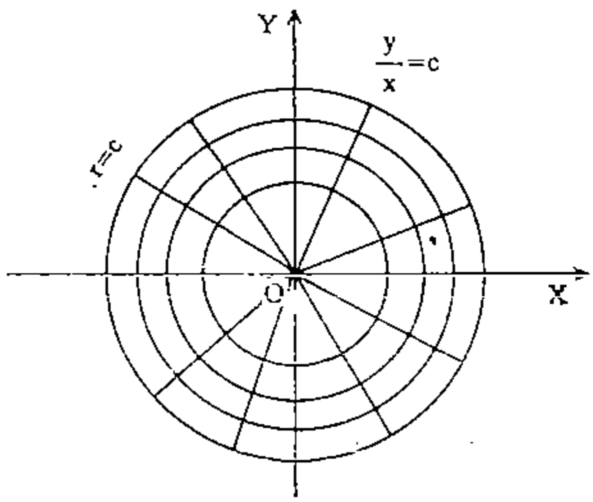
आइए हम (3) द्वारा दिए गए रूपांतरण का ज्यामितीय विवेचन करें। हम r और θ को (r,θ) समतल के समकोणिक निर्देशांक के रूप में लेते हैं जैसा कि चित्र 1 (क) में दिखाया गया है। समीकरण r = अचर $= c$, θ-अक्ष के समांतर एक रेखा को निरूपित करता है। जैसे-जैसे c विभिन्न मान धारण करता है, वैसे-वैसे (r, θ) समतल में θ-अक्ष के समांतर हमें अनेक रेखाएं प्राप्त होती हैं (चित्र 1 (क) देखिए)। परंतु समीकरण (3) से हमें प्राप्त होता है,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

अब चूँकि $x^2 + y^2 = r^2$ उस वृत्त को निरूपित करता है जिसकी त्रिज्या r है और जिसका केन्द्र मूल बिन्दु 0 पर है, इसलिए r के अलग-अलग मानों के लिए हमें (x,y) समतल में एककेन्द्रीय (concentric) वृत्तों का समुच्चय प्राप्त होता है (चित्र 1 (ख) देखिए)। हम यह भी कह सकते हैं कि रूपांतरित (3) समांतर रेखाओं को एककेन्द्रीय वृत्तों में रूपांतरित कर देता है।



(क)



(ख)

चित्र 1

अब प्रश्न उठता है कि यदि θ अचर हो, तो क्या होता है? यदि $\theta = c$, जहाँ c एक अचर है, तो हमें r-अक्ष के समांतर एक रेखा प्राप्त होती है और जैसे-जैसे c विभिन्न मान लेता है, वैसे-वैसे (r, θ) समतल में हमें r-अक्ष के समांतर रेखाओं का एक समुच्चय प्राप्त होता है। फिर भी (3) से हमें यह प्राप्त होता है कि

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta.$$

इस तरह, यदि $\theta = c, 0 \leq c \leq 2\pi$, तो $\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan c$, और हमें (x, y) समतल में मूल विन्दु से होकर जाने वाली रेखा प्राप्त होती है जैसा कि चित्र 1 (ख) में दिखाया गया है। और, यदि $\theta = c(2\pi \leq c < 4\pi)$ तो c को $c = 2\pi + c^*$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $0 \leq c^* < 2\pi$. इस तरह

$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan(2\pi + c^*) = \tan c^*$. अतः 2π और 4π के बीच स्थित c के लिए हम यह कह सकते हैं कि $\theta = c\ (2\pi \leq c < 4\pi)$ के संगत (r, θ) समतल की पट्टी (x,y)-समतल में त्रिज्य रेखाओं (radial lines) के उसी समुच्चय में रूपांतरित हो जाती है।

अब तक की गई चर्चा $r \neq 0$ के लिए सही होती है। लेकिन यदि $r = 0$ तो क्या होता है? इसका यह अर्थ होता है कि जैकोबियन $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ शून्य है। आप यहां देख सकते हैं कि जैसे-जैसे r लघु होता जाता है वैसे-वैसे समतल के वृत्त छोटे होते जाते हैं, क्योंकि r इन वृत्तों की त्रिज्याओं को निरूपित करती है। इस प्रक्रिया को जारी रखने पर हम अंत में मूल विन्दु पर पहुँच जाएंगे जो कि त्रिज्या 0 वाला एक वृत्त है। यह तब होता है जब कि (r, θ)-समतल में रेखा $r =$ अचर, θ-अक्ष के संपाती होती है।

अगले उदाहरण में हम तीन चरों वाले तीन वास्तविक मान फलनों के जैकोबियन प्राप्त करेंगे।

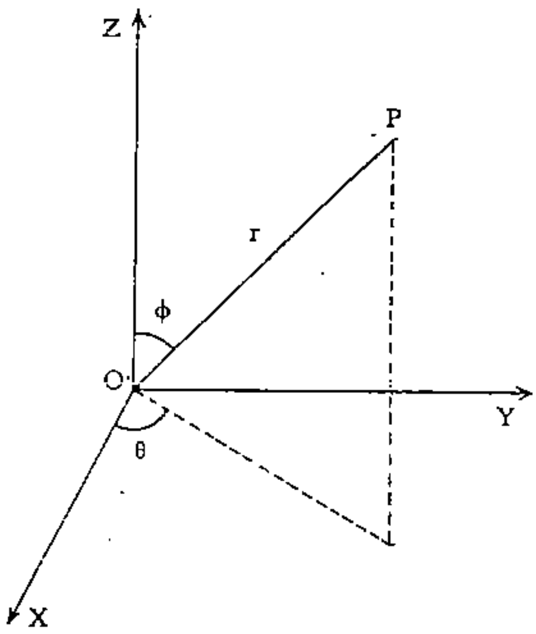
उदाहरण 2 : रूपांतरण $(r, \theta, \phi) \to (x, y, z)$, जहां

$$x = r\cos\theta\sin\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\phi$$

लीजिए। इस रूपांतरण का जैकोबियन निम्नलिखित है :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix}$$

$= \cos\theta\sin\phi\,(-r^2\cos\theta\sin^2\phi) +$
$r\sin\theta\sin\phi\,(-r\sin\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos^2\phi) - r^2\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\phi$
$= -r^2\cos^2\theta\sin\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) - r^2\sin^2\theta\sin\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$
$= -r^2\sin\phi$



चित्र 2

ज्यामितीय रूप में, r, मूल बिन्दु 0 से बिन्दु P(x,y,z) की दूरी है। θ भौगोलिक अक्षांश है अर्थात् (x,z)-समतल और P तथा z-अक्ष द्वारा निर्धारित समतल के बीच का कोण, और φ ध्रुवीय दूरी है अर्थात् ध्रुवांतर रेखा (radius vector) OP और धनात्मक z-अक्ष के बीच का कोण।

चित्र 2 देखिए।

अब आप नीचे दिये प्रश्न हल कीजिए।

E1) निम्नलिखित रूपांतरणों के जैकोबियन ज्ञात कीजिए और यह भी ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन-कौन व्युत्क्रमणीय हैं।

क) $\omega = x - 2y,\ z = 2x + y$

ख) $\omega = 2x - 3y,\ z = 5x + 7y$

E2) निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक फलन का बताए हुए बिन्दु पर जैकोबियन ज्ञात कीजिए।

क) $F = (f,g)$, जहां $f(x,y) = \sin x,\ g(x,y) = \cos xy,\ [\pi, \frac{\pi}{2}]$ पर

ख) $F = (f,g)$, जहां $f(x,y) = x - y^2 - 2x^2y - x^4$,

$g(x,y) = y + x^2$, (0,0) पर

ग) $F(x,y,z) = (\sin xyz,\ xz,\ c)$, जहां c एक अचर है, (x,y,z) पर

घ) $F(x,y,z) = (xz,\ xy,\ yz)$, (x,y,z) पर

E3) रूपांतरण

$\omega = x + y,\ z = x^2y$

का जैकोबी आव्यूह ज्ञात कीजिए।

वे सभी बिन्दु ज्ञात कीजिए जहां इसका जैकोबियन शून्य के बराबर है।

यदि आपने ये सभी प्रश्न हल कर लिए हों, तो आप जैकोबियन ज्ञात करने की विधि से अवश्य अच्छी तरह से परिचित हो गए होंगे। अब हम यह देखेंगे कि अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकलज का परिकलन करने में जैकोबियन किस प्रकार उपयोगी होता है।

9.2.2 अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकलज

इकाई 7 में हमने देखा है कि फलन $f(x,y) = 0$, जो y को x के एक अस्पष्ट फलन के रूप में परिभाषित करता है, का अवकलज $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात किया जा सकता है। प्रायः y को x के पदों में स्पष्टतः लिखना संभव नहीं होता। परंतु ऐसी स्थिति में भी संपूर्ण अवकलज का प्रयोग करके हम अवकलज $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कर सकते हैं। इसी प्रकार, जैकोबियन का प्रयोग करके दो या अधिक चरों वाले अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकलज प्राप्त किए जा सकते हैं। निम्नलिखित प्रमेय में हमें इन आंशिक अवकलजों का परिकलन करने का नियम प्राप्त होता है।

प्रमेय 2 : मान लीजिए निम्नलिखित दो समीकरण दिए हुए हैं :

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z,u,v) = 0, \\ G(x,y,z,u,v,) = 0, \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots (4)$$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$ इस प्रतिबंध से यह सुनिश्चित होता है कि समीकरण निकाय (4) का $u = f(x,y),\ v = g(x,y)$ के रूप का हल हो। इकाई 10 में हम इसकी विस्तार से चर्चा करेंगे।

जिससे कि $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$, और यह भी मान लीजिए कि पाँचों चरों के सापेक्ष F और G के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज संतत हैं। तब

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \\[3em] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \end{array}\right| \qquad \ldots\ldots (5)$$

इसी प्रकार के परिणाम $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ और $\frac{\partial v}{\partial z}$ के लिए प्राप्त होते हैं।

उपपत्ति : शृंखला नियम (इकाई 7 का प्रमेय 3) को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

इन युगपत समीकरणों को हल करने पर हमें वही परिणाम प्राप्त होता है जिसका उल्लेख हमने प्रमेय के कथन में किया है। ठीक इसी प्रकार हम $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ और $\frac{\partial v}{\partial z}$ के व्यंजक प्राप्त कर सकते हैं।

इसे हम आपके लिए एक प्रश्न के रूप में हल करने के लिए छोड़ रहे हैं। E5) देखिए।

अब हम अगले उदाहरण में आंशिक अवकलज प्राप्त करने के लिए प्रमेय 2 का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 3 : आइए हम

$F(x,y,u,v) = x^2 + ux + y^2 + v$

$G(x,y,u,v) = x + yu + v^2 + x^2v$

के लिए $\frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial v}{\partial x}$ ज्ञात करें।

यहाँ आपने नोट किया होगा कि F और G चार चरों वाले फलन हैं और फिर

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + u,\ \frac{\partial F}{\partial u} = x \text{ और } \frac{\partial F}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 + 2xv,\ \frac{\partial G}{\partial u} = y \text{ और } \frac{\partial G}{\partial v} = 2v + x^2$$

ये सभी बहुपद हैं और इसलिए संतत हैं।

इस तरह :

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} 2x+u & 1 \\ 1+2xv & 2v+x^2 \end{vmatrix} = 2xv + 2uv + 2x^3 + ux^2 - 1,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} x & 2x+u \\ y & 1+2xv \end{vmatrix} = x + 2x^2v - 2xy - uy, \text{ और}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2v+x^2 \end{vmatrix} = 2xv + x^3 - y$$

अतः (5) से हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2xv + 2uv + 2x^3 + ux^2 - 1}{2xv + x^3 - y} \text{ और}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x + 2x^2v - 2xy - uy}{2xv + x^3 - y}$$

अब आप इन प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

E4) मान लीजिए x, y, u, v समीकरण

$xy + x^2u - vy^2 = 0$ और

$3x - 4uy - x^2v = 0$

से संबंधित हैं। समीकरणों को स्पष्टतः हल किए बिना $\frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial v}{\partial x}$ ज्ञात कीजिए।

E5) मान लीजिए $F(x,y,z,u,v) = 0$ और

$G(x,y,z,u,v) = 0$

ऐसे हैं कि उनके प्रथम कोटि के सभी आंशिक अवकलज संतत हैं और

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$. $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ और $\frac{\partial v}{\partial z}$ ज्ञात कीजिए।

E6) x, y, z, u और v समीकरण

$F(x,y,z,u,v) = xy + yz + zu + uv = 0$ और

$G(x,y,z,u,v) = x + y + z + u + v = 0$

से संबंधित हैं। $\frac{\partial u}{\partial y}$ और $\frac{\partial v}{\partial z}$ ज्ञात कीजिए।

अगले भाग में हम संयुक्त फलनों का जैकोबियन परिकलित करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

9.3 शृंखला नियम

जैकोबियन प्रायः आंशिक अवकलजों की तरह व्यवहार करते हैं। इस भाग में हम जैकोबियनों के शृंखला नियम का कथन देंगे और इसे सिद्ध करेंगे। आंशिक अवकलजों के शृंखला नियम का अध्ययन हम इकाई 7 में कर चुके हैं। जैकोबियन का शृंखला नियम भी ठीक वैसा ही है। हम जैकोबियन के नियम को सिद्ध करने के लिए आंशिक अवकलजों के शृंखला नियम की मदद लेंगे।

प्रमेय 3 (शृंखला नियम) : मान लीजिए $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ और $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ दो अवकलनीय फलन हैं और मान लीजिए $F = f \circ g$, तब

$$J_F(x) = J_f(g(x))\, J_g(x) \qquad \text{..... (6)}$$

यदि $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ और $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ तो ऊपर उल्लेख किए गए शृंखला नियम को निम्नलिखित सूत्र के रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है।

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \quad \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

जहां $y_i = g_i(x)$. यह सूत्र फलन के अवकलज के शृंखला नियम से मिलता जुलता है।

चूँकि हम $n = 2$ या 3 के लिए शृंखला नियम का प्रयोग करेंगे, इसलिए यहाँ हम $n = 3$ के लिए उपपत्ति देंगे। $n = 2$ के लिए उपपत्ति भी ठीक इसी प्रकार की है।

उपपत्ति : हम (6) के दक्षिण पक्ष के सारणिकों का गुणनफल लिखते हैं और खंड 2 के भाग 7.2 में दिए गए आंशिक अवकलजों के शृंखला नियम को लागू करते हैं। (6) के दक्षिण पक्ष से शुरू करने पर

$$J_f(g(x))\, J_g(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

सारणिकों के गुणनफल नियम से।

अब हम इकाई 7 के प्रमेय 3 में दिए गए आंशिक अवकलजों के शृंखला नियम को दक्षिण पक्ष के सारणिक की प्रविष्टियों (entries) पर लागू करेंगे। चूँकि यहाँ फलनों को अवकलनीय माना गया है, इसलिए इकाई 7 के प्रमेय 3 के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। इस तरह,

$$J_f(g(x))\,J_g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J_F(x)$$

यही हम सिद्ध करना चाहते थे।

प्रमेय 3 को स्पष्ट करने के लिए यहाँ हम कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 4 : प्रमेय 3 का प्रयोग करके आइए हम रूपांतरण $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, जहाँ $u = z^3 - 3zw^2$ और $v = z - w$ के लिए $\frac{\partial (x,y)}{\partial (z,w)}$ ज्ञात करें।

यहाँ

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial (u,v)}{\partial (z,w)} = \begin{vmatrix} 3z^2-3w^2 & -6zw \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3z^2 + 3w^2 + 6zw$$

अतः प्रमेय 3 के अनुसार

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (z,w)} = 4(u^2 + v^2)(-3z^2 + 3w^2 + 6zw).$$

$$= 12(u^2 + v^2)(-z^2 + w^2 + 2zw).$$

उदाहरण 5 : मान लीजिए $f(x,y) = (\sin x, \cos y)$ और $g(x,y) = (x^2, y^2)$.

हम $F = f \circ g$ का जैकोबियन ज्ञात करने के लिए शृंखला नियम लागू कर सकते हैं। अब मान लीजिए $g = (g_1, g_2)$, $f = (f_1, f_2)$ और $\xi = g_1(x,y)$, $\eta = g_2(x,y)$.

तब

$$\frac{\partial (g_1, g_2)}{\partial (x, y)} = 4xy \text{ और } \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (\xi, \eta)} = -\cos \xi \sin \eta.$$

इस तरह, शृंखला नियम के अनुसार

$J_F(x, y) = -\cos x^2 \sin y^2 \,.\, 4xy.$

हम सीधे परिकलन से भी इस जैकोबियन को प्राप्त कर सकते थे।

यदि $F = (F_1, F_2)$, तो $F_1(x,y) = \sin x^2$ और $F_2(x,y) = \cos y^2$.

इसलिए

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} 2x \cos x^2 & 0 \\ 0 & -2y \sin y^2 \end{vmatrix} = -4xy \cos x^2 \sin y^2.$$

प्रमेय 3 का प्रयोग रूपांतरण के व्युत्क्रम का, यदि इसका अस्तित्व हो, जैकोबियन ज्ञात करके भी किया जा सकता है। निम्नलिखित प्रमेय इससे संबंधित है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : D \to \mathbf{R}^n$, जहाँ $D \subset \mathbf{R}^n$ अवकलनीय है। मान लीजिए कि D पर f व्युत्क्रमणीय है। और मान लीजिए f^{-1}, f के परिसर (range) पर अवकलनीय है। तब

$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$, जहाँ $y = f(x)$.

उपपत्ति : यदि $F = f^{-1} \circ f$, तो F तत्समक प्रतिचित्रण (identity mapping) होगा और तब $J_F(x) = 1$.

अतः प्रमेय 3 के अनुसार

$1 = J_{f^{-1}}(f(x))\, J_f(x)$, या

$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$.

यदि चर 3 हों, तो प्रमेय 4 का कथन होगा :

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(f_1, f_2, f_3)} = \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\right)^{-1} \text{ या}$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} = \left(\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\right)^{-1}$$

इस प्रमेय की उपयोगिता को समझने के लिए हम नीचे कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 6 : आइए हम $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ ज्ञात करें, जहाँ $x = r\cos\theta$ और $y = r\sin\theta$.

उदाहरण 1 में हमने यह देखा है कि $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$.

इसलिए प्रमेय 4 के अनुसार $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r}$.

लेकिन ध्यान दीजिए यह केवल तभी मान्य होता है, जब कि $r \neq 0$.

उदाहरण 7 : मान लीजिए $f(x,y) = (x-y, x+y) = (\xi, \eta)$.

आइए हम $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ ज्ञात करें।

स्पष्ट है कि $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

अतः प्रमेय 4 से हमें $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 : मान लीजिए x और y को $F(x,y,t) = 0$ और $G(x,y,t) = 0$ से t के पदों में व्यक्त किया गया है।

यह मानकर कि ये फलन अवकलनीय हैं, आइए हम यह सिद्ध करें कि

$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, t)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x, y)}$, बशर्ते कि $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x, y)} \neq 0$.

समीकरण $F(x,y,t) = 0$ और $G(x,y,t) = 0$

लीजिए। स्पष्टतः परिभाषित फलनों के अवकलज ज्ञात करने की विधि को लागू करके t के सापेक्ष इन समीकरणों का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0 \text{ और}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0.$$

इन दो समीकरणों से $\frac{dy}{dt}$ का निराकरण करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{dx}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$$

$$\text{या } \left(-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,t)} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right) = 0.$$

$$\text{इसलिए } \frac{dx}{dt} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, t)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को अवश्य हल कर सकेंगे।

E7) उदाहरण 8 में $\frac{dy}{dt}$ ज्ञात कीजिए।

E8) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ के लिए जैकोबियन $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ ज्ञात कीजिए। r, θ, ϕ को बेलनी निर्देशांक (cylindrical coordinates) कहा जाता है।

E9) जैकोबियन के शृंखला नियम को निम्नलिखित फलनों के लिए सत्यापित कीजिए।

$u = e^{xy}, v = e^{yz}, w = e^{zx}, x = r, y = s^2, z = t^3$.

अस्पष्ट फलनों का आंशिक अवकलज ज्ञात करने में जैकोबियन किस प्रकार सहायक होता है यह आपने देखा। इस पाठ्यक्रम में आगे आपको जैकोबियन के कुछ और अनुप्रयोग देखने को मिलेंगे।

9.4 फलनिक आश्रितता

मान लीजिए अनेक चरों वाले n ($n \geq 2$) वास्तविक मान फलन $f_1, f_2, \ldots, f_n$ दिए हुए हैं, और हम यह जानना चाहते हैं कि इन फलनों के बीच कुछ संबंध हैं या नहीं। उदाहरण के लिए यदि

$$f_1(x,y,z) = \frac{x+y}{z}, \ f_2(x,y,z) = \frac{y+z}{x}, \ f_3(x,y,z) = \frac{y(x+y+z)}{xz}$$

तो आप यह कह सकते हैं कि $f_1 \cdot f_2 = f_3 + 1$. लेकिन हमेशा ही स्थिति इतनी सरल नहीं होती। जितनी कि इस उदाहरण में है। अतः हमें एक ऐसे निकष (criterion) की आवश्यकता है जिससे यह सुनिश्चित किया जा सके कि दिए हुए फलनों के बीच एक संबंध का अस्तित्व है। इसके लिए जैकोबियन से हमें एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध प्राप्त हो जाता है। परंतु "संबंध" का परिशुद्ध अर्थ जानने से पहले हम निम्नलिखित प्रश्न पर विचार करेंगे और संतोषजनक ढंग से उसका उत्तर प्राप्त करेंगे। बाद में चलकर यह हमारे लिए काफ़ी उपयोगी सिद्ध होगा।

कलन पाठ्यक्रम (इकाई 7) में हम यह पढ़ चुके हैं कि यदि f, विवृत अंतराल पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन हो और यदि इसका अवकलज अंतराल के सभी बिन्दुओं पर शून्य हो तो f एक अचर फलन होता है। अब प्रश्न उठता है कि क्या अनेक चरों वाले फलनों के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम प्राप्त हो सकता है? इस भाग में हम यह देखेंगे कि वे फलन, जिनके सभी आंशिक अवकलज किसी प्रांत में विलोपित को जाते हों, अचर फलन होते हैं। यहाँ शब्द "प्रांत" का एक अलग अर्थ है। यह केवल वह समुच्चय नहीं है जिस पर फलन परिभाषित है। तब फिर यह प्रांत है क्या? आइए देखें।

9.4.1 $\mathbf{R}^n$ में प्रांत

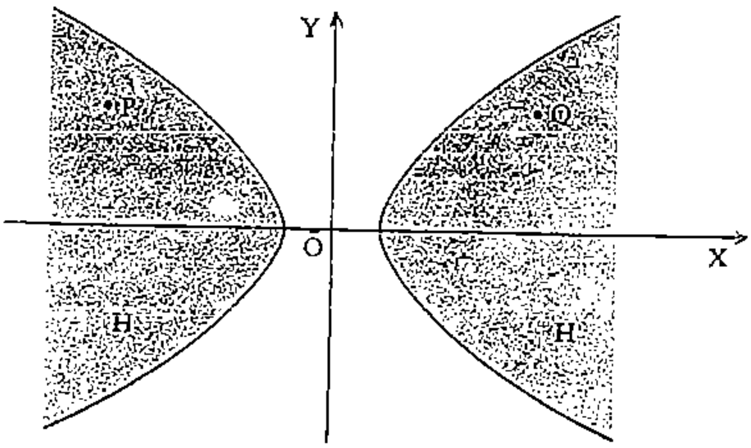
कलन पाठ्यक्रम के अध्ययन के दौरान इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि विचाराधीन फलन विवृत अंतरालों पर परिभाषित थे। इसी प्रकार, दो या तीन चरों वाले फलनों के लिए हमने यह मान किया था कि विचाराधीन फलन विवृत चक्रिका या विवृत गोले पर परिभाषित हैं। इन सभी समुच्चयों में दो बातें पायी जाती हैं।

1) इन समुच्चयों के सभी बिंदु आंतरिक बिन्दु (interior point) हैं, अर्थात् यदि एक बिन्दु समुच्चय का सदस्य हो, तो इसका एक प्रतिवेश भी समुच्चय में आविष्ट होता है।

2) समुच्चय को छोड़े बिना समुच्चय के एक बिन्दु से समुच्चय के एक दूसरे बिन्दु तक जाया जा सकता है।

हालांकि पहला कथन गणितीय दृष्टि से परिशुद्ध है, दूसरा कथन परिशुद्ध नहीं है। फिर भी अपने अंतर्ज्ञान से हम यह कह सकते हैं कि यदि समुच्चय में कोई दो बिन्दु दिए हुए हों, तो इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाला पथ पूरी तरह से समुच्चय में स्थित होता है।

उदाहरण के लिए चित्र 3 में दर्शाए गए समुच्चय $H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$ में यह गुणधर्म नहीं है। यहाँ आप देखेंगे कि समुच्चय H को छोड़े बिना बिन्दु P से बिन्दु Q तक जाने का कोई मार्ग नहीं है।



चित्र 3

इसके विपरीत, आयत, वृत्त, दीर्घवृत्त के आंतरिक या बाह्य भागों में यह गुणधर्म होता है। अब हम एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक जाने की संकल्पना को अधिक परिशुद्ध रूप में परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$\alpha(t) = (1-t)\, x + t y$, जहाँ $x, y, \mathbf{R}^n$ के दो दिए हुए बिंदु हैं, द्वारा परिभाषित एक फलन है। समुच्चय $\{\alpha(t) \mid t \in [0,1]\}$ को समुच्चय $\mathbf{R}^n$ में स्थित x से y को मिलाने वाला **रेखा खंड** (line segment) कहते हैं। x को रेखा खंड का **आदि बिन्दु** (initial point) और y को **अंतिम बिन्दु** (final point) कहते हैं।

ध्यान दें कि $\alpha(0) = x$ और $\alpha(1) = y$. यह भी नोट कीजिए कि यह परिभाषा समतल या आकाश में दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खंड के संबंध में हमारे अंतर्ज्ञान-विचार से मेल खाती है। चित्र 4(क) देखिए। कभी-कभी स्वयं फलन α को रेखा खंड कहा जाता है।

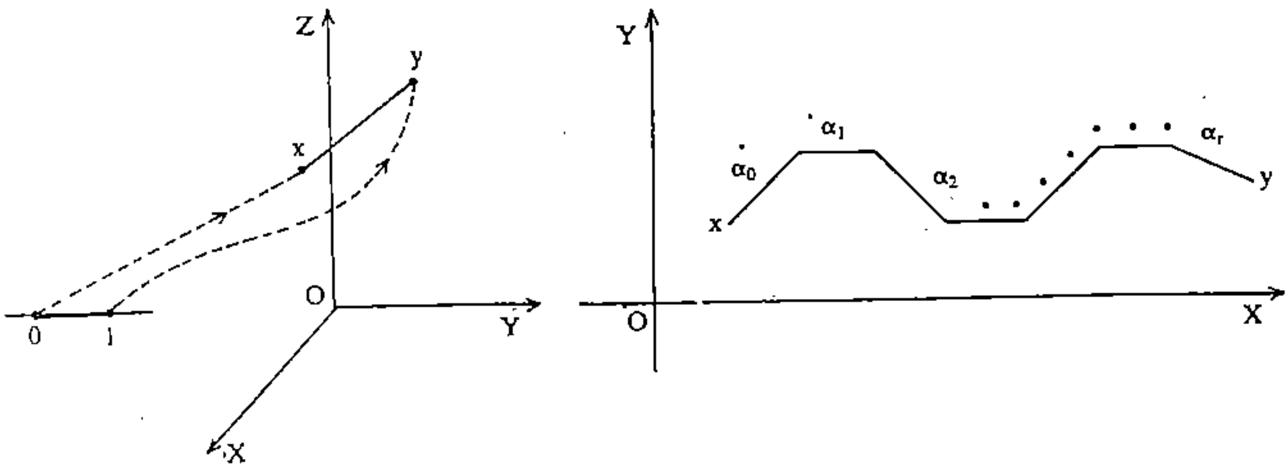
परिभाषा 3 : मान लीजिए $x, y, \mathbf{R}^n$ के दो बिन्दु हैं। x से y को मिलाने वाला बहुभुज-चाप (polygonal arc) $\mathbf{R}^n$ के रेखा खंडों का एक ऐसा अनुक्रम (sequence) $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ होता है, ताकि

$\alpha_0(0) = x$ अर्थात् α_0 का आदि बिन्दु x है।

$\alpha_r(1) = y$ अर्थात् α_r का अंतिम बिन्दु y है।

प्रत्येक $i = 0, 1, \ldots, r-1$ के लिए α_i का अंतिम बिन्दु, α_{i+1} का आदि बिन्दु होता है।

यह परिभाषा भी बहुभुज चाप के संबंध में हमारे अंतर्ज्ञान-विचार से मेल खाती है। चित्र 4(ख) देखिए।



(क) (ख)

चित्र 4 : (क) $\mathbf{R}^3$ का रेखा खंड (ख) $\mathbf{R}^2$ का बहुभुज-चाप

चित्र 5

S विवृत होता है, यदि S का प्रत्येक बिन्दु उसका आंतरिक बिन्दु हो।

परिभाषा 4 : $\mathbf{R}^n$ के उपसमुच्चय S को **बहुभुजीयतः संबंधित** कहा जाता है, यदि S के किन्हीं दो बिन्दुओं x, y के लिए S में स्थित x से y को मिलाने वाला एक बहुभुज चाप होता है। (चित्र 5 देखिए)।

स्पष्ट है कि समतल $\mathbf{R}^2$ के आयत और वृत्त के आंतरिक भाग और $\mathbf{R}^3$ के गोले के आंतरिक भाग बहुभुजीयतः संबंधित हैं। वस्तुतः इनमें प्रत्येक बिन्दु युग्म को एक रेखा खंड से मिलाया जा सकता है।

अब हम प्रांत की परिभाषा दे सकते हैं।

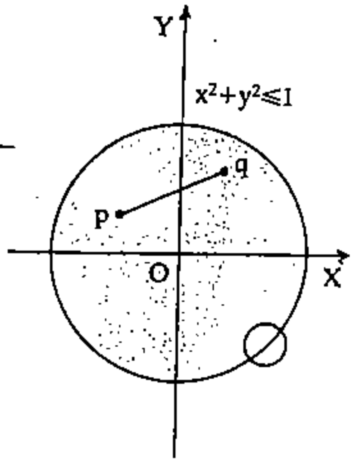
परिभाषा 5 : $\mathbf{R}^n$ के उपसमुच्चय S को प्रांत कहा जाता है, यदि S बहुभुजीयतः संबंधित और विवृत हो अर्थात् यदि S के प्रत्येक बिन्दु x के लिए x का एक प्रतिवेश $S(x,r)$ होता हो जो S में आविष्ट हो।

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि S एक प्रांत होता है, यदि

- S बहुभुजीयतः संबंधित हो, और
- S का प्रत्येक बिन्दु S का एक आंतरिक बिन्दु हो।

चित्र 3 में दिया गया समुच्चय H एक प्रांत नहीं है, क्योंकि यह बहुभुजीयतः संबंधित नहीं है। आप यह देख सकते हैं कि P से Q तक कोई बहुभुज-चाप नहीं हो सकता, जो समुच्चय में स्थित हो। मगर इसका प्रत्येक बिन्दु आंतरिक बिन्दु है। विवृत चक्रिका $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ और विवृत आयत $]a, b[\times]c, d[$, $\mathbf{R}^2$ के प्रांत हैं। संवृत

चक्रिका $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ एक प्रांत नहीं है, क्योंकि बिन्दु (x,y), जिनके लिए $x^2 + y^2 = 1$, अर्थात, वृत्त की परिसीमा पर के बिन्दु, समुच्चय S के आंतरिक बिन्दु नहीं हैं। फिर भी आप यहाँ देख सकते हैं कि S बहुभुजीयतः संबंधित है वस्तुतः इसके प्रत्येक बिन्दु युग्म को इसमें स्थित एक रेखा खंड से मिलाया जा सकता है (चित्र 6 देखिए)। इसी प्रकार विवृत गोला $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ और विवृत समांतरषट्फलक $]a, b[\times]c, d[\times]e, f[$, $\mathbf{R}^3$ के प्रांत हैं।



चित्र 6

क्या अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कर सकते हैं?

E10) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-कौन से समुच्चय प्रांत हैं?

क) $\{(x, y) \mid x = y\}$

ख) $\{(x, y) \mid x y > 0\}$

ग) $\{(x, y) \mid x > 1\}$

घ) $\{(x, y) \mid x^2 + y \geq 0\}$

ङ) $\{(x,y,z) \mid x = y\}$

च) $\{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$

प्रांत और फलन के प्रांत को एक ही न मान लीजिए! यह आवश्यक नहीं कि फलन का प्रांत परिभाषा 5 में चर्चित प्रांत हो। उदाहरण के लिए फलन $f(x,y) = \sin^{-1} x \sin^{-1} y$ का प्रांत $[-1, 1] \times [-1, 1]$ है, जो $\mathbf{R}^2$ का प्रांत नहीं है।

इस भाग के प्रारंभ में हमने जिस परिणाम का उल्लेख किया था उसे अब हम सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 5 : मान लीजिए $f(x,y)$, $\mathbf{R}^2$ के प्रांत D पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए D पर $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$, तब एक ऐसा अचर c होता है कि सभी $(x,y) \in D$ के लिए $f(x,y) = c$.

उपपत्ति : मान लीजिए $P_1 = (x_1, y_1)$ और $P_2 = (x_2, y_2)$, D के ऐसे दो बिन्दु हैं कि P_1 और P_2 को मिलाने वाला रेखा खंड P_1P_2, D में स्थित होता है। इस तरह के बिन्दु युग्म प्राप्त किए जा सकते हैं क्योंकि D बहुभुजीयतः संबंधित है। संकेतन की सुविधा को ध्यान में रखकर हम $f(x,y)$ के लिए $f(P)$ लिखेंगे, जबकि P, बिन्दु (x,y) हो। दो चरों के माध्यमान प्रमेय (हाशिये में दी गई टिप्पणी देखिए) के अनुसार

$$f(P_2) - f(P_1) = (x_2-x_1) \frac{\partial f}{\partial x} (P_1+\theta(P_2-P_1)) + (y_2-y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(P_1+\theta(P_2-P_1)), \qquad \ldots\ldots (7)$$

माध्यमान प्रमेय
$f(a+h, b+k) - f(a,b)$
$= hf_x (a+\theta h, b+\theta k)$
$+ kf_y (a+\theta h, b+\theta k)$,
जहां $0 < \theta < 1$.

जहाँ θ एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $0 < \theta < 1$.

अब $P_1 + \theta (P_2 - P_1) = \theta P_2 + (1-\theta) P_1$, रेखा खंड P_1P_2 पर स्थित है और इसलिए D में स्थित है। और चूँकि हम यह मानकर चले हैं कि D पर $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनों ही शून्य हैं, इसलिए (7) से हमें प्राप्त होता है :

$f(P_2) - f(P_1) = 0$, या

$f(P_1) = f(P_2) = c$, मान लीजिए।

चूँकि D के एक बहुभुज-चाप से D के प्रत्येक बिन्दु P को P_1 से मिलाया जा सकता है, इसलिए ऊपर दिए गए तर्क को बार-बार लागू करके हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि D के सभी बिन्दु P के लिए $f(P) = f(P_1) = c$. इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

प्रमेय 5 में यह परिकल्पना कर लेना अति आवश्यक है कि D बहुभुजीयतः संबंधित है। उदाहरण के तौर पर निम्नलिखित दो चक्रिकाओं का सम्मिलन (union) लीजिए :

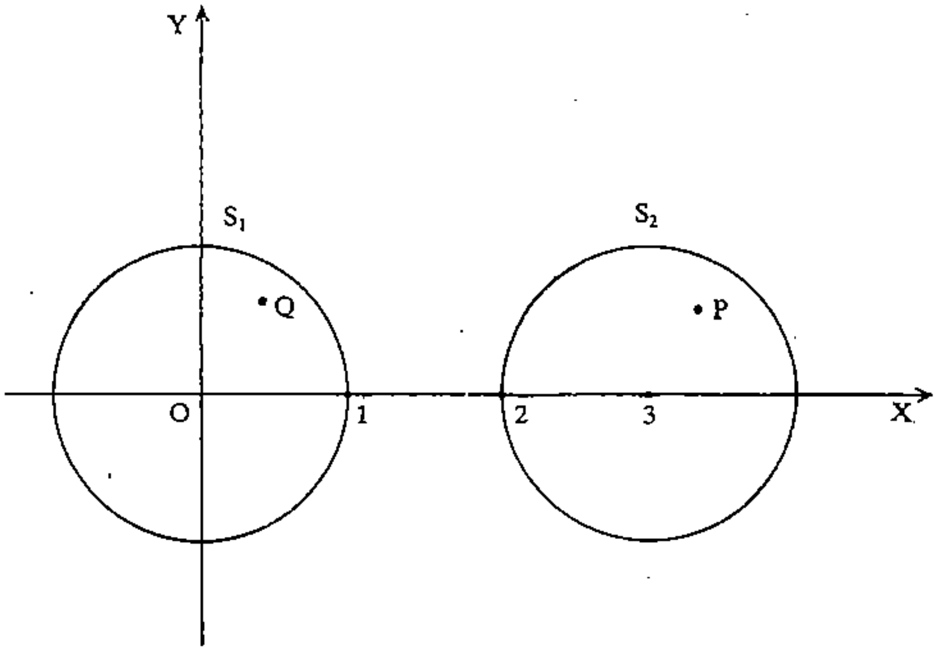
$S_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ और $S_2 = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + y^2 < 1\}$

चित्र 7 भी देखिए।

आइए हम फलन $f : D \to \mathbf{R}$ को परिभाषित करें, जिससे कि

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } (x,y) \in S_1, \\ 2, \text{ यदि } (x,y) \in S_2 \end{cases}$$

तब f के दोनों आंशिक अवकलजों का D पर विलोपन हो जाता है। फिर भी यह फलन D पर अचर नहीं है। ध्यान दीजिए कि $D = S_1 \cup S_2$, बहुभुजीयतः संबंधित नहीं होता, क्योंकि P से Q तक D में स्थित बहुभुज-चाप के अनुदिश नहीं जाया जा सकता। इसी प्रकार का परिणाम दो से अधिक चरों के लिए भी सही होता है और उसे संगत



चित्र 7

माध्यमान प्रमेय को लागू करके सिद्ध किया जा सकता है। लेकिन यहाँ हम इसकी उपपत्ति नहीं दे पा रहे हैं। आपको याद होगा कि एक चर वाली स्थिति के अनुरूप परिणाम का कथन है :

यदि f, **विवृत अंतराल** I पर परिभाषित एक ऐसा फलन हो कि सभी $x \in I$ के लिए $f'(x) = 0$, तो I पर f एक अचर फलन होता है।

अतः इस स्थिति में भी हमने एक विवृत अंतराल लिया है, जो कि **R** में एक प्रांत है। क्या आप एक ऐसा उदाहरण दे सकते हैं जो यह दिखाता हो कि फलन का एक विवृत अंतराल पर परिभाषित होना आवश्यक है?

$]0,1[$ पर $f(x) = 0$ और $]2,3[$ पर $f(x) = 1$ लेकर जाँच कीजिए।

अगले उपभाग में आप यह देखेंगे कि विभिन्न फलनों की आश्रितता (dependence) का प्रश्न किस प्रकार इनके जैकोबियन से संबंधित है।

परन्तु पहले आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E11) मान लीजिए $f(x,y)$, (a,b) के प्रतिवेश N पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है।

क) यदि सभी $(x,y) \in N$ के लिए $f_x(x,y) = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि f, केवल y चर का एक फलन है।

ख) यदि सभी $(x,y) \in N$ के लिए $f_y(x,y) = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि f केवल x चर का एक फलन है।

9.4.2 आश्रितता

आश्रितता की परिभाषा देने से पहले हम कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 9 : मान लीजिए $x \in \mathbf{R}$ और $0 < y < \pi$ के लिए

$f(x,y) = e^x \sin y$ और

$g(x,y) = x + \ln \sin y$

इस स्थिति में प्रांत $D = \mathbf{R} \times]0, \pi[$, जो रेखाओं $y = 0$ और $y = \pi$ से परिबद्ध एक पट्टी है। D एक विवृत समुच्चय है।

वस्तुतः D एक प्रांत है।

अब D के सभी (x,y) के लिए

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ 1 & \cot y \end{vmatrix}$$

$$= e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$$

आप यहाँ देख सकते हैं कि D पर फलन f और g निम्नलिखित संबंध से संबंधित हैं :

$$\ln (f(x,y)) - g(x,y) = 0 \quad \text{..... (8)}$$

दूसरे शब्दों में, $g = \ln f$, अर्थात् g, फलन का फलन है। तब संबंध (8) को इस रूप में रखा जा सकता है :

सभी $(x,y) \in D$ के लिए $F(f(x,y), g(x,y)) = 0$, जहाँ F, फलन $F(u,v) = \ln u - v$ है।

ध्यान दीजिए कि F के प्रांत के और विशेषतः रूपांतरण $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ के परिसर के किसी भी विंदु (u,v) के लिए $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ या $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$.

उदाहरण 10 : मान लीजिए

$u = 3x + 2y - z$

$v = x - 2y + z$

$w = x(x + 2y - z)$.

तब सभी $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ के लिए

$$\frac{\partial (u,v,w)}{\partial (x,y,z)} = x \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

आप यह देख सकते हैं कि $u^2 - v^2 = 8w$.

इस तरह सभी $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $F(u,v,w) = 0$, जहाँ $F(u,v,w) = u^2 + v^2 - 8w$.

ध्यान दीजिए कि $\mathbf{R}^3$ के सभी विंदुओं पर $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ और $\frac{\partial F}{\partial w}$ में से एक शून्येतर होता है।

इससे हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा 6 : n चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ वाले वास्तविक मान फलन $f_1, f_2, \ldots, f_n$ को प्रांत D में **फलनिकतः आश्रित** (functionally dependent) कहा जाता है, यदि n चरों वाले एक ऐसे वास्तविक मान फलन F का अस्तित्व हो, कि

i) रूपांतरण $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, जहाँ $u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, के परिसर के सभी बिन्दुओं पर $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq n$ में से कम से कम एक शून्येतर होता है।

ii) सभी $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ के लिए $F(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0$.

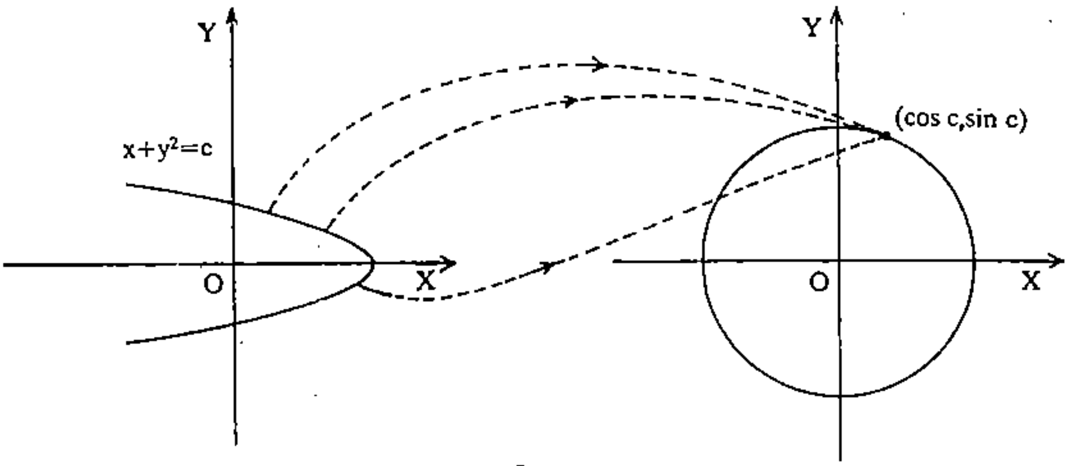
अब तक की हमारी प्रथा के अनुसार हम अपनी चर्चा $n = 2$ और $n = 3$ वाली स्थितियों तक ही सीमित रखेंगे।

उदाहरण 9 में हमने यह देखा है कि $\mathbf{R} \times]0, \pi[$ पर $e^x \sin y$ और $x + \ln \sin y$ फलनिकतः आश्रित हैं और उदाहरण 10 में हमने देखा कि फलन $3x + 2y - z$, $x - 2y + z$ और $x(x + 2y - z)$, $\mathbf{R}^3$ पर फलनिकतः आश्रित हैं। फलनिक आश्रितता (functional dependence) के ज्यामितीय महत्व को समझने के लिए यहाँ हम एक और उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 11 : $T(x,y) = (u,v)$ द्वारा दिया गया रूपांतरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ लीजिए, जहाँ $u = \cos(x + y^2)$ और $v = \sin(x + y^2)$.

चूँकि साइन और कोसाइन फलन संततः अवकलनीय हैं, इसलिए T संततः अवकलनीय है। यहाँ हम पाते हैं कि T पूरे समतल को त्रिज्या 1 वाले वृत्त $\{(u,v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$ पर स्थित बिन्दुओं के समुच्चय पर प्रतिचित्रित (map) करता है। इस वृत्त के कोई आंतरिक बिन्दु नहीं हैं। इस तरह हम यह पाते हैं कि T, प्रतिवेशों को प्रतिवेशों पर प्रतिचित्रित नहीं करता है और किसी भी प्रतिवेश पर T, 1 – 1 नहीं होता। वस्तुतः परवलय $x + y^2 = c$ पर के सभी बिन्दु एक ही बिन्दु $(\cos c, \sin c)$ पर प्रतिचित्रित होते हैं (चित्र 8 देखिए) c के अलग-अलग मानों के लिए हमें अलग-अलग परवलय प्राप्त होते हैं और ये परवलय पूरे समतल को आच्छादित कर देते हैं। इस तरह हम यह पाते हैं कि कोई भी प्रतिवेश कम से कम एक ऐसे परवलय के कई बिन्दुओं को आविष्ट करेगा। अर्थात् कोई भी प्रतिवेश समान प्रतिबिंब वाले बिन्दुओं को आविष्ट करता है।

इस व्यवहार का कारण यह है कि u और v फलनिकतः आश्रित हैं। वास्तव में $F(u,v) = u^2 + v^2 - 1 = 0$.



चित्र 8

अब प्रश्न उठता है कि इस संबंध में जैकोबियन $\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)}$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

यहाँ

$$\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} -\sin (x+y^2) & -2y \sin (x+y^2) \\ \cos (x+y^2) & 2y \cos (x+y^2) \end{vmatrix}$$

$$= -2\, y \sin (x+y^2) \cos (x+y^2) + 2\, y \sin (x+y^2) \cos (x+y^2)$$

$$= 0.$$

हमने यहाँ जो बातें नोट की हैं वे सिर्फ़ इसी उदाहरण तक सीमित नहीं है। यदि u और v दो चरों वाले दो फलन हों और किसी बिन्दु के किसी प्रतिवेश में $\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} = 0$, तो हम यह देखेंगे कि u और v फलनिकतः आश्रित हैं और, रूपांतरण $(x,y) \to (u,v)$, $\mathbf{R}^2$ के एक प्रतिवेश को $\mathbf{R}^2$ के एक वक्र पर प्रतिचित्रित करता है। उदाहरण के लिए, रूपांतरण $(x,y) \to (e^x \sin y,\ x + \ln \sin y)$, एक प्रतिवेश को वक्र $v - \ln u = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है। यही बात दो से अधिक चरों वाले फलनों के लिए भी सही है। उदाहरण के तौर पर उदाहरण 10 का रूपांतरण $(x,y,z) \to (u,v,w)$ लीजिए। यह रूपांतरण एक प्रतिवेश को पृष्ठ $u^2 - v^2 - 8w = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है। इस परिणाम की पूरी उपपत्ति के लिए आपको अगली इकाई तक प्रतीक्षा करनी होगी। यहाँ (प्रमेय 6 में) हम यह सिद्ध करेंगे कि फलनिक संबंध (functional relation) के अस्तित्व के लिए प्रतिवेश में जैकोबियन का लोपन आवश्यक है।

प्रमेय 6 : यदि $u = f(x,y)$ और $v = g(x,y)$, $\mathbf{R}^2$ के एक विवृत उपसमुच्चय D पर अवकलनीय हों और D पर फलनिकतः आश्रित हों, तो D के सभी (x,y) के लिए $\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)} = 0$.

उपपत्ति : परिभाषा के अनुसार दो चरों वाले एक ऐसे वास्तविक मान फलन F का अस्तित्व होता है कि D के सभी (x,y) के लिए

$$F(u,v) = F(f(x,y),\ g(x,y)) = 0 \qquad \text{..... (9)}$$

और रूपांतरण $(x,y) \to (f(x,y),\ g(x,y))$ के परिसर के सभी बिंदुओं पर $\frac{\partial F}{\partial u}$ और $\frac{\partial F}{\partial v}$ में से एक शून्येतर है। शृंखला नियम (इकाई 7 देखिए) से x और y के सापेक्ष संबंध (9) का आंशिकतः अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad \text{..... (10)}$$

अब चूंकि D के किसी भी बिंदु पर $\frac{\partial F}{\partial u}$ और $\frac{\partial F}{\partial v}$ दोनों शून्य नहीं हो सकते, इसलिए समीकरण निकाय (10) से हमें प्राप्त होता है :

सभी $(x,y) \in D$ के लिए

याद कीजिए, $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$

$$\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

इसी प्रकार का परिणाम तीन चरों वाले तीन फलनों पर भी लागू होता है। इसकी उपपत्ति भी ठीक वैसी है जैसी प्रमेय 6 की उपपत्ति।

अब हम एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 12 : आइए हम निम्नलिखित फलनों के बीच फलनिक संबंध प्राप्त करके यह सिद्ध करें कि ये फलन फलनिकतः आश्रित हैं।

i) $f(x,y) = \ln x - \ln y$ ..... (11)

ii) $g(x,y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$ ..... (12)

सुविधा के लिए हम $f(x,y)$ के स्थान पर f और $g(x,y)$ के स्थान पर g लिखेंगे। (12) से x प्राप्त करके इसे (11) में प्रतिस्थापित करने पर f और g के बीच एक संबंध हमें प्राप्त हो जाएगा।

इस तरह (12) से,

$2g \cdot xy = x^2 + 3y^2$

अर्थात् $x^2 - 2g\,xy + 3y^2 = 0$,

या $(x - gy)^2 - g^2y^2 + 3y^2 = 0$,

अर्थात् $(x - gy)^2 = g^2y^2 - 3y^2 = (g^2 - 3)\,y^2$.

अतः $x - gy = \pm y\sqrt{g^2 - 3}$.

आइए हम $x - gy = y\sqrt{g^2 - 3}$ लें।

तब $x = y\,[g + \sqrt{g^2 - 3}\,]$.

x के इस मान को (11) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$f = [\ln [y\,(g + \sqrt{g^2 - 3})] - \ln y$.

$= \ln y + \ln (g + \sqrt{g^2 - 3}) - \ln y$.

अर्थात् $f = \ln (g + \sqrt{g^2 - 3})$.

अतः जिस फलनिक संबंध $F(u,v) = 0$ को हम प्राप्त करना चाहते हैं, वह है :

$F(u,v) = u - \ln (v + \sqrt{v^2 - 3}) = 0.$

आप यह आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि

$F\,(f(x,y),\, g(x,y)\,) = 0.$

आप यह भी जाँच कर सकते हैं कि जैकोबियन शून्य है। इसे हम E12) में एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं। यहाँ आप इस बात की ओर ध्यान दें कि F अभिन्नतः शून्य (identically zero) नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करें।

E12) क) सत्यापित कीजिए कि वास्तव में उदाहरण 12 के फलन f और g, संबंध

$F(u,v) = u - \ln (v + \sqrt{v^2 - 3}\,)$ को संतुष्ट करते हैं।

ख) सिद्ध कीजिए कि उदाहरण 12 के फलन f और g के लिए सभी (x,y) पर $\dfrac{\partial\,(f,g)}{\partial\,(x,y)} = 0.$

E13) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन फलनिकतः आश्रित हैं :

$f\,(x,y) = \dfrac{y}{x}\,,\; g\,(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

E14) निम्नलिखित युग्मों का फलनिक संबंध, यदि इसका अस्तित्व हो, ज्ञात कीजिए।

क) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1-xy}\,,\; g(x,y) = \dfrac{(x+y)\,(1-xy)}{(1+x^2)\,(1+y^2)}$

ख) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x}\,,\; g(x,y) = \dfrac{x+y}{y}$.

E15) सिद्ध कीजिए कि $u = x\cos y$, $v = x\sin y$ का जैकोबियन पूरे प्रांत $D = \{(x,y)\,|\,x > 0\}$ में शून्येतर होता है। यह भी सिद्ध कीजिए कि $T(x,y) = (u,v)$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्र $T : D \to R^2$ व्युत्क्रमणीय नहीं है।

E16) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन, फलनिक आश्रितता के आवश्यक प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं :

क) $u = \dfrac{x}{y-z}$, $v = \dfrac{y}{z-x}$, $w = \dfrac{z}{x-y}$

ख) $u = x^2y - xy^2 + xyz$

$v = xy + x - y + z$

$w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2xz$

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

9.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्न मुद्दों की चर्चा की है।

1) हमने $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ पर रैखिक रूपांतरणों की व्युत्क्रमणीयता पर चर्चा की है।

2) हमने n चरों वाले फलनों के जैकोबियन को परिभाषित किया है और उन्हें परिकलित किया है। इस तरह, यदि $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n चरों वाले n फलन हों, जिनके प्रथम कोटि के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, तो जैकोबियन

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

3) हमने अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकलज ज्ञात करने के लिए जैकोबियन का प्रयोग किया है।

4) हमने जैकोबियन के श्रृंखला नियम का अध्ययन किया है।

इस तरह $\dfrac{\partial (u,v,w)}{\partial (r,s,t)} = \dfrac{\partial (u,v,w)}{\partial (x,y,z)} \dfrac{\partial (x,y,z)}{\partial (r,s,t)}$,

जहाँ u,v,w में से प्रत्येक x,y,z का फलन है और x,y,z में से प्रत्येक r,s,t का फलन है।

5) हमने $\mathbf{R}^n$ में प्रांत परिभाषित किए हैं।
उपसमुच्चय $D \subseteq \mathbf{R}^n$ एक प्रांत होता है, यदि वह विवृत हो और बहुभुजीयतः संबंधित हो।

6) हमने यह देखा है कि यदि प्रांत का प्रत्येक बिन्दु फलन का एक स्तब्ध बिन्दु हो, तो फलन एक अचर होगा।

7) अंत में हमने यह देखा है कि किसी प्रांत पर जैकोबियन $\dfrac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)}$ का लोपन होना उस प्रांत में f और g की फलनिक आश्रितता के लिए एक आवश्यक प्रतिबंध है।

9.6 हल और उत्तर

E1) a) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial w}{\partial y} = -2, \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

$\therefore \dfrac{\partial (w,z)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

b) $\dfrac{\partial (w,z)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29 \neq 0.$

दोनों ही व्युत्क्रमणीय हैं।

E2) a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x \therefore \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pi,\pi/2)} = \cos \pi = -1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y \sin xy \therefore \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(\pi,\pi/2)} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x \sin xy \therefore \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(\pi,\pi/2)} = -\pi\sin\frac{\pi^2}{2}$$

$\therefore (\pi, \pi/2)$ पर, $\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi^2}{2} & -\pi\sin\frac{\pi^2}{2} \end{vmatrix} = \pi\sin\frac{\pi^2}{2}$.

b) $\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

c) $J_F(x,y,z) = \begin{vmatrix} yz\cos xyz & xz\cos xyz & xy\cos xyz \\ z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) $J_F(x,y,z) = \begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 2xyz$

$\therefore J_F(\pi,2,4) = 16\pi$.

E3) जैकोबियन आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}$

जैकोबियन $= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x-2y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ or $x = 2y$.

$\therefore$ समुच्चय $\{(x,y) \mid x = 0 \text{ or } x = 2y\}$ पर जैकोबियन शून्य है।

E4) मान लीजिए $F(x,y,u,v) = xy + x^2u - vy^2$ और $G(x,y,u,v) = 3x - 4uy - x^2 v$.

तब $\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2xu, \frac{\partial F}{\partial u} = x^2, \frac{\partial F}{\partial v} = -y^2$.

$\frac{\partial G}{\partial x} = 3 - 2xv, \frac{\partial G}{\partial u} = -4y, \frac{\partial G}{\partial v} = -x^2$.

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x^2 & -y^2 \\ -4y & -x^2 \end{vmatrix} = -[x^4 + 4y^3]$.

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} y + 2xu & -y^2 \\ 3 - 2xv & -x^2 \end{vmatrix} = -x^2(y + 2xu) + y^2(3-2xv)$.

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} x^2 & y + 2xu \\ -4y & 3 - 2xv \end{vmatrix} = x^2(3 - 2xv) + 4y(y + 2xu)$

$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\frac{x^2(y + 2xu) - y^2(3 - 2xv)}{x^4 + 4y^3}\right]$ और

$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{x^2(3-2xv) + 4y(y+2xu)}{x^4 + 4y^3}\right]$

E5) $F(x,y,z,u,v) = 0$ और $G(x,y,z,u,v) = 0$ को y के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (F,G)}{\partial (y,v)} \Big/ \frac{\partial (F,G)}{\partial (u,v)}$$

और $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

इसी प्रकार $\frac{\partial u}{\partial z}$ और $\frac{\partial v}{\partial z}$ प्राप्त कीजिए।

E6) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} z+v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = z+v-u$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = \begin{vmatrix} x+z & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x+z-u$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)} = \begin{vmatrix} z+v & y+u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = z+v-y-u$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u-x-z}{z+v-u}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{u+y-v-z}{z+v-u}$

E7) उदाहरण 8 से,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

इन समीकरणों से $\frac{dx}{dt}$ का निराकरण करने पर

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}\right) = 0$$

या $-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)} = 0$

या $\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$

E8) $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

E9) $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ 0 & ze^{yz} & ye^{yz} \\ ze^{zx} & 0 & xe^{zx} \end{vmatrix}$

$= 2xyz\, e^{(xy+yz+zx)}$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2s & 0 \\ 0 & 0 & 3t^2 \end{vmatrix} = 6st^2$

$u = e^{xy} = e^{rs^2}, v = e^{yz} = e^{s^2t^3}, w = e^{zx} = e^{rt^3}$

$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)} = \begin{vmatrix} s^2e^{rs^2} & 2rse^{rs^2} & 0 \\ 0 & 2st^3e^{s^2t^3} & 3s^2t^2e^{s^2t^3} \\ t^3e^{rt^3} & 0 & 3rt^2e^{rt^3} \end{vmatrix}$

$= 12rs^3t^5\, e^{(rs^2+s^2t^3+rt^3)}$

$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = 2xyz\, e^{(xy+yz+zx)} \cdot 6st^2$

$= 12rs^3t^5e^{(rs^2+s^2t^3+rt^3)}$

$= \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}$.

E10) ग) और च) प्रांत हैं।

क), ख), घ) और ङ) प्रांत नहीं हैं।

E11) क) $y = y_0$ के लिए मान लीजिए $g_{y_0}(x) = f(x,y_0)$.

तब g_{y_0} एक चर वाला फलन है।

और एक अंतराल I पर $g'_{y_0}(x) = f_x(x,y_0) = 0$, जहां

I, N का x-अक्ष पर प्रक्षेप (projection) है।

$\therefore$ I पर $g_{y_0}(x)$ एक अचर फलन है।

$\therefore g_{y_0}(x) = c_{y_0}$.

$\therefore f(x,y_0) = c_{y_0}$.

व्यापक रूप में, $f(x,y) = c_y$.

अर्थात् $f(x,y)$ केवल y पर निर्भर करता है, और इसलिए केवल y का फलन है।

ख) क) की तरह।

E12) क) $F(u,v) = u - \ln(v + \sqrt{v^2-3})$

यदि $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, तब

$F(u,v) = f(x,y) - \ln(g(x,y) + \sqrt{g^2(x,y)-3})$

$$= \ln x - \ln y - \ln\left[\frac{x^2+3y^2}{2xy} + \sqrt{\frac{(x^2+3y^2)^2}{4x^2y^2} - 3}\right]$$

$$= \ln x - \ln y - \ln\left[\frac{x^2+3y^2}{2xy} + \frac{(x^2-3y^2)}{2xy}\right]$$

$$= \ln x - \ln y - \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

ख)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \\ \frac{1}{2y} - \frac{3y}{2x^2} & \frac{-x}{2y^2} + \frac{3}{2x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{-x}{2y^2} + \frac{3}{2x}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y} - \frac{3y}{2x^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{2y^2} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2y^2} - \frac{3}{2x^2} = 0.$$

E13) $1+g(x,y) = 1 + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y}$

$$1 - g(x,y) = 1 - \frac{x-y}{x+y} = \frac{2y}{x+y}$$

$$\therefore \frac{1-g(x,y)}{1+g(x,y)} = \frac{y}{x} = f(x,y).$$

इसलिए f और g निम्न फलनिक संबंध को संतुष्ट करते है:

$$F(f,g) = f - \frac{1-g}{1+g} = 0.$$

$\therefore$ f और g, फलनिकतः आश्रित है।

E14) क)
$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \frac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} & \frac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1-xy)^2(1+x^2)(1+y^2)} \begin{vmatrix} 1+y^2 & 1+x^2 \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{vmatrix} = 0.$$

अतः f और g फलनिकतः आश्रित हो सकते हैं।

$$f = \frac{x+y}{1-xy}$$

x के लिए हल करने पर

$(1-xy)f = x + y$

$x(1+fy) = f-y$

या $x = \frac{f-y}{1+fy}$.

$g = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ में प्रतिस्थापित कीजिए।

$$g = \frac{\left(\frac{f-y}{1+fy} + y\right)\left(1 - \frac{(f-y)y}{(1+fy)}\right)}{\left(1 + \frac{(f-y)^2}{(1+fy)^2}\right)(1+y^2)}$$

$$= \frac{[(f-y) + y(1+fy)][(1+fy) - fy+y^2]}{[(1+fy)^2 + (f-y)^2](1+y^2)}$$

$$= \frac{f(1+y^2)}{(f^2+1)(1+y^2)}$$

$$g = \frac{f}{f^2+1} \quad \therefore g - \frac{f}{f^2+1} = 0$$

$F(u,v) = u - \frac{v}{v^2+1} = 0$ वांछित फलन है।

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ 1/y & -x/y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xy}{x^2y^2} - \frac{1}{xy} = 0 \; \forall \; x, y.$$

अतः f और g फलनिकतः आश्रित हो सकते हैं।

अब $f(x,y) = 1 + \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{f(x,y) - 1}$$

$$\Rightarrow g(x,y) = 1 + \frac{x}{y} = 1 + \frac{1}{f(x,y)-1} = \frac{f(x,y)}{f(x,y)-1}$$

इसलिए $g(x,y) - \frac{f(x,y)}{f(x,y)-1} = 0$.

अतः g और f निम्न संबंध को संतुष्ट करते हैं :

$$F(f,g) = g - \frac{f}{f-1} = 0.$$

E15) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix}$

$= x\cos^2 y + x\sin^2 y.$

$= x$

$\therefore \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, $D = \{(x,y) \mid x > 0\}$ पर शून्येतर है।

अब $T(x,y) = T(x,y+2\pi)$, $(x,y) \in D$.

$\therefore$ D पर T, (1–1) नहीं है।

इसलिए यह व्युत्क्रमणीय नहीं है।

इकाई 10 अस्पष्ट और प्रतिलोम फलन प्रमेय

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम दो अति महत्वपूर्ण प्रमेयों अर्थात् अस्पष्ट फलन प्रमेय और प्रतिलोम फलन प्रमेय के कथन देंगे।

अब तक आप स्पष्ट फलनों से अच्छी तरह से परिचित हो चुके हैं। अस्पष्ट फलन प्रमेय से यह पता चलता है कि कुछ प्रतिबंधों के अधीन अस्पष्ट समीकरण $F(x,y) = 0$ को स्थानिकतः $y = f(x)$ द्वारा स्पष्ट रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

पिछली इकाई में आपने यह देखा है कि $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ पर एक रैखिक रूपांतरण व्युत्क्रमणीय होता है, यदि और केवल यदि इसका जैकोबियन शून्येतर हो। यहाँ हम जैकोबियन की सहायता से अरैखिक रूपांतरणों की व्युत्क्रमणीयता पर चर्चा करेंगे।

इस इकाई में आप इन दो प्रमेयों से संबंधित अनेक उदाहरण देखेंगे। इन उदाहरणों का अध्ययन अच्छी तरह से कीजिए। इनके ज़रिए आप प्रमेयों को अच्छी तरह से समझ जाएँगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन दे सकेंगे, उसे सिद्ध कर सकेंगे और लागू कर सकेंगे,
- $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ पर दो फलनों की फलनिक आश्रितता का पर्याप्त प्रतिबंध प्राप्त कर सकेंगे और उसे लागू कर सकेंगे,
- स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय फलन परिभाषित कर सकेंगे और उन्हें पहचान सकेंगे,
- प्रतिलोम फलन प्रमेय लागू कर सकेंगे।

10.2 अस्पष्ट फलन प्रमेय

इस भाग में हम उच्च स्तरीय कलन के एक अति महत्वपूर्ण प्रमेय अर्थात् "अस्पष्ट फलन प्रमेय" पर चर्चा करेंगे। पहले हम दो चरों वाले फलनों के लिए इस प्रमेय को प्रस्तुत करेंगे। बाद में हम इस प्रमेय को तीन चरों वाले फलनों पर लागू करेंगे।

10.2.1 दो चरों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय

इकाई 7 में हमने यह देखा है कि $F(x,y) = 0$ के रूप का समीकरण हमेशा ही एक अद्वितीय फलन $y = f(x)$ को निरूपित नहीं करता।

उदाहरण के लिए समीकरण $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ लें।

यहाँ हम x के एक दिये हुए मान के लिए y का एकल (single) मान प्राप्त नहीं कर सकते हैं।

फिर भी,

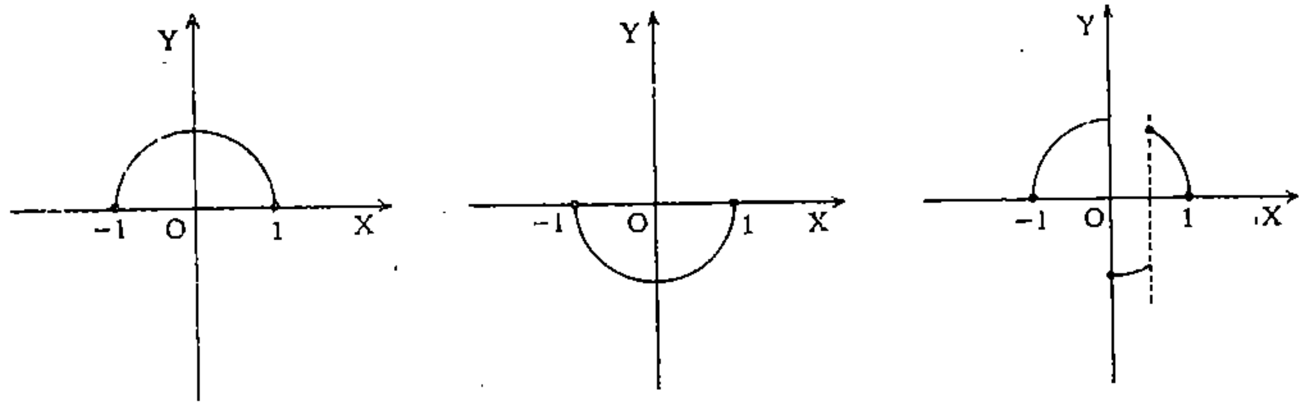
i) $y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}\,,\ x \in [-1, 1]$

ii) $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}\,,\ x \in [-1, 1]$

iii) $$y = f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\,, & x \in [-1, 0[\\ -\sqrt{1-x^2}\,, & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \sqrt{1-x^2}\,, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

जैसे कुछ फलन समीकरण $F(x,f(x)) = 0$ को संतुष्ट करते हैं।

चित्र 1 में आप इन फलनों के आलेख देख सकते हैं।



चित्र 1

इस संदर्भ में अब यह प्रश्न उठ सकता है :

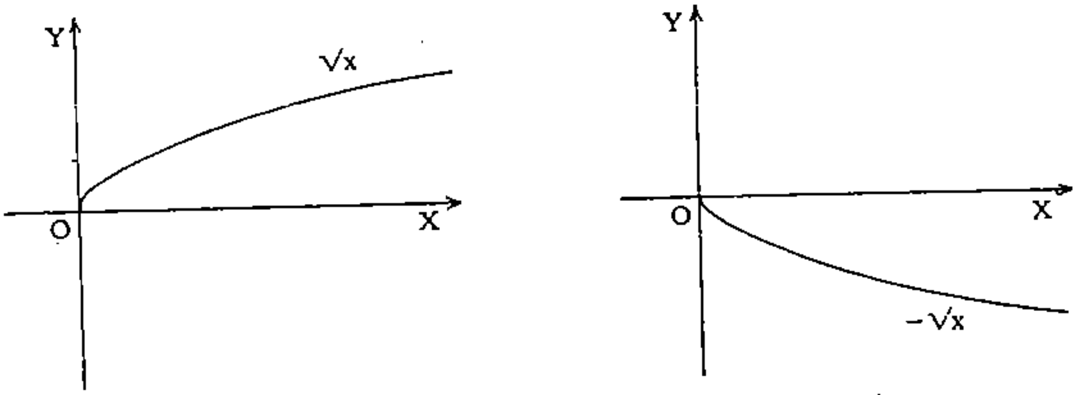
"कब समीकरण $F(x,y) = 0$ को y के लिए x के पदों में स्पष्टतः हल किया जा सकता है या x के लिए y के पदों में स्पष्टतः हल किया जा सकता है, जिससे कि एक अद्वितीय फलन $y = f(x)$ या $x = g(y)$ प्राप्त हो?" अस्पष्ट फलन प्रमेय (implicit function theorem) में इस प्रश्न पर चर्चा की गई है। इस प्रमेय का कथन देने से पहले आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : समीकरण $F(x,y) = x-y^2 = 0$ लें।

अब, यदि हम $f_1 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$ परिभाषित करें, तो f_1, समीकरण $F(x, f(x)) = 0$ को संतुष्ट करेगा।

इसी प्रकार फलन $f_2 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{x}$ भी समीकरण $F(x, f_2(x)) = 0$ को संतुष्ट करेगा।

इस तरह, दिए हुए समीकरण के संगत हमें $\mathbf{R}^+$ पर परिभाषित दो अलग-अलग फलन प्राप्त होते हैं। चित्र 2 में इन फलनों के आलेख दिखाए गए हैं।



चित्र 2

ध्यान दीजिए कि यहाँ फलन f_1 और f_2 दोनों ही अपने प्रांत पर संतत हैं। अब समीकरण $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ के संगत के तीन फलन लीजिए जिनकी चर्चा हम पहले कर चुके हैं। आप देखेंगे कि f_1 और f_2 अवकलनीय हैं, जबकि f_3 संतत भी नहीं है (चित्र 1 देखिए)।

अगले उदाहरण में एक अलग ही स्थिति है।

उदाहरण 2 : समीकरण

$F(x,y) = x^5 + y^5 - 5x^3y = 0$

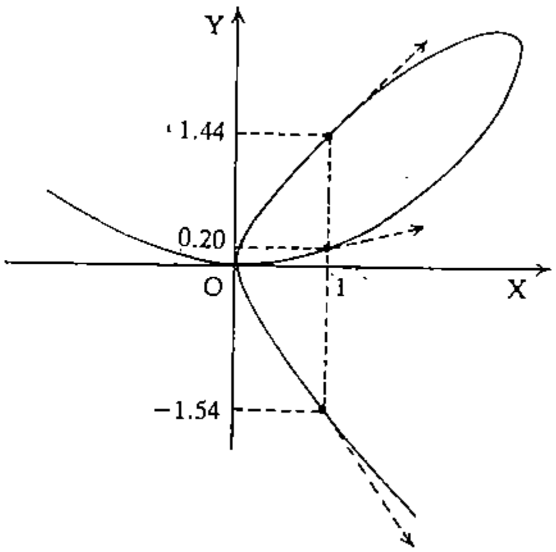
लीजिए।

पहले हम यह देखते हैं कि x के फलन के रूप में हल प्राप्त करने के लिए हम y के लिए इस समीकरण को हल नहीं कर सकते। इसी प्रकार y के फलन के रूप में हल प्राप्त करने के लिए x के लिए भी हम इस समीकरण को हल नहीं कर सकते। आइए अब हम चित्र 3 में दिए गए फलन $F(x,y)$ के आलेखीय निरूपण को देखें। यहाँ हम यह पाते हैं कि ऐसे तीन फलन $f_1(x)$, $f_2(x)$ और $f_3(x)$ हैं जो $x = 1$ के प्रतिवेश में $F(x,y) = 0$ को संतुष्ट करते हैं। परंतु ध्यान दीजिए कि यदि हम वक्र पर बिंदु $(1, y)$ की कोटि y को नियत कर लें तो हमारे पास एक ही फलन बचता है। इस तरह हमें प्राप्त होता है

f_1, यदि हम बिन्दु $(1,1.44)$ नियत कर दें,

f_2, यदि हम बिन्दु $(1,0.2)$ नियत कर दें और

f_3 यदि हम बिन्दु $(1,-1.54)$ नियत कर दें।



चित्र 3 : $x^5 + y^5 - 5x^3 y = 0$ का आलेख

चित्र 3 से आप यह देख सकते हैं कि f_1, f_2 और f_3 के आलेख निष्कोण वक्र हैं। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि f_1, f_2, और f_3 अवकलनीय हैं।

इन उदाहरणों में दिए हुए समीकरण $F(x,y) = 0$ के संगत हम कुछ ऐसे फलन ज्ञात कर सके हैं जो $F(x,f(x)) = 0$ को संतुष्ट करते हों। लेकिन हम यह जानना चाहते हैं कि क्या कुछ ऐसे फलन हैं जिनमें सांतत्य अवकलनीयता आदि अच्छे गुणधर्म हों। अधिक परिशुद्ध रूप में हम निम्नलिखित प्रश्न का उत्तर प्राप्त करना चाहते हैं।

मान लीजिए $F : D \to \mathbf{R}$ एक दो चर वाला फलन है, जहाँ D, $\mathbf{R}^2$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। यदि किसी (a,b) के लिए $F(a,b) = 0$ हो, तो क्या समीकरण $F(x,y) = 0$ से a के एक प्रतिवेश पर परिभाषित एक संततत: अवकलनीय फलन g प्राप्त होता है, जो $g(a) = b$ को संतुष्ट करता है? अस्पष्ट फलन प्रमेय से इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त हो जाता है। इस प्रमेय के अनुसार कुछ अतिरिक्त प्रतिबंधों के अधीन हम सकारात्मक उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। अब हम इस प्रमेय का कथन दे रहे हैं।

प्रमेय 1 (अस्पष्ट फलन प्रमेय) : मान लीजिए F बिन्दु (a,b) के किसी प्रतिवेश N पर परिभाषित एक वास्तविक मान, संतत फलन है। यदि

i) $F(a,b) = 0$

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}$ का अस्तित्व है और वह N पर संतत है, और

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$,

तो a के किसी प्रतिवेश N_a पर परिभाषित एक ऐसे अद्वितीय फलन g का अस्तित्व होता है कि

i) $g(a) = b$

ii) $F(x,g(x)) = 0$ प्रत्येक $x \in N_a$ के लिए, और

iii) g संतत है।

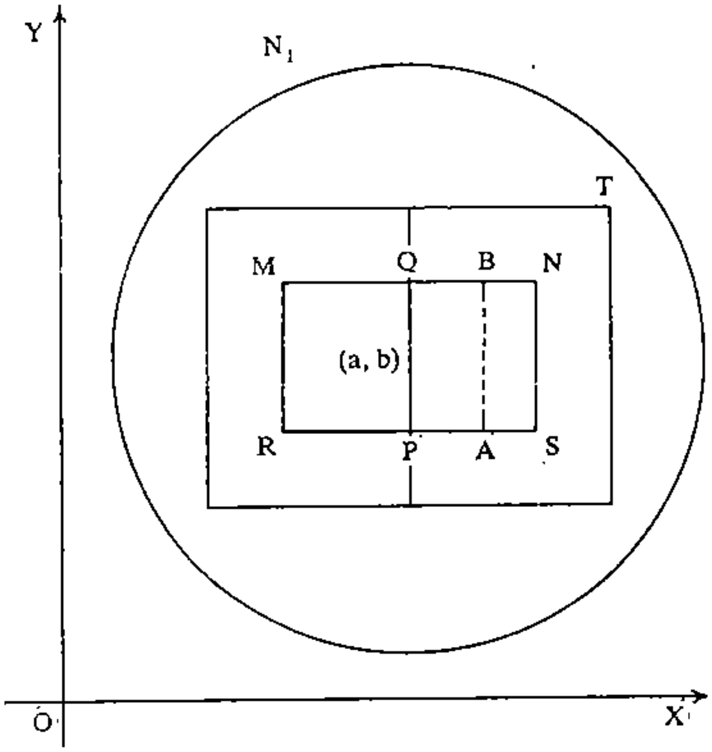
और, यदि N पर $\frac{\partial F}{\partial x}$ का भी अस्तित्व हो और वह संतत हो, तो g, N_a पर संततत: अवकलनीय होता है और

$$g'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(t,g(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t,g(t))}\ ,\ t \in N_2.$$

उपपत्ति : हम इस प्रमेय को तीन चरणों में सिद्ध करेंगे। चरण 1 में हम अद्वितीय फलन g के अस्तित्व को सिद्ध करेंगे। चरण 2 में हम सिद्ध करेंगे कि g संतत है और चरण 3 में हम g की अवकलनीयता को सिद्ध करेंगे।

चरण 1 : ध्यान दीजिए कि दिया हुआ फलन F ऐसा है कि $\frac{\partial F}{\partial y}$ का अस्तित्व है, वह संतत है और $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$

मान लीजिए $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ धनात्मक है। तब N में आविष्ट (a,b) का एक ऐसा प्रतिवेश N_1 होता है कि N_1 के सभी बिन्दुओं के लिए $\frac{\partial F}{\partial y}$ धनात्मक होता है (इकाई 4 का प्रमेय 6 देखिए)। अब हम N_1 में आविष्ट एक आयत T लेते हैं (चित्र 4 देखिए)।



चित्र 4

अब y-अक्ष के समांतर और (a,b) से होकर जाने वाली रेखा पर F के प्रतिबंध $\hat{F}$ पर विचार कीजिए। तब, $\hat{F}$ एक चर, y वाला एक फलन होता है। इस तरह

$\hat{F}(y) = F(a,y)$ और $\hat{F}'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0.$

कलन पाठ्यक्रम (इकाई 14) से हम जानते हैं कि यदि एक चर वाले फलन का अवकलज धनात्मक हो, तो वह फलन वर्धमान (increasing) होता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\hat{F}$ एक वर्धमान फलन है। अतः y-अक्ष के समांतर और (a,b) से होकर जाने वाली रेखा पर F वर्धमान होगा और, चूँकि F(a,b) = 0, इसलिए इस रेखा के किसी बिन्दु, मान लीजिए P, पर F ऋणात्मक होगा और किसी बिन्दु, मान लीजिए Q, पर धनात्मक। चित्र 4 देखिए।

आइए, अब हम इस बात को लागू करें कि F संतत है। चूँकि P पर F ऋणात्मक है, इसलिए x-अक्ष के समांतर और P से होकर जाने वाला एक ऐसा रेखा खंड RS होता है, जिस पर F ऋणात्मक होगा (चित्र 4 देखिए)। इसी प्रकार, चूँकि Q पर F धनात्मक है और संतत है, इसलिए x-अक्ष के समांतर और Q से होकर जाने वाले रेखा खंड MN पर यह धनात्मक होगा (चित्र 4 देखिए)। क्या आप हमारी इस बात से सहमत हैं कि हम ऐसे MN और RS ले सकते हैं कि वे लंबाई में बराबर हों?

इस तरह, हमें एक आयत MNRS = [c,d] × [e,f] प्राप्त होता है। तब अंतराल]c,d[के प्रत्येक x_0 पर हम MNRS में ऐसी रेखा AB प्राप्त कर सकते हैं जो y-अक्ष के समांतर हो और x_0 से होकर जाती हो। जैसे-जैसे y

का मान A पर अपने मान से B पर अपने मान की ओर जाता है, वैसे-वैसे F ऋणात्मक मान से धनात्मक मान की ओर जाता है। यहाँ ध्यान दीजिए कि AB पर x-निर्देशांक अचर है। अब, चूँकि $F(x_0,y)$, एक चर वाला संतत फलन है, इसलिए मध्यवर्ती मान प्रमेद (intermediate value theorem) से हम यह कह सकते हैं कि $F(x_0, y)$, रेखा AB के किसी विन्दु (x_0, y_0) पर शून्य होगा। और आयत T पर $\frac{\partial F}{\partial y}$ धनात्मक है। इससे यह अर्थ निकलता है कि फलन $y \to F(x_0,y)$ का अवकलज, जो $\frac{\partial F}{\partial y}$ के बराबर है, AB पर धनात्मक है। इसका मतलब यह है कि AB के अनुदिश फलन $y \to F(x_0, y)$, वर्धमान है। इस तरह, हम यह पाते है कि AB पर F केवल एक बार शून्य होता है। अर्थात् x_0 के संगत एक अद्वितीय y_0 होता है, जिसके लिए $F(x_0,y_0) = 0$ (ध्यान दीजिए कि $x = a \in]c,d[$ के संगत एक अद्वितीय मान b ऐसा है कि $F(a,b) = 0$.)

अतः संगति $g : x_0 \to y_0$ एक फलन है। अंतराल $]c,d[$, g का प्रांत है। इस तरह हमने a के प्रतिवेश $N_a =]c,d[$ पर एक ऐसे फलन g को परिभाषित किया है कि $g(a) = b$ और सभी $x \in N_a$ के लिए $F(x,g(x)) = 0$. ध्यान दीजिए कि $]c,d[$ पर परिभाषित फलन g का परिसर, $]e,f[$ में आविष्ट होता है।

चरण 2 : अब हम यह सिद्ध करेंगे कि g संतत है। इसके लिए हमें यह दिखाना है कि $x_0 \in N_a =]c,d[$ और $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो एक ऐसी संख्या $\delta > 0$ होती है कि $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ के लिए $| g(x) - g(x_0) | < \varepsilon$.

उचित PQ लेकर और ऊपर दिए गए तर्क को दुबारा लागू करके हम यह दिखा सकते हैं। हम ऐसा PQ लेते हैं कि PQ की लंबाई 2ε से अधिक न हो और इसका केन्द्र y_0 हो। PQ को चुन लेने पर आप यह देख सकते हैं कि शेष उपपत्ति इस बात पर निर्भर नहीं करती कि हमने कैसा PQ चुना है। इस तरह, हमें वही फलन g प्राप्त होता है ताकि सभी $x \in]c,d[$ के लिए $F(x,g(x)) = 0$.

अब ऐसा δ लीजिए कि $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $]c,d[$ में आविष्ट हो।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक $x \in]c,d[$ के लिए $(x,g(x))$ एक रेखा AB पर स्थित होता है, जो MNRS में PQ के समांतर है। अतः हमें सभी $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ के लिए $| g(x) - g(x_0) | < \varepsilon$ प्राप्त होता है।

यह बात $]c,d[$ के सभी x_0 के लिए सही है। अतः g पूरे अंतराल में संतत है।

चरण 3 : अब हमें यह सिद्ध करना रह जाता है कि g अवकलनीय है और $]c,d[$ पर इसका अवकलज संतत है। इसे सिद्ध करने के लिए हम इस तथ्य का प्रयोग करेंगे कि $\frac{\partial F}{\partial x}$ का अस्तित्व है और यह N पर संतत है।

g की अवकलनीयता प्राप्त करने के लिए हमें

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

पर ध्यान देना होता है।

दो चरों वाले फलनों के माध्यमान प्रमेय के अनुसार $(x,g(x))$ और $(x+h, g(x+h))$ को मिलाने वाले रेखा खंड पर स्थित किसी (α, β) के लिए

हम यह मान लेते है कि h इतना छोटा है कि $(x+h, g(x+h))$, T में स्थित है।

$$F(x+h, g(x+h)) - F(x, g(x))$$
$$= h\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,\beta) + [g(x+h)-g(x)]\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha,\beta) \quad \ldots (3)$$

परंतु g की परिभाषा से, T में

$F(x,g(x)) = 0$ और $F(x+h, g(x+h)) = 0$.

अतः (3) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,\beta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\alpha,\beta)} \quad \ldots (4)$$

ध्यान दीजिए कि T पर $\frac{\partial F}{\partial y}$ शून्येतर है।

पहले हम यह देखते हैं कि चूँकि g संतत है, इसलिए

$g(x+h) \to g(x)$, जबकि $h \to 0$.

इसलिए, $(\alpha,\beta) \rightarrow (x, g(x))$, जबकि $h \rightarrow 0$.

अतः चूँकि $\frac{\partial F}{\partial y}$ और $\frac{\partial F}{\partial x}$ संतत हैं, इसलिए

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha,\beta) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x)) \text{ और}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,\beta) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)).$$

इस तरह (4) के दोनों पक्षों की सीमा लेने पर हमें प्राप्त होता है,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))}.$$

अतः g अवकलनीय है।

अब, चूँकि $\frac{\partial F}{\partial x}$ और $\frac{\partial F}{\partial y}$ संतत हैं, इसलिए g' संतत होगा। इस तरह, प्रमेय 1 की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि प्रमेय 1 से केवल यह बात ही निश्चित हो पाती है कि एक अद्वितीय फलन g का अस्तित्व है। इससे g के लिए कोई स्पष्ट सूत्र प्राप्त नहीं होता।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 3 : आइए हम समीकरण

$F(x,y) = xy + x^2 = 0$

के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय को सत्यापित करें।

पहले हम यह पाते हैं कि $F(x, y) = xy+y^2$, $\mathbf{R}^2$ पर परिभाषित एक संतत फलन है। तब हम वे बिन्दु (x,y) प्राप्त करते हैं जिन पर

$F(x,y) = xy + x^2 = 0.$

$xy + x^2 = 0 \Rightarrow x(x + y) = 0$

तब, या तो $y = -x$ या $x = 0$.

अतः $(x, -x)$, $x \neq 0$ और $(0,0)$ वे बिन्दु हैं जिन पर $F(x,y) = 0$. आइए हम बिन्दु $(x, -x)$, $x \neq 0$ लें।

अब $\frac{\partial F}{\partial y} = x$, $\mathbf{R}^2$ में एक संतत फलन है और

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, -x) = x$, जो कि शून्येतर है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि F, प्रमेय 1 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। इसलिए प्रमेय 1 के अनुसार, x के एक प्रतिवेश में परिभाषित एक ऐसे अद्वितीय फलन g का अस्तित्व होता है कि $g(x) = -x$ और g संतत है और, चूँकि $\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2x$ भी (संततः) है, इसलिए g संततः अवकलनीय होता है और

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$$

$$= -\frac{y+2x}{x}, x \neq 0$$

$$= -1, \text{ क्योंकि } y = -x.$$

वास्तव में, आप सीधे समीकरण से ही यह देख सकते हैं कि फलन g, $g(x) = -x$ होता है।

अब, जब हम मूल बिन्दु (0,0) लेते हैं, तब $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$. इसलिए इस स्थिति में हम x के फलन के रूप में y या y के फलन के रूप में x प्राप्त करने के लिए प्रमेय 1 लागू नहीं कर सकते।

इस संबंध में हम एक और उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 4 : आइए हम यह दिखाएँ कि $x = 2$ के प्रतिवेश में समीकरण

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 4 = 0 \qquad \ldots\ldots (5)$$

द्वारा परिभाषित एक ऐसे संततत: अवकलनीय फलन g का अस्तित्व होता है कि $g(2) = 2$, और इसका अवकलज भी ज्ञात करें।

पहले हम देखते हैं कि $F(2,2) = 0$ और

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y.$$

$\therefore \frac{\partial F}{\partial y}(2,2) = 6 \neq 0$ और $\frac{\partial F}{\partial y}$ सर्वत्र संतत है।

इसलिए प्रमेय 1 के अनुसार $x = 2$ के एक प्रतिवेश में $g(x) = y$ से परिभाषित एक अद्वितीय फलन g का अस्तित्व होता है, जहाँ $F(x,y) = 0$ और जिससे कि $g(2) = 2$. और चूँकि $\frac{\partial F}{\partial x}$ संतत है, इसलिए प्रमेय 1 के ही अनुसार 2 के प्रतिवेश में सभी x के लिए

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}.$$

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E1) $F(x,y) = x^2 - y^2 = 0$ के लिए बिन्दु (1,1) और (1,–1) पर प्रमेय 1 लागू कीजिए। क्या बिन्दु (0,0) पर प्रमेय लागू होता है?

E2) समीकरण $F(x,y) = x^5 + y^5 - 16x^3y - 1 = 0$ लीजिए। $F(x,y)$ के लिए बिन्दु (1,2) पर प्रमेय 1 लागू कीजिए और यह देखिए कि क्या (1,2) के किसी प्रतिवेश में इस समीकरण द्वारा परिभाषित एक ऐसा फलन g होता है जिससे कि $g(1) = 2$.

E3) दिखाइए कि समीकरण $2xy - \ln xy = 2$ से बिन्दु $x = 1$ के आस-पास एक ऐसा हल ϕ प्राप्त होता है कि $\phi(1) = 1$. इस हल का प्रथम अवकलज ज्ञात कीजिए।

अगले उपभाग में हम तीन चरों वाले फलनों के अस्पष्ट फलन प्रमेय पर चर्चा करेंगे।

10.2.2 तीन चरों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय

इस उपभाग में पहले हम तीन चरों वाले फलनों के अस्पष्ट फलन प्रमेय की चर्चा उस रूप में करेंगे जो कि प्रमेय 1 का सीधा व्यापकीकरण है। इसके बाद हम देखेंगे कि किस प्रकार अधिक जटिल स्थितियों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय में जैकोबियन महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मान लीजिए हम समीकरण $F(x,y,z) = 0$ के किसी एक चर का हल उसे अन्य चरों के फलन के रूप में लिखकर प्राप्त करना चाहते हैं। अर्थात् मान लीजिए हम x और y के पदों में z को हल करना चाहते हैं। इस स्थिति में हमें दो चरों x और y वाला एक ऐसा फलन f प्राप्त करना होता है जिससे कि सभी x,y के लिए

$$F(x,y,f(x,y)) = 0.$$

अब हम एक ऐसे प्रमेय का कथन देंगे जो कि प्रमेय 1 के ही समान है और जिससे यह सुनिश्चित हो जाता है कि ऊपर दिये गये फलन $f(x,y)$ का अस्तित्व है। प्रमेय 1 की स्थिति की तरह इस फलन $f(x,y)$ के भी संतत आंशिक अवकलज होते हैं। अतः यह फलन विचाराधीन बिन्दु के एक प्रतिवेश में संततत: अवकलनीय है। इसकी उपपत्ति प्रमेय 1 की उपपत्ति के ही समान है। परंतु यहाँ हम उपपत्ति नहीं दे रहे हैं क्योंकि उपपत्ति की विधि को आगे की किसी भी चर्चा में लागू नहीं किया गया है। फिर भी, यहाँ हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस प्रमेय को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

प्रमेय 2 : मान लीजिए $F(x,y,z)$ तीन चरों वाला एक वास्तविक मान फलन है जो $\mathbf{R}^3$ में बिन्दु $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ के एक प्रतिवेश में संततत: अवकलनीय है। मान लीजिए कि $F(P_0) = 0$ और $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$. तब एक ऐसे अद्वितीय फलन f का अस्तित्व होता है जो $\mathbf{R}^2$ में (x_0, y_0) के एक प्रतिवेश N में संततत: अवकलनीय है, $f(x_0, y_0) = z_0$ और N के सभी (x,y) के लिए $F(x,y,f(x,y)) = 0$.

अब हम प्रमेय 2 को एक अन्य रूप में प्रस्तुत करेंगे। प्रमेय 2 के समीकरण $F(x,y,z) = 0$ से हम

$$T(x,y,z) = (x,y,F(x,y,z)) \qquad \ldots\ldots (6)$$

द्वारा दिया गया एक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

प्राप्त करते हैं।

इकाई 9 में आप रूपांतरणों के जैकोवियन प्राप्त करने की विधि से परिचित हो चुके हैं। अब बिन्दु $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ पर (6) द्वारा परिभाषित रूपांतरण T का जैकोवियन है :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$$

इसका अर्थ यह है कि प्रमेय 2 के प्रतिबंध "बिन्दु P_0 पर $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$" के स्थान पर इस प्रतिबंध को प्रयोग किया जा सकता है कि "P_0 पर T का जैकोबियन शून्येतर होता है"। वास्तव में कुछ अधिक जटिल स्थितियों में, जहाँ हम समीकरण निकाय का हल प्राप्त करना चाहते हैं, जैकोबियन का शून्य न होना एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। अब हम प्रमेय 2 का एक सरल उदाहरण देंगे।

उदाहरण 5 : $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

द्वारा दिया गया फलन $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ लीजिए।

मान लीजिए हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि क्या समीकरण $F(x,y,z) = 0$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ के किसी प्रतिविश में एक ऐसे अद्वितीय फलन को परिभाषित करता है कि

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

पहले हम यह देखते हैं कि

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

अब, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ और $\frac{\partial F}{\partial z} = 22.$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि F संततः अवकलनीय है, क्योंकि इसके सभी आंशिक अवकलज संतत हैं।

और, $\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \neq 0.$

इस तरह हम यह पाते हैं कि F, प्रमेय 2 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। अतः दिया हुआ समीकरण $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ के एक प्रतिवेश में एक ऐसे अद्वितीय फलन f को परिभाषित करता है कि $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

अगले उदाहरण में आप प्रमेय 2 का एक अनुप्रयोग देख सकते हैं।

उदाहरण 6 : मान लीजिए f एक चर वाला ऐसा संततः अवकलनीय फलन है जिससे कि $f(1) = 0$. मान लीजिए हम वे प्रतिबंध मालूम करना चाहते हैं जिनके अधीन समीकरण

$$F(x,y,z) = f(xy) + f(yz) = 0$$

को (1, 1, 1) के प्रतिवेश में z के लिए x और y के पदों में हल किया जा सकता है।

अब चूँकि f संततः अवकलनीय है, और $\frac{\partial F}{\partial x} = yf'(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = xf'(xy) + zf'(yz)$ और $\frac{\partial F}{\partial z} = y\,f'(yz)$,

इसलिए हम यह कह सकते हैं कि F एक संततः अवकलनीय फलन है।

और, $F(1, 1, 1) = 0.$

साथ ही, $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = f'(1).$

इसलिए यदि हम यह प्रतिबंध कि $f'(1) \neq 0$ लगा दें, तो F प्रमेय 2 के सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करेगा। इस तरह, यदि $f'(1) \neq 0$, तो प्रमेय 2 से हम $(1, 1, 1)$ के एक प्रतिवेश में z को x और y के पदों में लिख सकते हैं।

उदाहरण 7 : आइए हम इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करें : क्या उस पृष्ठ को, जिसका समीकरण $x+y+z-\sin(xyz) = 0$ है, बिन्दु $(0,0)$ के एक प्रतिवेश में $z = f(x,y)$ के रूप के एक ऐसे समीकरण से व्यक्त किया जा सकता है, जिससे कि $f(0,0) = 0$?

इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम समीकरण

$F(x,y,z) = x + y + z - \sin(x\,y\,z) = 0$

पर प्रमेय 2 लागू करते हैं। यह जाँच कीजिए कि F एक संततः अवकलनीय फलन है और $F(0, 0, 0) = 0$.

और, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos(x\,y\,z)$.

इस तरह,

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = 1 \neq 0.$

इसलिए, प्रमेय 2 के अनुसार $(0,0)$ के एक प्रतिवेश का अस्तित्व है और इस पर परिभाषित एक ऐसा संततः अवकलनीय फलन f होता है, जिससे कि $(0, 0, 0)$ के एक प्रतिवेश में $z = f(x,y)$ से वही पृष्ठ प्राप्त होता है जो कि $F(x,y,z) = 0$ से प्राप्त होता है।

यहाँ हम अस्पष्ट फलन प्रमेय के अतिव्यापक रूप का कथन देना चाहेंगे। $n = 3$, $m = 2$ पर इस प्रमेय की एक विशेष स्थिति का प्रयोग इकाई 9 के प्रमेय 3 को सिद्ध करने में किया गया था।

प्रमेय 3 : मान लीजिए $F_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ बिन्दु (a,u) (जहाँ $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$) के प्रतिवेश N में परिभाषित $n + m$ चरों वाले ऐसे m फलन हैं कि

i) $F_j(a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots, u_m) = 0$, $1 \leq j \leq m$

ii) प्रत्येक j, $1 \leq j \leq n$ के लिए F_j संततः अवकलनीय है,

iii) बिन्दु $(a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots, u_m)$ पर $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)} \neq 0.$

तब N चरों वाले ठीक m फलनों g_i का अस्तित्व होता है ताकि प्रत्येक g_i, $(a_1, \ldots, a_n)$ के प्रतिवेश S में परिभाषित हो और

i) $g_i(a_1, \ldots, a_n) = u_i$, $1 \leq i \leq m$.

ii) $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ और $i = 1, 2, \ldots, m$ के लिए $F_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_m) = 0$.

iii) S में प्रत्येक g_i संततः अवकलनीय हो।

हम यहाँ इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे। न ही हम आपसे इसके कथन को याद कर लेने की अपेक्षा करते हैं।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल करें।

E4) निम्नलिखित फलनों $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ में से प्रत्येक के लिए यह दिखाइए कि समीकरण $F(x,y,z) = 0$, दिये हुए बिन्दु (a,b) के प्रतिवेश में एक संततः अवकलनीय फलन $z = f(x,y)$ को परिभाषित करता है।

क) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2$, $(1,1)$ पर ताकि $f(1,1) = 1$.

ख) $F(x,y,z) = x^2 + y^3 - xy\sin z$, $(1, -1)$ पर ताकि $f(1, -1) = 0$.

इकाई 9 में हमने दो फलनों की फलनिक आश्रितता पर चर्चा की थी। वहाँ हमने यह भी सिद्ध किया था कि यदि दो अवकलनीय फलन $f(x,y)$ और $g(x,y)$ किसी प्रांत $D \subset \mathbf{R}^2$ पर फलनिकतः आश्रित हों, तो D के सभी (x,y) के लिए जैकोबियन $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$.

वहाँ हमने यह टिप्पणी दी थी कि इस परिणाम का विलोम भी सही होता है। अब हम इस विलोम को सिद्ध कर सकते हैं। इसकी उपपत्ति अस्पष्ट फलन प्रमेय का एक अनुप्रयोग है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए $u = f(x,y)$ और $v = g(x,y)$, एक विवृत गोले S में परिभाषित वास्तविक मान फलन हैं, जो संततः अवकलनीय भी हैं। यदि सभी $(x,y) \in S$ के लिए

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$,

तो S में u और v फलनिकतः आश्रित होते हैं।

जबकि परिभाषा के अनुसार

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

यदि इस सारणिक की सभी प्रविष्टियां (entries) S में अभिन्नतः शून्य हों, तो इकाई 9 के प्रमेय 5 के अनुसार u और v अचर होते हैं। अतः वे फलनिकतः आश्रित हैं। अब मान लीजिए कि कम से कम एक ऐसी प्रविष्टि का अस्तित्व है जो S में अभिन्नतः शून्य नहीं है। आइए हम यह मान लें कि किसी बिन्दु $(a,b) \in S$ पर $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. अब तीन चरों x, y और u वाला समीकरण

$F(x,y,u) = f(x,y) - u = 0$

लीजिए। स्पष्ट है कि फलन $F(x,y,u)$, बिन्दु (a,b,u_0), जहाँ $u_0 = f(a,b)$, के किसी प्रतिवेश में परिभाषित है। चूंकि बिन्दु (a,b,u_0), पर $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, इसलिए हम x को y और u के एक फलन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जो (b, u_0) के प्रतिवेश N में परिभाषित है।

यदि $x = \phi(y, u)$, तो ऐसे $\delta^* > 0$ का अस्तित्व होता है कि $y \in]b-\delta^*, b+\delta^*[$ और $u \in]u_0-\delta^*, u_0+\delta^*[$ के लिए $v - g(\phi(y,u), y) = 0$ या $v = G(y,u)$.

अब हम यह दिखाएंगे कि ऐसे $\delta > 0$ का अस्तित्व होता है कि सभी $y \in]b-\delta, b+\delta[$ के लिए $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$. इससे यह सिद्ध हो जाता है कि G केवल u चर का एक फलन है (इकाई 9 का E11 देखिए)।

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y}.$$

लेकिन हम जानते हैं कि

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}$$

हम यह भी जानते हैं कि (a,b) पर $\frac{\partial u}{\partial x}$ संतत है और $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$. इसलिए (a,b) के एक प्रतिवेश का अस्तित्व होता है जिसमें $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$. अर्थात् एक ऐसे $\delta > 0$ $(\delta < \delta^*)$ का अस्तित्व होता है जिससे कि $x \in]a-\delta, a+\delta[$ और $y \in]b-\delta, b+\delta[$ के लिए $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ अतः $y \in]b-\delta, b+\delta[$ के लिए $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$.

इस तरह उपपत्ति पूरी हो जाती है।

शायद आपको यह उपपत्ति कुछ कठिन लगी है। परन्तु हमें विश्वास है कि यदि आप इसे फिर से पढ़ें, तो आप इसे ठीक से समझ जाएंगे। नीचे दिया गया उदाहरण इस प्रमेय की उपयोगिता को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 8 : आइए दिखाएं कि

$$u = 2\ln x + \ln y,\ v = e^{x\sqrt{y}}\ (x,y > 0) \qquad \ldots\ldots (8)$$

के बीच एक फलनिक संबंध है। इस संबंध को निर्धारित भी करें।

चूंकि

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{y} \\ \sqrt{y}\, e^{x\sqrt{y}} & e^{x\sqrt{y}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{vmatrix} = 0,$$

इसलिए प्रमेय 4 के अनुसार u और v के बीच एक फलनिक संबंध है। समीकरण (8) के पहले समीकरण को y के लिए हल करने पर हमें $y = \frac{e^u}{x^2}$ प्राप्त होता है। y के इस मान को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\ln v = x\sqrt{y} = e^{u/2}.$$

अर्थात् $e^{u/2} - \ln v = 0$.

अब यहाँ हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी दे रहे हैं।

टिप्पणी 1 : i) प्रमेय 4 की यह परिकल्पना कि एक विवृत गोले पर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$, आवश्यक होती है। उदाहरण के लिए यदि $u = x^3$, $v = y^3$, तो $(0,0)$ पर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$. परंतु $(0,0)$ को आविष्ट करने वाले किसी भी पूरे विवृत गोले पर इस जैकोवियन का लोपन नहीं होता। आप भी हमारे इस कथन से सहमत होंगे कि u और v किसी फलनिक संबंध से जोड़ा नहीं जा सकता।

ii) प्रमेय 4 को तीन चरों वाले तीन फलनों पर भी लागू किया जा सकता है।

अब हम अगले भाग में व्युत्क्रमणीयता की समस्या पर पुनः विचार करेंगे, जिसकी रूपरेखा हम इकाई 9 में दे चुके हैं। परंतु इससे पहले हम आपके लिए एक प्रश्न दे रहे हैं।

E5) दिखाइए कि निम्नलिखित फलन युग्म फलनिकतः आश्रित हैं।

क) $f(x,y) = e^{x-y}$, $g(x,y) = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y}$

ख) $u = x^2 + 2xy + y^2$

$v = 3x + 3y$

10.3 प्रतिलोम फलन प्रमेय

आइए यहाँ हम एक चर वाले फलनों से संबंधित कुछ तथ्यों को फिर से दोहरा लें।

मान लीजिए f, R के किसी विवृत उपसमुच्चय D पर परिभाषित एक वास्तविक मान, संततः अवकलनीय फलन है। यदि किसी बिन्दु $x_0 \in D$ के लिए $f'(x_0) \neq 0$, तो x_0 के एक प्रतिवेश, $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ में f' शून्येतर होता है। वस्तुतः I में $f'(x)$ का वही चिह्न होता है जो $f'(x_0)$ का है। यदि $f'(x_0) > 0$, तो I में $f(x)$ निरंतर वर्धमान होता है और यदि $f'(x_0) < 0$, तो I में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान होता है। लेकिन हर स्थिति में I पर f एकैकी (one-one) होता है और $f(I)$ एक विवृत अंतराल है, जिसमें $f(x_0)$ आविष्ट है। इस तरह हम यह पाते हैं कि फलन $f : I \to f(I)$ एकैकी और आच्छादी (onto) है। अतः I पर यह व्युत्क्रमणीय है। आपको यह भी याद होगा (कलन पाठ्यक्रम के भाग 4.3 का प्रमेय 1) कि $f(x_0)$ पर फलन $f^{-1} : f(I) \to I$ अवकलनीय होता है और

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

इस तरह यदि प्रत्येक $x \in D$ के लिए $f'(x_0) \neq 0$, तो ऊपर की गई चर्चा D के प्रत्येक बिन्दु पर लागू होगी।

ठीक इसी प्रकार का परिणाम अनेक चरों वाले फलनों के लिए भी सही होता है। इस परिणाम को "प्रतिलोम फलन प्रमेय" (inverse function theorem) के नाम से जाना जाता है। इस भाग में हम अनेक चरों वाले फलनों के लिए इस प्रमेय का कथन देंगे और दो तथा तीन चरों वाले फलनों के उदाहरण लेकर इसे समझाने का प्रयास करेंगे। यहाँ हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं, क्योंकि उपपत्ति पाठ्यक्रम के क्षेत्र के बाहर है। इस प्रमेय का कथन देने से पहले हम प्रतिलोम फलन की परिभाषा से आपको फिर से परिचित करा देना चाहते हैं और साथ ही कुछ उदाहरण भी दे देना चाहते हैं।

परिभाषा 1 : प्रांत $D \subset R^n$ और परिसर $D^* \subset R^n$ वाले फलन f को D पर **व्युत्क्रमणीय** कहा जाता है, यदि एक ऐसे फलन $g : D^* \to D$ का अस्तित्व हो कि प्रत्येक $P \in D$ और $Q \in D^*$ के लिए $g(f(P)) = P$ और $f(g(Q)) = Q$.

आपको याद होगा कि D पर $f : D \to D^*$ व्युत्क्रमणीय होता है यदि और केवल यदि f एकैकी हो (यह पहले से ही आच्छादी है)। इसके अतिरिक्त f से फलन g अद्वितीयतः निर्धारित हो जाता है और इसे f का **प्रतिलोम** (inverse) कहा जाता है। इसे प्रायः f^{-1} से प्रकट किया जाता है।

हम निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से इस परिभाषा की व्याख्या करेंगे।

उदाहरण 9 : मान लीजिए D, R^2 का एक उपसमुच्चय है और $D = \{(r,\theta) \mid r > 0, 0 < \theta < \pi\}$. D पर फलन F को

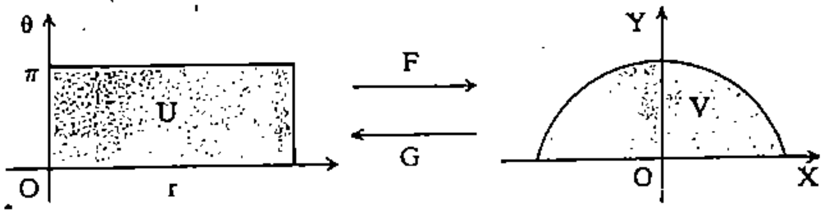
$F(r,\theta) = (f(r,\theta), g(r,\theta))$

से परिभाषित कीजिए, जहाँ

आप यह जानते हैं कि R^2 से R^2 पर प्रतिचित्र F, निर्देशांक फलन $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ से प्राप्त होता है।

$f(r,\theta) = r\cos\theta$; $g(r,\theta) = r\sin\theta$.

पहले हम यह देखते हैं कि इस प्रतिचित्र में D का प्रतिबिंब, D', उपरि अर्ध समतल (upper half plane) होता है, क्योंकि $D' = \{(x,y) \mid y > 0\}$. यहाँ हम $y > 0$ लेते हैं क्योंकि $r > 0$ और $0 < \theta < \pi$ (चित्र 5 देखिए)।



चित्र 5

r और θ के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ और $\theta = \cos^{-1}\frac{x}{r}$.

तब प्रतिलोम प्रतिचित्र $G : D' \to D$ यह होता है :

$G(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \cos^{-1}\frac{x}{r})$

अभी तक बिन्दु $a \in \mathbf{R}^n$ के प्रतिवेश से हमारा मतलब रहा है त्रिज्या r वाला एक विवृत गोला, $S(a,r) = \{x \mid |x-a| < r\}$. परंतु अब हम $\mathbf{R}^n$ के उन समुच्चयों U को भी a के प्रतिवेश मानेंगे जो एक उचित r के लिए विवृत गोले $S(a,r)$ को आविष्ट करते हों। वस्तुतः यही यूक्लिडीय समष्टि में प्रतिवेश की परिभाषा है। इसका उल्लेख हमने पहले नहीं किया था क्योंकि वहाँ ऐसा करने की कोई विशेष आवश्यकता नहीं थी। इस तरह, हम यह पाते हैं कि संवृत चक्रिका $\{(x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$ भी $(2,0)$ का एक प्रतिवेश है। यही कारण है कि $\mathbf{R}^3$ या कोई भी विवृत समुच्चय अपने प्रत्येक बिन्दु का एक प्रतिवेश होता है।

बिन्दु के प्रतिवेश की इस नई व्याख्या को ध्यान में रखकर अब हम निम्नलिखित परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $f : D \to \mathbf{R}^n$, $D \subset \mathbf{R}^n$. f को बिन्दु $p \in D$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय (locally invertible) कहा जाता है, यदि D में आविष्ट p के एक प्रतिवेश N का और f(p) के एक प्रतिवेश N^* का अस्तित्व हो, जिससे कि

i) $f(N) = N^*$ और

ii) N पर f, (1 – 1) हो।

यह परिभाषा नीचे दिए गए उदाहरण से और स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 10 : रूपांतरण $f(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$ लीजिए। यह $\mathbf{R}^2$ को $\mathbf{R}^2$ पर प्रतिचित्रित करता है। फिर भी, पूर्ण समतल में यह 1 – 1 नहीं होता, क्योंकि $f(1,1) = f(-1,-1) = (2,0)$. अतः यह व्युत्क्रमणीय नहीं है। व्यापक रूप में, $f(p) = f(-p)$. परंतु यदि हम $D = \{(x,y) \mid x > 0\}$ लें, तो D पर प्रतिबंधित f, 1 – 1 होता है। इसे देखने के लिए आइए हम $f(x,y) = f(a,b)$ लें। अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $x = a$ और $y = b$.

यह दिया हुआ है कि $f(x,y) = f(a,b)$. अतः $2xy = 2ab$ और $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$.

अर्थात् $x^2 - y^2 - a^2 + b^2 = 0$.

इसलिए $x \neq 0$ लेने पर $y = \dfrac{ab}{x}$. और तब y के इस मान को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$0 = x^4 - a^2b^2 - x^2a^2 + x^2b^2$ (क्योंकि $xy = ab$)

$= (x^2 + b^2)(x^2 - a^2)$.

इस तरह $x^2 - a^2 = 0$ या $x^2 + b^2 = 0$. परंतु चूँकि $x^2 + b^2$ शून्य नहीं हो सकता, इसलिए $x^2 = a^2$.

और चूँकि D पर $x > 0$ और $a > 0$, इसलिए $x = a$. तब $xy = ab$ से $y = b$ प्राप्त हो जाता है। इस तरह हम यह पाते हैं कि f, विवृत अर्ध-समतल D को $\mathbf{R}^2$ पर एकैक विधि से प्रतिचित्रित करता है।

अब हम यह दिखाएंगे कि

$D^* = \{(u,v) \mid v > 0,$ यदि $u = 0\}$

$= \mathbf{R}^2 \setminus$ ऋणात्मक y-अक्ष,

f का परिसर है।

यदि $u = 0$, तो y को भी शून्य होना होता है, क्योंकि D में $u = 2xy$ और $x > 0$. इस स्थिति में $v = x^2 > 0$. अतः ऋणात्मक y-अक्ष का कोई भी बिन्दु f के अधीन D के किसी बिन्दु का प्रतिबिंब नहीं हो सकता। ध्यान दीजिए कि हर $(x, y) \in D^*$ के लिए (x,y) के आसपास की एक विवृत चक्रिका D^* में आविष्ट होती है। यदि $u \neq 0$, तो $(u,v) = f(x,y)$, जहाँ

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{v + \sqrt{u^2+v^2}}{2}\right)^{1/2} \\ y &= u\,(2v + 2\sqrt{u^2+v^2})^{-1/2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (9)$$

इसके सत्यापन को हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (E6 देखिए)।

अब f, समुच्चय D के प्रत्येक बिन्दु पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है। इसका कारण यह है कि चूँकि समुच्चय D और D^* विवृत हैं, इसलिए इन्हें इनके प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश माना जा सकता है। इस तरह, D के हर बिन्दु के लिए स्थानिक व्युत्क्रमणीयता की दोनों आवश्यकताएँ संतुष्ट हो जाती हैं। लेकिन ऊपर परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(0, 0)$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय नहीं है। इसका कारण यह है कि यदि $(0,0)$ का कोई प्रतिवेश N दिया हुआ हो, तो हम ऐसे $x, y \in \mathbf{R}$ प्राप्त कर सकते हैं, कि $(x,y) \in N$ और $(-x, -y) \in N$, और हम यह जानते हैं कि $f(x,y) = f(-x, -y)$, इसलिए N पर f, $(1-1)$ नहीं होता। $x < 0$ के लिए (x,y) पर f की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता की जाँच को हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (E7 देखिए)।

यहाँ हम एक और उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 11 : उदाहरण 9 में दिया गया फलन F लीजिए, जो $\mathbf{R}^2$ पर $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ से परिभाषित है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि चूँकि F एकैकी नहीं है, इसलिए यह फलन व्युत्क्रमणीय नहीं है। ध्यान दीजिए कि सभी θ के लिए $F(0,\theta) = (0,0)$. आइए अब हम यह देखें कि F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है कि नहीं। उदाहरण 9 से हम यह देख सकते हैं कि सभी बिन्दुओं (r, θ), जहाँ $r > 0$ और $0 < \theta < \pi$ हो, पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है। परंतु जब हम बिन्दु $(0,0)$ लेते हैं तो इस बिन्दु का कोई भी प्रतिवेश कुछ बिन्दुओं $(0,\theta)$, $\theta \neq 0$ को आविष्ट करता है और इन सभी बिन्दुओं का F के अधीन प्रतिबिंब है $(0,0)$ अर्थात् $(0,0)$ के किसी भी प्रतिवेश में, F एकैकी नहीं है। अतः $(0,0)$ पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय नहीं है। बाद में जब हम प्रमेय 5 का कथन देंगे तो आप देखेंगे कि यह फलन सभी बिन्दुओं (r, θ), $r \neq 0$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E6) (9) के संबंधों को सिद्ध कीजिए।

E7) दिखाइए कि उदाहरण 10 में परिभाषित फलन

$f(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$, (x,y) पर, जहाँ $x < 0$,

स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

अब हम प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दे सकते हैं जिससे हमें फलन की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता का एक पर्याप्त निकष (sufficient criterion) प्राप्त हो जाता है। इस प्रमेय का अध्ययन कर लेने पर आप यह पाएँगे कि ऊपर दिए गए उदाहरणों और प्रश्नों को आसानी से हल किया जा सकता है क्योंकि हम जैकोबियन का परिकलन करना जानते हैं।

प्रमेय 5 (प्रतिलोम फलन प्रमेय) : मान लीजिए $F_1, F_2, \ldots, F_n$, $D \subset \mathbf{R}^n$ पर परिभाषित n वास्तविक मान फलन हैं। मान लीजिए $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, D से $\mathbf{R}^n$ पर एक फलन है। यदि बिन्दु $P_0 = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ पर F संततः अवकलनीय हो और P_0 पर F का जैकोबियन अर्थात् $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ शून्येतर हो, तो P_0 पर फलन F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है और, F का स्थानिक प्रतिलोम F^{-1}, बिन्दु $F(P_0)$ पर संततः अवकलनीय होता है।

सदिश मान फलन $F = (f_1, \ldots, f_n)$ अवकलनीय (संततः अवकलनीय) होता है यदि $f_1, \ldots, f_n$ अवकलनीय (संततः अवकलनीय) हों।

मिसाल के तौर पर उदाहरण 10 लीजिए। यहाँ आप देख सकते हैं कि F का जैकोबियन $-4(x^2 + y^2)$ है, और इसलिए $(0,0)$ को छोड़कर अन्य सभी बिन्दुओं पर f व्युत्क्रमणीय है। हम सभी बिन्दुओं (x,y) (जहाँ $x > 0$) पर इसकी व्युत्क्रमणीयता की जांच पहले कर चुके हैं।

अब आप इस उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 12 : आइए हम $(0,1)$ पर

$F(x,y) = (y\sin x, x + y + 1)$

द्वारा दिए गए फलन $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता की जाँच करें। हम F पर प्रतिलोम फलन प्रमेय (प्रमेय 4) लागू करते हैं। पहले हम यह पाते हैं कि फलन F संततः अवकलनीय है क्योंकि दोनों ही फलन, $f(x,y) = y\sin x$ और $g(x,y) = x + y + 1$ संततः अवकलनीय हैं।

F का जैकोवियन है :

$$JF = \begin{vmatrix} y\cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y\cos x - \sin x$$

इसलिए JF $(0,1) = 1 \neq 0$. अतः प्रतिलोम फलन प्रमेय के अनुसार $(0,1)$ पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

E8) सिद्ध कीजिए कि $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ द्वारा दिया गया प्रतिचित्र $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, पूर्ण $\mathbf{R}^2$ पर व्युत्क्रमणीय नहीं है, लेकिन $\mathbf{R}^2$ के प्रत्येक बिन्दु पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

E9) बताइए कि दिए हुए बिन्दु पर निम्नलिखित प्रतिचित्र स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय हैं कि नहीं।

क) $(1,2)$ पर $F(x,y) = (x^3y + 1, x^2 + y^2)$

ख) $(1,4)$ पर $F(x,y) = (e^{xy}, \ln x)$

ग) $(\pi, \frac{\pi}{2})$ पर $F(x,y) = (\sin x, \cos xy)$

घ) (x,y,z) पर $F(x,y,z) = (x + y + z, e^x \cos z, e^x \sin z)$.

नीचे हम प्रमेय 5 के संबंध में एक महत्वपूर्ण टिप्पणी दे रहे हैं।

टिप्पणी 2 : प्रमेय 5 के अनुसार, परिभाषा प्रांत के एक बिन्दु पर जैकोवियन का शून्येतर होना यह सुनिश्चित करता है कि उस बिन्दु के प्रतिवेश में फलन का एक प्रतिलोम होता है। अब, मान लीजिए फलन के परिभाषा प्रांत के सभी बिन्दुओं पर जैकोवियन शून्येतर है। तब प्रमेय 5 से हम यह जानते हैं कि प्रत्येक बिन्दु का एक प्रतिवेश होता है, जिसमें फलन व्युत्क्रमणीय होता है। क्या इससे यह अर्थ निकलता है कि फलन पूर्ण प्रांत में व्युत्क्रमणीय है? इसका उत्तर है नहीं। E8) में हम पहले ही $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ पर एक ऐसा फलन देख चुके हैं जिसके लिए सभी $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ के लिए

$$JF = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

इस तरह $\mathbf{R}^2$ के सभी बिन्दुओं पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है। परंतु F, $\mathbf{R}^2$ पर व्युत्क्रमणीय नहीं है, क्योंकि यह $1-1$ नहीं है।

अतः प्रांत के सभी बिन्दुओं पर जैकोवियन के शून्येतर होने से यह अर्थ नहीं निकलता कि प्रांत में फलन व्युत्क्रमणीय है। यह भी नोट कीजिए कि किसी फलन का जैकोवियन किसी बिंदु पर शून्य होने के बावजूद भी वह फलन उस बिंदु पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय हो सकता है। उदाहरण के लिए, फलन $f(x,y) = (x^3, y^3)$ लीजिए। $(0,0)$ पर f का जैकोवियन 0 है। परंतु $]-1, 1[\times]-1, 1[$ में f व्युत्क्रमणीय है, और f का प्रतिलोम $(x,y) \to (x^{1/3}, y^{1/3})$ है।

हमारी इकाई यहाँ समाप्त होती है। इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है आइए उसका संक्षिप्त विवरण हम यहाँ दे दें।

10.4 सारांश

इस इकाई में हमने

1) दो और तीन चरों वाले फलनों के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन दिया है और दो चरों के लिए प्रमेय को सिद्ध किया है। दो चरों के लिए **अस्पष्ट फलन प्रमेय :**

मान लीजिए F, बिन्दु (a,b) के किसी प्रतिवेश N पर परिभाषित एक वास्तविक मान संतत फलन है। यदि

i) $F(a,b) = 0$,

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}$ का अस्तित्व हो और वह N पर संतत हो, और

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$,

तो a के किसी, प्रतिवेश N_a पर परिभाषित एक ऐसे अद्वितीय फलन g का अस्तित्व होता है कि

i) $g(a) = b$,

ii) प्रत्येक $x \in N_a$ के लिए $F(x,g(x)) = 0$ और

iii) g संतत है।

और यदि $\frac{\partial F}{\partial x}$ का भी अस्तित्व हो और यह N पर संतत हो तो N_0 पर g संततः अवकलनीय होता है और

$$g'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(t,g(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t,g(t))}, t \in N_0.$$

2) दो फलनों की फलनिक आश्रितता के लिए पर्याप्त प्रतिबंध प्राप्त किया : मान लीजिए $u = f(x,y)$ और $v = g(x,y)$, R^2 से R^2 पर फलन हैं जो विवृत गोले S में संततः अवकलनीय हैं।
तब S में u और v फलनिकतः आश्रित होते हैं, यदि

S के सभी बिन्दुओं पर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$.

3) R^n से R^n पर प्रतिचित्रों की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता परिभाषित की है।

4) **प्रतिलोम फलन प्रमेय** पर चर्चा की, जिससे स्थानिक व्युत्क्रमणीयता के लिए पर्याप्त प्रतिबंध प्राप्त होता है :
मान लीजिए $F = (F_1, \ldots, F_n)$, R^n से R^n पर एक फलन है जिसका प्रांत D है। यदि बिन्दु $P_0 = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ पर F संततः अवकलनीय हो और यदि P_0 पर F का जैकोबियन, अर्थात् $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ शून्येतर हो, तो P_0 पर फलन F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है। और बिन्दु $F(P_0)$ पर F का स्थानिक प्रतिलोम F^{-1} संततः अवकलनीय होता है।

10.5 हल और उत्तर

E1) $F(1,1) = 0$, $F(1,-1) = 0$, $F(0,0) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$ का अस्तित्व है और यह संतत है।

(1, 1) पर और (1, −1) पर $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

(0,0) पर $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ भी संतत है।

$\therefore$ (0,0) पर प्रमेय लागू नहीं होता। प्रमेय के अनुसार (1,1) के प्रतिवेश N पर परिभाषित संतत फलन g का अस्तित्व होता है जिससे कि $f(1) = 1$.

$F(x,g(x)) = 0 \ \forall x \in N$.

वस्तुतः आप यह देख सकते हैं कि $g(x) = x$.

$$g'(x) = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y} = 1.$$

इसी प्रकार आप (1,1) पर प्रमेय लागू कर सकते हैं। इस स्थिति में हमें g_1 प्राप्त होगा। $g_1(1) = -1$.

$F(x,g_1(x)) = 0 \ \forall x \in N_1$.

वस्तुतः $g_1(x) = -\sqrt{x^2}$.

$$g_1'(x) = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{x}{y} = \frac{x}{-\sqrt{x^2}} = -1.$$

E2) $F(1,2) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 5x^4 - 48x^2y$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 - 16x^3$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 64 \neq 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x}$ और $\frac{\partial F}{\partial y}$ संतत हैं।

इसलिए (1,2) के प्रतिवेश N पर परिभाषित एक ऐसे संतत फलन g का अस्तित्व होता है कि $g(1) = 2$.
और $F(x,g(x)) = 0 \ \forall x \in N$.

और, $g'(x) = \dfrac{-5x^4 + 48x^2y}{5y^4 - 16x^3}$

E3) मान लीजिए $F(x,y) = 2xy - \ln xy - 2$.

तब $F(1,1) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2y - \dfrac{1}{x}, \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2x - \dfrac{1}{y}, \dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0.$

$(1,1)$ के एक प्रतिवेश N में $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ और $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ संतत हैं।

अतः N पर परिभाषित एक ऐसे संतत फलन ϕ का अस्तित्व होता है कि $\phi(1) = 1$.

$$\phi'(x) = \frac{-(2y - \frac{1}{x})}{2x - \frac{1}{y}} = \frac{y(1-2xy)}{x(2xy-1)} = \frac{-y}{x}.$$

E4) क) $F(1,1,1) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - xz.$

$\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - xy.$

ये सभी संतत फलन हैं।

और, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 2 \neq 0.$

अतः प्रमेय 2 के अनुसार $(1,1)$ के प्रतिवेश में परिभाषित एक ऐसे संततत: अवकलनीय फलन f का अस्तित्व होता है कि $f(1,1) = 1$.

ख) ऊपर के ही समान

E5) क)

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ \dfrac{x-y-1}{\sqrt{(x-y)^2 - 2(x-y)}} & \dfrac{-(x-y-1)}{\sqrt{(x-y)^2-2(x-y)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -A \\ B & -B \end{vmatrix}, \text{ मान लीजिए}$$

$$= 0$$

अतः f और g फलनिकतः आश्रित हैं।

ख)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x + 2y & 2x + 2y \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

अतः u और v फलनिकतः आश्रित हैं।

ग) $u \neq 0 \Rightarrow 2xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0.$

और $y = \dfrac{u}{2x}$.

$\therefore v = x^2 - \dfrac{u^2}{4x^2}$

$\Rightarrow 4x^4 - 4x^2 v - u^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{4v + \sqrt{16v^2 + 16u^2}}{8}$

हमने दूसरे मूल को नहीं लिया है, क्योंकि तब यह अर्थ निकलेगा कि $x^2 < 0$.

$\therefore x^2 = \dfrac{v + \sqrt{v^2 + u^2}}{2}$

$\therefore x = \left[\dfrac{v + \sqrt{v^2 + u^2}}{2}\right]^{1/2}$

$\Longrightarrow y = u\,[2v + 2\sqrt{v^2 + u^2}\,]^{-1/2}$

E7) मान लीजिए $D_1 = \{(x,y) \mid x < 0\}$

तब D_1 तक प्रतिबंधित f, $1-1$ है।

इसकी उपपत्ति ठीक वैसी ही है जैसी कि उदाहरण 10 में दी गई है।

इस तरह, f, D_1 को R^2 पर एकैकी विधि से प्रतिचित्रित करता है।

अब, f का परिसर है,

$D_1^* = \{(u,v) \mid v > 0$ यदि $u = 0\}$

$= R^2 \setminus$ ऋणात्मक y-अक्ष

इसकी उपपत्ति भी ठीक उदाहरण 10 में दी गई उपपत्ति के समान है।

और, D_1^* विवृत है।

$\therefore f : D_1 \to D_1^*$, $1-1$ और आच्छादी है, जहां D_1 और D_1^* दोनों ही विवृत समुच्चय हैं।

$\therefore$ किसी भी बिंदु (x,y), $x < 0$, पर f स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

E8) $F(x,y) = F(x, y + 2\pi)\ \forall\, (x,y) \in R^2$.

अतः R^2 में F, $1-1$ नहीं है।

$\therefore$ पूर्ण R^2 पर F व्युत्क्रमणीय नहीं है।

अब

$$J\,F = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

$= e^{2x} \neq 0$, किसी $(x,y) \in R^2$ के लिए।

$\therefore$ प्रमेय 5 के अनुसार R^2 के प्रत्येक बिंदु पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

E9) क) $JF = \begin{vmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 6x^2y^2 - 2x^4.$

$JF\,(1,2) = 24 - 2 = 22 \neq 0.$

$\therefore$ (1,2) पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

ख) $J\,F = \begin{vmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \dfrac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -e^{xy}$

$\therefore JF\,(1,4) = -e^4 \neq 0.$

इसलिए (1,4) पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

ग) $(\pi, \frac{\pi}{2})$ पर F स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

घ) $J\,F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^x \cos z & 0 & -e^x \sin z \\ e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \end{vmatrix}$

$= -e^{2x} \sin^2 z - e^{2x} \cos^2 z$

$= -e^{2x} \neq 0$ किसी भी बिंदु (x,y,z) के लिए।

$\therefore$ दिया हुआ फलन R^3 के प्रत्येक बिंदु पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है।

शब्दावली

अस्पष्ट फलन प्रमेय	implicit function theorem
आकलन	estimation
आश्रितता	dependence
उच्चिष्ठ	maximum
एकपदी	monomial
क्रांतिक बिंदु	critical point
चरम मान	extreme value
जैकोबियन	Jacobian
जैकोबी आव्यूह	Jacobian matrix
टेलर प्रसार	Taylor expansion
त्रुटि पद	error term
निम्निष्ठ	minimum
पल्याण बिंदु	saddle point
प्रतिलोम फलन-प्रमेय	inverse function theorem
प्रतिवेश	neighbourhood
फलनिकतः आश्रित	functionally dependent
फलनिक संबंध	functional relation
व्युत्क्रमणीय	invertible
शृंखला नियम	chain rule
संततः अवकलनीय	continuously differentiable
स्तब्ध बिंदु	stationary point
स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय	locally invertible

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-07

उच्च स्तरीय कलन

खण्ड

4

बहु समाकलन

खण्ड 4 बहु समाकलन

यह खण्ड इस पाठ्यक्रम का अंतिम खण्ड है। पिछले खण्डों में आपने अनेक चरों वाले फलनों के अवकलन सिद्धांत का अध्ययन किया है। अर्थात् आपने इन फलनों की सीमा, सांतत्य, आंशिक अवकलज, अवकलनीयता और जैकोबियन जैसी संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। आपने यह भी देखा है कि किस प्रकार इन फलनों के चरम-बिन्दु प्राप्त किए जाते हैं। अब इस खण्ड में हम अनेक चरों वाले फलनों के समाकलों के बारे में अध्ययन करेंगे। इस खण्ड की पहली इकाई, अर्थात् इकाई 11 में हम दो चरों वाले फलनों पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। पहले हम संवृत आयतों पर फलनों की समाकलनीयता की चर्चा करेंगे। आपने कलन पाठ्यक्रम में निश्चित समाकल की संकल्पना का अध्ययन किया है। उसी का यह स्वाभाविक व्यापकीकरण है। यहां आप यह भी देखेंगे कि हम पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके कुछ प्रकार के फलनों के द्विक समाकलों के मान ज्ञात कर सकते हैं। हम परिबद्ध समुच्चयों पर भी द्विक समाकल परिभाषित करेंगे। परन्तु हम अपना अध्ययन केवल कुछ विशेष प्रकार के प्रदेशों तक ही सीमित रखेंगे।

इकाई 12 में हम पुनः इकाई 11 के ही मुद्दों को दोहराएंगे, मगर अब की बार हम 3 चरों के फलनों की चर्चा करेंगे।

इकाई 13 में हम द्विक और त्रिक समाकलों के कुछ अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे। इनकी मदद से क्षेत्रफल, आयतन, गुरुत्व केन्द्र, जड़त्व आघूर्ण आदि का परिकलन करने की विधि बताएंगे।

आखरी इकाई, इकाई 14 में रेखा समाकलों की चर्चा की गई है। इनसे हमें निश्चित समाकल की संकल्पना का एक और व्यापकीकरण प्राप्त होता है। हालांकि हम आकाश में रेखा समाकलों की भी चर्चा कर सकते थे, लेकिन हमने अपना ध्यान केवल R^2 के रेखा समाकलों तक ही सीमित रखा है। इसका कारण यह है कि R^3 में रेखा समाकलों की चर्चा, पृष्ठ समाकलों की चर्चा के बिना अधूरी रह जाती और पृष्ठ समाकलों की चर्चा करना इस पाठ्यक्रम की कक्षा से बाहर है। इसी कारण हमें स्टोक प्रमेय जैसे प्रमेयों को छोड़ देना पड़ा, हालांकि आपकी कार्यक्रम दर्शिका में इसका उल्लेख किया गया था। इस इकाई में हमने ग्रीन-प्रमेय को शामिल किया है। यह प्रमेय द्विक तथा रेखा समाकलों में संबंध स्थापित करता है। हम आशा करते हैं कि पृष्ठ समाकल तथा स्टोक प्रमेय आदि का अध्ययन आप किसी अगले पाठ्यक्रम में कर पाएंगे।

इस खण्ड में हमने कई प्रमेयों की उपपत्तियां नहीं दी हैं। लेकिन कुछ थोड़े प्रमेयों की उपपत्तियां आप यहां देख सकते हैं। इन्हें ध्यान से पढ़िए। परीक्षा में आपसे इनके बारे में प्रश्न पूछे जा सकते हैं।

संकेत और प्रतीक

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$	a_{ij}, का योगफल, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.
$P = (a = x_0 < x_1 < \ldots. < x_n = b)$	$[a, b]$ का n उप-अंतरालों में विभाजन
$\boldsymbol{P}$	(अंतरालों के) सभी विभाजनों का समुच्चय
$\iint_D f(x, y)dx\,dy$	R^2 के एक परिबद्ध समुच्चय D पर f का द्विक समाकल
$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx$	f का पुनरावृत्त समाकल, पहले y के सापेक्ष और फिर x के सापेक्ष
$\iiint_W f(x, y, z)dx\,dy\,dz$	R^3 के प्रदेश W पर f का त्रिक समाकल
$\int_a^b \left[\int_c^d \left\{ \int_s^t f(x, y, z)dz \right\} dy \right] dx$	पहले z के सापेक्ष, फिर y के सापेक्ष और फिर x के सापेक्ष f का पुनरावृत्त समाकल
M_x	x-अक्ष के प्रति घूर्णन
$(\bar{x}, \bar{y})$	समतल में किसी वस्तु का गुरुत्व केन्द्र
M_{xy}	xy समतल के प्रति घूर्णन
$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$	आकाश में किसी ठोस प्रदेश का गुरुत्व केन्द्र
$\int_C f(x, y)\,dx$	वक्र C पर f का x के सापेक्ष रेखा समाकल
$\int_C f(x, y)\,ds$	वक्र C पर f का चाप-लंबाई s के सापेक्ष रेखा समाकल

पिछले खण्डों की सूची भी देखिए।

इकाई 11 द्विशः समाकलन

इकाई की रूपरेखा

11.1 प्रस्तावना

कलन पाठ्यक्रम (खंड 3, इकाई 10) में हम आपको एक संवृत अंतराल पर एक चर वाले वास्तविक मान फलनों के समाकलन की संकल्पना से परिचित करा चुके हैं। इस इकाई में हम समाकलनीयता की अभिधारणा को एक समतल के परिबद्ध समुच्चय पर परिभाषित दो चरों वाले वास्तविक मान फलनों पर लागू करेंगे। इस प्रकार के समाकलों को द्विक समाकल (double integral) कहा जाता है। सबसे पहले हम एक संवृत आयत पर द्विक समाकलों को परिभाषित करेंगे। आप इस बात से सहमत होंगे कि संवृत आयत, वास्तविक रेखा पर संवृत अंतराल का समतल में एक स्वाभाविक व्यापकीकरण है। यहां हम आपको अन्य दो समाकलों, जिन्हें पुनरावृत्त समाकल (repeated integral) कहा जाता है, से भी परिचित कराएंगे। इस प्रकार का समाकल एक चर वाले फलनों का नहीं हो सकता। मोटे तौर पर यह कहा जा सकता है कि पुनरावृत्त समाकल, उत्तरोत्तर रूप में लिए गए दो चरों के सापेक्ष एक निश्चित समाकल (definite integral) होता है। यहां हम यह दिखाएंगे कि कई स्थितियों में पुनरावृत्त समाकल, द्विक समाकल के बराबर होते हैं। अतः एक चर वाले फलनों की समाकलन-विधियों को लागू करके हम द्विक समाकल का परिकलन कर सकते हैं। भाग 11.3 में हम द्विक समाकल की परिभाषा को उन फलनों पर भी लागू करेंगे, जो परिबद्ध समुच्चयों पर परिभाषित है। इस भाग में हम इन समाकलों के कुछ गुणधर्मों पर भी चर्चा करेंगे। इस इकाई के अंतिम भाग में हम उन प्रदेशों को लेंगे, जिन्हें ध्रुवीय निर्देशांकों से आसानी से व्यक्त किया जा सकता है। हम यह भी दिखाएंगे कि इन प्रदेशों पर समाकल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

इस इकाई में हम कुछ प्रमेयों की उपपत्तियां नहीं देंगे, क्योंकि इन उपपत्तियों में प्रयुक्त संकल्पनाएं इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। फिर भी, परिणामों के कथनों को अच्छी तरह से समझने के लिए हमने काफ़ी उदाहरण दिए हैं।

अगली इकाई में हम त्रिक समाकल (triple integral) का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- एक संवृत आयत पर दो चरों वाले वास्तविक मान फलन के द्विक समाकल और पुनरावृत्त समाकल को परिभाषित कर सकेंगे ;
- पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके द्विक समाकल ज्ञात कर सकेंगे ;

- कुछ विशेष प्रकार के प्रदेशों पर द्विक समाकलों को परिभाषित कर सकेंगे और उनके मान मालूम कर सकेंगे;
- द्विक समाकलों में चर-परिवर्तन कर सकेंगे;
- ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग करके द्विक समाकलों का परिकलन कर सकेंगे।

11.2 एक आयत पर द्विक समाकल

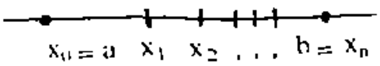
इस भाग में हम एक चर वाले फलनों के समाकलनीयता-सिद्धांत को दो चरों वाले फलनों पर लागू करेंगे। यहां हम एक संवृत आयत पर परिभाषित फलनों की समाकलनीयता पर विचार करेंगे। लेकिन दो चरों वाले फलनों के संबंध में चर्चा करने से पहले हम नीचे दिए गए उपभाग में एक चर वाले फलनों की समाकलन-संकल्पना को जल्दी से दोहरा लेंगे। आपको याद होगा कि आप कलन पाठ्यक्रम के खंड 3 में समाकलन का अध्ययन कर चुके हैं।

11.2.1 प्रारंभिक तथ्य

पहले हम एक चर वाले फलन के समाकल की परिभाषा को फिर से याद करेंगे और तब हम R^2 के आयतों के विभाजन के बारे में और फिर दो चरों वाले फलनों के संबंध में ऊपरि और निम्न योगफलों के बारे में चर्चा करेंगे।

पहले यह मान लीजिए कि $f : [a, b] \to R$ एक परिबद्ध फलन है।

मान लीजिए $P : \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, उप-अंतरालों $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, में $[a, b]$ का एक विभाजन है। इसके लिए चित्र 1 भी देखिए।



चित्र 1

चूंकि $[a, b]$ पर f एक परिबद्ध वास्तविक-मान फलन है, इसलिए प्रत्येक i, $1 \le i \le n$, के लिए ऐसी वास्तविक संख्याओं m_i और M_i का अस्तित्व होता है कि

$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i \}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i \}$$

अब हम $$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

और $$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

लेते हैं।

ध्यान दीजिए कि $x_i - x_{i-1}$, उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ की लंबाई है। $L(P, f)$ और $U(P, f)$ को विभाजन P के संगत f का क्रमशः **निम्न योगफल** (lower sum) और **उपरि योगफल** (upper sum) कहा जाता है। इन योगफलों को निम्न और उपरि रीमान योगफल भी कहते हैं। तब

$$m(b - a) \le L(P, f) \le U(P, f) \le M(b - a), \quad \ldots \quad (1)$$

जहां m और M, अंतराल $[a, b]$ में f के क्रमशः निम्नक और उच्चक हैं (कलन के खंड 3 की इकाई 10 का प्रमेय 1 देखिए)।

मान लीजिए P, $[a, b]$ के सभी विभाजनों का समुच्चय है। अब समुच्चय

$$L = \{ L(P, f) \mid P \in P \} \text{ और } U = \{ U(P, f) \mid P \in P \}$$

लीजिए। तब वास्तविक संख्याओं का अरिक्त समुच्चय L, उपरितः परिबद्ध और वास्तविक संख्याओं का अरिक्त समुच्चय U, निम्नतः परिबद्ध होता है। मान लीजिए

$$I_L = \sup \{ L(P, f) \mid P \in P \}$$

$$I_U = \inf \{ U(P, f) \mid P \in P \}$$

यदि $I_L = I_U = I$ तो हम यह कहते हैं कि f, अन्तराल [a, b] पर समाकलनीय है और

$$\int_a^b f(x)\,dx = I = \sup_P \{L(P, f)\} = \inf_P \{U(P, f)\}$$

I को [a, b] पर f का **निश्चित समाकल** (definite integral) भी कहा जाता है।

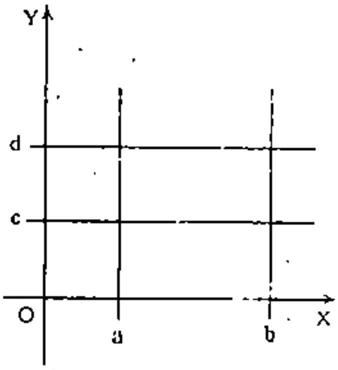
आपने अपने कलन पाठ्यक्रम में ऊपर दी गई विधि से कुछ समाकलों का परिकलन अवश्य किया होगा। अपनी याददाश्त को फिर से ताज़ा बनाने के लिए आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कर सकते हैं।

E1) दिखाइए कि फलन $f(x) = x$, [a, b] पर समाकलनीय है और यह दिखाइए कि

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

(संकेत : असमिका $x_{i-1} \le \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \le x_i$ का प्रयोग कीजिए।)

हम इसी प्रकार की विधि को दो चरों वाले वास्तविक मान फलन के समाकल को परिभाषित करने के लिए लागू करेंगे। एक संवृत आयत, वास्तविक रेखा पर संवृत अंतराल का एक स्वाभाविक व्यापकीकरण मालूम पड़ता है। यहां हम यह मान लेते हैं कि a और b इकाई लंबी भुजाओं वाले आयत का क्षेत्रफल ab वर्ग इकाई होता है।



चित्र 2

संवृत आयत का विभाजन लेकर हम दो चरों के संबंध में अपनी चर्चा प्रारंभ करेंगे।

मान लीजिए T, R^2 में रेखाओं $x = a, x = b, y = c, y = d$ से बना संवृत आयत है, जैसा कि चित्र 2 में दिखाया गया है।

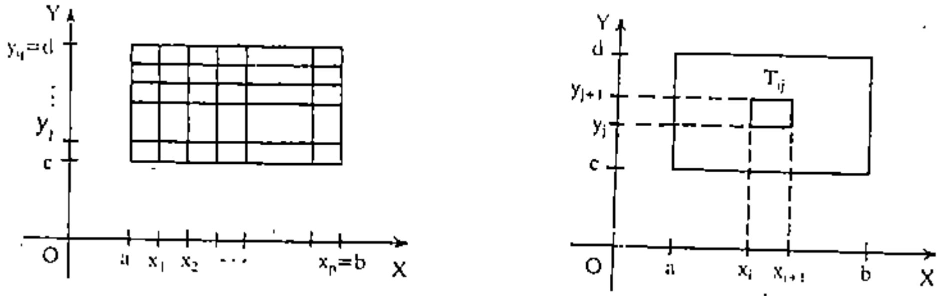
यहां आयत T, संवृत अंतरालों [a, b] और [c, d] का कार्तीय गुणनफल है, अर्थात् $T = [a, b] \times [c, d]$ (खंड 1 की इकाई 3 देखिए)। इस आयत को उपविभाजित करने की अति स्वाभाविक विधि है :

i) x-अक्ष के अंतराल [a, b] को P उप-अंतरालों $[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots\ldots [x_{i-1}, x_i], \ldots\ldots [x_{p-1}, x_p = b]$ में विभाजित करना ;

ii) y-अक्ष के अंतराल [c, d] को q उप-अंतरालों $[c = y_0, y_1], [y_1, y_2], \ldots\ldots, [y_{j-1}, y_j], \ldots\ldots, [y_{q-1}, y_q = b]$ में विभाजित करना ; और

iii) अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ और $[y_{j-1}, y_j]$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le q$ से बने आयत लेना।

इन तीन चरणों को चित्र 3 में दर्शाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 3

आइए हम $[x_{i-1}, x_i]$ और $[y_{j-1}, y_j]$ से बने आयत को T_{ij} से प्रकट करें। इस तरह हमने आयत T को pq उप-आयतों T_{ij} में विभाजित कर दिया है (चित्र 3 (ख) देखिए)। इन T_{ij} से T का एक विभाजन प्राप्त होता है। इसकी औपचारिक परिभाषा यह है :

परिभाषा 1 : मान लीजिए T एक संवृत आयत $[a, b] \times [c, d]$ है। मान लीजिए (T_i), $1 \le i \le n$ संवृत आयतों का एक परिमित अनुक्रम (finite sequence) है, जहां

i) प्रत्येक i के लिए $T_i \subset T$,

ii) T_i की भुजाएं निर्देशक अक्षों के समांतर हैं,

iii) T_i और T_j परिसीमा (boundary) पर प्रतिच्छेद करते हैं,

iv) $T = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$

तब अनुक्रम $\{T_i\}, 1 \le i \le n$ को आयत T का एक विभाजन कहा जाता है।

मान लीजिए $T = [a, b] \times [c, d]$, R^2 में एक आयत है। मान लीजिए

$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i \ldots x_p\}$, $[a, b]$ का एक विभाजन है, और $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_q\}$, $[c, d]$ का एक विभाजन है। तब P_1 और P_2 से एक विभाजन P (जिसे $P_1 \times P_2$ से प्रकट किया जाता है) प्राप्त होता है जो T को pq उप-आयतों T_{ij} में विभाजित करता है, जहां

$$T_{ij} = \{ (x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j \}$$

विलोमतः, यदि T का एक विभाजन P दिया हुआ हो, जो T को rs उप-आयतों में विभाजित करता हो, जैसा कि चित्र 3 में दिखाया गया है, तो $[a, b]$ के एक विभाजन P_1 का अस्तित्व होता है जो $[a, b]$ को r उप-अंतरालों में विभाजित करता है और $[c, d]$ के एक विभाजन P_2 का अस्तित्व होता है, जो $[c, d]$ को s उप-अंतरालों में विभाजित करता है, जिससे कि $P = P_1 \times P_2$.

एक चर वाली स्थिति की तरह यहां भी हम यह कहते हैं कि आयत का विभाजन P, आयत T के एक अन्य विभाजन Q का एक **अधिशोधन** (refinement) होता है, यदि P का प्रत्येक उप-आयत Q के किसी उप-आयत में आविष्ट हो। P, Q का अधिशोधन है यह दर्शाने के लिए हम $Q \subset P$ लिखते हैं।

अब हम दो चरों वाले फलनों के उपरि योगफल और निम्न योगफल परिभाषित कर सकते हैं।

उपरि योगफल और निम्न योगफल

पहले हम एक संवृत आयत $T : [a, b] \times [c, d]$ पर परिभाषित परिबद्ध वास्तविक मान फलन f लेंगे। मान लीजिए $P = P_1 \times P_2$, आयत T का एक विभाजन है, जहां

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$$

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$$

क्रमशः $[a, b]$ और $[c, d]$ के विभाजन हैं।

अब मान लीजिए T_{ij} उप-आयत $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ है। समुच्चय

$S_{ij} = \{ f(x, y) \mid x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j] \}$ लीजिए।

चूंकि f एक परिबद्ध वास्तविक मान फलन है, इसलिए S_{ij}, R का एक अरिक्त परिबद्ध उप-समुच्चय होगा। इससे यह ..र्ष निकलता है कि इसका एक उच्चक और एक निम्नक होता है। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$M_{ij} = \sup S_{ij}, \; m_{ij} = \inf S_{ij}$$

हम एक चर वाली स्थिति के अनुरूप उपरि योगफल $U(P, f)$ और निम्न योगफल $L(P, f)$ को

$$\left.\begin{aligned} U(P, f) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M_{ij} \, \Delta x_i \, \Delta y_j \\ L(P, f) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ij} \, \Delta x_i \, \Delta y_j \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (2)$$

से परिभाषित करते हैं, जहां $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ और गुणनफल $\Delta x_i \, \Delta y_j$ उप-आयत T_{ij} का क्षेत्रफल है। (1) की दायीं ओर वाले व्यंजकों में द्विक संकलन (double summation) है। चूंकि ये दोनों योगफल परि...त हैं, इसलिए द्विक संकलन से कोई कठिनाई नहीं होगी। उदाहरण के लिए हम यह लिख सकते हैं

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{q} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \right]$$

अर्थात्, पहले हम वह योगफल लेते हैं, ..कि j का मान 1 से q तक जाता है और फिर वह योगफल लेते हैं, जबकि i का मान 1 से p तक जाता है। यदि हम i और j के क्रम को उलट दें तो भी हमें समान योगफल ही प्राप्त होगा। इस तरह, (1) में दिए गए योगफलों को प्रसारित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$U(P, f) = \{M_{11}$ (T_{11} का क्षेत्रफल) $+ M_{12}$ (T_{12} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + M_{1q}$ (T_{1q} का क्षेत्रफल) $\}$

$+ \{M_{21}$ (T_{21} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + M_{2q}$ (T_{2q} का क्षेत्रफल) $\} + \ldots\ldots$

$+ \{M_{p1}$ (T_{p1} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + M_{pq}$ (T_{pq} का क्षेत्रफल) $\}$

और,

$L(P, f) = \{m_{11}$ (T_{11} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + m_{1q}$ (T_{1q} का क्षेत्रफल) $\}$

$+ \{m_{21}$ (T_{21} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + m_{2q}$ (T_{2q} का क्षेत्रफल) $\} + \ldots\ldots$

$+ \{m_{p1}$ (T_{p1} का क्षेत्रफल) $+ \ldots\ldots + m_{pq}$ (T_{pq} का क्षेत्रफल) $\}$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि $U[P, f]$ प्राप्त करने के लिए हमने प्रत्येक S_{ij} के उच्चक को T_{ij} के क्षेत्रफल से गुणा करके इन सभी गुणनफलों का योगफल लिया है। इसी प्रकार $L[P, f]$ प्राप्त करने के लिए हमने प्रत्येक S_{ij} के निम्नक को T_{ij} के क्षेत्रफल से गुणा किया है। यदि आप इसकी तुलना एक चर वाली स्थिति से करें तो आप पाएंगे कि इनमें अंतर केवल यही है कि Σ के स्थान पर $\Sigma\Sigma$ का प्रयोग किया गया है, और अंतराल की लंबाई के स्थान पर आयत के क्षेत्रफल का प्रयोग किया गया है। अब मान लीजिए M और m, T में f के परिबंध को प्रकट करते हैं। तब किन्हीं i, j के लिए हमें प्राप्त होता है,

$$m \Delta x_i \Delta y_j \le m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le M \Delta x_i \Delta y_j$$

अब i को 1 से p तक लेने और j को 1 से q तक लेने और द्विक संकलन करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m \Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M \Delta x_i \Delta y_j$$

अर्थात्

$$m \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \Delta x_i \Delta y_j \le L(P, f) \le U(P, f) \le M \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \Delta x_i \Delta y_j$$

परन्तु

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \Delta x_i \Delta y_j = T \text{ का क्षेत्रफल} = A \quad \text{इसलिए}$$

$$mA \le L(P, f) \le U(P, f) \le MA.$$

अब यहां हम एक प्रमेय का कथन देंगे जो दो विभाजनों के संगत उपरि योगफल और निम्न योगफल के बीच एक संबंध स्थापित करता है। इसकी उपपत्ति हम यहां नहीं दे रहे हैं।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $f : [a, b] \times [c, d] \to R$ एक परिबद्ध फलन है और मान लीजिए P और Q, T के दो विभाजन हैं। यदि Q, P का अधिशोधन हो, तो

$$L(P, f) \le L(Q, f) \le U(Q, f) \le U(P, f)$$

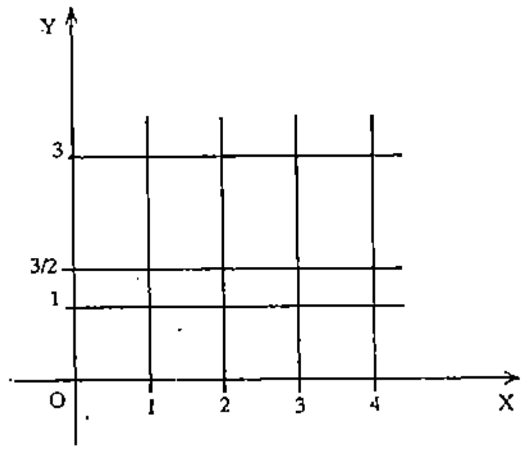
इसका यह अर्थ है कि विभाजन जैसे-जैसे अधिक अधिशोधित होता जाता है, वैसे-वैसे उपरि योगफल और निम्न योगफल एक-दूसरे के समीप आते जाते हैं। इन योगफलों को किस प्रकार प्राप्त किया जाता है, यह इस उदाहरण से स्पष्ट होगा :

उदाहरण 1 : आइए हम आयत $T : [1, 4] \times [1, 3]$ पर फलन $f(x, y) = x + y - 2$ लें। मान लीजिए $P = P_1 \times P_2$, T का एक विभाजन है, जहां $P_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $[1, 4]$ का एक विभाजन है और

$P_2 = \{1, \frac{3}{2}, 3\}$, $[1,3]$ का एक विभाजन है। आइए हम $U[P, f]$ और $L[P, f]$ का परिकलन करें।

यहां पहले हम यह देखते हैं कि फलन f, T पर परिबद्ध है और सभी $(x, y) \in T$ के लिए

$f(x, y) \geq 0$. अर्थात् f एक ऋणेतर परिबद्ध फलन है। विभाजन $P = P_1 \times P_2$ आयत T को छह आयतों में विभाजित कर देता है, जैसा कि चित्र 4 में दिखाया गया है।



चित्र 4

आइए पहले हम U [P, f] का परिकलन करें। परिभाषा के अनुसार,

$$U(P, f) = \{M_{11}\,(T_{11}\text{ का क्षेत्रफल}) + M_{12}\,(T_{12}\text{ का क्षेत्रफल})\}$$

$$+ \{M_{21}\,(T_{21}\text{ का क्षेत्रफल}) + M_{22}\,(T_{22}\text{ का क्षेत्रफल})\}$$

$$+ \{M_{31}\,(T_{31}\text{ का क्षेत्रफल}) + M_{32}\,(T_{32}\text{ का क्षेत्रफल})\},$$

$$\text{जहां } M_{ij} = \sup\,\{ f(x, y) \mid (x, y) \in T_{ij} \}.$$

प्रत्येक आयत T_{ij} में वह बिन्दु, जिस पर f का मान अधिकतम होता है, $[x_i, y_j]$ है, जो कि मूल बिन्दु से सबसे दूर वाला कोना है।

अतः $M_{ij} = f(x_i, y_j) = x_i + y_j - 2$

इस तरह

$$U(P, f) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{87}{4}$$

अब हम L [P, f] का परिकलन करेंगे। परिभाषा के अनुसार,

$$L[P, f] = \{m_{11}\,(T_{11}\text{ का क्षेत्रफल}) + m_{12}\,(T_{12}\text{ का क्षेत्रफल})\}$$

$$+ \{m_{21}\,(T_{21}\text{ का क्षेत्रफल}) + m_{22}\,(T_{22}\text{ का क्षेत्रफल})\}$$

$$+ \{m_{31}\,(T_{31}\text{ का क्षेत्रफल}) + m_{32}\,(T_{32}\text{ का क्षेत्रफल})\},$$

$$\text{जहां } m_{ij} = \inf\,\{ f(x, y) \mid (x, y) \in T_{ij} \}$$

फिर से चित्र 4 में आप यह देख सकते हैं कि T_{ij} में वह बिन्दु, जिस पर f का मान निम्नतम होता है, (x_{i-1}, y_{j-1}) है, जो कि मूल बिन्दु से सबसे नज़दीक वाला कोना है।

तब, $m_{ij} = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = x_{i-1} + y_{j-1} - 2$

अतः

$$L(P, f) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{33}{4}$$

अब आप नीचे दिए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E2) T: $[0, 2] \times [0, 1]$ पर परिभाषित फलन $f(x, y) = x + 2y$ के $U[P, f]$ और $L[P, f]$ ज्ञात कीजिए। यहां विभाजन $P = P_1 \times P_2$,

जहां $P_1 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}, P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

E3) विभाजन $Q = P_1' \times P_2'$ लेकर E2) के फलन के लिए प्रमेय 1 के परिणाम को सत्यापित कीजिए, जहां $P_1' = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}, P_2' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$.

अगले उपभाग में हम इन उपरि और निम्न योगफलों की मदद से एक आयत पर एक परिबद्ध फलन के द्विक समाकल को परिभाषित करेंगे। आप यह देखेंगे कि हम वही तर्क अपनाएंगे, जो एक चर वाली स्थिति में अपनाया था।

11.2.2 द्विक समाकल और पुनरावृत्त समाकल

इस उपभाग में हम दो चरों वाले परिबद्ध फलन के द्विक समाकल को परिभाषित करेंगे। इसके बाद हम आपको एक अन्य प्रकार के समाकल, जिसे पुनरावृत्त समाकल (repeated integral) कहते हैं, से परिचित कराएंगे। इसे लागू करके द्विक समाकल का मान आसानी से निकाला जा सकता है।

मान लीजिए $f: T \to R$ एक परिबद्ध फलन है, जहां $T = [a, b] \times [c, d]$. मान लीजिए A, T के क्षेत्रफल को प्रकट करता है। मान लीजिए M और m, T में f के परिबंध हैं और मान लीजिए $\mathcal{P}$, T के सभी विभाजनों का समुच्चय है। हम यह देख चुके हैं कि $\mathcal{P}$ के प्रत्येक विभाजन P के संगत एक उपरि योगफल $U[P, f]$ और एक निम्न योगफल $L[P, f]$ होता है। और $mA \le L(P, f) \le U(P, f) \le MA$. इससे यह पता चलता है कि समुच्चय $S = \{U(P, f) \mid P \in \mathcal{P}\}$, R, का एक उप-समुच्चय है और निम्नतः परिबद्ध है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि S का निम्नक प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, समुच्चय $S' = \{L(P, f) \mid P \in \mathcal{P}\}$ उपरितः परिबद्ध है। अतः S' का उच्चक प्राप्त किया जा सकता है। मान लीजिए U, S का निम्नक है और L, S' का उच्चक है।

अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि परिबद्ध फलन के द्विक समाकल को परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 2 : मान लीजिए $f: T = [a, b] \times [c, d] \to R$ एक परिबद्ध फलन है। यदि $L = U$, तो f को T पर समाकलनीय कहा जाता है। इस उभयनिष्ठ मान (common value) को आयत T पर f का द्विक समाकल कहा जाता है और इसे प्रतीक

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{or} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

से प्रगट किया जाता है।

आइए अब हम इससे संबंधित एक सरल उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : आइए हम यह जांच करें कि $f(x) = k$ द्वारा परिभाषित फलन $f: T \to R$ जहां $k > 0$ और $T = [a, b] \times [c, d]$ समाकलनीय है कि नहीं। इसके लिए आइए हम T का एक विभाजन $P = P_1 \times P_2$ लें जहां

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_p = b \text{ और}$$

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < \ldots\ldots < y_q = d$$

चूंकि f एक अचर फलन है, इसलिए प्रत्येक T_{ij} पर हमें $m_{ij} = k = M_{ij}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore L(P, f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} k\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

$$= k \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \Delta x_i\, \Delta y_j$$

$$= k(b-a)(d-c)$$

इसी प्रकार, प्रत्येक विभाजन P के लिए $U(P, f) = k(b-a)(d-c) = L(P, f)$, इससे यह अर्थ निकलता है कि $S = S' = \{k(b-a)(d-c)\}$.

अतः $\inf S = \sup S' = k(b-a)(d-c)$.

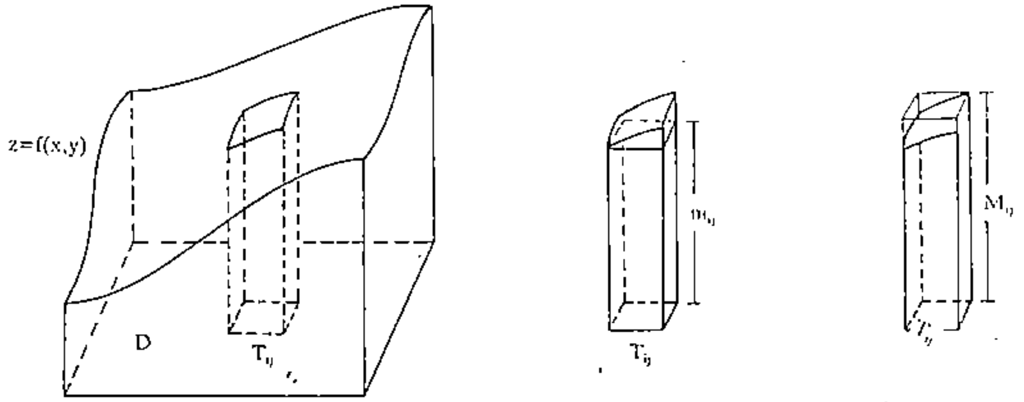
इस तरह, हम यह कह सकते हैं कि f, T पर समाकलनीय है और

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T k\,dx\,dy = k(b-a)(d-c).$$

उदाहरण 2 में हमने यह प्रतिबंध लगाया था कि $k > 0$. लेकिन $k \le 0$ होने पर भी यह परिणाम सही होता है और इसकी उपपत्ति भी ठीक वैसी ही है जैसी कि ऊपर दी गई है।

द्विक समाकलों के मान निकालने के लिए कुछ और उदाहरणों पर विचार करने से पहले आइए हम इनके ज्यामितीय विवेचन पर विचार करें। एक चर वाले फलनों की तरह यहां भी हम ऋणेतर फलन लेंगे।

मान लीजिए f, $T:[a,b]\times[c,d]$ पर परिभाषित एक ऋणेतर परिबद्ध फलन है। मान लीजिए $P = P_1 \times P_2$, T का एक विभाजन है। आइए हम देखें कि योगफल U (P, f) और L (P, f) ज्यामितीय रूप में क्या निरूपित करते हैं। मान लीजिए हम f के ग्राफ और आयत T के बीच का प्रदेश D लेते हैं, जैसा कि चित्र 5 (क) में दिखाया गया है।



चित्र 5

मान लीजिए V इस ठोस प्रदेश के आयतन को प्रकट करता है। और मान लीजिए P, आयत T को pq उप-आयतों T_{ij} में विभाजित करता है, जहां $1 \le i \le p, 1 \le j \le q$. यह संपूर्ण ठोस प्रदेश D को भागों S_{ij} में विभाजित कर देता है, जैसा कि चित्र 5 (क) में दिखाया गया है। तब प्रत्येक युग्म (pair) (i, j) के लिए ये समकोणिक समांतरषट्फलक (rectangular parallelopiped) लीजिए, जिनका आधार क्षेत्रफल = T_{ij} का क्षेत्रफल = $\Delta x_i \Delta y_j$ और ऊंचाई m_{ij} और M_{ij} हैं। इन्हें आप क्रमशः चित्र 5 (ख) और (ग) में देख सकते हैं। तब $M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ उस समकोणिक समांतरषट्फलक का आयतन होता है, जिसका आधार T_{ij} और ऊंचाई m_{ij} है। और $m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ उस समकोणिक समातरषट्फलक का आयतन होता है, जिसका आधार T_{ij} और ऊंचाई m_{ij} है। चित्र 5 (ख) में दिखाए गए समकोणिक समांतरषट्फलक को आंतरिक समकोणिक समांतरषट्फलक (inner rectangular parallelopiped) कहते हैं और चित्र 5 (ग) में दिखाए गए समकोणिक समांतरषट्फलक को बाह्य (outer) समकोणिक समांतरषट्फलक कहा जाता है।

अब, यदि V_{ij}, S_{ij} के आयतन को प्रकट करता है, तो चित्र 5 (ख) और (ग) से आप यह देख सकते हैं कि

$$m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \le V_{ij} \le M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \qquad (3)$$

अब

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

= बाह्य समकोणिक समांतरषट्फलकों के आयतनों का योगफल।

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

= आंतरिक समकोणिक समांतरषट्फलकों के आयतनों का योगफल।

अब, यदि V, D का आयतन हो तो

$$V = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} V_{ij} \qquad \dots (4)$$

इस तरह (3) और (4) से हमें प्राप्त होता है,

$$L(P, f) \le V \le U(P, f) \qquad \dots (5)$$

T के सभी विभाजनों P के लिए (5) सही होता है। अब, यदि f, T पर समाकलनीय हो और $\mathcal{P}$, T के सभी विभाजनों का समुच्चय हो तो सभी $P \in \mathcal{P}$ के लिए L (P, f) और U (P, f) के बीच एक अद्वितीय संख्या स्थित होती है। यह अद्वितीय संख्या, T पर f का द्विक समाकल होती है (परिभाषा 2 देखिए)। इसे (5) के साथ लेने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = V.$$

इस तरह, यदि f ऋणेतर परिबद्ध फलन हो तो हम f के T पर द्विक समाकल को उस त्रिविम प्रदेश (three-dimensional region) का आयतन मान सकते हैं जो आयत T के ऊपर स्थित है और f के लेखाचित्र से उपरितः परिबद्ध है।

यहां हम एक टिप्पणी दे रहे हैं, जिससे यह पता चलता है कि द्विक समाकल को योगफल की सीमा माना जा सकता है।

टिप्पणी 1 : मान लीजिए फलन f, एक संवृत आयत $T = [a, b] \times [c, d]$ पर समाकलनीय है। T का एक विभाजन $P = P_1 \times P_2$ लीजिए,

जहां

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots\dots < x_p = b$$

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < \dots\dots < y_q = d.$$

मान लीजिए

$$T_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \; 1 \le i \le p, 1 \le j \le q$$

आइए हम T_{ij} में एक बिन्दु P_{ij} लें। तब, योगफल

$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$, (जहां $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ और $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$) को P के संगत T पर f का रीमान योगफल (Riemann sum) कहा जाता है। चूंकि प्रत्येक T_{ij} का व्यास, शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, इसलिए यह रीमान योगफल, $\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ की ओर प्रवृत्त होता है।

इस तरह हम लिख सकते है

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(P)_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

जहां $\|P\|$ विभाजन P का मानक (norm), P के आयतों का सबसे बड़ा व्यास है।

आगे के अध्ययन में हम टिप्पणी 1 में दिए गए परिणाम का प्रयोग अक्सर करेंगे। इसलिए आप इसे अच्छी तरह से समझ लें।

अब, यहां हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 3 : मान लीजिए $T = [1, 2] \times [3, 4]$.

मान लीजिए $f : T \to R$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

से परिभाषित है।

आइए अब हम यह जांच कर लें कि यह फलन समाकलनीय है कि नहीं।

मान लीजिए P, T का उप-आयतों T_i जहां $1 \le i \le n$, में एक विभाजन है। अब, जब हम कोई आयत T_i लेते हैं, तो T_i में एक ऐसे बिन्दु (x, y) का अस्तित्व होता है, जहां x परिमेय है और T_i में एक अन्य ऐसे बिन्दु (x_1, y_1) का भी अस्तित्व होता है जहां x_1 अपरिमेय है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि

$m_i = T_i$ में f का निम्नक $= 0$

$M_i = T_i$ में f का उच्चक $= 1$

इससे यह पता चलता है कि $L(P, f) = 0$ और $U(P, f) = 1$,

क्योंकि T का क्षेत्रफल $= 1$. यह बात सभी विभाजनों पर लागू होती है। इस तरह,

$$L = \sup \{ L(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \} = 0 \text{ और}$$

$$U = \inf \{ U(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \} = 1.$$

अतः f के द्विक समाकल का अस्तित्व नहीं है।

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे, जो दो चरों वाले फलनों की समाकलनीयता का एक निकष प्रदान करता है।

प्रमेय 2 : मान लीजिए T एक संवृत आयत है। वास्तविक मान परिवद्ध फलन $f : T \to R$, T पर समाकलनीय होता है, यदि और केवल यदि, $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो T के एक ऐसे विभाजन P का अस्तित्व होता है कि

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

इस प्रमेय की उपपत्ति ठीक वैसी ही है, जैसी कि एक चर वाली स्थिति के संबंध में दी गई उपपत्ति थी (कलन पाठ्यक्रम की इकाई 10 का प्रमेय 3 देखिए)। अपनी याददाश्त को फिर से ताज़ा करने के लिए यहां हम प्रमेय के "यदि वाले भाग" की उपपत्ति दे रहे हैं। "केवल यदि वाले भाग" की उपपत्ति हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं, देखिए E4).

उपपत्ति : (यदि वाला भाग) : मान लीजिए

$$L = \sup \{ L(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \}$$

और

$$U = \inf \{ U(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \}$$

जहां $\mathcal{P}$, T के सभी विभाजनों का समुच्चय है। तब

$$L(P, f) \le L \le U \le U(P, f) \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

या, $$U - L \le U(P, f) - L(P, f) \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

अब, यदि $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो तो $\exists P \in \mathcal{P}$ जिससे कि

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

इससे पता चलता है कि

$$U - L < \varepsilon.$$

चूंकि यह सभी $\varepsilon > 0$ के लिए सही होता है, इसलिए

$$U - L = 0 \text{ या } U = L.$$

इससे यह पता चलता है कि f, T पर समाकलनीय है। अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए और प्रमेय 2 की उपपत्ति को पूरा कीजिए।

E4) प्रमेय 2 के "केवल यदि" वाले भाग को सिद्ध कीजिए।

प्रमेय 2 की सहायता से समाकलनीय फलनों के एक बड़े वर्ग को पहचाना जा सकता है। यहां हम उपपत्ति को लेकर परेशान नहीं होंगे, और केवल परिणाम का कथन देंगे।

प्रमेय 3 : यदि फलन $f : T = [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ संतत है, तो समाकलनीय होता है।

अतः सांतत्य $\Rightarrow$ समाकलनीयता। परन्तु इसका विलोम सही नहीं है। इसके लिए एक उदाहरण पेश है।

उदाहरण 4 : फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{लीजिए।}$$

स्पष्ट है कि $(0, 0)$ पर $f(x, y)$ संतत नहीं है। यहां हम यह दिखाएंगे कि

$f(x, y)$, $T : [-1, 1] \times [-1, 1]$ पर समाकलनीय है। $\varepsilon > 0$ दिया हुआ हो, तो आयत T का एक ऐसा विभाजन P ज्ञात कीजिए कि $(0, 0)$ आविष्ट करने वाले उप-आयत T^* का क्षेत्रफल ε से कम हो। ध्यान दीजिए कि P के किसी अन्य उप-आयत के लिए f का निम्नक, f के उच्चक के बराबर होता है (क्योंकि प्रत्येक 1 के बराबर है)। इस तरह

$U(P, f) - L(P, f) = 1 \cdot T^*$ का क्षेत्रफल $- 0 \cdot T^*$ का क्षेत्रफल $< \varepsilon$

इससे यह पता चलता है कि f, T पर समाकलनीय है।

इस उदाहरण में आपने यह देखा है कि एक फलन, जोकि T के एक बिन्दु पर असंतत है, वह T पर समाकलनीय हो सकता है। वस्तुतः यदि कोई फलन परिमित संख्या में दिए गए बिन्दुओं पर असंतत हो, तो भी वह समाकलनीय हो सकता है।

इकाई 5 में आपने यह देखा है कि अवकलनीयता $\Rightarrow$ सांतत्य।

तब प्रमेय 3 के अनुसार,

अवकलनीयता $\Rightarrow$ सांतत्य $\Rightarrow$ समाकलनीयता

अब नीचे दिए गए फलनों को देखिए।

(i) $[0, 2] \times [0, 1]$ में $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y$

(ii) $[3, 5] \times [1, 4]$ में $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

स्पष्ट है कि संतत होने के कारण ये दोनों फलन समाकलनीय हैं। यहां हमें परिभाषा के अतिरिक्त अन्य कोई ऐसा साधन नहीं है, जिससे हम इनके द्विक समाकलों के मान निकाल सकें। लेकिन केवल सीधे परिभाषा लागू करके फलनों के द्विक समाकल मालूम करना आसान नहीं है। यही बात एक चर वाले फलनों का समाकलन करने के दौरान भी आपने नोट की होगी। परन्तु उस स्थिति में तो हमने कलन के मूलभूत प्रमेय की सहायता लेकर समाकल ज्ञात किए थे। यहां हम इस कठिनाई को पुनरावृत्त समाकलों (repeated integrals) की सहायता से दूर करेंगे। आप देखेंगे कि इनकी मदद से द्विक समाकल का परिकलन, एक चर वाले फलनों के समाकलों के परिकलन में बदला जा सकता है। आइए अब आपको पुनरावृत्त समाकलों से परिचित करा दें।

मान लीजिए $T = [a, b] \times [c, d]$, $\mathbf{R}^2$ में एक आयत है और $f(x, y)$, T पर एक वास्तविक मान परिबद्ध फलन है। यदि हम x को नियत रखें और y को अंतराल $[c, d]$ पर विचरण करने दें तो हमें एक फलन $f^x : [c, d] \to \mathbf{R}$ प्राप्त होता है, जो $y \in [c, d]$ के लिए

$f^x(y) = f(x, y)$ से परिभाषित है।

यह समाकलन

f^x, एकल-चर y वाला एक फलन है।

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि f^x, [c, d] में परिबद्ध है?

अब, मान लीजिए f^x, [c, d] पर समाकलनीय है।

तब समाकल $\int_c^d f^x(y)\,dy$, x पर निर्भर करता है, और इस तरह [a, b] पर x के एक फलन F को परिभाषित करता है। अर्थात्

$$F(x) = \int_c^d f^x(y)\,dy.$$

अब यदि F (x), [a, b] पर समाकलनीय है, तो $\int_a^b F(x)\,dx = I$ को T पर f (x, y) का पुनरावृत्त समाकल कहा जाता है। स्पष्ट है कि

$$I = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

मोटे तौर पर हम यह कह सकते हैं कि f के इस पुनरावृत्त समाकल को प्राप्त करने के लिए पहले हम f (x, y) को केवल y का एक फलन मानकर (अर्थात् x को एक अचर मान कर) [c, d] पर उसका समाकलन करते हैं। और फिर परिणामी फलन का [a, b] पर x के सापेक्ष समाकलन करते हैं। आपको याद होगा कि आपने इस प्रकार की प्रक्रिया पुनरावृत्त सीमाओं को मालूम करने के लिए इकाई 4 में लागू की थी।

चर x के स्थान पर चर y का और चर y के स्थान पर चर x का प्रयोग करके हम एक अन्य पुनरावृत्त समाकल

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

को परिभाषित कर सकते हैं, जबकि प्रत्येक नियत y के लिए [a, b] पर f (x, y) समाकलनीय हो और फलन $\int_a^b f(x, y)\,dx$, [c, d] पर समाकलनीय हो। इन दो पुनरावृत्त समाकलों की परिभाषाओं को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि वास्तव में हम एक समय पर केवल एक चर वाले फलन का ही समाकलन कर रहे होते हैं। अतः अभी तक समाकलन की जितनी विधियों को हमने सीखा है, वे सभी पुनरावृत्त समाकलों के मान निकालने में लागू की जा सकती हैं। इस बात को हम कुछ उदाहरणों की सहायता से समझाने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 5 : फलन $f(x, y) = 3x^2y$ लीजिए।

आइए हम आयत $T = [1, 2] \times [-3, 4]$ पर f का पुनरावृत्त समाकल मालूम करें। अर्थात्

$$\int_1^2 \left[\int_{-3}^4 f(x, y)\,dy\right] dx$$

का मान मालूम करें।

इसके लिए पहले हम x को अचर रखकर y के सापेक्ष $f^x(y) = 3x^2y$ का [−3, 4] पर समाकल मालूम करते हैं। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\int_{-3}^4 3x^2y\,dy = 3x^2\int_{-3}^4 y\,dy$$ (चूंकि x अचर है, इसलिए हम x^2 को समाकलन चिह्न के बाहर ले सकते हैं।)

$$= 3x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-3}^4$$

$$= 3x^2\left(\frac{16-9}{2}\right)$$

$$= \frac{21x^2}{2}$$

तब x के सापेक्ष इसका समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\int_1^2 \frac{21x^2}{2} dx = \frac{21}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{49}{2}$$

इस तरह,

$$\int_1^2 \left[\int_{-3}^4 3x^2 y \, dy\right] dx = \frac{49}{2}.$$

आप यह जांच कर लीजिए कि $\int_{-3}^4 \left[\int_1^2 3x^2 y \, dx\right] dy$ भी $\frac{49}{2}$ के बराबर है। इस तरह हम यह देखते हैं कि इस स्थिति में दोनों ही पुनरावृत्त समाकल बराबर हैं। लेकिन क्या हम यह आशा कर सकते हैं कि दोनों पुनरावृत्त समाकल सदा ही बराबर होंगे? बिल्कुल नहीं। वास्तव में यह भी देखा गया है कि एक पुनरावृत्त समाकल का अस्तित्व है, लेकिन दूसरे पुनरावृत्त समाकल का अस्तित्व ही नहीं है। इस स्थिति को नीचे के उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 6 : मान लीजिए $T : [-1, 1] \times [-1, 1]$ और

मान लीजिए $f : T \to R$

$$f(x, y) = \begin{cases} y, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

से परिभाषित है।

हम यह दिखाएंगे कि $\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy\right] dx$ का अस्तित्व है और दूसरा पुनरावृत्त समाकल परिभाषित ही नहीं है।

पहले हम x को अचर मानकर y के सापेक्ष $f(x, y)$ का समाकलन करते हैं। तब x का नियत मान परिमेय अथवा अपरिमेय हो सकता है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि

$$\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy = \begin{cases} \int_{-1}^1 y \, dy, & x \text{ परिमेय है} \\ \int_{-1}^1 0 \, dy, & x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

इसलिए सभी x के लिए $\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy = 0.$ अतः

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) \, dy\right] dx = 0.$$

? हमें यह दिखाना है कि दूसरे पुनरावृत्त समाकल $\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 f(x, y) \, dx\right] dy$ अस्तित्व नहीं है। इसके लिए हम y नियत कर लेते हैं, मान लीजिए $y = 1$ ले लेते हैं, और , 1] पर फलन $f_1(x)$ को

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है,} \end{cases}$$

रेभाषित करते हैं।

कलन (इकाई 10 के उदाहरण 4) में हम यह देख चुके हैं कि इस प्रकार का फलन समाकलनीय नहीं होता। इसलिए $\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx$ का अस्तित्व नहीं है।

अतः हम पुनरावृत्त समाकल $\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right]dy$

के बारे में सोच भी नहीं सकते।

पुनरावृत्त समाकलों के मान निकालने का अभ्यास करने के लिए आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E5) निम्नलिखित पुनरावृत्त समाकलों के मान निकालिए :

(क) $\int_{-3}^{4}\left[\int_{1}^{2} 3x^2 y\,dx\right]dy$

(ख) $\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} (x^2+y^2)\,dx\right]dy$

(ग) $\int_{1}^{2}\left[\int_{3}^{4} (xy+e^y)\,dy\right]dx$

E6) जाँच कीजिए कि E5) (क), (ख) और (ग) में समाकलन-क्रम में परिवर्तन करने पर प्राप्त पुनरावृत्त समाकल समान है कि नहीं।

उदाहरण 6 में हमने आयत T पर परिभाषित एक ऐसे फलन $f(x, y)$ को देखा है, जिसके एक पुनरावृत्त समाकल का तो अस्तित्व है, परन्तु दूसरा पुनरावृत्त समाकल परिभाषित भी नहीं है। क्या यह सम्भव है कि दोनों पुनरावृत्त समाकल परिभाषित तो हों, परन्तु बराबर न हों? वस्तुतः परिबद्ध फलन के ऐसे उदाहरण देखने को मिलते हैं, जिनके पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व तो होता है, परन्तु वे बराबर नहीं होते। इस पाठ्यक्रम में इस तरह के फलन का उदाहरण देना संभव नहीं है। लेकिन इस बात को लेकर परेशान होने की कोई आवश्यकता नहीं है, क्योंकि इस पाठ्यक्रम में हम केवल उन्हीं फलनों पर विचार करेंगे, जिनके पुनरावृत्त समाकल बराबर हैं।

आप द्विक समाकल और पुनरावृत्त समाकलों की परिभाषाओं से अच्छी तरह से परिचित हो चुके हैं। आप यह बात मानेंगे कि व्यवहार में फलन के द्विक समाकल की तुलना में पुनरावृत्त समाकल का मान निकालना अधिक आसान होता है। ऐसा होने का कारण यह है कि पुनरावृत्त समाकलन में हम एक समय पर केवल एक चर पर ही विचार करते हैं। द्विक समाकलों का मान निकालने में पुनरावृत्त समाकलों की मदद ली जा सकती है, क्योंकि बहुत से फलनों के लिए पुनरावृत्त समाकल और द्विक समाकल एक ही होते हैं। अगला प्रमेय इसी से संबंधित है। यहां हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे।

प्रमेय 4 : मान लीजिए T, एक आयत $[a, b] \times [c, d]$ है और मान लीजिए $f : T \to R$ एक संतत फलन है। तब दोनों पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व होता है और दोनों ही द्विक समाकल के बराबर होते हैं।

इस प्रमेय के कथनानुसार यदि समाकलित किया जाने वाला फलन का संतत फलन हो, तो हम किसी भी पुनरावृत्त समाकल का परिकलन करके द्विक समाकल को आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। पुनरावृत्त समाकल और द्विक समाकल की समानता के लिए जो प्रतिबंध प्रमेय 4 में दिया गया है, वह पर्याप्त है, आवश्यक नहीं है। जैसा कि आप देख चुके हैं, उदाहरण 4 का फलन संतत नहीं है। लेकिन इसके दोनों पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व है और दोनों बराबर भी हैं। मगर इस पाठ्यक्रम में हम केवल उन्हीं फलनों को लेंगे, जो संतत हों। इसलिए हमें द्विक और पुनरावृत्त समाकलों की समानता के लिए कोई और निकष प्राप्त करने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 7 : आइए हम आयत $[3,5] \times [1,4]$ पर फलन $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ के द्विक समाकल का मान मालूम करें।

प्रमेय 3 के अनुसार,

$$\iint_T \sqrt{x+y}\, dx\, dy = \int_1^4 \left(\int_3^5 \sqrt{x+y}\, dx \right) dy$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{2}{3} (x+y)^{3/2} \right]_3^5 dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_1^4 \left[(5+y)^{3/2} - (3+y)^{3/2} \right] dy$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} \left\{ \left[(5+y)^{5/2} - (3+y)^{5/2} \right] \right\}_1^4 \right]$$

$$= \frac{4}{15} \left[9^{5/2} - 6^{5/2} - 7^{5/2} + 4^{5/2} \right]$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों में द्विक समाकलों के मान पुनरावृत्त समाकलों की सहायता से मालूम कर सकते हैं।

E7) T पर निम्नलिखित फलनों के द्विक समाकल मालूम कीजिए :

(क) $f(x, y) = x \sin(x+y)$, $T = [0, \pi] \times [0, \pi]$

(संकेत : खडशः समाकलन कीजिए।)

(ख) $f(x, y) = \dfrac{1}{1+x+y}$, $T = [0, 1] \times [0, 1]$

(संकेत : $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$ का प्रयोग कीजिए।)

नीचे हम आयतों पर द्विक समाकलों के कुछ गुणधर्म दे रहे हैं। आप इसी प्रकार के गुणधर्मों का अध्ययन कलन मे निश्चित समाकल के संबंध में कर चुके हैं।

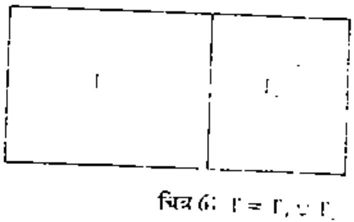
मान लीजिए T, $\mathbb{R}^2$ में एक संवृत आयत है और मान लीजिए f और g ऐसे हैं कि $\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ और $\iint_T g(x, y)\, dx\, dy$ का अस्तित्व है। तब,

(1) $\iint_T c\, f(x, y)\, dx\, dy = c \iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ जहां c एक अचर है।

(2) $\iint_T (f+g)(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f(x, y)\, dx\, dy + \iint_T g(x, y)\, dx\, dy$

(3) यदि सभी $(x, y) \in D$ के लिए $f(x, y) \leq g(x, y)$, तो

$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint_T g(x, y)\, dx\, dy.$



चित्र 6: $T = T_1 \cup T_2$

(4) यदि T, दो आयतों T_1 और T_2 का सम्मिलन (union) हो, जिससे कि T_1 और T_2 केवल परिसीमा पर सर्वनिष्ठ (intersect) होते हो, अर्थात् T_1 और T_2 अनतिव्यापी (non-overlapping) हों (चित्र 6 देखिए), तो

$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{T_2} f(x, y)\, dx\, dy$

(5) $\left| \iint_T f(x, y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_T |f(x, y)|\, dx\, dy.$

अभी तक हमने आयतों पर द्विक समाकलों का अध्ययन किया है। परन्तु व्यवहार में हमें अनेक द्विक समाकलों के मान ऐसे प्रदेशों पर निकालने होते हैं, जो आयत नहीं हैं। अगले भाग में हम R^2 के परिबद्ध समुच्चयों पर द्विक समाकलों को परिभाषित करेंगे।

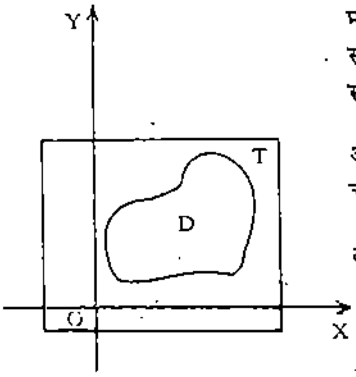
11.3 एक परिबद्ध समुच्चय पर द्विक समाकल

इस भाग में हम R^2 के परिबद्ध समुच्चयों पर द्विक समाकल परिभाषित करेंगे। अतः पहले हमें आपको यह बताना होगा कि युक्लिडीय समष्टि में परिबद्ध समुच्चय से हमारा मतलब क्या होता है।

परिभाषा 3 : $X \subset R^n$ को एक परिबद्ध समुच्चय कहते हैं यदि X, मूल बिन्दु पर केन्द्रित किसी गोले में आविष्ट हो।

उदाहरण के लिए, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, R^2 का एक परिबद्ध समुच्चय है, और समुच्चय $\{(x, y) \mid y > 0\}$ परिबद्ध नहीं है।

परिभाषा 3 से आप देख सकते हैं कि समुच्चय X परिबद्ध होगा, यदि और केवल यदि X किसी समांतरषट्फलक या आयताकार बक्स में आविष्ट हो। ऐसा बक्स, $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ के प्रकार का समुच्चय होता है, जहां $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \le j < n$.



चित्र 7

अब मान लीजिए $f : D \to R$ एक परिबद्ध फलन है, जहां D, R^2 का एक परिबद्ध समुच्चय है। चूंकि D परिबद्ध है, इसलिए D एक संवृत आयत T में आविष्ट है (चित्र 7 देखिए)।

अब हम T पर फलन f^* को

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{यदि } (x, y) \in D \\ 0, & \text{यदि } (x, y) \notin D \end{cases}$$

से परिभाषित करते हैं। फलन $f^*(x, y)$, संवृत आयत T पर परिभाषित एक वास्तविक मान परिबद्ध फलन है और भाग 11.2 में हम यह देख चुके हैं कि T पर इस फलन के समाकल को किस प्रकार परिभाषित करते हैं।

तब हम यह कहते हैं कि $f(x, y)$, D पर समाकलनीय होता है यदि $f^*(x, y)$, T पर समाकलनीय हो और

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f^*(x, y)\, dx\, dy.$$

हम यह आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि यह परिभाषा T पर निर्भर नहीं करती।

मान लीजिए T_1 एक अन्य संवृत आयत है, जो D को आविष्ट करता है।

मान लीजिए

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in T_1 \setminus D. \end{cases}$$

हमें यह दिखाना है कि

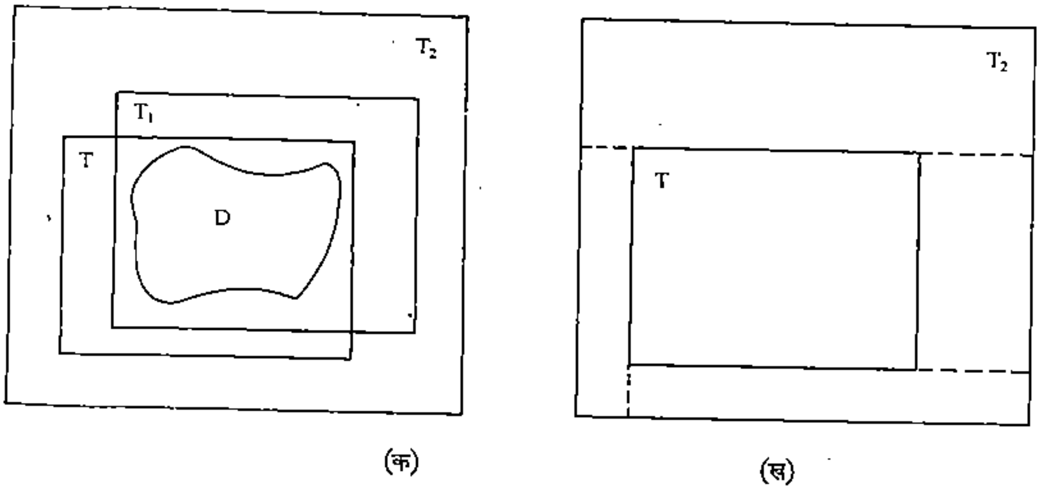
$$\iint_T f^*(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T_1} f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

अब मान लीजिए T_2 एक ऐसा संवृत आयत है कि $T_2 \supset T$ और $T_2 \supset T_1$, चित्र 8 (क) देखिए।

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in T_2 \setminus D. \end{cases}$$

तब पिछले भाग के अंत में दिए गए द्विक समाकलों के गुणधर्मों का प्रयोग करके (चित्र 8 (ख) भी देखिए) आप यह देख सकते हैं कि

$$\iint_T f^*(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T_2} f_2(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T_1} f_1(x, y)\, dx\, dy.$$



चित्र 8

इस परिभाषा से हम द्विक समाकल की संकल्पना को समतल के किसी भी परिवद्ध समुच्चय पर लागू कर सकते हैं। परन्तु यहां हम कोई भी स्वेच्छ परिवद्ध समुच्चय (arbitrary bounded set) नहीं लेना चाहते।

इसका कारण यह है कि कभी-कभी कुछ "अच्छे" फलन भी ऐसे समुच्चयों पर समाकलनीय नहीं होते। उदाहरण के लिए

$D = \{ (x, y) \mid x \in Q, 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 4 \}$ लीजिए।

तब D, संवृत आयत $[1, 2] \times [3, 4]$ से आविष्ट एक परिवद्ध समुच्चय है। अब, यदि हम D पर परिभाषित अचर फलन $f(x, y) = 1$ लें, तो उदाहरण 3 से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि f, D पर समाकलनीय नहीं है। इसके अतिरिक्त एक बात यह भी है कि ऊपर दी गई परिभाषा समाकल का परिकलन करने में उपयोगी सिद्ध नहीं होती। ये ही कारण हैं कि हम कुछ विशेष प्रकार के प्रदेशों तक ही अपने को सीमित रखते हैं, जहां परिकलन आसानी से किया जा सकता है।

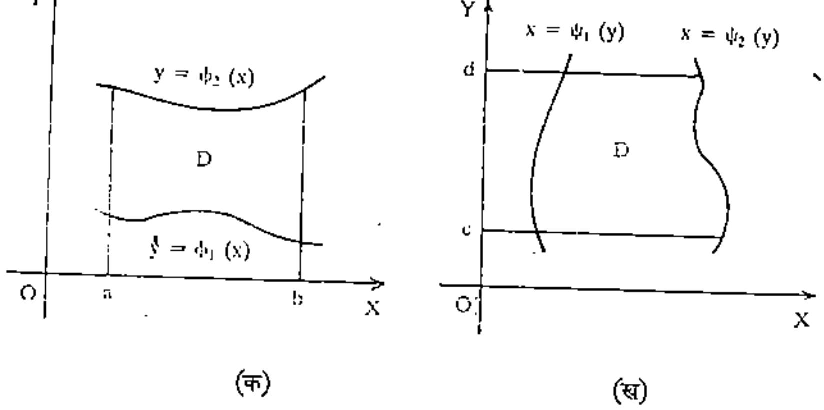
11.3.1 प्रकार I और प्रकार II वाले प्रदेश

अब हम दो सरल प्रकार के प्रदेशों को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 4 : मान लीजिए ϕ_1 और ϕ_2 संवृत अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित ऐसे दो संतत वास्तविक मान फलन हैं जिससे कि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$. मान लीजिए

$$D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \}.$$

समतल के ऐसे प्रदेश D को **प्रकार I वाला प्रदेश** (region of Type I) कहा जाता है। चित्र 9 (क) देखिए।



चित्र 9 : (क) प्रकार I वाला प्रदेश (ख) प्रकार II वाला प्रदेश

परिभाषा 5 : समतल के प्रदेश D को प्रकार II वाला प्रदेश (region of Type II) कहा जाता है, यदि $[c, d]$ पर परिभाषित ऐसे संतत वास्तविक मान फलन ψ_1 और ψ_2 हों कि

$$\psi_1(y) \le \psi_2(y) \ \forall \ y \in [c, d] \text{ और}$$

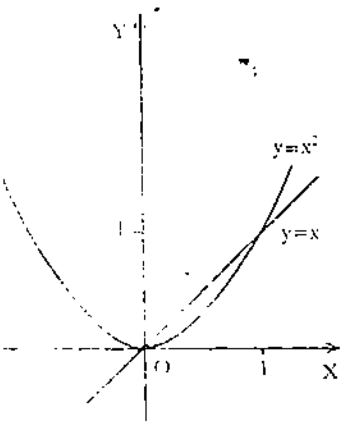
$$D = \{ (x, y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d \}.$$

चित्र 9 (ख) देखिए।

इस प्रकार के प्रदेशों का आकार संवृत आयत से काफ़ी मिलता-जुलता है।

स्पष्ट है कि यदि $\phi_1(y) = a$ और $\phi_2(y) = b$ या $\psi_1(x) = c$ और $\psi_2(x) = d$, तो ऊपर बताए गए दोनों प्रदेश संवृत आयत $[a, b] \times [c, d]$ हैं।

आइए हम इस प्रकार के प्रदेशों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।



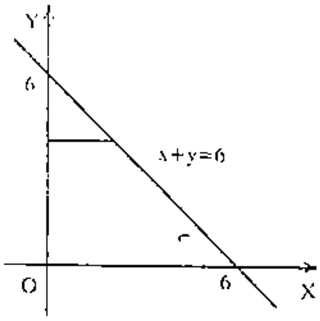
चित्र 10

उदाहरण 8 : मान लीजिए

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1 \text{ और } x^2 \le y \le x \}.$$

आइए हम प्रदेश D का ज्यामितीय वर्णन दें (देखिए चित्र 10)। D को समुच्चय रूप में न लिखकर हम D को सरल रेखा $y = x$ और परवलय $y = x^2$ से परिबद्ध प्रदेश के रूप में मान सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यहां $\psi_1(x) = x$ और $\psi_2(x) = x^2$. x के मानों का परिसर मालूम करने के लिए हमें इन दो वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु (points of intersection) मालूम करने होते हैं। इन बिन्दुओं पर $x = 0$ और $x = 1$. इस तरह हम यह पाते हैं कि परिसर $[0, 1]$ है।

आइए हम एक और उदाहरण लें।



चित्र 11

उदाहरण 9 : मान लीजिए D, रेखाओं $x = 0$, $y = 0$ और $x + y = 6$ से परिबद्ध त्रिभुज से बना प्रदेश है। आइए हम D का ज्यामितीय वर्णन करें (चित्र 11 देखिए)।

चित्र 11 में हम यह देखते है कि D के बिन्दुओं (x, y) के लिए y का परिसर 0 से 6 तक है और किसी भी y के लिए x का परिसर y-अक्ष से लेकर रेखा $L : x + y = 6$ तक होता है। अर्थात् x का परिसर रेखाओं $x = 0$ और $x = 6 - y$ के बीच है। इस तरह, हम D को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le y \le 6, 0 \le x \le 6 - y \}.$$

अतः D, प्रकार II वाला प्रदेश है।

ध्यान दीजिए कि यहां $\psi_1(y) = 0$ और $\psi_2(y) = 6 - y$. इस उदाहरण में हम D को निम्न रूप मे भी व्यक्त कर सकते हैं :

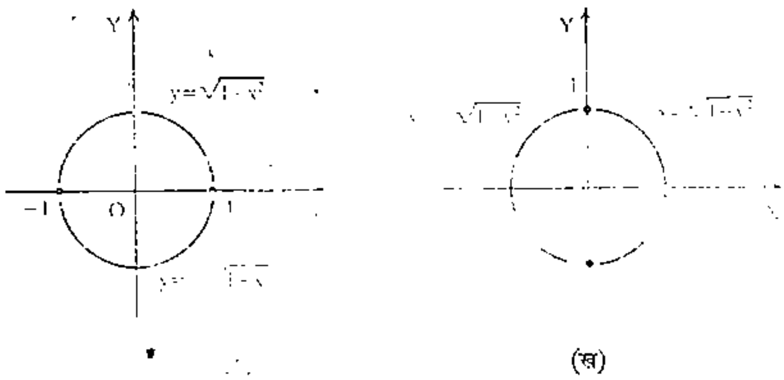
$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 6 - x \}.$$

अर्थात् D प्रकार I वाला प्रदेश है। इस तरह, हम यह पाते है कि एक ही समय पर प्रदेश प्रकार I और प्रकार II वाला, दोनों ही हो सकता है।

यहा हम इस प्रकार के प्रदेश का एक और उदाहरण दे रहे है।

उदाहरण 10 : मान लीजिए D, एकक वृत्त (unit circle) $x^2 + y^2 = 1$ से परिबद्ध एक प्रदेश है।

चित्र 12 में दोनों ही प्रकार I और प्रकार II वाले प्रदेश के रूप में D को दिखाया गया है।

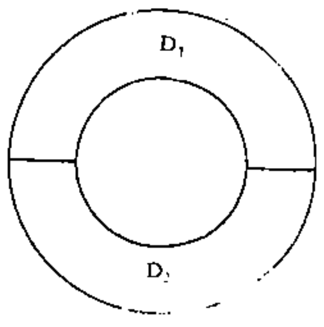


चित्र 12

चित्र 12 (क) में हम यह देखते हैं कि x का परिसर −1 और 1 के बीच है और y का परिसर $-\sqrt{1-x^2}$ और $\sqrt{1-x^2}$ के बीच है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि D, प्रकार I वाला प्रदेश है। इसी प्रकार, चित्र 12 (ख) में हम यह देखते हैं कि y का परिसर −1 और 1 के बीच है और x का परिसर $-\sqrt{1-y^2}$ और $\sqrt{1-y^2}$ के बीच है। अर्थात् D को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, -1 \le y \le 1\}, \quad \text{और}$$

इस तरह D प्रकार II वाला प्रदेश है।



चित्र 13

यह भी संभव है कि कोई प्रदेश न तो प्रकार I वाला हो और न ही प्रकार II वाला। उदाहरण के लिए चित्र 13 में $D = \{(x, y) \mid 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$ द्वारा दिया गया वलय D दोनों में से किसी भी प्रकार का प्रदेश नहीं है। परन्तु D को दो प्रदेशों D_1 और D_2, जो कि प्रकार I वाले प्रदेश हैं, के सम्मिलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (चित्र 13 देखिए)।

इस इकाई में हम आगे केवल उन्हीं प्रदेशों पर द्विक समाकलन करेंगे, जो प्रकार I के हों या प्रकार II के हों या जिन्हें इन दो प्रकार के प्रदेशों के सम्मिलन के रूप में लिखा जा सकता हो।

और अधिक अभ्यास के लिए आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E8) नीचे दिए गए प्रदेशों के लिए बताइए कि ये प्रकार I, प्रकार II या दोनों प्रकार के प्रदेश हैं, या किसी भी प्रकार के नहीं है।

(क) $y = 0, x = 2, y = x^2$ से परिबद्ध प्रदेश

(ख) वृत्तों $x^2 + y^2 = a^2$ और $x^2 + y^2 = b^2$, $b > a$ के बीच स्थित प्रदेश

(ग) $y = x^2$ और $y = x^{1/4}$ से परिबद्ध प्रदेश

(घ) $x^2 + y^2 = 1$ और $x^2 + y^2 = 9, y \ge 0$ के बीच स्थित प्रदेश।

संवृत आयतों पर द्विक समाकलों की तरह यहां भी केवल परिभाषा को लागू करके $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ का मान निकालना मुश्किल होगा। फिर भी, यदि D, प्रकार I या प्रकार II वाला प्रदेश हो या यदि D को परिमिततः अनेक प्रदेशों में विभक्त किया जा सकता हो, जिनमें से प्रत्येक प्रकार I या प्रकार II वाला प्रदेश हो, तो हम पुनरावृत्त समाकलों की सहायता से द्विक समाकल का मान निकाल सकते हैं। अगले उपभाग में हम इसी विषय पर चर्चा करने जा रहे हैं।

11.3.2 प्रकार I और प्रकार II वाले प्रदेशों पर पुनरावृत्त समाकल

मान लीजिए $f(x, y)$ प्रकार I वाले प्रदेश D पर परिभाषित एक परिबद्ध फलन है। तब हम D को इस रूप में लिख सकते हैं :

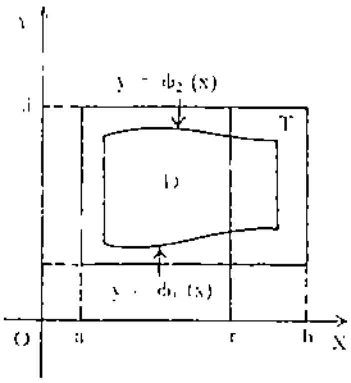
$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

जहां a, b, ϕ_1 और ϕ_2 वही हैं, जो कि परिभाषा 4 में बताए गए हैं।

मान लीजिए, T एक आयत $[a, b] \times [c, d]$ है, जो D को आविष्ट करता है। मान लीजिए f^*,

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in T \setminus D \end{cases}$$

से परिभाषित है। तब अंतराल [a, b] के किसी x के लिए हमें $c \le \phi_1(x) \le \phi_2(x) \le d$ प्राप्त होता है।



चित्र 14

अब आप चित्र 14 देखिए। आप देखेंगे कि एक चर वाले फलनों के समाकलों के अंतराल सम्मिलन गुणधर्म की सहायता से हम किसी भी नियत x के लिए यह लिख सकते हैं कि

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_c^{\phi_1(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\phi_2(x)}^{d} f^*(x, y)\, dy, \quad \ldots (6)$$

यदि $\int_c^d f^*(x, y)\, dy$ का अस्तित्व हो।

अब, जब भी $c \le y \le \phi_1(x)$ और $\phi_2(x) \le y \le d$, तो $f^*(x, y) = 0$. इसलिए हमें प्राप्त होता है,

$$\int_c^{\phi_1(x)} f^*(x, y)\, dy = 0 = \int_{\phi_2(x)}^{d} f^*(x, y)\, dy$$

इसलिए (6) से हमें प्राप्त होता है,

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि आयत पर f^* का पुनरावृत्त समाकल (यदि इसका अस्तित्व है) निम्नलिखित पुनरावृत्त समाकल के बराबर होता है :

$$\int_c^d \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy \right] dx.$$

अब हम जो परिणाम देने जा रहे हैं, वह प्रमेय 3 के समान है। इससे हमें यह पता चलता है कि प्रकार I या प्रकार II वाले प्रदेश पर संतत फलन के द्विक समाकल का परिकलन पुनरावृत्त समाकलन करके किया जा सकता है। अब हम प्रकार I वाले प्रदेशों के लिए इस परिणाम का कथन देंगे।

प्रमेय 5 : मान लीजिए $D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \}$, समतल का एक प्रदेश है, जहां ϕ_1 और ϕ_2 वही है, जोकि परिभाषा 4 में दिए गए हैं। मान लीजिए $f : D \to R$ एक संतत फलन है। तब पुनरावृत्त समाकल

$$\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy \right] dx$$

का अस्तित्व होता है और यह द्विक समाकल $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ के बराबर होता है।

प्रकार II वाले प्रदेशों से संबंधित प्रमेय का कथन भी ठीक ऐसा ही होता है। क्या आप यह कथन लिख सकेंगे? E9) भी देखिए। कथन लिख लेने के बाद आप इसे भाग 11.6 में दिए गए उत्तर से मिलान करना न भूलें।

E9) प्रकार II वाले प्रदेशों से सम्बद्ध परिणाम का कथन दीजिए जो कि प्रमेय 5 के अनुरूप है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से प्रमेय 5 को समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 11 : आइए हम प्रदेश $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le e^x \}$ पर $f(x, y) = x + y$ के द्विक समाकल का परिकलन करें।

स्पष्ट है कि D, प्रकार I वाला प्रदेश है।

चूंकि फलन $f(x, y) = x + y$, D पर संतत है, इसलिए प्रमेय 5 के अनुसार

$$\iint_D (x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} (x + y)\, dy \right] dx.$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(xe^x + \frac{e^{2x}}{2} \right) dx$$

$$= \left[\left(xe^x - e^x + \frac{e^{2x}}{4} \right) \right]_0^1$$

$$= e - e + \frac{e^2}{4} + 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2 + 3}{4}$$

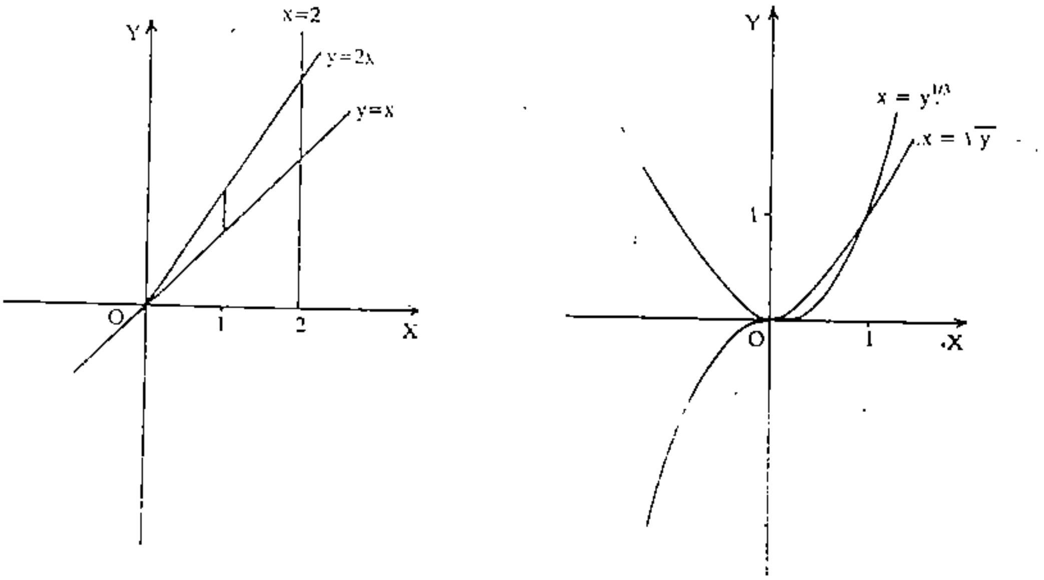
उदाहरण 12 : आइए हम बताए गए प्रदेशों पर निम्नलिखित फलनों के समाकल ज्ञात करें।

i) $y = x$, $y = 2x$ और $x = 2$ से परिबद्ध प्रदेश पर $f(x, y) = \sqrt{xy}$

ii) $x = y^{1/3}$ और $x = \sqrt{y}$ से परिबद्ध प्रदेश पर $f(x, y) = x^4 + y^2$.

आइए इन्हें हम एक-एक करके लें।

i) पहले हम प्रदेश D को ज्यामितीय रूप में (चित्र 15 (क)) खींचते हैं।



(क) (ख)

चित्र 15

चित्र से हम यह देख सकते हैं कि x का परिसर 0 और 2 के बीच है, अर्थात् $0 \le x \le 2$, और y का परिसर रेखाओं $\phi_1(x) = x$ और $\phi_2(x) = 2x$ के बीच है। इस तरह, $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, x \le y \le 2x \}$, जो कि प्रकार I वाला प्रदेश है।

चूंकि फलन $f(x, y) = \sqrt{xy}$, D में संतत है, इसलिए प्रमेय 5 के अनुसार

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_x^{2x} \sqrt{xy}\,dy \right] dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \left[\sqrt{x}\, y^{3/2}\right]_x^{2x} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \sqrt{x}\,[(2x)^{3/2} - x^{3/2}]\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(2^{3/2}-1)\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\frac{8}{3}$$

$$= \frac{16}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

ii) इस स्थिति के प्रदेश D को चित्र 15 (ख) में दिखाया गया है। D को इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le y^{1/3} \}$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि D, प्रकार II वाला प्रदेश है। अब, चूंकि $f(x, y) = x^4 + y^2$ संतत है, इसलिए E9) के परिणाम को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} (x^4 + y^2)\,dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^5}{5} + xy^2\right]_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{5}(y^{5/3} - y^{5/2}) + (y^{7/3} - y^{5/2}) \right] dy$$

$$= \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}y^{8/3} + \frac{3}{10}y^{10/3} - \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{7}y^{7/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{3}{10} - \frac{12}{35}$$

$$= \frac{9}{280}$$

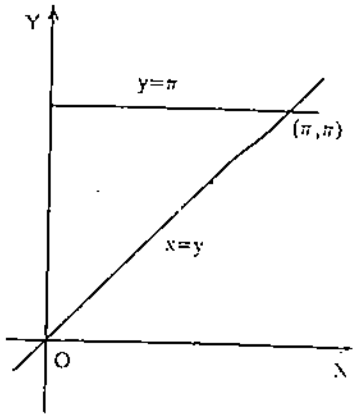
कभी-कभी प्रमेय 5 या इसके अनुरूप को लागू करने के दौरान हमें एक ऐसा समाकल्य मिलता है, जिसके समाकलन में कलन का मूलभूत प्रमेय सहायक सिद्ध नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम प्रदेश को अलग ढंग से व्यक्त करने की कोशिश करते हैं। इससे हम समाकलन के क्रम को उलट सकते हैं जो कि परिकलन में उपयोगी सिद्ध हो सकता है। ऐसी ही एक स्थिति आप नीचे दिए गए उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण 13 : समाकल $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ लीजिए, जहां

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y}, & y \ne 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

और D, रेखाओं $x = 0, y = \pi, x = y$ से परिवद्ध प्रदेश है, जैसा कि चित्र 16 में दिखाया गया है।

यहां $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le \pi, x \le y \le \pi \}$.



चित्र 16

यहां D प्रकार I वाले प्रदेश के रूप में व्यक्त किया गया है। तब प्रमेय 5 को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left[\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy \right] dx.$$

परन्तु यहां हम

$$\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

का मान निकालने के लिए कलन के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग नहीं कर सकते। लेकिन, यदि हम D को

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le y \le \pi, 0 \le x \le y \}$$

के रूप में व्यक्त करें, तो D प्रकार II वाला एक प्रदेश होगा। अब प्रमेय 5 के अनुरूप को, जिसे हमने E9) में प्राप्त किया है, लागू करके आप यह देख सकते हैं कि

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin y\; dy \;= -\cos y \Big]_0^{\pi} = 2.$$

अब आप कुछ प्रश्नो को स्वयं हल करने की कोशिश कर सकते हैं।

E10) निम्नलिखित पुनरावृत्त समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

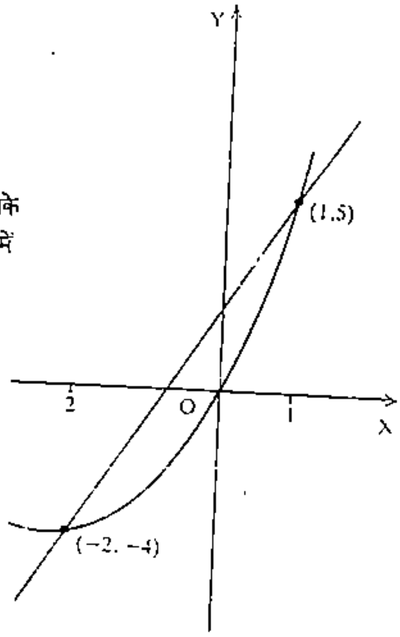
(क) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\int_0^{x} x \sin y\; dy \right] dx$

(ख) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\sin x} y\, dy \right] dx$

E11) x-अक्ष और रेखाओं $2y = x$ और $x = 2$ से बने त्रिभुज द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x, y) = e^{x^2}$ का द्विक समाकल प्राप्त कीजिए।

E12) निम्नलिखित पुनरावृत्त समाकल को एक द्विक समाकल के रूप में व्यक्त कीजिए और इसके समाकलन प्रदेश का वर्णन कीजिए। इस द्विक समाकल को दूसरे पुनरावृत्त समाकल (जिसमें समाकलन का क्रम पलट दिया हो) के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\int_1^{2} \left[\int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, dy \right] dx$$



E13) समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद

$$\int_0^{2} \left[\int_0^{x^2} 3xy\, dy \right] dx$$

का मान निकालिए।

E14) द्विक समाकल $\iint_D dx\, dy$ से संबंधित दोनों पुनरावृत्त समाकल लिखिए जहा D, दायीं ओर के चित्र में दिखाया गया प्रदेश है। इनके मान मालूम कीजिए और दिखाइए कि ये दोनों बराबर हैं।

अगले भाग में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार चरों का परिवर्तन, प्रकार I और प्रकार II वाले प्रदेशों पर दो चरों वाले फलनों के समाकलों को प्रभावित करता है। विशेष रूप से इसकी सहायता से हम कार्तीय निर्देशांकों के द्विक समाकलों को ध्रुवी निर्देशांकों के द्विक समाकलों में रूपांतरित करेंगे। ऐसा रूपांतरण करना तब आवश्यक हो जाता है, जबकि विचाराधीन प्रदेश हृदयाभ (cardioid) या वृत्त जैसे वक्र से परिबद्ध हो, जिसे ध्रुवीय निर्देशांकों में अधिक आसानी से व्यक्त किया जा सकता हो।

11.4 चर परिवर्तन

कलन पाठ्यक्रम की इकाई 11 में आपने देखा है कि चर में उचित परिवर्तन करने से समाकलन काफ़ी आसान हो सकता है। आपको याद होगा कि समाकल $\int f(v)\,dv$ में $v = g(x)$ को, जहां g कुछ उपयुक्त प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न सूत्र मिलता है :

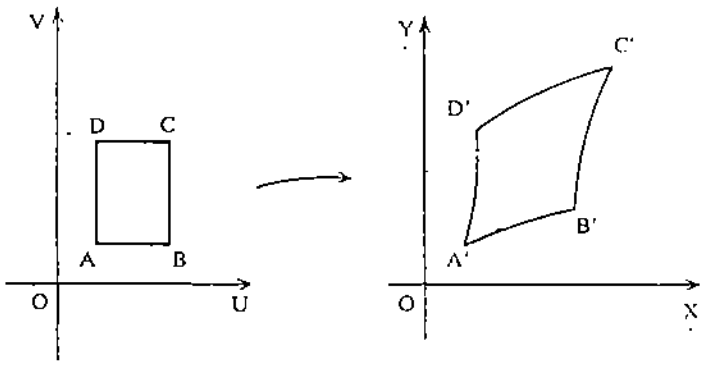
$$\int f(v)\,dv = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx.$$

क्या इसी प्रकार, चरों में परिवर्तन करके द्विक समाकलन को आसान बनाया जा सकता है ? जी हां। अब हम पहले इस बात की चर्चा करेंगे कि रूपांतरण $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ का द्विक समाकल $\iint_D f(u, v)\,du\,dv$ पर क्या असर होगा। तब फिर हम परिणाम का (उपपत्ति दिए बिना) परिशुद्ध कथन देंगे।

आपने यह देखा है कि किसी प्रदेश पर द्विक समाकलों को परिभाषित करने के लिए हम पहले उस प्रदेश को छोटे-छोटे आयतों में विभाजित करते हैं। और तब इन आयतों के क्षेत्रफलों का प्रयोग ऊपरि और निम्न योगफलों को परिभाषित करने के लिए करते हैं। अब मान लीजिए हम चरों u और v को चरों x और y में परिवर्तित कर देते हैं। आइए यहां हम यह मान लें कि नए चर x और y, चरों u और v से इस प्रकार संबंधित हैं :

$$x = \phi(u, v), y = \psi(u, v) \qquad \ldots \quad (7)$$

ये समीकरण xy-समतल में uv-समतल के रूपांतरण को परिभाषित करते हैं। यहां हम केवल उन्हीं रूपांतरणों को लेंगे, जो किसी दिए हुए समाकल के लिए, समाकलन-प्रदेश को एक अन्य प्रदेश पर एकैक रूप से आच्छादित करते हों। आइए अब हम यह देखें कि किस प्रकार यह रूपांतरण uv-समतल में छोटे आयत ABCD के क्षेत्रफल को प्रभावित करता है। (7) द्वारा दिए गए रूपांतरण के अधीन ABCD का प्रतिबिंब xy-समतल में कोई एक प्रदेश A'B'C'D' होगा। चित्र 17 देखिए।



चित्र 17

मान लीजिए A,B,C और D के निर्देशांक हैं :

$A = (a, b)$, $\qquad B = (a + h, b)$

$C = (a + h, b + k)$, $\qquad D = (a, b + k)$

A का प्रतिबिंब, अर्थात्

$$A' = (\phi(A), \psi(A)).$$

$$B' = (\phi(B), \psi(B)),\ \ C' = (\phi(C), \psi(C))$$

और

$$D' = (\phi(D), \psi(D)).$$

जब आयत ABCD छोटा होता है, अर्थात् जब h और k छोटे होते हैं, तो आकृति A'B'C'D' एक समातर चतुर्भुज की तरह दिखाई पड़ती है।

इस तरह, हम यह लिख सकते हैं कि

A = A'B'C'D' का क्षेत्रफल = 2. Δ A'B'D' का क्षेत्रफल

$$= \pm \begin{vmatrix} \phi(A) & \phi(B) & \phi(D) \\ \psi(A) & \psi(B) & \psi(D) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

पहले स्तम्भ (column) को प्रत्येक स्तम्भ से घटाने और सारणिक (determinant) का मान निकालने पर हमें प्राप्त होता है :

$$A = \pm \begin{vmatrix} \phi(B) - \phi(A) & \phi(D) - \phi(A) \\ \psi(B) - \psi(A) & \psi(D) - \psi(A) \end{vmatrix}$$

अब इस 2×2 सारणिक की प्रत्येक प्रविष्टि (entry) पर माध्य मान प्रमेय लागू करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$A = \pm hk \begin{vmatrix} \phi_u(\xi) & \phi_v(\eta) \\ \psi_u(\xi') & \psi_v(\eta') \end{vmatrix} \qquad \ldots \quad (8)$$

यहां ξ और ξ', A और B को मिलाने वाली रेखा के विन्दु हैं और η और η', A और D को मिलाने वाली रेखा के विन्दु हैं।

अब (8) का दक्षिण पक्ष, $|J|hk$ के लगभग बरावर है, जहां j, (7) द्वारा दिए गए रूपातरण का जेकोवियन है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि क्षेत्रफल hk वाला आयताकार प्रदेश ABCD, क्षेत्रफल $|J|hk$ वाले प्रदेश A'B'C'D' में रूपांतरित हो जाता है। मान लीजिए $f(x, y)$ एक समाकलनीय फलन है, और मान लीजिए P, D का एक विभाजन है।

तब, $$L(P, f) = \sum_i hk \inf_{(x, y) \in T_i} f(x, y) \quad \text{को}$$

$$\sum_i |J|\, hk \inf_{(u, v) \in T_i'} f(\phi(u, v), \psi(u, v)), \qquad \ldots \quad (9)$$

से सन्निकटित किया जाता है, जहां T_i' ऐसा होता है कि यह (7) द्वारा दिए गए रूपातरणे से T_i में, रूपांतरित हो जाता हो।

जब विभाजन का मानक (norm) शून्य की ओर प्रवृत्त होता है तब (9) में दिया गया योगफल

$$\iint_D f(\phi(u, v), \psi(u, v))\, du\, dv\, |J|$$

हो जाता है। इस तरह, इससे यह पता चलता है कि (x, y) से (u, v) में चरों का परिवर्तन करने से निम्नलिखित समिका (equality) प्राप्त होनी चाहिए :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\phi(u, v), \psi(u, v))\, |J|\, du\, dv,$$

जहां D, (7) द्वारा दिए गए रूपातरण के अधीन D' का प्रतिविंव है। परिणाम का परिशुद्ध कथन अब हम दे रहे हैं।

यदि P [illegible]
Q = [illegible]
R = [illegible]
Δ PQR का क्षेत्रफल

$$= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

चिह्न + या - इस प्रकार चुनते है कि क्षेत्रफल ऋणेतर हो।

प्रमेय 6 : मान लीजिए D, R^2 में एक परिबद्ध समुच्चय है और मान लीजिए f, D पर परिभाषित एक संतत फलन है। मान लीजिए $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$, uv-समतल से xy-समतल में एक ऐसा रूपांतरण है, कि

(i) uv-समतल में एक ऐसे प्रदेश D' का अस्तित्व होता है, कि D', D पर एकैक रूप से आच्छादित होता है,

(ii) D' पर ϕ, ψ के आंशिक अवकलज संतत होते हैं।

(iii) D' में $J = \dfrac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0.$

तब,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\phi(u, v)\ \psi(u, v))\, |J|\, du\, dv.$$

यहां हम इस प्रमेय की उपपत्ति तो नहीं देंगे, परंतु यह देखेंगे कि यह किस प्रकार कुछ द्विक समाकलों के मान निकालने में उपयोगी सिद्ध होता है। द्विक समाकलों में चरों का परिवर्तन करने के दौरान आपको अनेक जैकोबियनों का परिकलन करना पड़ेगा। इसलिए यह बेहतर होगा कि कुछ समय के लिए पीछे लौटकर आप इकाई 9 को जल्दी से दोहरा लें।

उदाहरण 14 : मान लीजिए uv-समतल में S एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष (0, 0), (1, 0) और (0, 1) हैं। और R, xy-समतल में रूपांतरण

$x = 2u - 3v$

$y = 5u + 7v$

करने पर प्राप्त संगत प्रदेश है।

आइए हम $\iint_R x\, dx\, dy$ का मान निकालें।

इस स्थिति में रूपांतरण का जैकोबियन है,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 29$$

इस तरह, प्रमेय 6 को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\iint_R x\, dx\, dy = \iint_S (2u - 3v)\, (29)\, du\, dv,$$

जहां S, uv-समतल में त्रिभुजाकार प्रदेश है, जो $0 \le v \le 1, 0 \le v \le 1 - u$ से व्यक्त होता है।

इस तरह,

$$\iint_R x\, dx\, dy = 29 \int_0^1 \int_0^{1-u} (2u - 3v)\, dv\, du$$

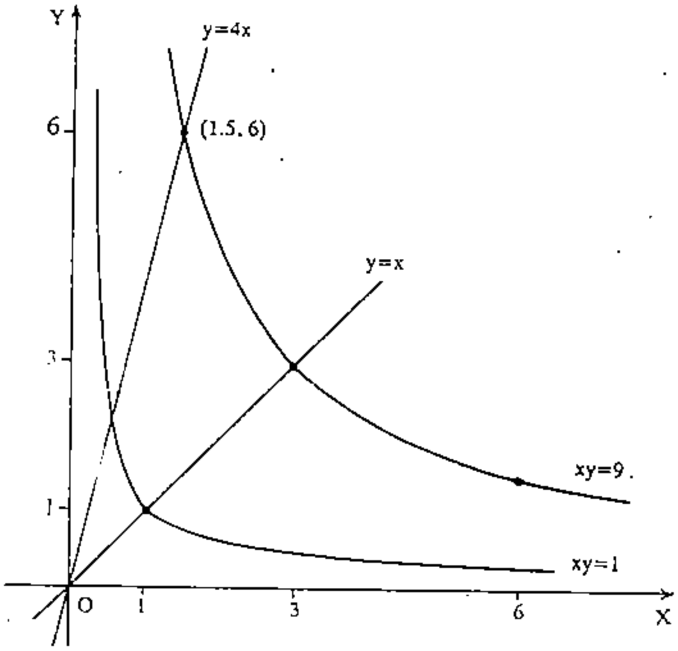
$$= 29 \int_0^1 \left[2uv - \frac{3v^2}{2} \right]_0^{1-u} du$$

$$= 29 \int_0^1 \left[2u(1-u) - \frac{3}{2}(1-u)^2 \right] du$$

$$= \frac{-29}{6}$$

उदाहरण 15 : आइए हम रूपांतरण $x = \frac{u}{v}$, $y = uv, u > 0, v > 0$ का प्रयोग करके वक्रों $xy = 1$, $xy = 9$, $y = x$ और $y = 4x$ से परिबद्ध प्रथम चतुर्थांश में स्थित प्रदेश D का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

प्रदेश D को चित्र 18 में दिखाया गया है।



चित्र 18

स्पष्ट है कि प्रकार I या प्रकार II वाले प्रदेशों के सम्मिलन के रूप में D को व्यक्त करना आसान नहीं है। परन्तु रूपांतरण $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$ से यह पता चलता है कि D, रेखाओं $u = 1, u = 3$, $v = 1$ और $v = 2$ से परिबद्ध आयत का प्रतिबिंब है।

इसलिए,

$$\iint_D dx\, dy = \int_1^2 \int_1^3 |J|\, du\, dv,$$

जहां

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल है,

$$\int_1^2 \int_1^3 \frac{2u}{v}\, du\, dv = 8 \ln 2.$$

आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि चर-परिवर्तन से परिकलन काफ़ी सरल हो जाता है।

अब हम चर परिवर्तन सूत्र का प्रयोग कार्तीय निर्देशांकों के द्विक समाकलों को ध्रुवीय निर्देशांकों के द्विक समाकलों में रूपांतरित करने में करेंगे।

ध्रुवीय निर्देशांकों में द्विक समाकल

आप यह जानते हैं कि समतल के किसी भी बिन्दु को ध्रुवीय निर्देशांकों से भी निरूपित किया जा सकता है और ये निर्देशांक, कार्तीय निर्देशांकों के साथ समीकरणों

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

से संबंधित हैं।

हम इन संबंधों का प्रयोग समाकल $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ को

$\iint_{D^*} f^*(r, \theta)\, |J|\, dr\, d\theta$ के प्रकार के समाकल में रूपांतरित करने में कर सकते हैं, जहां

$|J| = \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|$ और D^* ध्रुवीय निर्देशांकों मे व्यक्त प्रदेश D है। आप यह जानते हैं (इकाई 9 का उदाहरण 1) कि $|J| = r$. इसलिए ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त द्विक समाकल का मान निकालने के लिए हमें प्रदेश D को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त करना होता है और तब इसे निम्न प्रकार के प्रदेश के रूप में व्यक्त करना होता है :

$$\{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

या $$\{(r, \theta) \mid a \le r \le b,\ h_1(r) \le \theta \le h_2(r)\}$$

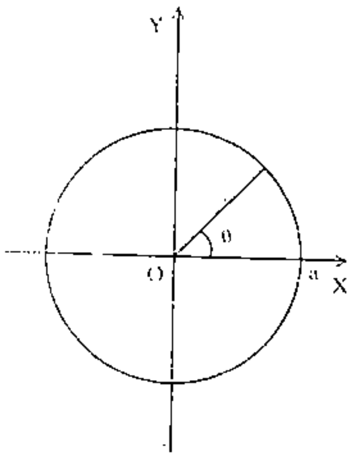
या इस प्रकार के प्रदेशों के सम्मिलन के रूप में व्यक्त करना होता है, जिससे कि पुनरावृत्त समाकलों की सहायता से हम द्विक समाकल का मान निकाल सकें। परन्तु ऐसा करने से पहले हमें इस बात की जांच कर लेनी चाहिए कि प्रमेय 6 मे बताए गए प्रतिबंध संतुष्ट हो रहे हैं या नहीं।

नीचे दिए गए पहले दो उदाहरणों में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार एक प्रदेश को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त किया जाता है। इसके बाद हम ध्रुवीय निर्देशांकों की सहायता से कुछ समाकलों का परिकलन करेंगे। ध्यान दीजिए कि यदि प्रदेश D पहले से ही ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त हो, तो हम समाकल

$$\iint_D f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

को ध्रुवीय निर्देशांकों में D पर f का समाकल लेंगे, न कि समाकल

$$\iint_D f(r, \theta)\, dr\, d\theta \text{ को।}$$



चित्र 19

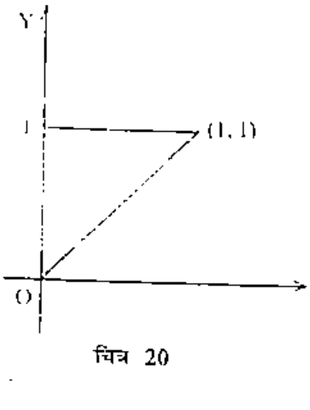
आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 16 : मान लीजिए D एक ऐसे वृत्त से परिबद्ध एक प्रदेश है जिसकी त्रिज्या a है और केन्द्र मूल बिन्दु पर है (चित्र 19)। आइए हम D को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त करें।

यहां हम देखते हैं कि D मे θ का परिसर 0 से 2π तक है। θ को नियत रखने पर हम यह पाते हैं कि कोण θ के किरण पर r का परिसर 0 से a तक है।

इस तरह, D का विवरण है :

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a.$$



चित्र 20

उदाहरण 17 : मान लीजिए D एक त्रिभुजाकार प्रदेश है जिसके (कार्तीय निर्देशांकों में) शीर्ष (0, 0), (1, 1), (0, 1) पर हैं। अब हम D को ध्रुवीय निर्देशांकों मे व्यक्त करेंगे। चित्र 20 मे हम देख सकते है कि θ का परिसर $\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक है। और दिए हुए θ के लिए r का परिसर 0 से $\frac{1}{\sin\theta}$ तक है। अर्थात्

$$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$$

दूसरी ओर, हम यह पाते हैं कि r का परिसर 0 से $\sqrt{2}$ तक है! और, नियत r के लिए जहां $0 \le r \le 1$, यह स्पष्ट है कि θ का परिसर $\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक है, जबकि $1 \le r \le \sqrt{2}$ के लिए, θ का परिसर $\frac{\pi}{4}$ से β तक है, जहां $r \sin\beta = 1$, अर्थात्

$$0 \le r \le 1, \ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$1 \le r \le \sqrt{2}, \ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \sin^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)$$

अब हम यहां ध्रुवीय निर्देशांकों में द्विक समाकलों का मान निकालने की विधि को अच्छी तरह से समझने के लिए कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 18 : मान लीजिए D, त्रिज्याओं $r = 1$ और $r = 2$ वाला एक चतुर्थांश रिंग है। आइए हम समाकल

$$\iint_D (3x + 8y^2)\, dy\, dx$$

का मान निकालें।

पहले हम यह देखते हैं कि हम D को

$$D = \left\{ (r, \theta) \,\middle|\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 1 \le r \le 2 \right\}$$

के रूप मे लिख सकते हैं। और ध्रुवीय निर्देशांकों में फलन f को

$$f^*(r, \theta) = 3r\cos\theta + 8r^2 \sin^2\theta$$

के रूप में लिखा जा सकता है। तब

$$\iint_D (3x + 8y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 (3r\cos\theta + 8r^2 \sin^2\theta)\, r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 8r^3\sin^2\theta)\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[r^3\cos\theta + 2r^4\sin^2\theta\right]_1^2 dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[7\cos\theta + 30\sin^2\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (7\cos\theta + 15 - 15\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[7\sin\theta + 15\theta - \frac{15}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 7 + \frac{15}{2}\pi$$

उदाहरण 19 : मान लीजिए D, $r = \theta$, और $r = 2\theta$ के लेखाचित्रों के बीच का प्रदेश है, जहां $0 \le \theta \le 3\pi$. आइए हम द्विक समाकल

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

यहां हम देखते हैं कि फलन $f(x, y) = x^2 + y^2$, D पर संतत है और $f(r, \theta) = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$.

इसलिए

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^{3\pi} \int_0^{2\theta} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \int_0^{2\theta} r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\theta} d\theta$$

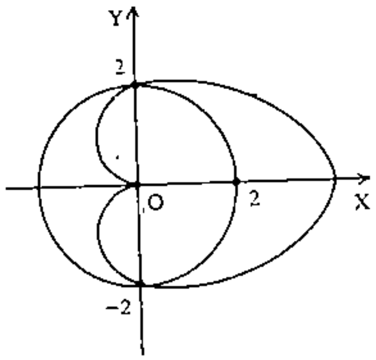
$$= \frac{15}{4} \int_0^{3\pi} \theta^4\, d\theta$$

$$= \frac{15}{4} \left[\frac{\theta^5}{5} \right]_0^{3\pi}$$

$$= \frac{363}{2} \pi^5$$

उदाहरण 20 : आइए हम प्रदेश D पर, जो हृदयाभ $r = 2(1 + \cos\theta)$ के अन्दर और वृत्त $r = 2$ के बाहर स्थित है, $f(x, y) = y$ का समाकल ज्ञात करें।

इसके लिए आइए हम चित्र 21 में दिए गए प्रदेश D पर ध्यान दें।



चित्र 21

तब D उन बिन्दुओं (x, y) का समुच्चय होता है, जिनके ध्रुवीय निर्देशांक $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ और $2 \le r \le 2(1 + \cos\theta)$ को संतुष्ट करते हैं।

चूंकि फलन $f(x, y) = y$, D पर संतत है, इसलिए

$$\iint_D y\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} (r \sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \sin\theta \right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta - \sin\theta \right] d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\frac{(1 + \cos\theta)^4}{4} + \cos\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{22}{3}$$

कभी-कभी एक दिए हुए समाकल का मान निकालने के लिए हमें चर-परिवर्तन सूत्र को दो बार लागू करना पड़ सकता है, जैसा कि नीचे के उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 21 : आइए हम चर-परिवर्तन $x = 2u, y = 3v$ को लागू करके $\iint_R x^2 dx\, dy$ का मान ज्ञात करें, जहां R, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$ द्वारा दिया गया प्रदेश है।

यह चर-परिवर्तन xy-समतल के प्रदेश को (जोकि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से परिबद्ध है) $u^2 + v^2 \le 1$ द्वारा दिए गए uv-समतल के एक वृत्ताकार प्रदेश S में रूपांतरित कर देता है।

फलन $f(x, y) = x^2 = (2u)^2$ और $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 6$.

इसलिए

$$\iint_R x^2 dx\, dy = \iint_S (2u)^2 6\, du\, dv$$

अब uv-समतल में (r, θ) निर्देशांकों का प्रयोग करने पर, अर्थात्
$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ लेने पर हमें प्राप्त होता है

$$\iint_R x^2 dx\, dy = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^2\cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 6\pi$$

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E15) $x^2 + y^2 \le 1$ से व्यक्त प्रदेश पर $e^{x^2+y^2}$ का समाकल ज्ञात कीजिए।

E16) ध्रुवीय निर्देशांकों में $r = 1 - \cos\theta$ से परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x, y) = y$ का समाकल ज्ञात कीजिए।

E17) बताए गए चर-परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकलों को परिकलित कीजिए :

क) $\iint_D (a^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$ जहां D, $x^2 + y^2 \le ax$ से व्यक्त चक्रिका का प्रथम चतुर्थांश में स्थित भाग है।

रूपांतरण : $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

(संकेत : रूपांतरित प्रदेश होगा $\left\{(r, \theta) \,\middle|\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le a\cos\theta\right\}$)

ख) $\iint_D \frac{x^2 + 2y^2}{xy}\, dx\, dy$, जहां D, $x = y^2, x = y^2 + 2, y = \frac{1}{x}, y = \frac{3}{x}$ से परिबद्ध है।

रूपांतरण : $u = xy, v = x - y^2$

E18) उपयुक्त चर-परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

क) $\iint_R \frac{x + y}{1 + x - y}\, dx\, dy$, जहां R, $x - y = 0, x + y = 0, x - y = 4, x + y = 4$ से परिबद्ध

ख) $\iint_R e^x\, dx\, dy$, जहां R, $y = 3x + 1, y = 3x - 3, y = -x + 1, y = -x + 5$ से परिबद्ध है।

इसके साथ ही हम इस इकाई को यहीं समाप्त करते हैं। अगली इकाई में हम त्रिक समाकलों (triple integrals) पर चर्चा करेंगे। इस इकाई में हमने जो कुछ भी पढ़ा है, आइए उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां हम दे दें।

11.5 सारांश

इस इकाई में हमने :

1) एक आयत पर परिभाषित फलन के द्विक समाकल को परिभाषित किया है।

2) पुनरावृत्त समाकलों पर चर्चा की है, जिनके प्रयोग से द्विक समाकलों का परिकलन आसानी से हो जाता है। इस तरह, उपयुक्त प्रतिबंधों के अधीन

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy, \text{ जहां } D = [a, b] \times [c, d].$$

3) द्विक समाकलों की परिभाषा को R^2 के परिबद्ध समुच्चयों पर भी लागू किया है और पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके प्रकार I और प्रकार II वाले कुछ प्रदेशों पर समाकलों के मान भी ज्ञात किए हैं। उदाहरण के लिए

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

जहां f, $D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$

द्वारा निर्धारित प्रकार I वाले परिबद्ध प्रदेश D पर परिभाषित एक संतत फलन है।

4) निम्नलिखित चर-परिवर्तन सूत्र की व्याख्या की है :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(\phi(u, v), \psi(u, v))\, |J|\, du\, dv$$

5) ध्रुवीय निर्देशांकों में द्विक समाकलों के मान ज्ञात किए हैं।

11.6 हल और उत्तर

E1) चूंकि $f(x) = x$, $[a, b]$ पर संतत है, इसलिए वह $[a, b]$ पर समाकलनीय है। (कलन, खंड 3, इकाई 10 का प्रमेय 5 देखिए।)

तब $\quad I_L = \sup \{L(P, f)\} = \inf \{U(P, f)\} = I_U = \int_a^b f(x)\, dx$

हम यह दिखाएंगे कि $I_L = I_U = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

मान लीजिए $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $[a, b]$ का एक स्वेच्छ विभाजन है। प्रत्येक उप-अंतराल $[x_{i-1}, x_i]$ पर फलन $f(x) = x$ का उच्चक $M_i = x_i$ और निम्नक $m_i = x_{i-1}$. अतः

$$U(P, f) = \sum M_i\, \Delta x_i = \sum x_i\, (x_i - x_{i-1})$$

और $\quad L(P, f) = \sum x_{i-1}\, (x_i - x_{i-1})$

अब सभी i के लिए $x_{i-1} \le \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \le x_i$

इसलिए

$$U(P, f) \ge \sum \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$U(P, f) \ge \sum \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2)$$

$$U(P, f) \ge \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

यह $[a, b]$ के सभी विभाजनों के लिए सही है। अतः

$$I_U = \inf \{U(P, f)\} \geq \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि

$$I_L \leq \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$ अतः

$$I_L \leq \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \leq I_U$$

परन्तु $I_L = I_U$.

अतः $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

E2) $U(P, f) = M_{11}$ (T_{11} का क्षेत्रफल) $+ M_{12}$ (T_{12} का क्षेत्रफल) $+ M_{21}$ (T_{21} का क्षेत्रफल) $+ M_{22}$ (T_{22} का क्षेत्रफल) $+ M_{31}$ (T_{31} का क्षेत्रफल) $+ M_{32}$ (T_{32} का क्षेत्रफल)

T_{11} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$

T_{12} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$

T_{21} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{22} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{31} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{32} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

अब m_{ij} और M_{ij} को परिकलित करने के लिए नोट कीजिए कि $f(x, y) = x + 2y$, $[0, 2] \times [0, 1]$ पर वर्धमान है।

$$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in T_{ij} \}$$
$$= f(x_i, y_j)$$
$$= x_i + 2y_j$$

इसलिए : $U(P, f) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$

$$= 5\frac{3}{4}$$

इसी प्रकार $L(P, f)$ के परिकलन के लिए नोट कीजिए कि

$$m_{ij} = x_{i-1} + \frac{1}{2} y_{j-1}$$

अतः $L(P, f) = 2\frac{1}{4}$

E3) यहां

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = 2;\ y_0 = 0,\ y_1 = \frac{1}{4},\ y_2 = \frac{1}{2},\ y_3 = 1$$

तब

$$L(Q, f) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} m_{ij}\ (T_{ij} \text{ का क्षेत्रफल})$$

T_{11} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{12} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{13} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$

T_{21} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8}$

T_{22} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8}$

T_{23} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

T_{31} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8}$

T_{32} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{8}$

T_{33} का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$

E2) से हम जानते हैं कि $m_{ij} = x_{i-1} + 2y_{j-1}$ और $M_{ij} = x_i + 2y_j$

तब $L(Q, f) = \sum m_{ij}$ (T_{ij} का क्षेत्रफल) $= 2.5$

और $U(Q, f) = \sum M_{ij}$ (T_{ij} का क्षेत्रफल) $= 5.5$

अतः $L(P, f) \le L(Q, f) \le U(Q, f) \le U(P, f)$

E4) मान लीजिए f, T पर समाकलनीय है। तब

$$\sup = \{ L(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \} = \inf \{ U(P, f) \mid P \in \mathcal{P} \}$$

$$= \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy$$

तब प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए T के विभाजनों P' और P'' का अस्तित्व होता है, ताकि

$$0 \le \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy - L(P', f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \le U(P'', f) - \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

मान लीजिए P, P' और P'' का अधिशोधन है। तब प्रमेय 1 के अनुसार

$$U(P, f) - L(P, f) = U(P, f) - \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy - L(P, f)$$

$$\le U(P'', f) - \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy + \int_T\int f(x, y)\, dx\, dy - L(P', f)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

E5) क) पुनरावृत्त समाकल $\int_{-3}^{4}\left[\int_{1}^{2} 3x^2y\,dx\right]dy$ के परिकलन के लिए हम पहले

$\int_{1}^{2} 3x^2y\,dx$ को परिकलित करते हैं।

$$\int_{1}^{2} 3x^2y\,dx = 3y\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 7y$$

तब $\int_{-3}^{4}\left[\int_{1}^{2} 3x^2y\,dx\right]dy = \int_{-3}^{4} 7y\,dy$

$$= 7\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-3}^{4}$$

$$= \frac{49}{2}$$

ख) $\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} (x^2 + y^2)\,dx\right]dy = \frac{2}{3}$

ग) $\int_{3}^{4} (xy + e^y)\,dy = \left[x\frac{y^2}{2} + e^y\right]_3^4$

$$= \frac{7}{2}x + e^4 - e^3$$

$$\int_{1}^{2}\left[\int_{3}^{4} (xy + e^y)\,dy\right]dx = \int_{1}^{2} \left(\frac{7}{2}x + e^4 - e^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{7}{2}\frac{x^2}{2} + (e^4 - e^3)\,x\right]_1^2$$

$$= \frac{21}{4} + (e^4 - e^3)$$

E6) उदाहरण 5 से पता चलता है कि E5 क) में चरों का क्रम पलट देने पर समान पुनरावृत्त समाकल प्राप्त होता है। यदि आप E5 ख) के समाकल को ध्यान से देखें आप पाएंगे कि दोनों समाकल समान होंगे।

यदि हम E5 ग) में चरों का क्रम पलट दें, तो हमें प्राप्त होगा,

$$\int_{3}^{4}\left[\int_{1}^{2} (xy + e^y)\,dx\right]dy = \int_{3}^{4}\left[\frac{x^2y}{2} + e^y x\right]_1^2 dy$$

$$= \int_{3}^{4}\left[\frac{3y}{2} + e^y\right]dy$$

$$= \frac{21}{4} + e^4 - e^3$$

E5) ग) में हमें यही उत्तर प्राप्त हुआ था। अतः दोनों पुनरावृत्त समाकल समान हैं।

E7) क) चूंकि $f(x, y) = x \sin(x + y)$, $[0, \pi] \times [0, \pi/2]$ पर संतत है इसलिए प्रमेय 3 से हमें प्राप्त होता है,

$$\int\int_{R} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{0}^{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} x \sin(x + y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left[-x\cos(x + y)\right]_0^{\pi/2} dx$$

$$= -\left[\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx - \int_0^{\pi} x\cos x\,dx\right]$$

$$= -\left[\int_0^{\pi} -x\sin x\,dx - \int_0^{\pi} x\cos x\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi} x\cos x\,dx + \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = -[-\cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx = -\pi\cos(\pi) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

अतः $\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin(x+y)\,dy\right]dx = \pi - 2$

ख) $\displaystyle\iint_T \frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x+y}\,dx\right]dy$

$$= \int_0^1 \ln(1+x+y)\Big]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \ln(2+y)\,dy - \int_0^1 \ln(1+y)\,dy$$

इन समाकलों को परिकलित करने के लिए हम प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करेंगे।

$u = 2+y,\ v = 1+y$ लीजिए। तब

$$\int_0^1 \ln(2+y)\,dy = \int_2^3 \ln u\,du = u\ln u - u\Big|_2^3$$

$$= 3\ln 3 - 3 - [2\ln 2 - 2]$$

$$= \ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1$$

$$\int_0^1 \ln(1+y)\,dy = \int_1^2 \ln u\,du = \ln 4 - 1$$

$$\therefore \iint_T \frac{1}{1+x+y}\,dy\,dx = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

E8) क) D को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है :

$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\}$

$\therefore$ D प्रकार I वाला प्रदेश है।

D को $D = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \le x \le 2, 0 \le y \le 4\}$

से भी व्यक्त किया जा सकता है। इसलिए D, प्रकार II वाला प्रदेश है।

$\therefore$ D, प्रकार I और प्रकार II वाला प्रदेश है।

ख) D, न तो प्रकार I, न ही प्रकार II वाला प्रदेश है।

ग) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x^{1/4} \le y \le x^2\}$

$\therefore$ D, प्रकार I वाला है।

साथ ही, $D = \{ (x, y) \mid \sqrt{y} \le x \le y^4, 0 \le y \le 1 \}$, जो कि प्रकार II वाला है।

घ) यहां $1 \le x \le 3$ और $-3 \le x \le -1$, इसके संगत

$$\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2}$$

$\therefore$ D प्रकार I वाला है परन्तु प्रकार II वाला नहीं है।

E9) मान लीजिए R^2 में प्रदेश $D = \{ (x, y) \mid \psi_1 (y) \le x \le \psi_2 (y), c \le y \le d \}$ जहाँ ψ_1, ψ_2 परिभाषा 4 में दिए हैं। मान लीजिए $f : D \to R$ एक संतत फलन है। तब

$$\int_c^d \left[\int_{\psi_1 (y)}^{\psi_2 (y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

का अस्तित्व है और यह द्विक स ल $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ के बराबर है।

E10) क) प्रमेय 1 के अनुसार $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x \sin y\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{x} x \sin y\, dy \right] dx$

अब $\int_0^{x} x \sin y\, dy = x \left[-\cos y \right]_0^{x}$

$$= -x (\cos x - 1) = x - x\cos x$$

$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^{x} x \sin y\, dy \right] dx = \int_0^{\pi} (x - x \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\, dx - \int_0^{\pi} x \cos x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} - x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - [\cos x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - [\cos\pi - \cos 0] = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

ख) $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\sin x} y\, dy \right] dx$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos 2x)}{4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

E11) दिया हुआ प्रदेश D, निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है :

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \frac{1}{2}x \right\}$$

$\therefore$ D, प्रकार I वाला प्रदेश है। प्रमेय 5 के अनुसार

$$\iint_D e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}x} e^{x^2}\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[e^{x^2} y \right]_0^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{e^{x^2} x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du \quad (u = x^2 \text{ लीजिए। } \frac{du}{dx} = 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^u \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{4} (e^4 - 1)$$

E12) समाकल को द्विक समाकल $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ के रूप में लिख सकते हैं,

जहां $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x \}$.

तब D, रेखा $y = 2x$ और परवलय $y = x^2$ से परिबद्ध है। D में किसी नियत y के लिए x का परिसर $\frac{y}{2}$ से $\sqrt{y}$ तक है और y का परिसर 0 से 4 तक है। इसलिए

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4 \right\}$$

$\therefore$ प्रमेय 5 के अनुरूप से

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^4 \left[\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx \right] dy .$$

E 13) $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2 \}$ प्रकार I वाला प्रदेश है। चरों का क्रम बदलने पर समाकलन तभी सम्भव होगा जब हम D को प्रकार II वाले प्रदेश के रूप में व्यक्त करें। D में $0 \le y \le 4$ और $\sqrt{y} \le x \le 2$.

$$\therefore D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 4, \sqrt{y} \le x \le 2 \right\},$$

जो कि प्रकार II वाला प्रदेश है। अतः हमें प्राप्त होगा,

$$\int_0^2 \left[\int_0^{x^2} 3xy\, dy \right] dx = \int_0^4 \left[\int_{\sqrt{y}}^2 3xy\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^4 3y \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(6y - \frac{3y^2}{2} \right) dy$$

$$= \left(3y^2 - \frac{y^3}{2} \right)_0^4 = 15$$

E14) चित्र से $-2 \le x \le 1$, और $x^2+4x \le y \le 3x+2$. अतः

$$D = \{ (x, y) \mid -2 \le x \le 1, x^2+4x \le y \le 3x+2 \},$$

प्रकार I वाला है। इस प्रदेश के संगत पुनरावृत्त समाकल

$$\int_{-2}^{1} \left[\int_{x^2+4x}^{3x+2} dy \right] dx = \int_{-2}^{1} (3x+2-x^2-4)\, dx$$

$$= \frac{27}{6}$$

इसी प्रकार चित्र से हम कह सकते हैं कि $-4 \le y \le 5$ और $x_1 \le x \le \frac{y-2}{3}$,

यहां x_1 वह विन्दु है जिसके लिए

$$x_1^2 + 4x_1 - y = 0$$

अर्थात् $y+4 = (x_1+2)^2$

$\therefore x_1 = \sqrt{y+4} - 2.$

अतः $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \sqrt{y+4} - 2 \le x \le \frac{y-2}{3}, -4 \le y \le 5 \right\}$

इस प्रदेश के संगत पुनरावृत्त समाकल

$$\int_{-4}^{5} \left[\int_{\frac{y-2}{3}}^{\sqrt{y+4}-2} dx \right] dy = \int_{-4}^{5} \left(\sqrt{y+4} - 2 - \frac{y-2}{3} \right) dy$$

$$= -\frac{27}{6}$$

इस प्रकार दोनों पुनरावृत्त समाकल समान हैं।

E15) यहां प्रदेश D, त्रिज्या 1 वाली चक्रिका है। इसलिए ध्रुवीय निर्देशांकों से समाकलन आसान हो जाएगा।

D को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त करने पर हमें प्रदेश

$$D^* = \{ (r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2 \}$$

प्राप्त होता है। और $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, D पर संतत है।

अब $f^*(r, \theta) = e^{r^2}$

$$\therefore \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 e^{r^2} r\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{e^u}{2} du \right] d\theta, \; u = r^2, \frac{du}{dr} = 2r$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e-1)\, d\theta$$

$$= \frac{e-1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = (e-1)\pi$$

E16) ध्रुवीय निर्देशांकों में

$$D = \{ (r, \theta) \mid 0 \le r \le 1 + \cos\theta, 0 \le \theta \le \ \}.$$

$f(x, y)$, D पर संतत है और

$f^*(r, \theta) = r \sin\theta.$

$$\therefore \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{1+\cos\theta} (r \sin \theta)\, r\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{1+\cos\theta} \sin \theta\, r^2\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sin \theta \frac{r^3}{3} \Big|_0^{1+\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sin \theta \frac{(1 + \cos \theta)^3}{3} d\theta$$

अब हम $u = 1 + \cos\theta$ लेते हैं। तब

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = -\frac{1}{12}(1 + \cos\theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

E17) क) $\iint_D (a^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} (a^2 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} a^2 r\, dr\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\cos\theta} d\theta - \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos^2\theta}{2} d\theta - \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^4}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta \right]$$

अब $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

समानयन सूत्र से, $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}$

$$\therefore \iint_D (a^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \frac{a^4}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{32}\right]$$

$$= \frac{5\pi a^4}{32}$$

ख) रूपांतरण $u = xy,\ v = x - y^2$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & 1 \\ x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - x$$

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 2y^2 + x$$

तब $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{x+2y^2}$

D, आयत $[0,2] \times [1,3]$ का प्रतिबिंब है।

यहां हमें x और y को u और v के पदों में हल करना आवश्यक नहीं है क्योंकि

$$\iint_D \frac{x+2y^2}{xy}\, dx\, dy = \int_0^2\int_1^3 \frac{x+2y^2}{xy} \cdot \frac{1}{x+2y^2}\, du\, dv$$

$$= \int_0^2\int_1^3 \frac{1}{u}\, du\, dv$$

$$= \int_0^2 [\ln u]_1^3\, dv$$

$$= 2 \ln 3.$$

E18) क) $u = x - y, v = x + y$ रखिए। तब D, uv-समतल के आयत $D^* = [0,4] \times [0, 4]$ का प्रतिबिंब है।

अब $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

तब $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^4 \left[\int_0^4 \frac{v}{1+u} \frac{1}{2}\, du\right] dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 v \ln(1+u) \Big|_0^4 dv$$

$$= \frac{1}{2} \ln 5 \frac{v^2}{2} \Big|_0^4$$

$$= 4 \ln 5$$

ख) $u = 3x - y, v = x + y$ लीजिए। D, आयत $D^* = [-1,3] \times [1,5]$ का प्रतिबिंब है।

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{4}$$

$u = 3x - y, v = x + y$ को x के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होता है, $x = \frac{1}{4}(u+v)$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^3 \left[\int_1^5 e^{(u+v)/4} \frac{1}{4}\, dv\right] du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^3 \left[e^{u/4} \times 4\, e^{v/4}\right]_1^5 du$$

$$= \int_{-1}^3 (e^{5/4} - e^{1/4})\, e^{u/4}\, du$$

$$= 4\,(e^{5/4} - e^{1/4})(e^{3/4} - e^{-1/4}).$$

इकाई 12 त्रिशः समाकलन

इकाई की रूपरेखा

12.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई (इकाई 11) में आपने यह देखा है कि किस प्रकार समाकलन की संकल्पना को दो चर वाले वास्तविक मान फलनों पर लागू किया जा सकता है। हम वहां बताई गई विधि में थोड़ा सा परिवर्तन करके उसे R^n $(n > 2)$ के फलनों पर भी लागू कर सकते हैं। परंतु यहां हम तीन से अधिक चरों वाले फलनों के समाकलन पर चर्चा नहीं करेंगे। इस इकाई में हम त्रिशः समाकलन (triple integration) के बारे में चर्चा करेंगे। इस इकाई का अध्ययन करने के दौरान आप पाएंगे कि यह चर्चा द्विशः समाकलन की चर्चा से काफ़ी मिलती-जुलती है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- एक आयताकार बक्स पर तीन चरों वाले एक वास्तविक मान फलन के त्रिक समाकल को परिभाषित कर सकेंगे;
- पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके त्रिक समाकलों के मान ज्ञात कर सकेंगे;
- समतल में प्रकार I, प्रकार II के अनुरूप आकाश के प्रदेशों की व्याख्या कर सकेंगे और इन प्रदेशों पर त्रिक समाकलों के मान मालूम कर सकेंगे;
- त्रिक समाकल में चर परिवर्तन कर सकेंगे;
- बेलनीय और गोलीय निर्देशांकों का प्रयोग करके त्रिक समाकल के मान ज्ञात कर सकेंगे।

12.2 आकाश के एक प्रदेश पर समाकल

वास्तविक रेखा के संवृत अंतराल पर समाकल आप परिभाषित कर चुके हैं। पिछली इकाई में हमने पहले समतल के एक बंद आयत पर द्विक समाकल परिभाषित किया था। अब संवृत अंतराल तथा बंद आयत का त्रिविम कार्तीय निर्देशांक आकाश में एक स्वाभाविक व्यापकीकरण है—बंद आयताकार बक्स (closed rectangular box)। इसलिए पिछली इकाई की तरह यहां भी पहले हम त्रिक समाकल (triple integral) को अर्थात् तीन चरों वाले वास्तविक मान फलन के समाकल को एक बंद आयताकार बक्स पर परिभाषित करेंगे। इस प्रकार के बंद बक्स (जिसे आगे केवल बक्स कहा जाएगा) के फलक (face), समतल $x = a, x = b, y = c, y = d, z = s$ और $z = t$ होते हैं। एक बक्स पर परिभाषित त्रिक समाकलों पर कुछ विस्तार से चर्चा कर लेने के बाद हम R^3 के परिबद्ध समुच्चयों पर त्रिक समाकल परिभाषित करेंगे। तो आइए पहले हम बक्स पर त्रिक समाकल परिभाषित करें।

12.2.1 आयताकार बक्स पर समाकल

आपको याद होगा कि भाग 11.2 में द्विक समाकल परिभाषित करने के लिए पहले हमने इसे आयत पर परिभाषित किया था। वहां हमने केवल यह मान लिया था कि l इकाई की लम्बाई और b इकाई की चौड़ाई वाले आयत का क्षेत्रफल lb वर्ग इकाई होता है। ठीक उसी प्रकार यहां हम यह मानकर चलेंगे कि l, b और h इकाईयों की विमाओं (dimensions) वाले आयताकार बक्स का आयतन lbh घन इकाई होता है।

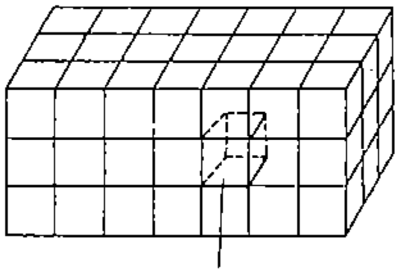
अब तक यह बात आपको बिल्कुल स्पष्ट हो चुकी होगी कि हम आगे कौन-सी प्रक्रिया अपनाएंगे। मान लीजिए f, बक्स $B : [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ पर परिभाषित तीन चरों वाला एक परिबद्ध वास्तविक मान फलन है।

हम

- B का मान विभाजन लेंगे,
- निम्न और उपरि योगफल प्राप्त करेंगे,
- इन योगफलों के उच्चक (supremum) और निम्नक (infimum) ज्ञात करेंगे; और तब
- समाकलनीयता परिभाषित करेंगे।

अतः आइए पहले हम B का विभाजन लें।

यदि P_1, P_2 और P_3 क्रमशः $[a, b], [c, d]$ और $[s, t]$ के विभाजन हों तो $P_1 \times P_2 \times P_3$, B के एक विभाजन को परिभाषित करता है। चित्र 1 देखिए।



चित्र 1

यदि P_1, $[a, b]$ को p उप-अंतरालों में विभाजित करता हो, P_2, $[c, d]$ को q उप-अंतरालों में विभाजित करता हो, और P_3, $[s, t]$ को r उप-अंतरालों में विभाजित करता हो तो विभाजन $P_1 \times P_2 \times P_3$, B को छोटे-छोटे p.q.r. बक्सों B_{ijk} में विभाजित करता है।

विलोमतः यदि P उन बक्सों में B का विभाजन हो, जिनके फलक निर्देशांक समतल के समांतर हों तो $[a, b], [c, d], [s, t]$ के क्रमशः ऐसे विभाजनों P_1, P_2, P_3 का अस्तित्व होता है कि $P = P_1 \times P_2 \times P_3$. हम यहां B के केवल ऐसे विभाजनों पर ही विचार करेंगे।

अब, यदि $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$

$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$ और

$P_3 = \{z_0, z_1, \ldots, z_r\}$, तो

$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, B के एक प्रतिरूप बक्स (typical box) B_{ijk} को प्रकट करता है (चित्र 1 देखिए)। B_{ijk} का आयतन, जिसे V_{ijk} से प्रकट किया जाता है, यह होता है:

$$V_{ijk} = (x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1}) \times (z_k - z_{k-1}).$$

अतः B का आयतन V यह होता है

$$V = (b-a)(d-c)(t-s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} V_{ijk} \qquad \ldots (1)$$

(1) के दक्षिण पक्ष वाले व्यंजक में i, j, k पर त्रिशः संकलन (triple summation) होता है। लेकिन इससे कोई समस्या खड़ी नहीं होती। हम त्रिशः संकलन

यह समाकलन

$$\sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk} \text{ को } \sum_i \left[\sum_j \left\{ \sum_k a_{ijk} \right\} \right]$$

के रूप में लिखकर इसका मान मालूम कर सकते हैं। यहां इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि संकलन किसी भी क्रम में किया जा सकता है।

अब, उप-बक्स B_{ijk} के संगत समुच्चय

$$S_{ijk} = \{f(x, y, z) \mid x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j], z \in [z_{k-1}, z_k]\}$$

लीजिए। चूंकि f एक परिबद्ध फलन है, इसलिए यह S_{ijk}, R में एक परिबद्ध समुच्चय होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि हम S_{ijk} के उच्चक और निम्नक के बारे में चर्चा कर सकते हैं। मान लीजिए $M_{ijk} = \sup S_{ijk}$ और $m_{ijk} = \inf S_{ijk}$. तब हम निम्न योगफल L(P, f) को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} m_{ijk} \, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k .$$

यहां $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ और $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

इसी प्रकार ऊपरि योगफल U (P, f) को इस रूप में परिभाषित किया जा सकता है :

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} M_{ijk} \, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k .$$

इस स्थिति में गुणनफल $\Delta x_i \; \Delta y_j \; \Delta z_k$, B_{ijk} का आयतन होता है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि पहले S_{ijk} के निम्नक और B_{ijk} के आयतन का गुणनफल लेकर और फिर इन सभी गुणनफलों का योगफल मालूम करके L (P, f) प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार U (P, f) प्राप्त करने के लिए पहले हम S_{ijk} पर f के उच्चक को B_{ijk} के आयतन से गुणा करते हैं और फिर इन गुणनफलों को जोड़ देते हैं।

एकल चर वाले ऋणेतर फलनों के संबंध में आप यह जानते हैं कि L (P, f) और U (P, f), अंतर्गत आयतों (inscribed rectangle) और बहिर्गत आयतों (circumscribed rectangle) के कुल क्षेत्रफल होते हैं। दो चरों वाले ऋणेतर फलनों के संबंध में हमने यह देखा है कि L (P, f) और U (P, f) से अंतर्गत बक्सों और बहिर्गत बक्सों के कुल आयतन प्राप्त होते हैं। अब प्रश्न उठता है कि तीन चरों वाले फलनों के बारे में हम क्या कह सकते हैं? यहां हम इस प्रकार का कोई विवेचन नहीं दे सकते हैं क्योंकि ज्यामितीय रूप में हम 4-विम युक्लिडीय समष्टि (4-dimensional Euclidean space) की कल्पना नहीं कर सकते। आपको याद होगा कि इकाई 3 में हमनें यह बताया है कि R^3 पर परिभाषित फलन का लेखाचित्र नहीं खींचा जा सकता।

अब, एक या दो चरों वाले फलनों की तरह यहां भी हम R^3 के बाक्स B पर परिभाषित फलन f के उपरि योगफल और निम्न योगफल के बारे में निम्नलिखित दो कथन दे सकते हैं।

(1) $L(P, f) \le U(P, f)$ और

(2) $L(P, f) \le L(Q, f) \le U(Q, f) \le U(P, f)$,

विभाजन Q को विभाजन P से अधिक अधिशोधित कहा जाता है, यदि Q का प्रत्येक उप-बक्स P के किसी उप-बक्स में आविष्ट है।

जहां P और Q, B के विभाजन हैं और Q, P से अधिक अधिशोधित (finer) है। विशेष रूप से,

$$mV \le L(P, f) \le U(P, f) \le MV,$$

जहां m और M, B पर f के निम्न परिबंध और ऊपरि परिबंध हैं। अब, आइए हम सभी निम्न योगफलों के समुच्चय को $\mathcal{U}$ से प्रकट करें, अर्थात्

$\mathcal{U} = \{L(P, f) \mid P \in \mathcal{P}\}$ और

$\mathcal{U}' = \{U(P, f) \mid P \in \mathcal{P}\}$ लिखें।

अब, चूंकि u ऐसी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, जो MV से उपरितः परिबद्ध है, और u' ऐसी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जो mV से निम्नतः परिबद्ध है, इसलिए हम u का उच्चक और u' का निम्नक ले सकते हैं। यदि $\sup u = \inf u'$, तो हम यह कहते हैं कि f, त्रिशः समाकलनीय (triple integrable) है और इस सर्वनिष्ठ मान को B पर f का त्रिक समाकल कहा जाता है। हम इस समाकल को

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \text{ से}$$

या
$$\int_a^b \int_c^d \int_s^t f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

से प्रकट करते हैं।

इस तरह,

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sup u = \inf u'$$

अब इकाई 11 की टिप्पणी 1 जैसी एक टिप्पणी हम यहां भी दे रहे हैं। इससे आपको यह पता चलेगा कि हम त्रिक समाकल को योगफल की सीमा के रूप में देख सकते हैं।

टिप्पणी 1 : मान लीजिए f एक बक्स $B : [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ पर परिभाषित एक परिबद्ध फलन है। हम निम्नलिखित रूप से B को pqr उप-बक्सों B_{ijk} में विभाजित करते हैं :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_p = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < y_q = d$$
$$s = z_0 < z_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < z_r = t$$

मान लीजिए $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\ \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

और P_{ijk}, उप-बक्स B_{ijk} का एक बिन्दु है। तब, योगफल

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} f(P_{ijk})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

को B पर f का रीमान योगफल कहा जाता है।

किसी भी उप-बक्स B_{ijk} के लिए मान लीजिए

$$\Delta (B_{ijk}) = \max \{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\} \text{ और } \Delta (P) = \max_{i, j, k} \Delta (B_{ijk})$$

जब $\Delta (P) \to 0$, तब रीमान योगफल, f के त्रिक समाकल की ओर प्रवृत्त होता है। अर्थात्

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\Delta (P) \to 0} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} f(P_{ijk})\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

हम आगे की इकाइयों में इस परिणाम का प्रयोग अक्सर करेंगे।

इकाई 11 के प्रमेय 2 और प्रमेय 3 बंद बक्सों पर परिभाषित तीन चरों वाले फलनों पर भी लागू होते हैं।

इस तरह, यह कथन,

अवकलनीयता $\Rightarrow$ सांतत्य $\Rightarrow$ समाकलनीयता

भी तीन चरों वाले वास्तविक मान फलनों पर लागू होता है।

फिर भी, समाकलनीयता के लिए सांतत्य केवल एक पर्याप्त प्रतिबंध होता है, आवश्यक प्रतिबंध नहीं होता। इसे हम इकाई 11 के प्रमेय 2 को लागू करके और उसी इकाई के उदाहरण 4 में थोड़ा-बहुत परिवर्तन करके आसानी से दिखा सकते हैं। इसे हम एक अभ्यास के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E1)।

E1) दिखाइए कि

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f, बक्स $B : [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ पर समाकलनीय है।

त्रिक समाकलों का मान निकालने के लिए हम पुनरावृत्त समाकल का प्रयोग करते हैं। आइए पुनरावृत्त समाकलों की परिभाषा दें।

मान लीजिए $f(x, y, z)$, बक्स $B : [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। तब आयत $T = [a, b] \times [c, d]$ के एक नियत बिन्दु (x, y) के लिए फलन $f_1(z) = f(x, y, z)$, $[s, t]$ पर परिभाषित एक चर वाला फलन होता है। यदि फलन f_1, $[s, t]$ पर समाकलनीय है तो हमें फलन

$$g(x, y) = \int_s^t f_1(z)\, dz = \int_s^t f(x, y, z)\, dz$$

प्राप्त होता है जो कि $[a, b] \times [c, d]$ पर परिभाषित है। यदि $[a, b] \times [c, d]$ पर पुनरावृत्त समाकल

$$\int_a^b \left[\int_c^d g(x, y)\, dy \right] dx$$

का अस्तित्व हो तो हम यह कहते हैं कि B पर $f(x, y, z)$ के पुनरावृत्त समाकल

$$\int_a^b \left[\int_c^d \left\{ \int_s^t f(x, y, z)\, dz \right\} dy \right] dx \qquad \ldots (2)$$

का अस्तित्व होता है। x, y, z की भूमिकाओं में अदला-बदली करने पर हमें निम्नलिखित पांच और पुनरावृत्त समाकल प्राप्त होते हैं :

$$\int_s^t \left[\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y, z)\, dx \right\} dy \right] dz \qquad \ldots (3)$$

$$\int_a^b \left[\int_s^t \left\{ \int_c^d f(x, y, z)\, dy \right\} dz \right] dx \qquad \ldots (4)$$

$$\int_c^d \left[\int_s^t \left\{ \int_a^b f(x, y, z)\, dx \right\} dz \right] dy \qquad \ldots (5)$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b \left\{ \int_s^t f(x, y, z)\, dz \right\} dx \right] dy \qquad \ldots (6)$$

$$\int_s^t \left[\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y, z)\, dy \right\} dx \right] dz \qquad \ldots (7)$$

2) में हम

- पहले x और y को अचर मानकर z के सापेक्ष $f(x, y, z)$ का समाकलन करते हैं।
- तब परिणामी फलन x और y वाला एक फलन हो जाता है। इसे हम x का एक अचर मानकर y के सापेक्ष समाकलित करते हैं।
- तब x के इस परिणामी फलन को हम x के सापेक्ष समाकलित करते हैं,

बशर्ते ये सभी फलन समाकलनीय हों।

दो चरों वाले फलनों के संबंध में आपने यह देखा है कि पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व सदा नहीं होता। और, यदि उनका अस्तित्व हो भी, तो यह आवश्यक नहीं है कि वे सदा बराबर भी हों। ठीक इसी प्रकार की स्थिति तीन चरों वाले फलनों के साथ भी होती है। यह आवश्यक नहीं है कि पुनरावृत्त समाकलों का सदा अस्तित्व हो ही। और यदि इनका अस्तित्व हो भी तो यह हो सकता है कि वे सभी अलग-अलग हों। लेकिन ऐसी स्थितियों को लेकर हमें परेशान होने की कोई आवश्यकता नहीं है। यहां हमारी रुचि केवल उन्हीं फलनों में होगी, जिनके सभी पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व हो और वे बराबर हों। इसी गुणधर्म वाले फलनों का एक वर्ग हमें प्रमेय 1 से प्राप्त होता है। यह प्रमेय इन फलनों के त्रिक और पुनरावृत्त समाकलों के बीच एक संबंध भी स्थापित करता है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $B : [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, R^3 में एक आयताकार बक्स है और मान लीजिए $f : B \to R$ एक संतत फलन है। तब त्रिक समाकल $\iiint_B f\,dx\,dy\,dz$ और 6 पुनरावृत्त समाकलों का अस्तित्व होता है और ये सभी बराबर होते हैं।

पहले की तरह यहां भी हम आपको याद दिला देना चाहेंगे कि प्रमेय 1 में दिया गया प्रतिबंध केवल पर्याप्त प्रतिबंध है और आवश्यक प्रतिबंध नहीं है। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस प्रमेय की उपयोगिता को समझाने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1 : आइए हम आयताकार बक्स $B = [0, 3] \times [0, 4] \times [0, 2]$ पर फलन $f(x, y, z) = z$ का समाकलन करें।

प्रमेय 1 से हम यह लिख सकते हैं कि

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left[\int_0^4 \left\{\int_0^2 z\,dz\right\} dy\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^4 2\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^3 8\,dx$$

$$= 24.$$

अब हम एक थोड़ा-सा जटिल उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 2 : मान लीजिए B, बक्स $[0, 2] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$ है और मान लीजिए फलन

$$f : B \to R,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2 \text{ है।}$$

आइए हम B पर f के त्रिक समाकल का मान ज्ञात करें।

चूंकि f एक बहुपद फलन है, इसलिए यह B पर संतत होगा। अतः प्रमेय 1 के अनुसार हम B पर f के त्रिक समाकल का मान निकालने के लिए 6 पुनरावृत्त समाकलों में से किसी भी एक पुनरावृत्त समाकल का प्रयोग कर सकते हैं। आइए हम

$$\int_0^2 \left[\int_0^{1/3} \left\{\int_{-1/2}^0 (x + 2y + 3z)^2\,dy\right\} dz\right] dx$$

प्राप्त करें।

इसके लिए पहले हमें y के सापेक्ष, इसके बाद z के सापेक्ष और अंत में x के सापेक्ष समाकलन करना होगा।

अब,

$$\int_{-1/2}^0 (x + 2y + 3z)^2\,dy = \frac{(x + 2y + 3z)^3}{6}\Bigg]_{-1/2}^0 = \frac{1}{6}\left[(x + 3z)^3 - (x + 3z - 1)^3\right]$$

तब, $$\int_0^{1/3}\left[\int_{-1/2}^{0}(x+2y+3z)^2dy\right]dz=\frac{1}{6}\int_0^{1/3}\left[(x+3z)^3-(x+3z-1)^3\right]dz$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{(x+3z)^4}{4}-\frac{(x+3z-1)^4}{4}\right]_0^{1/3}$$

$$=\frac{1}{72}\left[(x+1)^4-2x^4+(x-1)^4\right]$$

इस तरह $$\int_0^2\left[\int_0^{1/3}\left\{\int_{-1/2}^{0}(x+2y+3z)^2dy\right\}dz\right]dx$$

$$=\frac{1}{72}\int_0^2\left[(x+1)^4-2x^4+(x-1)^4\right]dx$$

$$=\frac{1}{72}\left[\frac{(x+1)^5}{5}-\frac{2x^5}{5}+\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

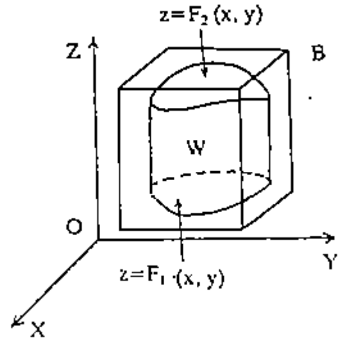
अव आप देखें कि नीचे दिया गया प्रश्न आप हल कर सकते हैं कि नहीं।

E2) समाकलन कीजिए :

(क) $[0,1]\times[2,4]\times[1,3]$ पर $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

(ख) $[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$ पर $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$

(ग) $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ पर $f(x,y,z)=ze^{x+y}$



चित्र 2

अब तक आप आयताकार वक्स पर समाकलन की संकल्पना को अच्छी तरह से अवश्य समझ चुके होंगे। अगले उपभाग में हम आकाश के अन्य प्रदेशों पर समाकलन के बारे में चर्चा करेंगे।

12.2.2 परिबद्ध प्रदेशों पर समाकल

अव हम R^3 के परिबद्ध समुच्चयों पर परिभाषित फलनों के समाकलन पर विचार करेंगे।

मान लीजिए $f : W \to R$, जहाँ W, R^3 का एक परिबद्ध समुच्चय है। चूंकि W परिबद्ध है, इसलिए इसे हम एक आयताकार वक्स, मान लीजिए B, से घेर सकते हैं। चित्र 2 में एक बक्स से घेरे गए एक परिबद्ध समुच्चय को दिखाया गया है।

अव हम B पर एक नए फलन F को परिभाषित करते हैं :

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{यदि } (x,y,z) \in W \\ 0, & \text{यदि } (x,y,z) \in B\backslash W. \end{cases}$$

अर्थात् F, W पर f से मेल खाता है और W से बाहर इसका लोपन हो जाता है। अब, यदि आयताकार वक्स B पर F समाकलनीय हो तो हम यह कहते हैं कि f, परिबद्ध समुच्चय W पर समाकलनीय है, और

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

भाग 11.3 की तरह प्रक्रिया लागू करके हम यह देख सकते हैं कि यह परिभाषा भी B पर निर्भर नहीं करती।

हालांकि हमने सभी परिबद्ध समुच्चयों पर त्रिक समाकल को परिभाषित किया है, फिर भी वास्तव में इनका मान निकालने में कुछ गम्भीर समस्याएं खड़ी हो सकती हैं। परन्तु हम आपको यह विश्वास दिला देना चाहेंगे कि कुछ विशेष प्रकार के प्रदेशों के लिए हम त्रिक समाकल के मान काफ़ी आसानी से निकाल सकते हैं।

इन प्रदेशों के लिए उपयुक्त समाकलन सीमाओं (limits of integration) को लेकर त्रिक समाकलों को पुनरावृत्त समाकलों में बदला जा सकता है। अब हम इन प्रदेशों की व्याख्या नीचे दी गई परिभाषा में करेंगे।

परिभाषा 1 : मान लीजिए D, R^2 में प्रकार I या प्रकार II वाला प्रदेश है। मान लीजिए $\gamma_1(x, y)$ और $\gamma_2(x, y)$, D पर परिभाषित दो संतत फलन हैं, जहां $\gamma_1(x, y) \leq \gamma_2(x, y)$।
मान लीजिए

$$W = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ और } \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \}.$$

तब W को R^3 में प्रकार I वाला प्रदेश कहा जाता है।

ध्यान दीजिए कि R^3 में प्रकार I वाले प्रदेश की व्याख्या निम्नलिखित दो रूपों में की जा सकती है :

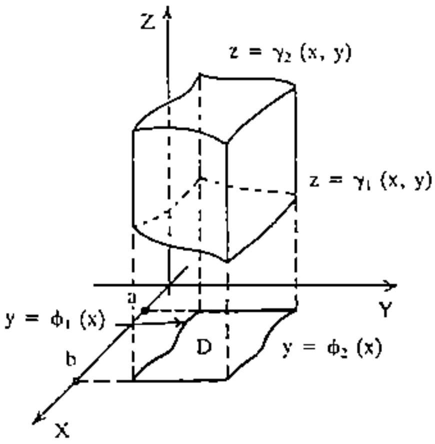
$$W = \{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \} \quad \ldots (8)$$

जहां ϕ_1 और ϕ_2 संवृत अंतराल [a, b] पर परिभाषित दो संतत फलन हैं, अर्थात् D, R^2 में प्रकार I वाला प्रदेश है। और

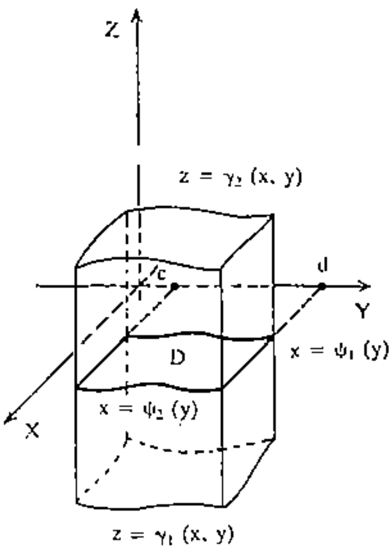
$$W = \{ (x, y, z) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \}, \quad \ldots (9)$$

जहां ψ_1 और ψ_2 संवृत अंतराल [c, d] पर परिभाषित दो संतत फलन हैं, अर्थात् D, R^2 में प्रकार II वाला प्रदेश है।

चित्र 3 (क) और 3 (ख) भी देखिए।



(क)

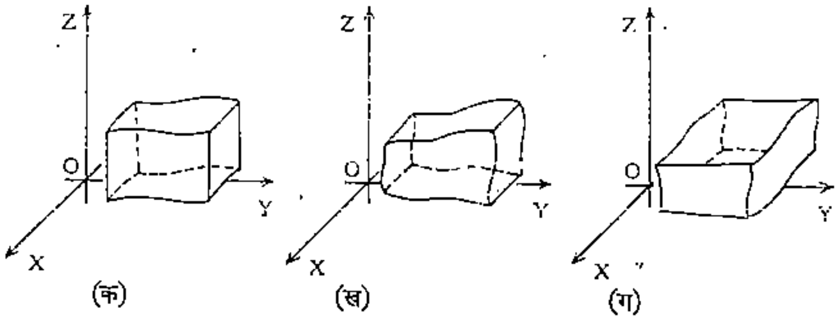


(ख)

चित्र 3

एक प्रदेश W, R^3 में प्रकार II वाला प्रदेश होता है, यदि x और z की भूमिकाओं की अदला-बदली करके इसे (8) या (9) के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो।

प्रदेश W को प्रकार III वाला प्रदेश कहा जाता है, यदि y और z की भूमिकाओं की अदला-बदली करके इसे (8) या (9) के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो। नीचे के चित्र में प्रकार I, प्रकार II और प्रकार III वाले प्रदेशों को दिखाया गया है।

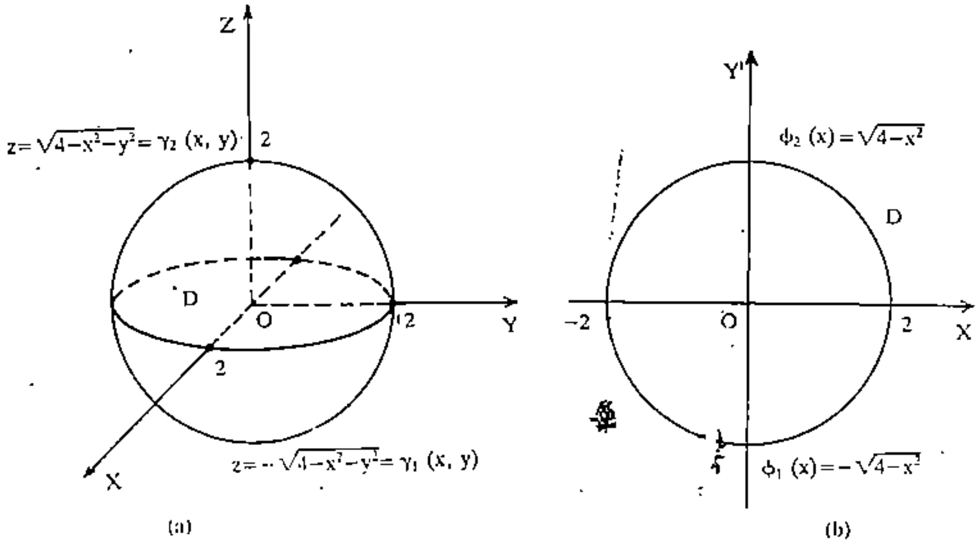


चित्र 4 : (क) प्रकार I, (ख) प्रकार II, (ग) प्रकार III के प्रदेश

आप यह भी मानेंगे कि R^3 के ये प्रदेश समतल के प्रकार I और प्रकार II वाले प्रदेशों के व्यापकीकरण हैं। ध्यान दीजिए कि एक दिया हुआ प्रदेश एक साथ दो या यहां तक कि तीन प्रकार का भी प्रदेश हो सकता है।

आइए अब हम इन प्रदेशों से संबधित कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 3 : आइए हम यह दिखाएं कि R^3 में गेंद $x^2+y^2+z^2 \le 4$, सभी तीन प्रकारों वाला एक प्रदेश है।



चित्र 5

आइए पहले हम इस प्रदेश को प्रकार I वाले प्रदेशों के रूप में देखें। इसके लिए पहले हम यह देखते हैं कि z का परिसर $-\sqrt{4-x^2-y^2}$ से $\sqrt{4-x^2-y^2}$ तक है। चित्र 5 में आप

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2} \text{ और } z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$$

द्वारा दिए गए क्रमशः ऊपर के गोलार्ध और निचले गोलार्ध को देख सकते हैं। अतः (8) से इसकी तुलना करके हम यह कह सकते हैं कि

$$\gamma_1(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \text{ और } \gamma_2(x,y)=-\sqrt{4-x^2-y^2}$$

अब प्रश्न उठता है कि y के बारे में हम क्या कह सकते हैं? चित्र 5 (ख) को देखकर आप यह कह सकते हैं कि y का परिसर $-\sqrt{4-x^2}$ से $\sqrt{4-x^2}$ तक है।

इस तरह, हम $\phi_1(x)=-\sqrt{4-x^2}$ और $\phi_2(x)=\sqrt{4-x^2}$ लिख सकते हैं। यहां हम यह भी देखते हैं कि x का परिसर −2 से 2 तक है।

इस तरह, हम W को निम्न रूप में लिखते हैं :

$$-2 \le x \le 2$$

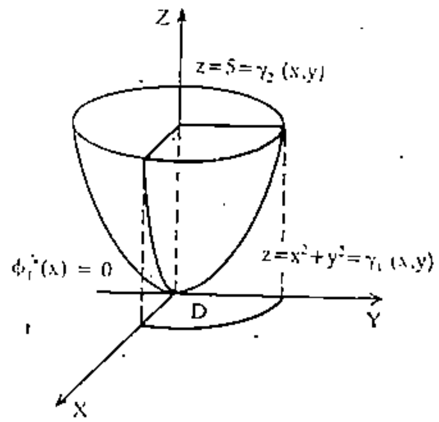
$$-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

$$-\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$$

x, y, z की भूमिकाओं को अदला-बदली करके हम प्रदेश W को प्रकार II या प्रकार III वाले प्रदेश के रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण 4 : मान लीजिए W, समतलों $x=0, y=0, z=5$ और पृष्ठ $z=x^2+y^2$ से परिबद्ध एक प्रदेश है।

चित्र 6 में इस प्रदेश को दिखाया गया है। आइए हम इस प्रदेश को प्रकार I वाले प्रदेश के रूप में व्यक्त करें।



चित्र 6

चित्र 6 को अच्छी तरह से देखकर बताइए कि आप नीचे दिए गए प्रेक्षणों (observations) से सहमत हैं या नहीं।

x का परिसर 0 से $\sqrt{5}$ तक है,

y का परिसर 0 से $\sqrt{5-x^2}$ तक है,

z का परिसर x^2+y^2 से 5 तक है,

इस तरह, हम यह पाते हैं कि W, प्रकार I वाला एक प्रदेश है, जहां

$\phi_1(x)=0,\ \phi_2(x)=\sqrt{5-x^2}$

$\gamma_1(x,y)=x^2+y^2,\ \ \gamma_2(x,y)=5$

हम ऊपर के उदाहरण में दिए गए प्रदेश W को प्रकार II वाले प्रदेश के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं। E 3 में हम आपसे यही कुछ करने के लिए कह रहे हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 3) उदाहरण 4 में दिए गए प्रदेश W को प्रकार II वाले प्रदेश के रूप में व्यक्त कीजिए।

E 4) गोलार्ध $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z\geq 0$ द्वारा दिए गए प्रदेश W को प्रकार I वाले प्रदेश के रूप में व्यक्त कीजिए।

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं कि हमारी रुचि इन्हीं प्रदेशों में है, क्योंकि इन प्रदेशो पर के समाकलों को पुनरावृत्त समाकलों के रूप में लिखा जा सकता है। अब, यदि f, प्रकार I, II या III वाले प्रदेश W पर परिभाषित एक सतत फलन हो तो निम्नलिखित प्रमेय से हमें W पर f के समाकल का मान निकालने की विधि प्राप्त हो जाती है।

प्रमेय 2 : मान लीजिए $f: W \to R$ एक सतत फलन है, जहां W, R^3 में प्रकार I वाला एक प्रदेश है।

तब $$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

का अस्तित्व होता है और यह

i) $$\int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left\{\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\}dy\right]dx$$

के बराबर होता है, यदि W, (8) से निरूपित हो, और

ii) $$\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\left\{\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\}dx\right]dy$$

के बराबर होता है, यदि W, (9) से निरूपित होता हो।

यदि W, प्रकार II या III वाला प्रदेश हो तो x, y, z की भूमिकाओं में अदला-बदली करके इसी प्रकार के सूत्र प्राप्त किए जाते हैं। इसे एक प्रश्न के रूप में हम आपके लिए छोड़ रहे हैं। (E 5 देखिए)। इस प्रश्न को हल कर लेने के बाद आपके उत्तर का भाग 12.5 में दिए गए उत्तर से मिलान अवश्य कर लीजिए।

E 5) मान लीजिए f, R^3 के प्रदेश W पर परिभाषित एक संतत फलन है। W पर f के त्रिक समाकल का सूत्र लिखिए, यदि

(क) W, प्रकार II वाला प्रदेश हो।

(ख) W, प्रकार III वाला प्रदेश हो।

अब हम अगले उदाहरण में त्रिक समाकल का मान निकालने के लिए प्रमेय 2 का प्रयोग करेंगे। आगे के अध्ययन में हम यह मानकर चलेंगे कि दिए गए सभी फलन संगत प्रदेशों पर संतत हैं।

उदाहरण 5 : आइए हम प्रदेश W पर, जो कि गोलार्ध $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z > 0$ है, फलन $f(x, y, z) = y + z$ का समाकलन करें।

यदि आपने प्रश्न E 3 हल कर लिया है, तो आप यह अवश्य जान गए होंगे कि प्रदेश W, प्रकार I वाला प्रदेश है। हम W को इस रूप में लिखते हैं :

$$-a \leq x \leq a$$

$$-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

इस तरह, प्रमेय 2 के अनुसार

$$\iiint_W (y + z)\, dx\, dy\, dz = \int_{-a}^{a} \left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (y + z)\, dz \right\} dy \right] dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ y\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2} \right\} dy \right] dx$$

हम समझते हैं कि आप इन चरणों में समाकलों के मान की जाच अवश्य कर लेंगे।

$$= \frac{2}{3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= \frac{\pi a^4}{4}.$$

यहां हम एक और उदाहरण दे रहे हैं। इसमें परवलयज (paraboloid) के एक भाग पर समाकलन करना है।

उदाहरण 6 : मान लीजिए W, उदाहरण 4 में दिया गया प्रदेश है, जो कि $x = 0, y = 0, z = 5$ और पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ से परिबद्ध है। चित्र 6 में इस प्रदेश को दिखाया गया है। आइए हम $\iiint_W x\, dx\, dy\, dz$ का परिकलन करें।

उदाहरण 4 में हमने देखा है कि W को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$0 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{5 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 5$$

अतः प्रमेय 2 के अनुसार

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{5}}\left[\int_0^{\sqrt{5-x^2}}\left\{\int_{x^2+y^2}^{5} x\,dz\right\}dy\right]dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}}\left[\int_0^{\sqrt{5-x^2}} x(5-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

अब $$\int_0^{\sqrt{5-x^2}} x(5-x^2-y^2)\,dy = x(5-x^2)y - \frac{xy^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{5-x^2}}$$

$$= x(5-x^2)^{3/2} - \frac{x}{3}(5-x^2)^{3/2}$$

$$= \frac{2x}{3}(5-x^2)^{3/2}$$

इसलिए $$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{5}} x(5-x^2)^{3/2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{(5-x^2)^{5/2}}{5/2}\Big]_0^{\sqrt{5}}$$

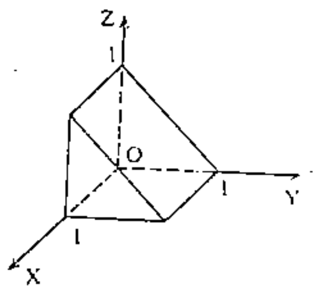
$$= \frac{10}{3}\sqrt{5}\,.$$

इस तरह हम यह देखते हैं कि किसी प्रदेश पर फलन का समाकलन करने में सबसे महत्वपूर्ण चरण चरों की समाकलन सीमाओं को ज्ञात करना है। और, इसके लिए यह आवश्यक है कि प्रदेश के लेखाचित्र की सही कल्पना आप कर सकें।

अब नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 6) $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1$ द्वारा दिए गए बेलनाकार प्रदेश पर $f(x, y, z) = 2x + z - 3$ का समाकलन कीजिए।

E 7) समतलों $x = 0, y = 0, x = 1, z = 0$ और $y + z = 1$ से परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x, y, z) = xyz$ का समाकलन कीजिए। इस प्रदेश को साथ दिए गए चित्र में दर्शाया गया है।



द्विक समाकलों की तरह त्रिक समाकलों के मान निकालने में भी चर परिवर्तन काफ़ी उपयोगी सिद्ध होता है। अगले भाग में हम त्रिक समाकलों के लिए चर-परिवर्तन सूत्र पर चर्चा करेंगे।

12.3 त्रिक समाकलों में चर परिवर्तन

इस भाग में हम इकाई 11 के प्रमेय 6 के अनुरूप एक प्रमेय का कथन देंगे। इस प्रमेय से हमें एक सूत्र प्राप्त होता है, जिसकी सहायता से एक निर्देश-तंत्र (coordinate system) के त्रिक समाकल को किसी दूसरे निर्देश-तंत्र के त्रिक समाकल में व्यक्त किया जा सकता है। इसके बाद हम इस प्रमेय को कार्तीय निर्देशांकों से बेलनीय या गोलीय निर्देशांकों में समाकल का परिवर्तन करने में लागू करेंगे।

आइए पहले हम नीचे दिए प्रमेय के कथन पर विचार करें। इस कथन में हमने नियमित प्रदेश (regular region) का उल्लेख किया है। हम जानते हैं कि नियमित प्रदेश की व्याख्या से आप परिचित नहीं हैं। लेकिन परेशान होने की कोई बात नहीं है, क्योंकि आगे की चर्चा में हम जिन प्रदेशों को लेंगे, वे सभी प्रमेय 3 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करेंगे।

इकाई 9 में एक आकाश से दूसरे आकाश में रूपांतरण की दी गई परिभाषा तथा रूपांतरण के जैकोबियन का परिकलन करने के सूत्र को याद कीजिए।

प्रमेय 3 : मान लीजिए W, R^3 का एक नियमित प्रदेश है और मान लीजिए f, W पर परिभाषित एक संतत वास्तविक मान फलन है। मान लीजिए

$x = g_1(u, v, w)$, $y = g_2(u, v, w)$, $z = g_3(u, v, w)$, uvw-आकाश से xyz-आकाश में एक रूपांतरण को व्यक्त करता है, जहां

(i) uvw- आकाश में एक ऐसे प्रदेश W' का अस्तित्व होता है कि W', W पर एकैक रूप से आच्छादित हो,

(ii) W' पर g_1, g_2, g_3 के आंशिक अवकलज संतत हैं, और

(iii) W' में $J = \dfrac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$.

तब,

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W'} f(g_1(u, v, w),\ g_2(u, v, w),\ g_3(u, v, w))\, |J|\, du\, dv\, dw.$$

इस प्रमेय की उपयोगिता दर्शाने के लिए अब हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 7 : आइए हम

$$\iiint_W \sqrt{x + y + z}\ dx\, dy\, dz$$

का मान निकालने के लिए प्रमेय 3 का प्रयोग करें, जहां W निम्न प्रकार व्यक्त है :

$$0 \le x + y + z \le 9,\ 1 \le x + 2y \le 4,\ 2 \le y - 3z \le 6.$$

यहां हम एक रूपांतरण का प्रयोग करेंगे जो W को एक सरल प्रदेश में रूपांतरित कर देगा। अतः आइए हम

$$u = x + y + z,\ v = x + 2y,\ w = y - 3z \qquad \ldots (10)$$

लें।

रूपांतरण का जैकोबियन है,

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि इस रूपांतरण के व्युत्क्रम (inverse) का अस्तित्व है (इकाई 9 देखिए)।

अब हम (10) द्वारा दिए गए रूपांतरण के व्युत्क्रम पर विचार करेंगे।

व्युत्क्रम रूपांतरण में W, एक आयताकार बक्स का प्रतिबिंब होता है, जो uvw-आकाश में निम्न पृष्ठों से बद्ध है :

$u = 0, u = 9, v = 1, v = 4, w = 2, w = 6.$

और, व्युत्क्रम रूपांतरण का जैकोबियन $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$ होगा (इकाई 9 का प्रमेय 4 देखिए)। इस तरह हम यह पाते हैं कि व्युत्क्रम रूपांतरण, प्रमेय 3 की सभी आवश्यकताओं को संतुष्ट करता है।

अतः प्रमेय 3 के अनुसार

$$\iiint_W \sqrt{x + y + z}\ dx\, dy\, dz = \iiint_{W'} \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}\right) du\, dv\, dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^9 \left[\int_1^4 \left\{\int_2^6 \sqrt{u}\, dw\right\} dv\right] du$$

$$= 6\int_0^9 \sqrt{u}\, du = 4 \cdot u\,\Big]_0^9 = 108.$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E 8) दिखाए गए चर परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए :

$$\iiint_W \frac{x+y-z}{1+(y+2z)^2}\, dx\, dy\, dz,$$

जहां W इस प्रकार व्यक्त है :

$$0 \le x+y-z \le 2,\ 0 \le x-y+z \le 3,\ 0 \le y+2z \le 4.$$

रूपांतरण : $u = x + y - z,\ v = x - y + z,\ w = y + 2z.$

E 9) उपयुक्त चर परिवर्तन करके निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए :

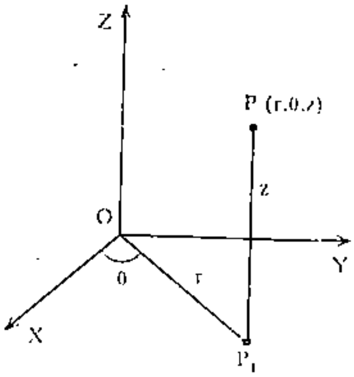
$$\iiint_W \left[4x^2 - 4y^2 - 4(y-z)^2\right] dx\, dy\, dz$$

जहां W इस प्रकार व्यक्त है :

$$-1 \le x-y \le 1,\ 1 \le x+y \le 3,\ -2 \le y-z \le 0.$$

अक्सर हमें बेलनी या गोलीय सममिति वाले प्रदेशों पर त्रिक समाकल के मान ज्ञात करने होते हैं। अगले दो उपभागों में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार बेलनीय या गोलीय निर्देशाको मे रूपांतरण कर देने से त्रिक समाकलों का मान आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। आइए पहले हम बेलनीय निर्देश-तंत्र पर विचार करें।

12.3.1 बेलनीय निर्देशांकों में त्रिक समाकल



चित्र 7

आकाश में बिन्दु P के बेलनी निर्देशांक (r, θ, z) होते हैं, जहां z, xy-समतल से इस बिन्दु की दूरी है, और r तथा θ समतल में इसके प्रक्षेप के ध्रुवीय निर्देशांक हैं। इसके लिए चित्र 7 भी देखिए। इस तरह बेलनी निर्देशांक में z निर्देशांक और xy-समतल के ध्रुवीय निर्देशांक होते हैं।

इसलिए $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$

आप जानते होंगे कि r को सदा ऋणेतर लिया जाता है और θ का परिसर 0 से 2π तक होता है।

अब हम रूपांतरण $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$

पर प्रमेय 3 लागू करेंगे। यहां

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r \ne 0.$$

प्रमेय 3 के अनुसार

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz \qquad \ldots (11)$$

जहां f और W वही हैं जोकि प्रमेय 3 में हैं और W^* वह प्रदेश है जोकि W को बेलनी निर्देशांकों में व्यक्त करने पर मिलता है। (11) के दक्षिण पक्ष के समाकल को बेलनी निर्देशांक में त्रिक समाकल कहा जाता है।

ध्यान दीजिए कि यदि W बेलनी निर्देशांक में व्यक्त एक प्रदेश हो तो W पर त्रिक समाकल

$$\iiint_W f(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$ होगा न कि

$$\iiint_W f(r, \theta, z)\, dr\, d\theta\, dz$$

अब मान लीजिए कि समीकरण (11) का प्रदेश W*, प्रकार I, II या III वाला कोई प्रदेश है (परिभाषा 1 में x, y, z के स्थान पर r, θ, z लीजिए)। आइए हम यह मान लें कि W* प्रकार I वाला एक प्रदेश है जोकि निम्नलिखित रूप से व्यक्त है :

$$\gamma_1(\theta, z) \le r \le \gamma_2(\theta, z)$$

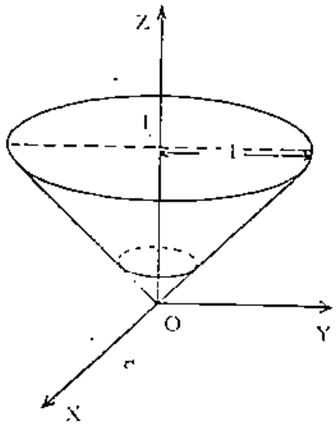
और $$\phi_1(z) \le \theta \le \phi_2(z)$$

$$z_1 \le z \le z_2,$$

तब हम यह लिख सकते हैं :

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \left[\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \left\{ \int_{\gamma_1(\theta, z)}^{\gamma_2(\theta, z)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr \right\} d\theta \right] dz \quad \ldots (12)$$



चित्र 8

यदि W* प्रकार II या प्रकार III वाला प्रदेश हो तो हमें अन्य संगत पुनरावृत्त समाकल प्राप्त होते हैं। परन्तु यहां आपको विभिन्न प्रकार के प्रदेशों को लेकर परेशान होने की कोई आवश्यकता नहीं है। हम प्रदेशों को ऐसे रूप में व्यक्त करेंगे कि आप आसानी से समाकलन सीमाएं प्राप्त कर सकेंगे।

अब हम यहां कुछ ऐसे उदाहरण देने जा रहे हैं जिनसे आपको बेलनी निर्देशांकों में त्रिक समाकलों के मान निकालने की विधि को समझने में सहायता मिल सकती है

उदाहरण 8 :

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le z,\ 0 \le z \le 1$$

द्वारा व्यक्त प्रदेश W पर परिभाषित फलन $f(r, \theta, z) = zr^2 \cos^2\theta$ लीजिए।

चित्र 8 में आप इस प्रदेश को देख सकते हैं। आइए हम W पर f के त्रिक समाकल का मान ज्ञात करें।

$$\iiint_W f(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^z (zr^2\cos^2\theta)\, r\, dr \right\} d\theta \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{z^5\cos^2\theta}{4}\, d\theta \right] dz$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{4} z^5\, dz$$

$$= \frac{\pi}{24}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi.$$

उदाहरण 9 : आइए हम बेलनी निर्देशांकों का प्रयोग करके $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$ और $-\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$ द्वारा व्यक्त प्रदेश पर फलन $f(r, \theta, z) = 1$ के त्रिक समाकल का मान ज्ञात करें।

$$\iiint_W 1 r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \left\{ \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r\, dz \right\} dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a 2r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3\, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

$$\int_0^a 2r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr$$

$$= \left.\frac{-2(a^2 - r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{2a^3}{3}$$

अब हम एक ऐसे फलन का उदाहरण देंगे जो कार्तीय निर्देशांकों में व्यक्त प्रदेश पर परिभाषित है।

इस स्थिति में आप यह देखेंगे कि यदि हम प्रदेश को वेलनी निर्देशांकों में व्यक्त करें और तब वेलनी निर्देश-तंत्र में त्रिशः समाकलन के सूत्र को लागू करें, तो इस समाकल का मान निकालना काफ़ी आसान हो जाता है।

उदाहरण 10 : आइए हम $x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le 1$ द्वारा दिए गए वेलनी प्रदेश पर फलन $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) z^2$ का समाकलन करें।

यदि हम $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ लिखें, तो $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) z^2 = r^2 z^2 = f^*(r, \theta, z)$

अब,

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f^*(r, \theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

यह तो आप जानते हैं कि एकक चक्रिका $x^2 + y^2 \le 1$ को हम ध्रुवीय निर्देशांकों (r, θ) में $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2$ से व्यक्त कर सकते हैं।

अतः हम (r, θ, z) में W को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2, -1 \le z \le 1.$$

तब

$$\iiint_{W^*} f^*(r, \theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 (z^2 r^2)\,r\,dr\right\}d\theta\right]dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{2\pi}\frac{z^2}{4}\,d\theta\right]dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{\pi z^2}{2}\,dz$$

$$= \frac{\pi}{3}.$$

यदि हमने वेलनी निर्देशांकों में रूपांतरण नहीं किया होता तो हमें निम्नलिखित समाकल का मान निकालना पड़ता :

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2 + y^2)z^2\,dy\right\}dx\right]dz.$$

इस समाकल को हल करने की कोशिश कीजिए। आप तुरन्त ही यह जान जाएंगे कि इसे हल करना आसान नहीं है। इस उदाहरण में कार्तीय निर्देशांकों से वेलनी निर्देशांकों में रूपांतरित करना इसलिए उपयोगी रहा है, क्योंकि यहां प्रदेश एक वेलन था।

यदि आपने उदाहरण 8, 9 और 10 को अच्छी तरह से समझ लिया है, तो आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E 10) बताए गए प्रदेशों पर निम्नलिखित फलनों का समाकलन कीजिए :

(क) $f(r, \theta, z) = \cos\theta$;

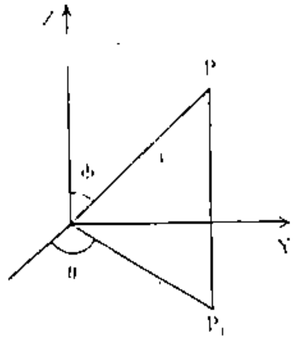
$$W : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 1 + \sin\theta,\ r \le z \le 2.$$

(ख) $f(r, \theta, z) = r^2$, यहां W, $z = r^2$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ और $z = 1$ से परिबद्ध प्रदेश है।

E 11) वेलनी निर्देशांकों में परिवर्तन करके $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ और $z = 1$ से परिबद्ध वेलन पर $f(x, y, z) = z + 3x - 2$ के समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

अगले भाग में हम गोलीय निर्देशांकों में त्रिक समाकल का मान ज्ञात करने पर विचार करें।

12.3.2 गोलीय निर्देशांकों में त्रिक समाकल



चित्र 9

इन निर्देशांकों को गोलीय निर्देशांक इसलिए कहा जाता है, क्योंकि $r =$ अचर, एक गोले को निरूपित करता है।

अभी तक इस इकाई में हमने कार्तीय और बेलनी निर्देश-तंत्र में त्रिक समाकलों के मान ज्ञात करने पर विचार किया है। आकाश में एक बिन्दु की स्थिति मालूम करने की एक अन्य अति उपयोगी विधि है गोलीय निर्देश-तंत्र (spherical coordinate system)। आकाश में एक बिन्दु P लीजिए। मान लीजिए xy-समतल में इसका प्रक्षेप P_1 है। चित्र 9 देखिए। तब r, θ और ϕ से P को अद्वितीय रूप में निर्धारित किया जा सकता है, जहां r, मूल बिन्दु से P तक की दूरी $|OP|$ है, θ, xy-समतल पर P के प्रक्षेप P_1 से संबंधित ध्रुवी कोण (polar angle) है और ϕ, धन z-अक्ष और रेखा खंड OP के बीच का कोण है। और यह भी नोट कीजिए कि

$$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ और } 0 \leq \phi \leq \pi.$$

बिन्दु P के कार्तीय और गोलीय निर्देशांकों में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$x = r\cos\theta\sin\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\phi$$

अब हम रूपांतरण $x = r\cos\theta\sin\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\phi$ को प्रमेय 3 में लागू करेंगे। आपको यह याद होगा कि आप इस रूपांतरण को इकाई 9 के उदाहरण 2 में देख चुके हैं। वहां हमने इस रूपांतरण के जेकोबियन को परिकलित किया था :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2\sin\phi.$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^{**}} f^*(r, \theta, \phi)\,r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi \qquad \ldots (13)$$

जहां f, W वही हैं जो कि प्रमेय 3 में हैं, $f^*(r, \theta, \phi) = f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$ और W^{**}, (r, θ, ϕ)-आकाश में W का संगत प्रदेश है।

(13) के दक्षिण पक्ष के समाकल को **गोलीय निर्देशांकों में त्रिक समाकल** कहा जाता है।

अब मान लीजिए W, प्रकार I, II और III वाला कोई प्रदेश है (परिभाषा 1 में x, y, z के स्थान पर r, θ, ϕ का प्रयोग कीजिए)। मान लीजिए W, प्रकार I वाला एक प्रदेश है और इसे

$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$h_1(\theta) \leq \phi \leq h_2(\theta)$$

$$\psi_1(\theta, \phi) \leq r \leq \psi_2(\theta, \phi)$$

से व्यक्त किया है। यदि f, W पर संतत है तो हमें प्राप्त होता है

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_\alpha^\beta \left[\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \left\{\int_{\psi_1(\theta,\phi)}^{\psi_2(\theta,\phi)} f^*(r, \theta, \phi)\,r^2\sin\phi\,dr\right\} d\phi\right] d\theta.$$

और, W किस प्रकार का प्रदेश है, उसके अनुसार हम उचित पुनरावृत्त समाकल का प्रयोग करेंगे।

इससे संबंधित कुछ उदाहरण देने से पहले हम आपको फिर से याद दिला देना चाहेंगे कि यदि W, गोलीय निर्देशांकों में एक प्रदेश हो, तो गोलीय निर्देशांकों में त्रिक समाकल

$\iiint_W f(r, \theta, \phi)\,r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$ होता है न कि $\iiint_W f(r, \theta, \phi)\,dr\,d\theta\,d\phi$.

अब हम गोलीय निर्देशांकों में त्रिशः समाकलन के कुछ उदाहरण देंगे।

उदाहरण 11 : मान लीजिए W,

$$0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi$$

द्वारा व्यक्त एक प्रदेश है।

आइए हम W पर फलन

$$f(r, \theta, \phi) = e^{r^3}$$

का समाकलन करें।

$$\iiint_W f(r, \theta, \phi)\, r^2 \sin\phi \, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^3} r^2 \sin\phi \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi \left(\frac{1}{3}\right)\left[\int_0^1 e^{r^3}\, 3r^2 dr\right] d\theta\right] d\phi$$

$$= \frac{(e-1)}{3}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi\right\} d\theta$$

$$= \frac{(e-1)}{3}\int_0^{2\pi} 2\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}(e-1) . 2\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3}(e-1) .$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए उदाहरण में W, r, θ और φ निर्देशांकों में व्यक्त एकक गोला $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ है।

अगले उदाहरण में आपको एक ऐसी स्थिति मिलेगी जहां कार्तीय निर्देशांकों से गोलीय निर्देशांकों में रूपांतरण कर देने से समाकलन काफ़ी आसान हो जाता है।

उदाहरण 12 : फलन $f(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ लीजिए।

आइए हम दो गोलों, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ और $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$ से परिबद्ध ठोस प्रदेश W पर इस फलन का समाकलन करें।

गोलीय निर्देशांकों में रूपांतरण करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{r^3} = f^*(r, \theta, \phi)$$

हम प्रदेश W को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$b < r < a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi.$$

इस तरह

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left\{\int_b^a \frac{r^2 \sin\phi}{r^3} dr\right\} d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\phi \left\{\int_b^a \frac{1}{r} dr\right\} d\phi\right] d\theta$$

जांच कीजिए कि यह पुनरावृत्त समाकल

$4\pi \ln \frac{a}{b}$ के बराबर है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E 12) $r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le \pi/2$ द्वारा दिए गए चतुर्थांश गोले पर $f(r, \theta, \phi) = r^2 \cos^2 \phi$ का समाकलन कीजिए।

E 13) गोलीय निर्देशांकों का प्रयोग करके

$$\iiint_W \sin\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right] dx\, dy\, dz$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहां W, गोलों

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ से परिबद्ध प्रदेश है।

इसके साथ ही इस इकाई को हम समाप्त करते हैं। इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

12.4 सारांश

इस इकाई में हमने :

(1) R^3 के एक आयताकार बक्स पर त्रिक समाकलों के बारे में चर्चा की है।

(2) पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके इस बक्स पर त्रिक समाकलों का मान निकालने की विधि सीखी है। इस तरह, यदि f, बक्स $B = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ पर परिभाषित एक संतत फलन हो तो

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_s^t \left[\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y, z)\, dx \right\} dy \right] dz,$$

(3) R^3 के परिबद्ध समुच्चयों पर त्रिक समाकल परिभाषित किया है।

(4) यह देखा है कि R^3 के विशेष प्रकार के परिबद्ध प्रदेशों पर पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके त्रिक समाकलों के मान ज्ञात किए जा सकते हैं।

(5) त्रिक समाकलों के लिए चर परिवर्तन सूत्र बताया है।

(6) चर परिवर्तन सूत्र को लागू करके बेलनी निर्देशांकों में त्रिक समाकल के मान ज्ञात करने की विधि बताई है। इस तरह

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} f^*(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz,$$

जहां

$f^*(r, \theta, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ और W^*, (r, θ, z)–आकाश में W का संगत प्रदेश है।

(7) गोलीय निर्देशांकों में त्रिक समाकलों के मान निकालने की विधि बताई है। इस तरह

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^{**}} f^{**}(r, \theta, \phi)\, r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi,$$

जहां $f^{**}(r, \theta, \phi) = f(r\cos\theta \sin\phi, r\sin\theta \sin\phi, r\cos\phi)$

और W^{**}, (r, θ, ϕ)–आकाश में W का संगत प्रदेश है।

12.5 हल और उत्तर

E 1) दिए हुए $\varepsilon > 0$ के लिए B का एक विभाजन P ऐसा लीजिए कि (0, 0, 0) को आविष्ट करने वाले उप-वक्स B^* का आयतन ε से कम हो। P के अन्य किसी भी उप-वक्स पर f अचर है। अतः f का उच्चक और निम्नक समान होंगे और 1 के बराबर होंगे।

इसलिए $U(P, f) - L(P, f) = 1.\ B^*$ का आयतन $- 0.\ B^*$ का आयतन $< \varepsilon$

$\therefore$ B पर f समाकलनीय है।

E 2) (क) f एक बहुपदीय फलन है

$$\text{वांछित समाकल} = \int_0^1 \left[\int_2^4 \left\{ \int_1^3 (x^2 + y^2 + z^2)\, dz \right\} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_2^4 \left\{ (x^2 + y^2) z + \frac{z^3}{3} \right\}_1^3 dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_2^4 \left(2x^2 + 2y^2 + \frac{26}{3} \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 y + \frac{2y^3}{3} + \frac{26y}{3} \right]_2^4 dx$$

$$= \int_0^1 \left(4x^2 + \frac{164}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{164x}{3} \right]_0^1$$

$$= 56.$$

(ख) $\displaystyle\int_0^\pi \left[\int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \sin(x + y + z)\, dz \right\} dy \right] dx = -8.$

(ग) $\dfrac{(e-1)^2}{2}.$

E 3) $W : \left\{ (x, y, z) \mid 0 \le z \le 5,\ 0 \le y \le \sqrt{z},\ 0 \le x \le \sqrt{z - y^2} \right\}$

अतः W प्रकार II वाला प्रदेश है, जहां

$$\phi_1(z) = 0 \le y \le \phi_2(z) = \sqrt{z}.$$

$$\gamma_1(z, y) = 0 \le x \le \gamma_2(z, y) = \sqrt{z - y^2}$$

E 4) W को हम निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$-a \le x \le a$$

$$-\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

E 5) (क) यदि W प्रकार II वाला प्रदेश हो तो W को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$a \le z \le b$$

$$\phi_1(z) \le y \le \phi_2(z)$$

$$\gamma_1(z, y) \le x \le \gamma_2(z, y),$$

जहां ϕ_1, ϕ_2, γ_1 और γ_2 संतत फलन हैं।

$$\therefore \iiint_W f\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \left\{ \int_{\gamma_1(z,y)}^{\gamma_2(z,y)} f(x,y,z)\,dx \right\} dy \right] dz .$$

(ख) यदि W प्रकार III वाला प्रदेश हो, तो उसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$a \le x \le b$$

$$\phi_1(x) \le z \le \phi_2(x)$$

$$\psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z),$$ जहाँ

$\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ संतत हैं।

$$\therefore \iiint_W f\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left\{ \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dx \right\} dy \right] dz .$$

E 6) $W : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1$

$$\iiint_W f\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (2x+z-3)\,dx \right\} dy \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ x^2 + zx - 3x \right\}_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ 1 - y^2 + (z-3)\sqrt{1-y^2} \right\} dy \right] dz$$

$$= \int_0^1 \left[y - \frac{y^3}{3} + (z-3)\left\{ \frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} y \right\} \right]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} + (z-3)\frac{\pi}{4} \right] dz$$

$$= \left[\frac{2}{3}z + \left(\frac{z^2}{2} - 3z \right) \frac{\pi}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5\pi}{8} .$$

E 7) $$\int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} xyz\,dz \right\} dy \right] dx = \frac{1}{48} .$$

E 8) $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\therefore J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{6}$$

प्रमेय 3 का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\iiint_W \frac{x+y-z}{1+(y+2z)^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} \frac{u}{1+w^2} \cdot \frac{1}{6}\,du\,dv\,dw ,$$

जहां W', $0 \le u \le 2, 0 \le v \le 3, 0 \le w \le 4$ से परिबद्ध है।

$$= \frac{1}{6}\int_0^2\left[\int_1^3\left\{\int_0^4 \frac{u}{1+w^2}\,dw\right\}dv\right]du$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2\left[u\int_0^3\left\{\int_0^4 \frac{1}{1+w^2}\,dw\right\}dv\right]du$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2\left[u\int_0^3\left[\tan^{-1}w\right]_0^4 dv\right]du$$

$$= \frac{\tan^{-1}4}{6}\int_0^2 3u\,du$$

$$= \tan^{-1}4.$$

E 9) मान लीजिए $u = x - y,\ v = x + y,\ w = y - z.$

तब

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = -2$$

$$\therefore |J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \iiint_W \left[4x^2 - 4y^2 - 4(y-z)^3\right] dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_W \left[4(x+y)(x-y) - 4(y-z)^3\right] dx\,dy\,dz$$

$$= 4\iiint_{W'} (uv - w^3)\frac{1}{2}\,du\,dv\,dw,$$

जहां W', $-1 \le u < 1,\ 1 \le v \le 3,\ -2 \le w \le 0$ से व्यक्त होता है।

$$= 2\int_{-1}^{1}\left[\int_1^3\left\{\int_{-2}^{0} (uv - w^3)\,dw\right\}dv\right]du$$

$$= -32.$$

E 10) (क) $\iiint_W f(r, \theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{1+\sin\theta}\left\{\int_r^2 r\cos\theta\,dz\right\}dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{1+\sin\theta} r\cos\theta\,(2-r)\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\left[r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{1+\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\left[(1+\sin\theta)^2 - \frac{1}{3}(1+\sin\theta)^3\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\left(\frac{2}{3} - \frac{\sin^3\theta}{3} + \sin\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{2\sin\theta}{3} - \frac{\sin^4\theta}{12} + \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{13}{12}.$$

(ख) मान लीजिए प्रदेश W है।

$$\iiint_W f\,dv = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \left\{ \int_{r^2}^1 r^2 \cdot r\,dz \right\} d\theta \right] dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (r^3 - r^5)\,dr$$

$$= \frac{\pi}{24}.$$

E 11) मान लीजिए W, बेलन है।

$$\iiint_W f\,dv = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (z + 3r\sin\theta - 2)\,r\,d\theta \right\} dz \right] dr$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ (z-2)\,r\theta - 3r^2\cos\theta \right\}_0^{2\pi} dz \right] dr$$

$$= \int_0^1 \left[2\pi r \int_0^1 (z-2)\,dz \right] dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2} - 2z \right]_0^1 dr$$

$$= -3\pi \int_0^1 r\,dr$$

$$= -\frac{3\pi}{2}.$$

E 12) $$\int_0^1 \left[\int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} f(r, \theta, \phi)\, r^2 \sin\theta\, d\phi \right\} d\theta \right] dr$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} r^4 \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi \right\} d\theta \right] dr$$

$$= \frac{\pi}{15}.$$

E 13) $x = r\cos\theta\sin\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\phi.$

$$f(x, y, z) = \sin\left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2} = \sin r^3 = f^*(r, \theta, \phi)$$

प्रदेश W निम्न प्रकार व्यक्त है :

$1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\ ,\ 0\ \le \phi \le$.

दिया हुआ समाकल

$$= \int_1^3 \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin r^3\ r^2 \sin\phi\ d\phi \right\} d\theta \right] dr$$

$$= \frac{4\pi}{3}\,[\cos 1 - \cos 27].$$

इकाई 13 समाकलों के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

13.1 प्रस्तावना

कलन (इकाई 15 और 16) में आपने यह देखा है कि एक चर वाले फलन के निश्चित समाकल के अनेक अनुप्रयोग होते हैं। इसकी सहायता से हम वक्र का अंतर्गत क्षेत्रफल, वक्र की चाप की लम्बाई, शकु और अन्य परिक्रमण-घनाकृतियों (solids of revolution) के आयतन मालूम कर सकते हैं। इस इकाई में हम द्विक समाकलों और त्रिक समाकलों के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा करेंगे। भाग 13.2 में आप यह देखेंगे कि द्विक समाकलों का प्रयोग xy-समतल के प्रदेशों का क्षेत्रफल मालूम करने और समतल के संवृत परिवद्ध प्रदेश के ऊपर स्थित आकाश के प्रदेश का आयतन मालूम करने में किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, द्विक समाकल के कुछ और भी भौतिक अनुप्रयोग (physical applications) हैं। उदाहरण के लिए, परिवर्ती घनत्व (variable density) वाले प्लेट का द्रव्यमान (mass) मालूम करने में या जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) मालूम करने में ये काफी उपयोगी सिद्ध होते हैं। इस इकाई में हम त्रिक समाकलों के कुछ अनुप्रयोगों पर भी चर्चा करेंगे। आप यह देखेंगे कि द्विक समाकल के अधिकांश अनुप्रयोगों को सीधे त्रिक समाकल में लागू किया जा सकता है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- द्विक समाकलों का प्रयोग करके समतल प्रदेश का क्षेत्रफल, एक पृष्ठ के नीचे स्थित ठोस प्रदेश का आयतन और एक दिए हुए पृष्ठ का पृष्ठ क्षेत्रफल मालूम कर सकेंगे;
- समतल प्रदेश का द्रव्यमान, आघूर्ण, गुरुत्व केन्द्र और जड़त्व आघूर्ण मालूम कर सकेंगे;
- ठोस प्रदेश का आघूर्ण, गुरुत्व केन्द्र और जड़त्व आघूर्ण मालूम कर सकेंगे, और
- त्रिक समाकलों का प्रयोग करके आकाश में स्थित ठोस प्रदेश का आयतन और द्रव्यमान मालूम कर सकेंगे।

13.2 द्विक समाकलो के अनुप्रयोग

इस भाग में द्विक समाकलों के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा की जाएगी। आइए, शुरू मे हम एक सरल अनुप्रयोग लें।

13.2.1 समतल प्रदेश का क्षेत्रफल और घनाकृति का आयतन

इस भाग मे हम यह देखेंगे कि समतल प्रदेश का क्षेत्रफल और घनाकृति का आयतन मालूम करने के लिए द्विक समाकलों का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

इकाई 11 में हमने यह देखा है कि यदि आयत D पर फलन $f(x, y)$ ऋणेतर हो तो D का द्विक समाकल आधार D वाले और पृष्ठ $z = f(x, y)$ से परिबद्ध घनाकृति के आयतन को

निरूपित करता है (इकाई 11 का चित्र 5 (क) देखिए) ठीक इसी प्रकार यहां हम दिखाएंगे कि प्रकार I या प्रकार II वाले प्रदेश पर ऋणेतर फलन के द्विक समाकल को एक त्रिविम प्रदेश का आयतन भी माना जा सकता है।

मान लीजिए D,

$$D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

से व्यक्त एक प्रदेश है।

मान लीजिए f, D पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है जहां D पर $f(x, y) \ge 0$. मान लीजिए D, आयत $T = [a, b] \times [c, d]$ से परिबद्ध है। तब हम फलन

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0 \quad , & (x, y) \in T \setminus D \end{cases}$$

लेते हैं। मान लीजिए F, T पर समाकलनीय है, अर्थात् यह मान लीजिए कि f, D पर समाकलनीय है। अब हम एक विभाजन $P = P_1 \times P_2$ की सहायता से, जहां

$P_1 = \{ a = x_0, x_1, x_1, \ldots, x_p = b \}$

$P_2 = \{ c = y_0, y_1, y_1, \ldots, y_q = d \}$

T को pq उप-आयतों में विभाजित करते हैं।

मान लीजिए

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \le i \le p \text{ और}$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}, 1 \le j \le q.$$

तब P का मानक $\| P \| = \max\limits_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} (\Delta x_i, \Delta y_j)$.

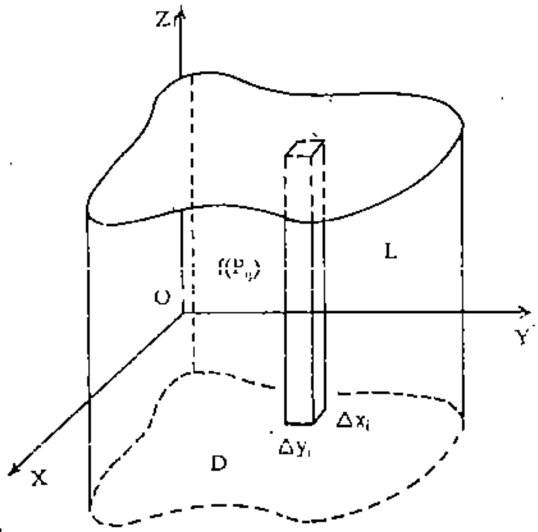
मान लीजिए P_{ij}, उप-आयत T_{ij} का एक बिन्दु है। तब इकाई 11 की टिप्पणी 1 के अनुसार

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} F(P_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j = \iint_T F(x, y) \, dx \, dy .$$

अर्थात्

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(P_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy .$$

इसके विपरीत, एक त्रिविम प्रदेश L लीजिए जिसे चित्र 1 में दिखाया गया है और जो $z = f(x, y)$ के लेखाचित्र के नीचे और प्रदेश D के ऊपर स्थित है।



चित्र 1

अब हम pq छोटे-छोटे आयताकार बक्स लेते हैं जिनके आधार आयत T_{ij} हैं। इन बक्सों का आधार क्षेत्रफल $\Delta x_i \Delta y_j$ के बराबर है और उनकी ऊँचाई $f(P_{ij})$ है। इन बक्सों के आयतनों का जोड़ होगा :

$$V(P) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} f(P_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j$$

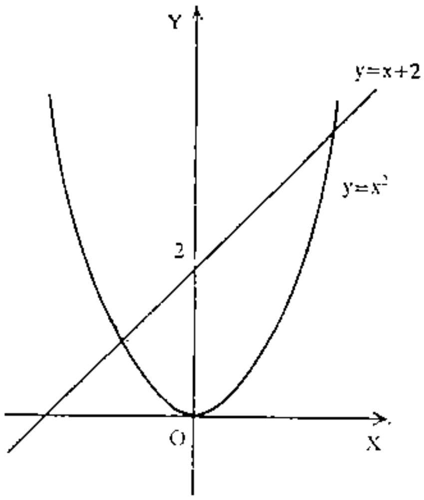
यहां हम यह आशा कर सकते हैं कि जैसे-जैसे P अधिकाधिक अधिशोधित होता जाएगा वैसे-वैसे V (P), L के आयतन के समीप आता जाएगा। वस्तुतः

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_i \sum_j f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = L \text{ का आयतन}$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि यदि वास्तविक मान फलन $f(x, y)$ एक संवृत परिबद्ध प्रदेश D पर ऋणेतर और समाकलनीय हो तो, D पर पृष्ठ $z = f(x, y)$ के लेखाचित्र के अंतर्गत ठोस प्रदेश का आयतन D पर $f(x, y)$ के द्विक समाकल के बराबर होता है। जब D पर $f(x, y) = 1$ तब $\iint_D dx\, dy$, प्रदेश D के क्षेत्रफल (यदि इसका अस्तित्व हो) को निरूपित करता है। इसका यह अर्थ नहीं है कि प्रदेश D का क्षेत्रफल, ऊंचाई 1 और आधार D वाली घनाकृति के आयतन के बराबर होता है। असल बात तो यह है कि दोनों राशियों के संख्यात्मक मान तो समान हैं, परन्तु इनकी इकाइयां अलग-अलग हैं।

इस तरह, हम यह देखते हैं कि कुछ प्रदेशों के क्षेत्रफल और कुछ घनाकृतियों के आयतन ज्ञात करने के लिए हम द्विक समाकलों का प्रयोग कर सकते हैं। हम कुछ उदाहरण लेकर इस चर्चा को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1 : आइए, हम वक्र $y = x^2$ और रेखा $y = x + 2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल मालूम करें। चित्र 2 में आप यह प्रदेश देख सकते हैं।



चित्र 2

चित्र 2 से हम यह देख सकते है कि x का परिसर −2 से 1 तक है और y का परिसर x^2 से $x + 2$ तक है। आपको याद होगा कि x का परिसर प्राप्त करने के लिए हम समीकरणों $y = x^2$ और $y = x + 2$ को x के लिए युगपत् रूप से हल करते हैं। इस तरह

$$D = \{ (x, y) : -2 \le x \le 1, \; x^2 \le y \le x + 2 \}$$

तब

$$D \text{ का क्षेत्रफल } = \iint_D dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[\int_{x^2}^{x+2} dy \right] dx$$

$$= \int_{-2}^{1} [y]_{x^2}^{x+2} \, dx$$

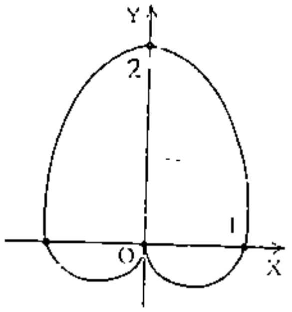
$$= \int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

यदि प्रदेश D को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त किया जाए तो हम प्रदेश के क्षेत्रफल को सूत्र

D का क्षेत्रफल $= \iint_D r\, dr\, d\theta$ से मालूम करते हैं।



चित्र 3

आइए हम एक उदाहरण लें जिसमें प्रदेश D को ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त किया गया है।

उदाहरण 2 : आइए हम हृदयाभ (cardioid) $r = 1 + \sin\theta$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश से काटे गए प्रदेश का क्षेत्रफल मालूम करें।

हम जानते हैं कि प्रथम चतुर्थांश में θ, 0 और $\pi/2$ के बीच स्थित होता है और r, 0 और $1 + \sin\theta$ के बीच स्थित होता है। अतः

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le (1 + \sin\theta) \right\}$$

चित्र 3 में आप D का रेखाचित्र देख सकते हैं।

अब,

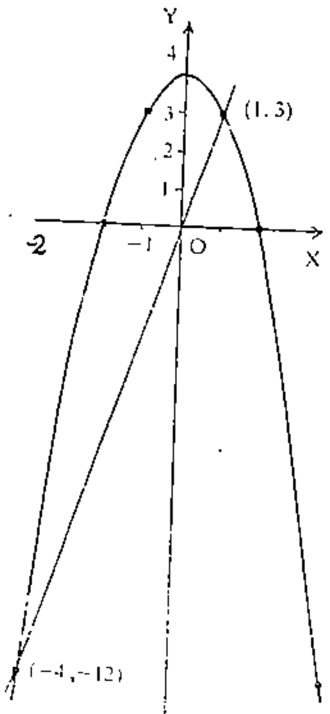
$$\text{D का क्षेत्रफल} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2\sin\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 1 + \frac{3\pi}{8}.$$



चित्र 4

अगले दो उदाहरणों में हम द्विक समाकल का प्रयोग करके आकाश के एक प्रदेश का आयतन मालूम करेंगे।

उदाहरण 3 : मान लीजिए हम एक घनाकृति का आयतन मालूम करना चाहते हैं, जिसका आधार, xy-समतल का एक प्रदेश है, जो परवलय $y = 4 - x^2$ और रेखा $y = 3x$ से परिबद्ध है, जब कि घनाकृति ऊपर की ओर से समतल $z = x + 4$ से परिबद्ध है।

मान लीजिए D दिया हुआ प्रदेश है। रेखा $y = 3x$ और परवलय $y = 4 - x^2$ बिन्दुओं (1, 3) और (−4, −12) पर प्रतिच्छेद करते हैं। इससे यह पता चलता है कि D पर $-4 \le x \le 1$ और $3x \le y \le 4 - x^2$. चित्र 4 भी देखिए।

इस तरह,

$$D = \{ (x, y) \mid -4 \le x \le 1,\ 3x \le y \le 4 - x^2 \}.$$

और, मान लीजिए $f(x, y) = x + 4$. तब D के सभी (x, y) के लिए $f(x, y) \ge 0$.

अतः

$$\text{घनाकृति का आयतन} = \iint_D (x + 4)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-4}^{1} \int_{3x}^{4-x^2} (x+4)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-4}^{1} (x+4)\, y \,\Big]_{3x}^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-4}^{1} (x+4)(4-x^2-3x)\, dx$$

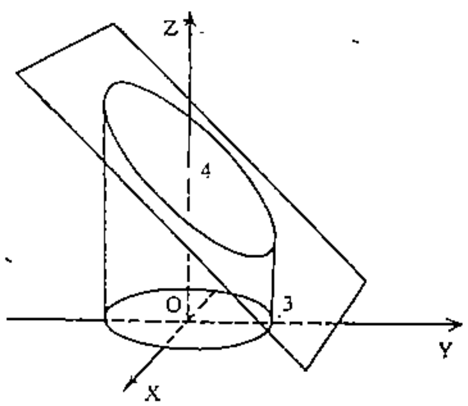
$$= 52\frac{1}{12}.$$

उदाहरण 4 : आइए हम बेलन $x^2+y^2=9$ के अन्दर स्थित और समतल $y+z=4$ तथा $z=0$ से परिबद्ध घनाकृति का आयतन ज्ञात करें।

यहां प्रदेश D, वृत्त $x^2+y^2=9$ से परिबद्ध है। इसलिए हम D को ध्रुवीय निर्देशांकों में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$D = \{ (r, \theta) \mid 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}.$$

चित्र 5 देखिए।



चित्र 5

दी हुई घनाकृति समतल $y+z=4$ के नीचे स्थित है।

अब $\qquad y+z=4 \Rightarrow z=4-y$

इसलिए मान लीजिए $f(x, y) = 4 - y$. तब

$$f^*(r, \theta) = 4 - r\sin\theta$$

अतः आयतन $\quad V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} (4 - r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r\, d\theta\, dr - \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$$

$$= 4\int_0^3 \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr - 0$$

$$= 36\pi.$$

अब ये हैं आपके लिए कुछ प्रश्न।

E 1) निम्न प्रदेशों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

क) y-अक्ष और रेखाओं $x = 4$, $y = 2x$ से परिबद्ध प्रदेश।

ख) x-अक्ष, वक्र $y = e^x$ और रेखाओं $x = 0$, $x = 1$ से परिबद्ध प्रदेश।

E 2) निम्नलिखित समाकलों में दिए गए प्रदेशों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

क) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\, dy$

ख) $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dx\, dy$

E 3) वक्र $r = (2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश से काटे गए प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

E 4) उस घनाकृति का आयतन मालूम कीजिए जिसका आधार xy-समतल में एक त्रिभुज है, जो x-अक्ष, रेखा $y = x$ और रेखा $x = 1$ से परिबद्ध है और जिसका सिरा, समतल $z = f(x, y) = 3 - x - y$ में है।

E 5) उस घनाकृति का आयतन मालूम कीजिए जिसका आधार xy-समतल में है और जो वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से परिबद्ध है, जब कि घनाकृति का सिरा परवलयज $az = x^2 + y^2$ से परिबद्ध है।

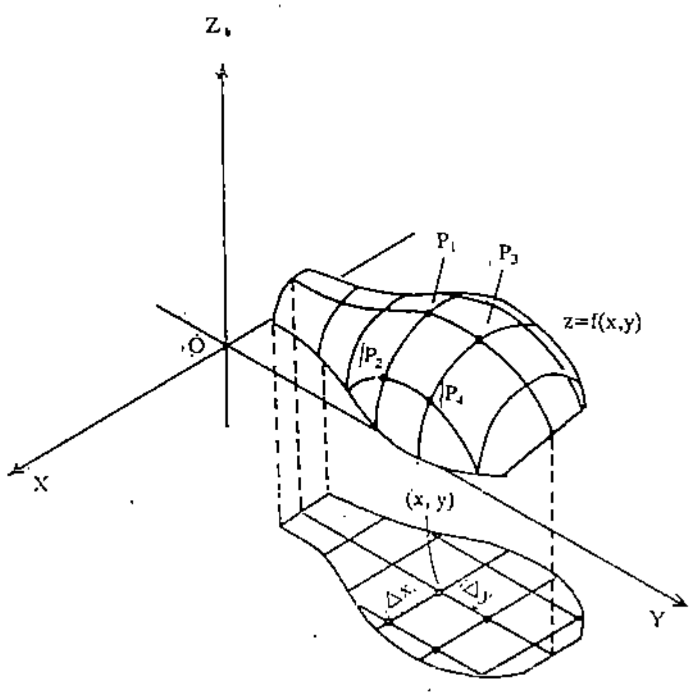
(संकेत : ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग कीजिए ।

अगले उपभाग में आप द्विक समाकल के एक अन्य महत्वपूर्ण अनुप्रयोग को देखेंगे।

13.2.2 पृष्ठ-क्षेत्रफल

कलन पाठ्यक्रम (इकाई 16) में आपने यह देखा है कि परिक्रमण पृष्ठ (surface of revolution) का क्षेत्रफल मालूम करने के लिए हम निश्चित समाकल का प्रयोग कर सकते हैं। इस उपभाग में आप, यह देखेंगे कि द्विक समाकल का प्रयोग करके हम कुछ अन्य वक्र पृष्ठों (curved surfaces) का भी क्षेत्रफल मालूम कर सकते हैं।

यहां हम उन वक्र-पृष्ठों को लेंगे, जिन्हें $z = f(x, y)$ के लेखाचित्र से प्रकट किया जाता है, जहाँ $f(x, y)$, प्रकार I या प्रकार II वाले प्रदेश D पर परिभाषित दो चरों वाला एक फलन है, और D के प्रत्येक बिन्दु पर x और y के सापेक्ष f के संतत आंशिक अवकलज हैं। चित्र 6 में आप इसी प्रकार का एक पृष्ठ देख सकते हैं।



चित्र 6

इस प्रकार के पृष्ठ का क्षेत्रफल S निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \, . \qquad \ldots (1)$$

यूँ तो यहां हम इस सूत्र की उपपत्ति नहीं दे रहे हैं, परन्तु इस सम्बन्ध में संक्षेप में चर्चा अवश्य करेंगे। इस चर्चा से आपको यह विश्वास हो जाएगा कि यह सूत्र सही है।

पिछले उपभाग की तरह यहां भी हम D को छोटे-छोटे आयतों में विभाजित करते हैं जो कि $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ के रूप के होते हैं (चित्र 6 देखिए)। जब Δx और Δy लघु होते हैं, तब यह आयत उस आकृति का एक प्रक्षेप हो जाता है जो लगभग उस समांतर चतुर्भुज के समान होती है जिसके शीर्ष हैं,

$$P_1 = (x, y, f(x, y))$$

$$P_2 = (x + \Delta x, y, f(x, + \Delta x, y))$$

$$P_3 = (x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y))$$

$$P_4 = (x + \Delta x, y + \Delta y, f(x + \Delta x, y + \Delta y))$$

अब, समांतर चतुर्भुज $P_1P_2P_3P_4$ का क्षेत्रफल $\Delta A = 2\,\Delta P_1P_2P_3$ का क्षेत्रफल।

चूँकि

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

और

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

इसलिए हम यह लिख सकते हैं कि $f(x + \Delta x, y) \simeq f_x(x, y)\,\Delta x + f(x, y)$

और $\quad f(x, y + \Delta y) \simeq f_y(x, y)\,\Delta y + f(x, y)$

अतः ΔA, लगभग $2\,\Delta P_1P_2^*P_3^*$ के क्षेत्रफल के बराबर है,

जहां $\quad P_1 = (x, y, f(x, y)),$

$$P_2^* = (x + \Delta x, y, f_x(x, y)\,\Delta x + f(x, y)),$$

$$P_3^* = (x, y + \Delta y, f_y(x, y)\,\Delta y + f(x, y)).$$

अब, $\Delta P_1P_2^*P_3^*$ का क्षेत्रफल मालूम करने के लिए हम वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति की एक सरल विधि का प्रयोग करते हैं। मान लीजिए P_z, xy-समतल पर $\Delta P_1P_2^*P_3^*$ के प्रक्षेप को प्रकट करता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि P_z के शीर्ष $(x, y, 0), (x + \Delta x, y, 0)$ और $(x, y + \Delta y, 0)$ हैं। इसी प्रकार, मान लीजिए P_y और P_z क्रमशः yz-समतल और zx-समतल पर $\Delta P_1P_2^*P_3^*$ के प्रक्षेप को प्रकट करते हैं। हम P_x, P_y और P_z के क्षेत्रफलों को क्रमशः A_x, A_y, A_z से प्रकट करते हैं। तब वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति का एक परिणाम लागू करके हम कह सकते हैं कि

$$\Delta\ P_1P_2^*P_3^* \text{ का क्षेत्रफल } = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ध्यान दीजिए कि P_x, P_y और P_z, निर्देशांक-समतल में स्थित त्रिभुज हैं, जिनके शीर्ष ज्ञात हैं। अतः इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि से हम परिचित हैं। आइए, हम क्षेत्रफल A_x, A_y, A_z एक-एक करके मालूम करें।

पहले हम त्रिभुज P_z लेंगे। चूँकि इस त्रिभुज के शीर्ष $(x, y), (x + \Delta x, y)$ और $(x, y + \Delta y)$ हैं, इसलिए

$$P_x \text{ का क्षेत्रफल } A_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x+\Delta x & y & 1 \\ x & y+\Delta y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(-\Delta y) - y(\Delta x) + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y .$$

अब, P_y का क्षेत्रफल मालूम करने के लिए हम यह देखते हैं कि P_y के शीर्ष $(x, f(x, y)), (x+\Delta x, f_x(x, y)\Delta x + f(x, y))$ और $(x, f_y(x, y)\Delta y + f(x, y))$ हैं।

इसलिए

$$P_y \text{ का क्षेत्रफल } A_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & f(x,y) & 1 \\ x+\Delta x & f_x(x,y)\Delta x + f(x,y) & 1 \\ x & f_y(x,y)\Delta y + f(x,y) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} f_y(x, y)\,\Delta x\,\Delta y .$$

इसी प्रकार P_z का क्षेत्रफल, जिसके शीर्ष $(y, f(x, y)), (y, f_x(x, y)\Delta x + f(x, y))$ और $(y+\Delta y, f_y(x, y)\Delta y + f(x, y))$ हैं,

यह होगा : $A_z = \frac{1}{2} f_x(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$.

$$\text{तब } \Delta P_1 P_2^* P_3^* \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 \Delta y^2 + f_y^2 \Delta x^2 \Delta y^2 + f_x^2 \Delta x^2 \Delta y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$$

अतः समांतर चतुर्भुज $P_1P_2P_3P_4$ का क्षेत्रफल $= \Delta x\,\Delta y\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$.

इस चर्चा में हम यह मानकर चले हैं कि समांतर चतुर्भुज $P_1P_2P_3P_4$ अपभ्रष्ट (degenerate) नहीं है।

इसलिए, कुल क्षेत्रफल S, $\sum \Delta x\,\Delta y\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ के लगभग बराबर होता है, जहाँ योगफल, D के दिए हुए विभाजन के संगत सभी समांतर चतुर्भुजों पर लिया गया हो। इस तरह, हम यह पाते हैं कि विचाराधीन पृष्ठ के क्षेत्रफल को $\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$ के बराबर मान लेना तर्कसंगत है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इस सूत्र को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 5 : मान लीजिए हम दीर्घ वृत्त $x^2 + 4y^2 = 1$ के ऊपर स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के भाग का पृष्ठ क्षेत्रफल मालूम करना चाहते हैं।

इसके लिए पहले हम यहां देखते हैं कि पृष्ठ का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ है। z के लिए इस समीकरण को हल करने पर हम यह पाते हैं कि पृष्ठ ऊपर वाला अर्धगोला है जो फलन

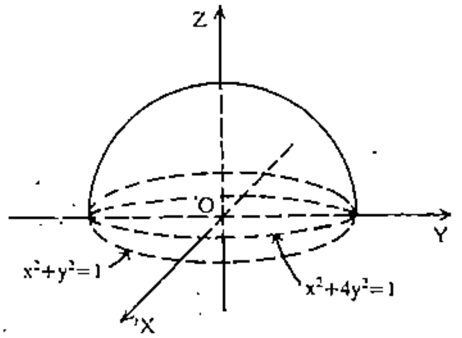
$$f(x, y) = z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ से व्यक्त होता है।}$$

f के आंशिक अवकलज हैं, $f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ और $f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

हम दीर्घ वृत्त $x^2 + 4y^2 \le 1$ को D से प्रकट करते हैं। तब D इस प्रकार होता है :

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -1 \le x \le 1,\ \frac{-1}{2}\sqrt{1 - x^2} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

चित्र 7 देखिए।



चित्र 7

तब फलन f, D पर परिभाषित एक संतत फलन होता है और D पर इसके आंशिक अवकलज संतत होते हैं। अतः सूत्र (1) को लागू करने पर पृष्ठ क्षेत्रफल

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right] dx$$

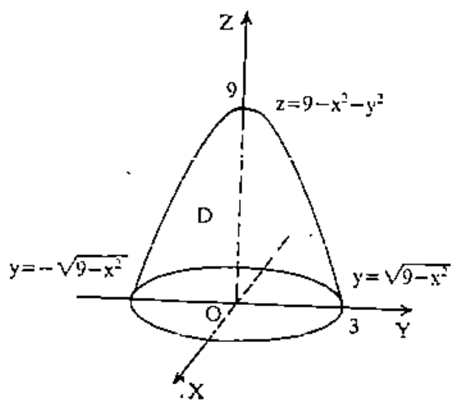
$$= \int_{-1}^{1} \left[\sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} \right]_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= 4 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

उदाहरण 6 : आइए हम परवलयज $z = 9 - x^2 - y^2$ के उस भाग का पृष्ठ-क्षेत्रफल S मालूम करें जो xy-समतल के ऊपर स्थित है।

दिया हुआ पृष्ठ, वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ द्वारा परिबद्ध xy-समतल के प्रदेश D पर स्थित है। चित्र 8 देखिए।



चित्र 8

मान लीजिए $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. तब

$f_x(x, y) = -2x$ और $f_y(x, y) = -2y$.

इसलिए सूत्र (1) को लागू करने पर

$$S = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy .$$

यहाँ चूँकि प्रदेश D एक चक्रिका है, इसलिए इस समाकल का मान निकालने के लिए हम ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग करते हैं। ध्रुवीय निर्देशांकों में हम प्रदेश D को इस रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$D = \{ (r, \theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 3 \}.$$

इसलिए

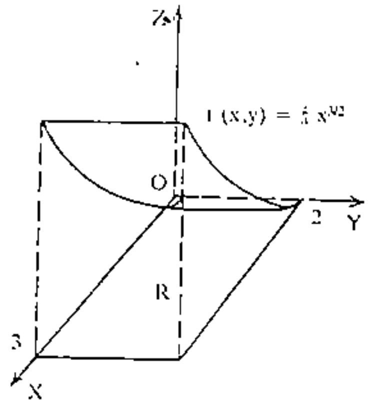
$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big]_0^3 d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (37^{3/2} - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} (37^{3/2} - 1).$$

अब आप नीचे दिए कुछ प्रश्न हल कीजिए।



E6) मान लीजिए R, रेखाओं $x = 0, x = 3, y = 0$ और $y = 2$ से परिबद्ध एक आयताकार प्रदेश है और मान लीजिए $f(x, y) = \frac{2}{3} x^{3/2}$. f के लेखाचित्र के उस भाग का पृष्ठ-क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो R के ऊपर स्थित है (साथ में दिए गए चित्र को देखिए)।

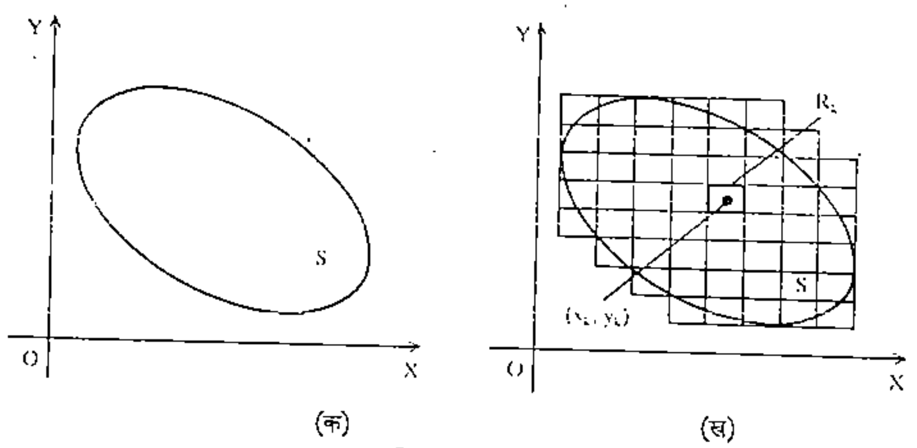
E7) समतल $z = 9$ के नीचे पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अगले उपभाग में हम द्विक समाकलों के कुछ भौतिक अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे।

13.2.3 द्रव्यमान और आघूर्ण

यहाँ हम यह बताएंगे कि किस प्रकार किसी वस्तु से संबंधित दो भौतिक राशियों अर्थात् द्रव्यमान (mass) और जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) के मान मालूम करने में द्विक समाकल उपयोगी सिद्ध होते हैं।

पहले हम द्रव्यमान मालूम करेंगे। आइए, हम एक चपटा शीट लें, जो इतना बारीक है कि इसे हम द्विविम (2-dimensional) मान सकते हैं। चित्र 9 (क) देखिए। मान लीजिए शीट एक असमांग पदार्थ (non-homogeneous material) का बना हुआ है, अर्थात् शीट का घनत्व एक समान नहीं है। हम द्विक समाकलों का प्रयोग करके इस शीट के द्रव्यमान के लिए एक व्यंजक प्राप्त करना चाहते हैं।



चित्र 9

मान लीजिए S, xy-समतल में शीट द्वारा ढका गया प्रदेश है और मान लीजिए शीट के एक बिन्दु (x, y) पर घनत्व $\delta(x, y)$ है। चूँकि शीट के अलग-अलग बिन्दुओं पर घनत्व अलग-अलग है, इसलिए इसे हम उस शीट के बिन्दुओं पर परिभाषित एक फलन के रूप में मानते हैं। अब हम S को छोटे-छोटे आयतों $R_1, R_2, \ldots, R_n$ में विभाजित करते हैं जैसा कि चित्र 9 (ख) में दिखाया गया है। आइए, हम R_k पर एक बिन्दु (x_k, y_k) लें। तब R_k का द्रव्यमान लगभग $\delta(x_k, y_k)$. R_k का क्षेत्रफल होगा।

द्रव्यमान = क्षेत्रफल × घनत्व

इस तरह, शीट का कुल द्रव्यमान लगभग यह होगा,

$$m = \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k) A(R_k)$$

जब R_k का व्यास शून्य की ओर प्रवृत्त करता है, तब ऊपर दिए गए व्यंजक की सीमा लेकर वास्तविक द्रव्यमान प्राप्त किया जाता है। अर्थात्

$$m = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k) A(R_k)$$

लेकिन इकाई 11 की टिप्पणी 1 से हम यह जानते हैं कि यह सीमा, प्रदेश D पर फलन $\delta(x, y)$ का द्विक समाकल होती है। अतः

$$m = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy.$$

टिप्पणी 1 : यदि हम बारीक शीट के स्थान पर एक समान मोटाई h वाला एक सपाट प्लेट लें, तो प्लेट का द्रव्यमान होगा :

$$m = h \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$$

ऐसा इसलिए है, क्योंकि हम प्लेट को h बारीक शीटों का साथ जोड़कर बना हुआ मान सकते हैं।

आइए, अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : मान लीजिए हम उस बारीक शीट का कुल द्रव्यमान मालूम करना चाहते हैं जिसका घनत्व $\delta(x, y) = xy$ है और जो x-अक्ष, रेखा $x = 8$ और वक्र $y = x^{2/3}$ से परिबद्ध है।

यहाँ प्रदेश $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 8, 0 \le y \le x^{2/3} \}$.

कुल द्रव्यमान निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है :

$$m = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^8 \left[\int_0^{x^{2/3}} xy\, dy \right] dx$$

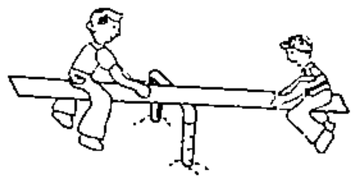
$$= \int_0^8 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{x^{2/3}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^8 x^{7/3}\, dx$$

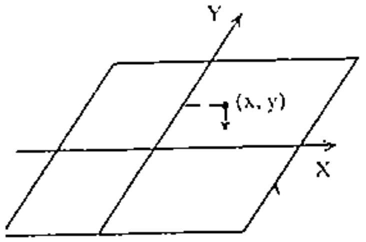
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \left[x^{10/3} \right]_0^8$$

$$= \frac{768}{5} = 153.6.$$

अब हम भौतिकी के एक अन्य दिलचस्प तथ्य, अर्थात् आघूर्ण (moment) पर चर्चा करेंगे।



चित्र 10



चित्र 11

कल्पना कीजिए कि दो बच्चे एक सी-सॉ पर खेल रहे हैं (चित्र 10)। ज़ाहिर है कि सी-सॉ के घूर्णन (rotation) पर हलके बच्चे की तुलना में भारी बच्चे का प्रभाव अधिक होगा। आपने यह अवश्य देखा होगा कि घूर्णन अक्ष (axis of rotation) से अपने को दूर रखकर हलका बच्चा भारी बच्चे के साथ संतुलन बनाए रख सकता है। अब हम एक राशि को, जिसे आघूर्ण कहते हैं, परिभाषित करते हैं, जो घूर्णन उत्पन्न करने की द्रव्यमान की प्रवृत्ति मापती है। आइए, पहले हम एक आदर्श स्थिति लें जिसमें धन द्रव्यमान m वाली एक वस्तु, समतल के विन्दु (x, y) पर संकेन्द्रित है। ऐसी वस्तु को विन्दु द्रव्यमान (point mass) कहा जाता है।

y-अक्ष के प्रति इस विन्दु द्रव्यमान का आघूर्ण mx होता है। हम mx को y-अक्ष के प्रति घूर्णन करने की विन्दु द्रव्यमान की प्रवृत्ति का एक माप मान सकते हैं (चित्र 11 देखिए)। x या m जितना अधिक होगा, आघूर्ण का परिमाप (magnitude) उतना ही अधिक होगा। इस तरह, हम यह पाते हैं कि हमारी आघूर्ण की परिभाषा हमारे प्रेक्षण से मेल खाती है। अर्थात् यदि व्यक्ति भारी हो या घूर्णन अक्ष से दूर हो तो सी-सॉ को घुमाना आसान हो जाता है।

अब, आइए हम यह मान लें कि द्रव्यमान $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वाले अनेक विन्दु द्रव्यमान समतल के विन्दुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ पर स्थित हैं। y-अक्ष के प्रति इस विन्दु द्रव्यमान संग्रह का आघूर्ण, M_y, y-अक्ष के प्रति प्रत्येक विन्दु द्रव्यमान के आघूर्णों का जोड़ होता है।

इस तरह,

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k \qquad \ldots (2)$$

हम M_y को y-अक्ष के प्रति घूर्णन उत्पन्न करने वाली द्रव्यमान संग्रह की प्रवृत्ति का माप मान सकते हैं। यदि $M_y = 0$ तो घूर्णन की कोई प्रवृत्ति नहीं होगी। इस स्थिति में हम कहते हैं कि विन्दु द्रव्यमान संग्रह साम्यावस्था (equilibrium) में है।

इसी प्रकार, हम

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n \qquad \ldots (3)$$

लेकर x-अक्ष के प्रति द्रव्यमानों $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ का आघूर्ण M_x परिभाषित कर सकते हैं।

यदि $M_x = 0$ तो हम कहते हैं कि विन्दु द्रव्यमान संग्रह x-अक्ष के प्रति घूर्णन के सापेक्ष साम्यावस्था में है।

अब मान लीजिए $m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n$, अभी लिए गए विन्दु द्रव्यमानों का संयोजित द्रव्यमान (combined mass) है। आइए हम एक ऐसा विन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ ढूँढें, जिसका गुणधर्म यह हो कि यदि हम द्रव्यमान m वाले एक विन्दु द्रव्यमान को $(\bar{x}, \bar{y})$ पर रखें, तो x-अक्ष और y-अक्ष के प्रति इसके आघूर्ण क्रमशः M_x और M_y होंगे। परन्तु परिभाषा के अनुसार, y-अक्ष के प्रति विन्दु द्रव्यमान m का आघूर्ण $m\bar{x}$ होता है और x-अक्ष के प्रति इसका आघूर्ण $m\bar{y}$ होता है। इसलिए (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है,

$$m\bar{x} = M_y = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k$$

और

$$m\bar{y} = M_x = \sum_{k=1}^{n} m_ky_k$$

इस तरह,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{m} = \frac{m_y}{m} \qquad \ldots (4)$$

और

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_ky_k}{m} = \frac{m_x}{m} \qquad \ldots (5)$$

विन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ को दिए हुए विन्दु द्रव्यमान संग्रह का **गुरुत्व केन्द्र** (centre of gravity) या **केंद्रक** (centroid) कहा जाता है।

अब हम द्विक समाकलों का प्रयोग करके आघूर्णों और गुरुत्व केन्द्र के व्यंजक प्राप्त करेंगे। इसमें भी वही प्रक्रिया अपनाई जाती है जो कि द्रव्यमान, आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल के सूत्र ज्ञात करने में अपनाई गई थी।

परिवर्ती घनत्व $\delta(x, y)$ वाला एक पतला शीट लीजिए जो xy-समतल में प्रदेश S को ढकता हो, जैसा कि चित्र 9 (क) में दिखाया गया है।

चित्र 9 (ख) की तरह इसे विभाजित कीजिए। हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक R_k का द्रव्यमान $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ पर संकेन्द्रित है, जहाँ $k = 1, 2, \ldots, n$.

अब चूंकि R_k का द्रव्यमान $\delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, A(R_k)$ है, इसलिए R_k के आघूर्ण होंगे।

$$M_y^k = \delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, A(R_k)\, \bar{x}_k$$

और

$$M_x^k = \delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, A(R_k)\, \bar{y}_k$$

तब y-अक्ष के प्रति सभी स्थानों R_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ पर स्थित द्रव्यमानों के आघूर्णों का जोड़ होगा

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k\, \delta(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, A(R_k)$$

यह पतले शीट के कुल द्रव्यमान के आघूर्ण का एक सन्निकट मान होगा। इस तरह,

$$M_y = \iint_D x\, \delta(x, y)\, dx\, dy.$$

इसी प्रकार,

$$M_x = \iint_D y\, \delta(x, y)\, dx\, dy.$$

यदि $\bar{x}$ और $\bar{y}$ पतले शीट का गुरुत्व केन्द्र हो तो (4) और (5) से हमें प्राप्त होता है,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ और } \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

जहाँ m, कुल द्रव्यमान है। और, जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, कुल द्रव्यमान m को द्विक समाकलों के रूप में

$$m = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$$

से प्रकट किया जाता है। इसलिए

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, \delta(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy}$$

और

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\, \delta(x, y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy}$$

ये सूत्र किस तरह प्राप्त किए गए हैं, इसे समझने में आपको कुछ कठिनाई अवश्य हो सकती है। लेकिन इस बात को लेकर आपको परेशान होने की कोई आवश्यकता नहीं। हम केवल यही चाहते हैं कि आप इन सूत्रों को अच्छी तरह से याद रखें और इन्हें लागू करना जान जाएं।

अब हम यहाँ कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 8 : आइए हम उदाहरण 7 में दिए गए पतले शीट का गुरुत्व केन्द्र मालूम करें। उदाहरण 7 में हम यह ज्ञात कर चुके हैं कि शीट का द्रव्यमान m है,

$$m = \frac{768}{5}$$

x-अक्ष और y-अक्ष के प्रति आघूर्ण M_x और M_y होते हैं

$$M_x = \iint_D y\,\delta(x, y)\,dx\,dy$$

और

$$M_y = \iint_D x\,\delta(x, y)\,dx\,dy$$

इसलिए
$$M_x = \int_0^8 \left[\int_0^{x^{2/3}} xy^2\,dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^8 \left[xy^3 \right]_0^{x^{2/3}} dx$$

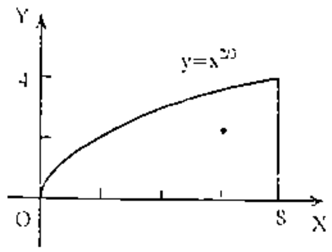
$$= \frac{1}{3}\int_0^8 x^3\,dx = \frac{1024}{3}$$

इसी प्रकार
$$M_y = \int_0^8 \left[\int_0^{x^{2/3}} x^2 y\,dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 x^{10/3}\,dx = \frac{12288}{13}$$

इस तरह,
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12288}{3} \cdot \frac{5}{768} = \frac{80}{13}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1024}{3} \cdot \frac{5}{768} = \frac{20}{9}$$



चित्र 12

अर्थात्, गुरुत्व केन्द्र, बिन्दु $\left(\frac{80}{13}, \frac{20}{9}\right)$ पर है।

चित्र 12 में आप यह देख सकते हैं कि बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$, D के दायीं ओर के ऊपरी भाग में है। और यह हमारी अपेक्षा थी, क्योंकि x-अक्ष और y-अक्ष से जैसे-जैसे दूरी बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे घनत्व $\delta(x, y) = xy$ वाला शीट भारी होता जाता है।

अब क्या आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकेंगे?

E 8) त्रिज्या 2 वाले एक चौथाई वृत्त के आकार वाले एक पतले शीट के आघूर्ण और गुरुत्व केन्द्र मालूम कीजिए, जिसका किसी बिन्दु पर घनत्व, केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी का k गुना $(k > 0)$ होता है।

(संकेत : द्विक समाकल का मान निकालने के लिए ध्रुवीय निर्देशांकों का प्रयोग कीजिए)

E 9) आयत $[0, 1] \times [0, 1]$ के आकार वाली वस्तु का गुरुत्व केन्द्र मालूम कीजिए, जब कि (x, y) पर घनत्व e^{x+y} हो।

E 10) निम्नलिखित वस्तुओं के गुरुत्व केन्द्र के y-निर्देशांक मालूम कीजिए :

(क) प्रथम चतुर्थांश में स्थित त्रिज्या 1 वाली चक्रिका का भाग, जिसका घनत्व एक समान है।

(ख) वक्रों $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$ से परिबद्ध एक पतला प्लेट जिसका घनत्व $\delta(x, y) = y^2$ है।

इस भाग को समाप्त करने से पहले हम एक अन्य भौतिक संकल्पना जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) पर चर्चा करेंगे। भौतिकी में आपने पढ़ा होगा कि जड़त्व-आघूर्ण का प्रयोग एक रेखा के प्रति एक वस्तु के घूर्णन के अध्ययन में किया जाता है। यदि द्रव्यमान m वाला एक कण, रेखा L से दूरी r पर हो, तो व्यंजक r^2m को L के प्रति उस कण का "जड़त्व आघूर्ण" कहा जाता है। एक समतल में रेखा L से दूरियों $r_1, r_2, \ldots, r_n$ पर स्थित, द्रव्यमान $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वाले n कणों के निकाय का L के प्रति जड़त्व आघूर्ण. I, निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

हम जड़त्व आघूर्ण को द्विक समाकलों के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं। मान लीजिए परिवर्ती घनत्व $\delta(x, y)$ वाली एक वस्तु है जो समतल में प्रदेश S को ढकती है। अब हम द्विक समाकलों का प्रयोग करके इस वस्तु के जड़त्व आघूर्ण का एक व्यंजक प्राप्त करना चाहते हैं। इसके लिए जो प्रक्रिया हम अपनाएंगे उससे आप अच्छी तरह से परिचित हैं ही। हम प्रदेश को स्लाइसों में विभाजित करते हैं, एक प्रतिदर्श स्लाइस (sample slice) का जड़त्व आघूर्ण मालूम करते हैं, इनका जोड़ करते हैं। तब इस जोड़ की हम सीमा लेते हैं जबकि विभाजन का मानक शून्य की ओर प्रवृत्त करता हो। इस सीमा से हमें जड़त्व आघूर्ण का सन्निकट मान मिलता है।

x-अक्ष और y-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण क्रमशः ये होते हैं—

$$I_x = \iint_S y^2 \delta(x, y)\, dx\, dy$$

और

$$I_y = \iint_S x^2 \delta(x, y)\, dx\, dy.$$

इन सूत्रों को अच्छी तरह से समझने के लिए अब हम एक उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 9 : आइए हम उदाहरण 7 में दी गई वस्तु का जड़त्व आघूर्ण मालूम करें।

चूंकि वस्तु का घनत्व $\delta(x, y) = xy$ है, इसलिए x-अक्ष के प्रति इसका जड़त्व आघूर्ण होगा

$$I_x = \iint_S y^2 \delta(x, y)\, dx\, dy = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} xy^3\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^8 x^{11/3}\, dx$$

$$= \frac{6144}{7}$$

इसी प्रकार हम I_y मालूम कर सकते हैं। इसे हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (देखिए E 11)।

E 11) उदाहरण 7 में दी गई वस्तु का I_y मालूम कीजिए।

E 12) घनत्व $\delta(x, y) = y$ वाले उस पतले प्लेट का, जो वक्रों $y = x^2$ और $x = 2$ से परिबद्ध है, जड़त्व आघूर्ण I_x और I_y मालूम कीजिए।

13.3 त्रिक समाकलों के अनुप्रयोग

भाग 13.2 में आपने जो अनुप्रयोग देखे हैं, उनमें से कुछ को सीधे द्विक समाकल से त्रिक समाकल में लागू किया जाता है। अन्तर केवल यह है कि यहां हम आकाश में एक प्रदेश लेते हैं और इस प्रदेश पर स्थित वस्तु का घनत्व $\delta(x, y, z)$ होगा जो कि तीन चरों वाला एक फलन है।

यहां हम केवल वे सूत्र दे रहे हैं जिनकी सहायता से आप आयतन और द्रव्यमान मालूम कर सकते हैं। यहां आप देख सकते हैं कि ये सूत्र ठीक वैसे ही हैं जैसे द्विक समाकल के थे। अन्तर केवल यही है कि द्विक समाकल के स्थान पर त्रिक समाकल का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{आयतन} = \iiint_W dx\,dy\,dz$$

$$\text{द्रव्यमान} = \iiint_W \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

जहां W वह त्रिविम प्रदेश है जो घनत्व $\delta(x, y, z)$ वाली वस्तु ग्रहण करती है। आइए कुछ उदाहरण लें जहां हम इस सूत्र को लागू कर सकें।

उदाहरण 10 : मान लीजिए हम उस वस्तु का द्रव्यमान मालूम करना चाहते हैं जो घन $[1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ के आकार का है। मान लीजिए घन के बिन्दु (x, y, z) पर घनत्व $\delta(x, y, z) = (1 + x)\, e^z y$ का द्रव्यमान m यह होता है :

$$m = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 (1 + x)\, e^z y\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_1^2\int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^z y\right]_1^2 dy\,dz$$

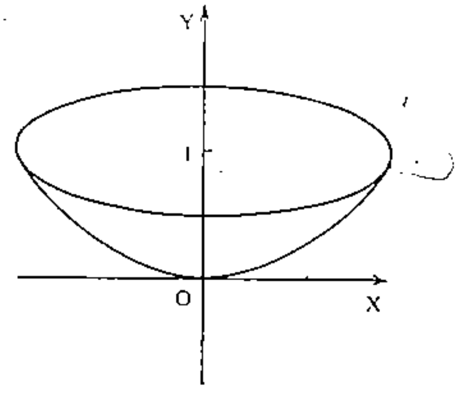
$$= \int_1^2\int_1^2 \frac{5}{2} e^z y\;\; dy\,dz$$

$$= \int_1^2 \frac{15}{4} e^z\,dz$$

$$= \frac{15}{4}(e^2 - e).$$

उदाहरण 11 : मान लीजिए हम आकाश के उस प्रदेश W का आयतन मालूम करना चाहते हैं जो पृष्ठ $z = \frac{1}{9}(x^2 + y^2)$ के अन्दर और समतल $z = 1$ के नीचे स्थित है।

पहले हम देखते हैं कि W में z का परिसर $\frac{1}{9}(x^2 + y^2)$ से 1 तक होता है। अब, यदि हम $\psi_1(x, y) = \frac{1}{9}(x^2 + y^2)$ और $\psi_2(x, y) = 1$ लें, तो $\psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)$.



चित्र 13

चित्र 13 से आप यह देख सकते हैं कि y का परिसर $-\sqrt{9 - x^2}$ से $\sqrt{9 - x^2}$ तक है और x का परिसर −3 से 3 तक है। अतः हम W को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$W = \left\{(x, y, z) \mid -3 \le x \le 3,\ -\sqrt{9 - x^2} \le y \le \sqrt{9 - x^2},\ \frac{1}{9}(x^2 + y^2) \le z \le 1\right\}$$

तब आयतन होगा,

$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\left[\int_{\frac{1}{9}(x^2+y^2)}^{1} dz\right]dx\,dy$$

$$= \int_{-3}^{3}\left[\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}\right)dy\right]dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\left[\left(1-\frac{x^2}{9}\right)y-\frac{y^3}{27}\right]_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\left[\left(1-\frac{x^2}{9}\right)2\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{27}(9-x^2)^{3/2}\right]dx$$

$$= \int_{-3}^{3}\frac{4}{27}(9-x^2)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{9\pi}{2}.$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E 13) प्रथम अष्टांशक (octant) में स्थित, दो बेलनों $x^2+y^2=a^2$ और $x^2+z^2=a^2$ के सर्वनिष्ठ भाग का आयतन मालूम कीजिए।

E 14) प्रथम अष्टांशक में स्थित उस घनाकृति का द्रव्यमान मालूम कीजिए जो ऊपर की ओर से पृष्ठ $z=4-x^2$ से और दायीं ओर से $x=y^2$ से परिबद्ध हो। यहां घनत्व फलन $\delta(x,y,z)=xy$ है।

द्विक समाकलों की तरह त्रिक समाकल का प्रयोग करके यहां हम ठोस प्रदेश ग्रहण करने वाली वस्तुओं के आघूर्णों और गुरुत्व केन्द्र के व्यंजक प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए आइए पहले हम यह देखें कि यहां पर आघूर्ण का क्या अर्थ है। मान लीजिए (x, y, z) पर एक बिन्दु द्रव्यमान m है। निर्देशांक समतलों के प्रति इसके आघूर्णों M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

xy-समतल के प्रति आघूर्ण $= M_{xy} = zm$

yz-समतल के प्रति आघूर्ण $= M_{yz} = xm$

zx-समतल के प्रति आघूर्ण $= M_{zx} = ym$

ध्यान दीजिए कि यहां पर आघूर्ण निर्देशक समतल के प्रति परिभाषित होते हैं जबकि दो चरों वाली स्थिति में आघूर्ण, निर्देशांक अक्ष के प्रति परिभाषित होते हैं। यहां इस बात की ओर भी ध्यान दीजिए कि z, x, और y, बिन्दु (x, y, z) से क्रमशः xy-समतल, yz-समतल और zx-समतल की दूरियां हैं।

अब हम त्रिक समाकलों का प्रयोग करके ठोस प्रदेश W ग्रहण करने वाली और घनत्व $\delta(x, y, z)$ वाली वस्तु के आघूर्णों के व्यंजक प्राप्त करेंगे। इसके लिए पहले हम xy-समतल के प्रति आघूर्ण लेंगे। हम W को एक आयताकार बक्स W′ से घेर देते हैं। तब हम W′ को छोटे-छोटे आयताकार बक्सों में विभाजित कर देते हैं। जिनमें से $W_1, W_2, \ldots, W_n$ पूरी तरह W में आविष्ट होते हैं (इकाई 12 का चित्र 1 देखिए)।

मान लीजिए $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$, W_k की विमाएं हैं। तब W_k का आयतन V_k होगा,

$$V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

1 और n के बीच प्रत्येक k के लिए W_k में एक बिन्दु (x_k, y_k, z_k) लीजिए। तब W_k का द्रव्यमान लगभग होगा,

$$m_k = \delta(x_k, y_k, z_k)\, V_k.$$

अब, चूँकि W_k के किसी बिन्दु से xy-समतल की दूरी लगभग z_k है, इसलिए परिभाषा के अनुसार M^k_{xy} होगा,

M^k_{xy} = द्रव्यमान $\times W_k$ से xy-समतल की दूरी

$$= \delta(x_k, y_k, z_k)\, V_k z_k.$$

तब $\sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\, V_k\, z_k$, xy-समतल के प्रति W के आघूर्ण का सन्निकट मान होता है। जब हम विभाजन को अधिकाधिक अधिशोधित करते जाते हैं तो यह सन्निकट मान वास्तविक मान के और निकट आता जाता है। इस तरह, हमें प्राप्त होता है,

$$M_{xy} = \iiint_W z\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

इसी प्रकार,

$$M_{zx} = \iiint_W y\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

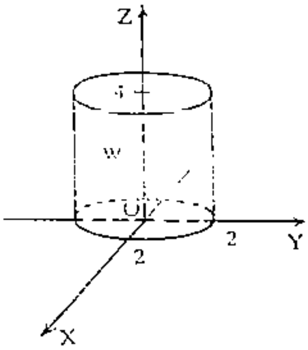
$$M_{yz} = \iiint_W x\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

अब हम विस्तार में जाए बिना आघूर्णों का प्रयोग करके वस्तु के गुरुत्व केन्द्र का व्यंजक प्राप्त करेंगे। मान लीजिए $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ वस्तु का गुरुत्व केन्द्र है। तब

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_W x\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{zx}}{m} = \frac{\iiint_W y\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_W z\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$



चित्र 14

उदाहरण 12 : आइए हम एक वृत्तीय बेलन द्वारा परिबद्ध ठोस प्रदेश W को ग्रहण करने वाली उस वस्तु, जिसे चित्र 14 में दिखाया गया है, का गुरुत्व केन्द्र और आघूर्ण M_{xy}, M_{zx}, M_{yz} मालूम करें। इस वस्तु का घनत्व δ है,

$$\delta(x, y, z) = 20 - z^2.$$

आइए पहले हम आघूर्ण M_{xy} मालूम करें। परिभाषा के अनुसार

$$M_{xy} = \iiint_W z\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

इस समाकल का मान निकालने के लिए हम बेलनी निर्देशांकों में प्रदेश को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$W = \{ (r, \theta, z) \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 4 \}.$$

इस तरह
$$M_{xy} = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^4 z(20 - z^2)\, dz \right\} d\theta \right] r\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 (20z - z^3)\, dz \right] r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[10z^2 - \frac{z^4}{4} \right]_0^4 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 96\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 384\pi .$$

अब
$$M_{zx} = \iiint_W y\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \sin\theta\, (20 - z^2)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \left[20z - \frac{z^3}{3} \right]_0^4 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{176}{3} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \frac{176}{3} r^2 [-\cos\theta]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= \int_0^2 \frac{176}{3} r^2 (\cos 0 - \cos 2\pi)\, dr$$

$$= 0 .$$

इसी प्रकार हम यह देख सकते हैं कि $M_{yz} = 0$.

गुरुत्व केन्द्र मालूम करने के लिए पहले हमें वस्तु का द्रव्यमान मालूम करना होता है। अब

$$m = \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 (20 - z^2)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[20z - \frac{z^3}{3} \right]_0^4 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{176}{3} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{176}{3} \int_0^2 r [\theta]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= \frac{352}{3} \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{704}{3} \pi .$$

अतः गुरुत्व केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ है, जहां

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{m} = 0, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{384\pi}{704} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{18}{11}.$$

अर्थात् $\left(0, 0, \frac{18}{11}\right)$.

त्रिक समाकल का प्रयोग करके x, y और z अक्षों के प्रति हम वस्तुओं के जड़त्व आघूर्ण भी मालूम कर सकते हैं। यहां हम इसके सूत्र दे रहे हैं।

I_x = x-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $= \iiint_W (y^2 + z^2)\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

I_y = y-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $= \iiint_W (x^2 + z^2)\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

I_z = z-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $= \iiint_W (x^2 + y^2)\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$,

जहा W, वस्तु द्वारा ग्रहण किया गया ठोस प्रदेश है और $\delta(x, y, z)$ वस्तु का घनत्व है।

उदाहरण 13 : आइए अब हम एक समान घनत्व और त्रिज्या a वाले ठोस गोले W का z-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण मालूम करें।

यहां चूँकि घनत्व अचर, मान लीजिए k है, अर्थात् सभी (x, y, z) के लिए $\delta(x, y, z) = k$, इसलिए परिभाषा के अनुसार z-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण होगा,

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_W k\,(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

यहां समाकलन प्रदेश W को गोलीय निर्देशांकों में व्यक्त करना आसान होगा। इकाई 12 में हमने यह देखा है कि ऐसी स्थिति में समाकल का मान मालूम करने में गोलीय निर्देशांक अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं। इन निर्देशांकों में प्रदेश W को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$W = \{ (r, \theta, \phi) \mid 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi \}$$

और, $(x^2 + y^2) = r^2 \sin^2 \phi$, अतः

$$I_z = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k \left[r^2 \sin^2 \phi \right] r^2 \sin\phi \; d\theta \; d\phi \; dr$$

$$= k \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \phi \; d\theta \; d\phi \; dr$$

$$= 2\pi \int_0^a \int_0^\pi r^4 \sin^3 \phi \left[\theta \right]_0^{2\pi} \; d\phi \; dr$$

परन्तु $$\int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi = \int_0^\pi \sin\phi \,(1 - \cos^2\phi)\, d\phi$$

$$= -\left[\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{4}{3}.$$

इस तरह, $I_z = \int_0^a 2\pi k \cdot \frac{4}{3} \cdot r^4 dr$

$$= \frac{8\pi k}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$= \frac{8\pi k a^5}{15}.$$

क्या अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल करने के लिए तैयार हैं?

E 15) गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ से बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ द्वारा काटे गए ठोस प्रदेश का x-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण मालूम कीजिए यदि उसका घनत्व एक समान है।

(संकेत : यहां बेलनी निर्देशांकों का प्रयोग कीजिए। तब $z^2 = 4a^2 - (x^2 + y^2) = 4a^2 - r^2$)

E 16) समतलों $\theta = -\frac{\pi}{4}$ और $\theta = \frac{\pi}{4}$ के बीच स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के भाग पर स्थित घनाकृति के आघूर्ण और गुरुत्व केन्द्र मालूम कीजिए, यदि $\delta(x, y, z) = 1$.

13.4 सारांश

इस इकाई में हमने यह देखा है कि किस प्रकार

1) द्विक समाकलों का प्रयोग करके समतल क्षेत्र D का क्षेत्रफल मालूम किया जाता है,

क्षेत्रफल $= \iint_D dx\, dy$.

2) द्विक समाकलों का प्रयोग करके फलन $f(x, y)$ के लेखाचित्र के नीचे और xy-समतल में प्रदेश D के ऊपर स्थित ठोस प्रदेश का आयतन मालूम किया जाता है,

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

3) द्विक समाकल का प्रयोग करके किसी वक्र पृष्ठ का पृष्ठ क्षेत्रफल मालूम किया जाता है,

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

4) द्विक समाकलों का प्रयोग करके पतले शीट जैसी वस्तुओं के द्रव्यमान, आघूर्ण और गुरुत्व केन्द्र मालूम किए जाते हैं।

$$m = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$$

$$M_x = \iint_D y\, \delta(x, y)\, dx\, dy$$

$$M_y = \iint_D x\, \delta(x, y)\, dx\, dy$$

गुरुत्व केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

5) द्विक समाकलों का प्रयोग करके पतले शीट का जड़त्व आघूर्ण मालूम किया जाता है,

6) आकाश में प्रदेश का आयतन मालूम किया जाता है,

7) त्रिक समाकलों का प्रयोग करके आकाश में एक ठोस प्रदेश ग्रहण करने वाली वस्तु का द्रव्यमान, आघूर्ण, गुरुत्व केन्द्र और जड़त्व आघूर्ण मालूम किये जाते हैं।

13.5 हल और उत्तर

E1) (क) दिया हुआ प्रदेश, प्रकार II वाले प्रदेश के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le \frac{y}{2},\ 0 \le y \le 4 \right\}.$$

$$D \text{ का क्षेत्रफल } = \iint_D dx\,dy = \int_0^4 \left[\int_0^{y/2} dx \right] dy$$

$$= \int_0^4 \frac{y}{2} dy$$

$$= \left. \frac{y^2}{4} \right]_0^4$$

$$= 4.$$

(ख) $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x \}$

$$D \text{ का क्षेत्रफल } = \iint_D dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - 1.$$

E2) (क) मान लीजिए $D = \left\{ (x, y) \mid y \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le 1 \right\}.$

D प्रकार II वाला प्रदेश है। D परवलय $y = x^2$ और रेखा $y = x$ से बद्ध है।

$$\iint_{D2} dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dy$$

$$= \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(ख) $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 3, -x \le y \le x(2 - x) \}$

D प्रकार I वाला प्रदेश है। D, रेखा $y = -x$ और वक्र $y = -x^2 + 2x$ से परिबद्ध है।

$$D \text{ का क्षेत्रफल } = \int_0^3 \left[\int_{-x}^{x(2-x)} dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\,\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2}.$$

E3) ध्रुवीय निर्देशांकों में D निम्न प्रकार से व्यक्त है :

$$D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{2-\sin 2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$\therefore$ D का क्षेत्रफल $= \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\sqrt{2-\sin 2\theta}} r\,dr\right]d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{2-\sin 2\theta}}\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2-\sin 2\theta)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

E4) $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

आयतन $= \iint_D (3-x-y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1\left[\int_0^x (3-x-y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big]_0^x dx$$

$$= 1.$$

E5) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{a}$

चूँकि आधार प्रदेश एक वृत्त है, हम ध्रुवीय निर्देशांक लेते हैं।

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\},\ \text{and } f^*(r,\theta) = \frac{r^2}{a}$$

आयतन $= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a \frac{r^2}{a}\cdot r\,dr\right]d\theta = \dfrac{\pi a^3}{2}$

E6) पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\ dx\,dy$

मान लीजिए $f(x,y) = \frac{2}{3}x^{3/2}$, तब $f_x(x,y) = x^{1/2}$, $f_y(x,y) = 0$

$$S = \iint_D \sqrt{x+1}\ dx\,dy$$

$$= \int_1^3\left[\int_0^2 \sqrt{x+1}\ dy\right]dx$$

यह

$$= 2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3$$

$$= \frac{28}{3}.$$

E7) यहाँ $D = x^2 + y^2 \le 9.$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

$f_x(x, y) = 2x, f_y(x, y) = 2y.$

ध्रुवीय निर्देशांकों में प्रदेश D ज्यादा आसानी से लिखा जा सकता है।

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

अतः हम समाकलन के लिए ध्रुवीय निर्देशांकों का इस्तेमाल करेंगे। अतः

पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dx\, dy$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \times \frac{2}{3}\left[(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^3 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1).$$

E8) (0, 0) से (x, y) की दूरी है, $\sqrt{x^2+y^2}$.

$\therefore \delta(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, जहां k एक अचर और $k > 0$. हम पहले द्रव्यमान $m = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$ परिकलित करेंगे। यहाँ D, त्रिज्या 2 वाला एक चतुर्थांश वृत्त है।

ध्रुवीय निर्देशांकों में $D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi/2\}$.

और $\delta^*(r, \theta) = kr.$

$$\therefore m = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 kr \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \frac{8k}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{4k\pi}{3}.$$

अब $M_x = \iint_D yk\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$

$$= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\sin\theta\, r^2\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= k\,\frac{16}{4}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 4k$$

इसी प्रकार,

$M_y = 4k.$

गुरुत्व केन्द्र $(\bar{x}, \bar{y})$ पर है, जहां

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{\pi} = \bar{y}$$

E9) $\delta(x, y) = e^{x+y}$

द्रव्यमान $m = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\, dx\, dy$

$$= \int_0^1 e^y [e^x]_0^1\, dy$$

$$= (e-1)[e^y]_0^1 = (e-1)^2$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_0^1 \left[\int_0^1 x e^{x+y}\, dx\right] dy}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{(e-1)}{(e-1)^2} = \frac{1}{(e-1)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{(e-1)}.$$

E10) क) मान लीजिए घनत्व $\delta(x, y) = k$, जहां k अचर है और $k > 0$.

यहां $D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2\}$.

द्रव्यमान $m = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 kr\, dr\, d\theta$

$$= k \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{k\pi}{4}.$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\, \delta(x, y)\, dx\, dy}{\frac{k\pi}{4}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \sin\theta\, kr\, dr\, d\theta \Big/ \frac{k\pi}{4}$$

$$= k \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta \Big/ \frac{k\pi}{4}$$

$$= \frac{k}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \Big/ \frac{k\pi}{4}$$

$$= \frac{4}{3\pi}.$$

ख) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x\}$

$\delta(x, y) = y^2.$

$$m = \int_0^1 \left[\int_0^{e^{-x}} y^2\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{e^{-x}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-3x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{e^{-3x}}{-3} \Big]_0^1$$

$$= \frac{1 - e^{-3}}{9}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^1 \left[\int_0^{e^{-x}} y^3\, dy \right] dx}{m}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{e^{-x}} dx}{m}$$

$$= \frac{\int_0^1 e^{-4x}\, dx}{m}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{\left[e^{-4x} \right]_0^1}{m}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{(e^{-4} - 1)}{\frac{1}{9}(1 - e^{-3})}$$

$$= \frac{9}{16} \frac{(1 - e^{-4})}{(1 - e^{-3})}$$

E11) $I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y)\, dx\, dy$

यहां $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 8, 0 \le y \le x^{2/3} \}$ और $\delta(x, y) = xy$.

तब $$I_y = \int_0^8 \left[\int_0^{x^{2/3}} x^3 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^8 x^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^{2/3}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^8 x^{13/3}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^{16/3}}{16/3} \Big]_0^8$$

$$= \frac{3}{32} 8^{16/3} = 6144.$$

E12) $D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2 \}$

$$I_x = \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} y^3 \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 x^8 \, dx$$

$$= \frac{2^9}{36}$$

$$I_y = \frac{2^5}{10}.$$

E13) प्रदेश W निम्न प्रकार से व्यक्त होता है :

$$W = \{ (x, y, z) \mid 0 \le x \le a, \; 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}, \; 0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2} \}$$

आयतन $V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \, dy \, dz$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{2a^3}{3}.$$

E14) वस्तु का द्रव्यमान $= \iiint_W \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

$$W = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \le x \le \sqrt{4-z}, \; 0 \le y \le \sqrt{x}, \; 0 \le z \le 4 \right\}$$

$$\delta(x, y, z) = xy$$

द्रव्यमान $= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{4-z}} \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} xy \, dy \right\} dx \right] dz$

$$= \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{4-z}} \frac{x^2}{2} \, dx \right] dz$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{4-z}} dz$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^4 (4 - z)^{3/2} dz$$

$$= \frac{32}{15}.$$

E15) मान लीजिए $\delta(x, y, z) = k$.

प्रदेश W को हम बेलनी निर्देशांकों मे निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$W = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\sqrt{4a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{4a^2 - r^2}\right\}$$

$$I_x = k \iiint_W (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= k \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{4a^2 - r^2}}^{\sqrt{4a^2 - r^2}} (r^2 \sin^2\theta + z^2)\, r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= k \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[2r^2 \sin^2\theta \sqrt{4a^2 - r^2} + \frac{2}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\right] r\, d\theta\, dr$$

$$= k \int_0^a \left[r^2 \sqrt{4a^2 - r^2} + \frac{2}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\right] 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{2\pi a^5 k}{15}(128 - 51\sqrt{3}).$$

E16) $$W = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \le r \le a,\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ -\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}\right\}$$

$$\text{द्रव्यमान} = \int_0^a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2r\sqrt{a^2 - r^2}\, d\theta\, dr$$

$$= 2r \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, 2r\, \frac{\pi}{4}\, dr$$

$$= \left.\frac{\pi(a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}.$$

$$M_{xy} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} z\, r\, dz\, dr\, d\theta = 0$$

$$M_{xz} = 0$$

$$M_{yz} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2 - r^2}}^{\sqrt{a^2 - r^2}} (r\cos\theta)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^a \left[\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2r^2 \sqrt{a^2 - r^2} \cos\theta\, dr\right] d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2}\, dr = \frac{\pi\sqrt{2}\, a^4}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi\sqrt{2}\, a^4}{8} \cdot \frac{3}{\pi a^3} = \frac{3\sqrt{2}\, a}{8}$$

$$\text{गुरुत्व केन्द्र} = \left[\frac{3\sqrt{2}\, a}{8}, 0, 0\right].$$

इकाई 14 $\mathbb{R}^2$ में रेखा समाकल

इकाई की रूपरेखा

14.1 प्रस्तावना

इस खंड की पहली दो इकाईयों में आपको एक चर वाले फलन के निश्चित समाकल की संकल्पना का व्यापकीकरण करने की एक विधि से परिचित कराया गया है। इस इकाई में हम आपको समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ का व्यापकीकरण करने की एक बिल्कुल ही अलग विधि से परिचित कराएंगे। यहां हम अंतराल $[a, b]$ के स्थान पर समतल के एक वक्र C का प्रयोग करेंगे और तीन प्रकार के समाकलों $\int_C f(x, y)\,dx$, $\int_C f(x, y)\,dy$, और $\int_C f(x, y)\,ds$ को परिभाषित करेंगे, जहां s, चाप की लंबाई है। इन सभी समाकलों को रेखा-समाकल (line integral) या वक्र समाकल (curve integral) कहते हैं। यहां हम इन रेखा-समाकलों के मान ज्ञात करने की विधि भी प्राप्त करेंगे। अंत में हम ग्रीन-प्रमेय सिद्ध करेंगे जो रेखा समाकल और द्विक समाकल के बीच संबंध स्थापित करता है।

उद्देश्य

- इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप—
- रेखा-समाकलों $\int_C f(x, y)\,dx$, $\int_C f(x, y)\,dy$ और $\int_C f(x, y)\,ds$ को परिभाषित कर सकेंगे, जहां C, समतल का एक वक्र है,
- ऊपर बताए गए रेखा-समाकलों के मान ज्ञात कर सकेंगे,
- रेखा-समाकलों और द्विक समाकलों के बीच संबंध स्थापित करने वाले ग्रीन-प्रमेय का कथन दे सकेंगे और उसे सिद्ध कर सकेंगे।

14.2 रेखा-समाकल

इस इकाई में हम वक्ररेखी समाकलों (curvilinear integrals) या वक्र पर समाकलों के बारे में चर्चा करेंगे। वक्ररेखी समाकलों को परिभाषित करने के लिए हमें पहले यह जानना आवश्यक होता है कि समतल के वक्र से हम क्या समझते हैं।

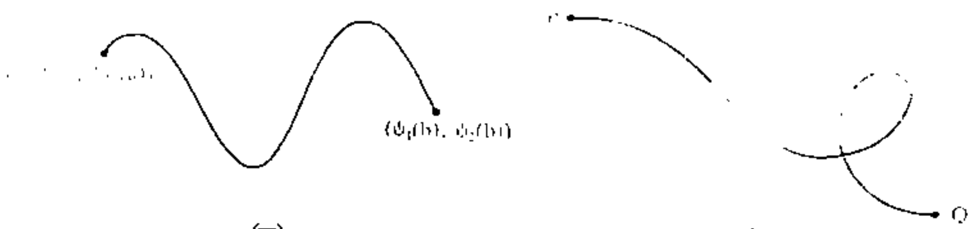
आइए, पहले हम निम्नलिखित परिभाषा दें।

परिभाषा 1 : मान लीजिए ψ_1 और ψ_2 संवृत अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित दो वास्तविक मान संतत फलन हैं। तब,

$$C = \{(\psi_1(t), \psi_2(t)) \mid a \le t \le b\}$$

द्वारा परिभाषित समुच्चय C को $\mathbb{R}^2$ का एक वक्र कहते हैं। बिन्दु $P(\psi_1(a), \psi_2(a))$ को C का प्रारंभिक बिन्दु (initial point) और बिन्दु $Q(\psi_1(b), \psi_2(b))$ को वक्र का अंत्य बिन्दु (end point)

कहा जाता है। वक्र को संवृत वक्र (closed curve) कहा जाता है, यदि प्रारंभिक बिन्दु और अंत्य बिन्दु संपाती हों। यदि $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ के लिए t_1 और t_2 के संगत बिन्दु $(\psi_1(t_1), \psi_2(t_1))$ और $(\psi_1(t_2), \psi_2(t_2))$ अलग-अलग [illegible] वक्र (simple curve) कहा जाता है। इससे [illegible] वक्र स्वयं को कभी नहीं काटता, चित्र 1 (क) देखिए। चित्र 1 (ख) में आप [illegible] रहे हैं वह सरल वक्र नहीं है।



(क) (ख)

चित्र 1

वक्र C को निष्कोण वक्र (smooth curve) कहा जाता है, यदि $[a, b]$ के सभी बिन्दुओं पर ψ_1 और ψ_2 के अवकलज संतत हों और $[a, b]$ पर $\psi'_1(t), \psi'_2(t)$ एक साथ शून्य न होते हों अर्थात् सभी $t \in [a, b]$ के लिए $[\psi'_1(t)^2 + \psi'_2(t)^2] > 0$ (चित्र 1 (क) देखिए)। हम निष्कोण वक्र की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं : कल्पना कीजिए कि एक वस्तु चित्र 1 (क) में दिए गए वक्र के अनुदिश चल रही है, जिससे कि दिए हुए समय t पर इसकी स्थिति $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ से प्राप्त होती है। इस वस्तु की दिशा में यकायक कोई परिवर्तन नहीं होगा (क्योंकि $\psi'_1(t)$ और $\psi'_2(t)$ संतत है) और न ही यह वस्तु रुक सकेगी या पीछे लौटेगी (क्योंकि $\psi'_1(t)$ और $\psi'_2(t)$ एक साथ शून्य नहीं होते)।

अब समाकलन के लिए वक्र C की एक दिशा सुनिश्चित करनी होती है। इसके लिए चित्र 1 (क) देखिए। तब हम C को P से Q की ओर या Q से P की ओर बढ़ता हुआ मान सकते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि C की दो दिशाएं हैं। एक वह दिशा है जिसमें a से b की ओर t में वृद्धि होती है और दूसरी दिशा वह है जिसमें b से a की ओर t में कमी होती है। आगे से हम C से a से b की ओर जाने वाले प्राचल (parameter) t द्वारा निर्धारित वक्र को प्रकट करेंगे और –C से b से a की ओर जाने वाले प्राचल t द्वारा निर्धारित वक्र को प्रकट करेंगे।

ध्यान दीजिए कि

C का प्रारंभिक बिन्दु = –C का अंत्य बिन्दु और

C का अंत्य बिन्दु = –C का प्रारंभिक बिन्दु

जब वक्र वर्धमान t द्वारा निर्धारित होता है, तो इसे धनात्मकतः अभिविन्यस्त (positively oriented) कहा जाता है। हम अपनी पूरी चर्चा में केवल अभिविन्यस्त, निष्कोण और सरल वक्रों को ही लेंगे।

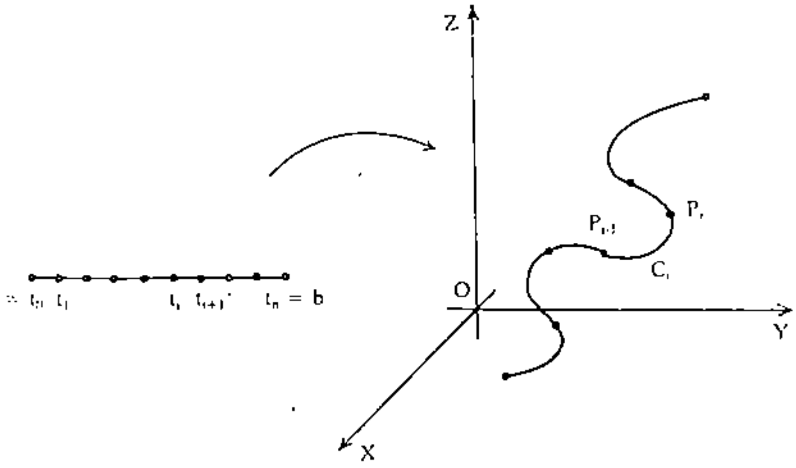
अब, मान लीजिए C एक अभिविन्यस्त, निष्कोण और सरल वक्र है, जो

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid a \le t \le b\}$$

से परिभाषित है, जहां फलन $x(t)$ और $y(t)$, $[a, b]$ पर संतत है। मान लीजिए $f(x, y)$, C पर परिभाषित एक परिबद्ध वास्तविक मान फलन है। [illegible] हम $\int_C f(x, y)$ [illegible] परिभाषित करेंगे। [illegible] की तरह, इस समाकल को परिभाषित करने के लिए पहला चरण, C को विभाजित करना होता है। इसके लिए आइए पहले हम $[a, b]$ का एक विभाजन P लें, जिसे

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n = b$$

से व्यक्त किया गया है। प्रत्येक i, $0 \le i \le n$ के लिए मान लीजिए P_i, C पर बिन्दु $(x(t_i), y(t_i))$ को [illegible] करता है। और, मान लीजिए C_i, बिन्दुओं P_{i-1} और P_i को मिलाने वाले C के चाप को [illegible] है। चित्र 2 [illegible]



चित्र 2

ान लीजिए।

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$$

$$M_i = \sup \{f(x, y) \mid (x, y) \in C_i\}$$

$$m_i = \inf \{f(x, y) \mid (x, y) \in C_i\}$$

ब, उपरि योगफल और निम्न योगफल को इस प्रकार परिभाषित कीजिए :

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \qquad \ldots (1)$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \qquad \ldots (2)$$

ान लीजिए।

$$l = \sup_{P} \{L(P, f)\}, \quad u = \inf_{P} \{U(P, f)\},$$

हाँ P, $[a, b]$ के सभी विभाजनों का समुच्चय है।

दि $l = u$, तो हम यह कहते हैं कि रेखा समाकल $\int_C f(x, y)\, dx$ का अस्तित्व है और

$\int_C f(x, y)\, dx = l$ और u का उभयनिष्ठ मान।

प्पणी 1 : द्विक समाकलों की तरह रेखा-समाकल $\int_C f(x, y)\, dx$ को भी योगफल की सीमा के र में लिखा जा सकता है। मान लीजिए (ξ_i, η_i) चाप C_i पर कोई बिन्दु है। योगफल

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i \qquad \ldots (3)$$

जिए। तब रेखा समाकल $\int f(x, y)\, dx$ का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि

$$\lim_{\mu(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i$$

अस्तित्व हो, जहा $\mu(P)$ विभाजन P का मानक है। और तब

$$\lim_{\mu(P) \to 0} S(P, f) = \int_C f(x, y)\, dx$$

अब हम एक अन्य रेखा समाकल $\int_C f(x, y)\,dy$ को परिभाषित करेंगे।

मान लीजिए ऊपर दिए गए समीकरण (1) और (2) में Δx_i के स्थान पर Δy_i को प्रतिस्थापित किया गया है और मान लीजिए

$$U^*(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta y_i$$

$$L^*(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta y_i$$

अब मान लीजिए कि

$$l^* = \sup_P \{L^*(P, f)\},\ u^* = \inf_P \{U^*(P, f)\}.$$

यदि $l^* = u^*$ तो हम कहते हैं कि रेखा समाकल $\int_C f(x, y)\,dy$ का अस्तित्व है और $\int_C f(x, y)\,dy = l^*$ और u^* का उभयनिष्ठ मान। और, जैसा कि हम पहले बता चुके हैं $\int_C f(x, y)\,dy$ का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि

$\lim_{\mu(P)\to 0} S^*(P, f) = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i$ का अस्तित्व होता है और

$$\int_C f(x, y)\,dy = \lim_{\mu(P)\to 0} S^*(P, f).$$

अब हम तीसरे रेखा समाकल $\int_C f(x, y)\,ds$ को परिभाषित करेंगे, जहां s, वक्र C के चाप की लंबाई है। इसे परिभाषित करने के लिए हम वक्र की चाप-लंबाई वाले सूत्र का प्रयोग करेंगे जिसे आप कलन पाठ्यक्रम में पढ़ चुके हैं। (खंड 4 का भाग 16.2.2 देखिए)। इस तरह, यदि वक्र C, $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$ के प्राचलिक रूप में दिया गया हो, तो बिन्दु $(x(a), y(a))$ से एक स्वेच्छ बिन्दु $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$ तक की चाप लंबाई होगी :

$$s = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

अतः s को हम t का एक फलन मान सकते हैं। तब कलन के मूल प्रमेय से (कलन पाठ्यक्रम की इकाई 10 का प्रमेय 7)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

मान लीजिए $\Delta s_i = C_i$ की चाप लंबाई $= s(t_i) - s(t_{i-1})$. और, मान लीजिए

$$L_s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta s_i$$

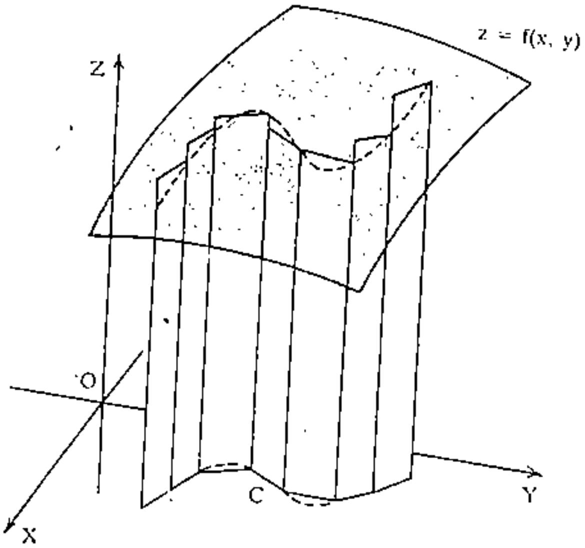
$$U_s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta s_i$$

यदि $l_s = \sup_P \{L_s(P, f)\}, = \inf_P \{U_s(P, f)\} = u_s$ तब हम यह कहते हैं कि $\int_C f(x, y)\,ds$ का अस्तित्व है और $\int_C f(x, y)\,ds = l_s$ और u_s का उभयनिष्ठ मान। और साथ ही,

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i.$$

अब तक हमने तीन प्रकार के रेखा समाकलों को परिभाषित किया है। इनके बारे में कुछ महत्वपूर्ण टिप्पणियां अब हम दे रहे हैं।

टिप्पणी 2: मान लीजिए वक्र C पर $f(x, y) \geq 0$. तब $\int_C f(x, y)\, ds$ चित्र 3 में दिखाए गए वक्र ऊर्ध्वाधर पर्दे के क्षेत्रफल को निरूपित करता है। और $U(P, f)$ उसी चित्र में दिखाए गए आयतों के क्षेत्रफलों का जोड़ है। स्पष्ट है कि P जैसे-जैसे अधिशोधित होता जाता है वैसे-वैसे यह जोड़ पर्दे के क्षेत्रफल के और निकट आता जाता है।



चित्र 3

टिप्पणी 3: मान लीजिए $f(x, y)$ और $g(x, y)$ वक्र C पर परिभाषित दो वास्तविक मान फलन हैं। यदि दोनों रेखा-समाकलों

$\int_C f(x, y)\, dx$ और $\int_C g(x, y)\, dy$ का अस्तित्व हो, तो हम योगफल

$\int_C f(x, y)\, dx + \int_C g(x, y)\, dy$ को $\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$

से प्रकट करेंगे। आप में से जो लोग सदिश कलन (vector calculus) से परिचित हैं वे यह अवश्य जान जाएंगे कि

$$\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy = \int_C (f\hat{i} + g\hat{j}) \circ (dx\hat{i} + dy\hat{j}).$$

जहां $\hat{i}, \hat{j}$ दो निर्देशांक अक्षों के अनुदिश एकक सदिश हैं।

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे। जिन फलनों के तीनों प्रकार के रेखा-समाकलों का अस्तित्व होता है, ऐसे फलनों का एक बहुत बड़ा वर्ग हमें इस प्रमेय से प्राप्त होता है।

प्रमेय 1: यदि $f(x, y)$ एक सरल निष्कोण वक्र C पर संतत हो, तो रेखा-समाकलों

$$\int_C f(x, y)\, dx,\ \int_C f(x, y)\, dy \text{ और } \int_C f(x, y)\, ds$$ का अस्तित्व होता है।

इस प्रमेय की उपपत्ति जानना आपके लिए ज़रूरी नहीं है।

अभी तक हमने तीन अलग-अलग प्रकार के रेखा-समाकलों को परिभाषित किया है। हमने फलनों के एक महत्वपूर्ण वर्ग को भी पहचाना है, जिनके लिए रेखा-समाकलों का अस्तित्व होता है। लेकिन रेखा-समाकलों का मान निकालने में ये बातें उपयोगी सिद्ध नहीं होतीं। अब हम यह दिखाएंगे कि अधिकांश फलनों के रेखा-समाकलों को एक चर वाले वास्तविक मान फलनों के निश्चित समाकलों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस तरह कलन पाठ्यक्रम में आपने जितनी विधियों को पढ़ा है, उन सभी का प्रयोग अब आप रेखा-समाकलों के मान निकालने में कर सकते हैं।

प्रमेय 2 : मान लीजिए $f(x, y)$ एक सरल, निष्कोण, धनात्मकतः अभिविन्यस्त वक्र C पर परिभाषित एक वास्तविक मान संतत फलन है, और

$$C = \{ (x(t), y(t)) \mid a \le t \le b \}$$

तब

$$\text{(i)} \quad \int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\text{(ii)} \quad \int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

$$\text{(iii)} \quad \int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\, s'(t)\, dt$$

हम जानते हैं कि $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

अतः (iii) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

अब हम कुछ रेखा-समाकलों के मान निकालने के लिए प्रमेय में बताए गए सूत्रों (i), (ii) और (iii) का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 1 : आइए, हम $\int_C (x^2 + y^2)\, dy$ का मान निकालें, जहां C, $x(t) = at^2$, $y(t) = 2at$, $0 \le t \le 1$ द्वारा निर्धारित वक्र है।

आप यह देख सकते हैं कि फलन $f(x, y) = x^2 + y^2$ और वक्र C, प्रमेय 2 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं। अतः प्रमेय 2 के सूत्र (ii) को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C (x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 (a^2 t^4 + 4a^2 t^2)\, 2a\, dt$$

$$= 2a^3 \left[\frac{t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{46}{15} a^3 .$$

उदाहरण 1 में दिया गया प्राचलिक समीकरण वास्तव में बिन्दुओं $(0, 0)$ और $(a, 2a)$ को मिलाने वाले परवलय के चाप को निरूपित करता है।

उदाहरण 2 : आइए, हम रेखा समाकल $\int_C x^2 dx + xy\, dy$ का मान मालूम करें, जहां C बिन्दुओं $(1, 0)$ और $(0, 1)$ को मिलाने वाला $x = \cos t$, $y = \sin t$ द्वारा परिभाषित वक्र है।

टिप्पणी 3 के अनुसार

$$\int_C x^2 dx + xy\, dy = \int_C x^2 dx + \int_C xy\, dy .$$

अब हम ऊपर दिए गए व्यंजक के दायीं ओर के दोनों समाकलों का मान ज्ञात करने के लिए प्रमेय 2 के सूत्रों (i) और (ii) को लागू करते हैं।

इसलिए $\displaystyle \int_C x^2 dx + xy\, dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,(-\sin t)\, dt + \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \cos t\, dt.$

$$= 0 .$$

आइए, हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : मान लीजिए C, प्राचलिक समीकरण $x = t, y = t^2, 1 \le t \le 2$ द्वारा दिया गया वक्र है। आइए, हम $\int_C x \, ds$ मालूम करें।

आप देख सकते हैं कि फलन $f(x, y) = x$ और वक्र C, प्रमेय 2 की आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हैं। अतः प्रमेय 2 के सूत्र (iii) से हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C x \, ds = \int_1^2 t\sqrt{1+(2t)^2}\, dt \quad \text{क्योंकि } x'(t) = 1 \text{ और } y'(t) = 2t$$

$$= \int_1^2 t\sqrt{1+4t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_4^{16} \sqrt{1+\theta}\, d\theta, \quad \text{जहां } \theta = 4t^2$$

$$= \frac{1}{12}(1+\theta)^{3/2}\Big]_4^{16}$$

$$= \frac{1}{12}(17^{3/2} - 5^{3/2})$$

अब आप स्वयं कुछ रेखा-समाकलों के मान निकालने की कोशिश कर सकते हैं।

E 1) मान निकालिए :

क) $\int_C xy^{2/5} ds;\ C = \left\{(x, y) \mid x = \frac{t}{2},\ y = t^{5/2},\ 0 \le t \le 1\right\}$

ख) $\int_C (\sin x + \cos y)\, ds$ जहां C, $(0, 0)$ से $(\pi, 2\pi)$ तक का रेखा-खंड है।

(संकेत : आपको इस रेखा-खंड के लिए प्राचलिक रूप का समीकरण प्राप्त करना होगा।)

अपने उत्तर को भाग 14.6 में दिए गए उत्तर से मिलान अवश्य कर लीजिए।

कुछ भौतिक प्रश्नों को हल करने में रेखा-समाकल काफी सहायक सिद्ध होते हैं।

मान लीजिए वृत्त $x(t) = a\cos t, y(t) = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ के आकार का एक पतला तार है।

मान लीजिए बिन्दु (x, y) पर तार का घनत्व $\delta(x, y)$ है।

अब प्रश्न उठता है कि क्या हम तार का द्रव्यमान मालूम कर सकते हैं?

इस संबंध में आप यह देख सकते हैं कि यदि Δs तार के एक छोटे भाग की लंबाई हो, तो इस छोटे भाग का द्रव्यमान लगभग $\delta(x, y)\ \Delta s$ के बराबर होता है।

इससे यह अर्थ निकलता है कि इस स्थिति में हम उपरि योगफल और निम्न योगफल को तार के द्रव्यमान का सन्निकटन मान सकते हैं। अतः

$$\text{तार का द्रव्यमान} = \int_C \delta(x, y)\, ds.$$

आइए इससे संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : आइए हम वृत्त $x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ के आकार वाले एक पतले तार का द्रव्यमान मालूम करें जिसका घनत्व $\delta(x, y) = 5y^2$ है।

आइए हम C से वक्र $x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ को प्रकट करें।

तब

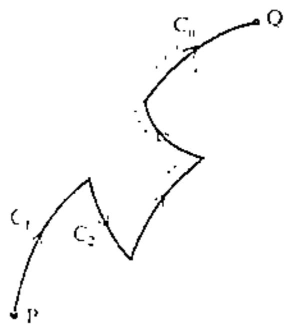
$$\text{तार का द्रव्यमान} = \int_C \delta(x, y)\, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} 5a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$$= 5a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt$$

$$= 5a^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = 5\pi a^3.$$

इस अनुप्रयोग के अतिरिक्त रेखा-समाकल के अन्य बहुत से अनुप्रयोग हैं। इनमें से एक अति महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग है एक बल द्वारा किया गया कार्य मालूम करना। इसके लिए मान लीजिए $f(x, y)$ और $g(x, y)$ वक्र C पर दो वास्तविक मान संतत फलन हैं जिससे कि $\int_C f(x, y)\, dx$ और $\int_C g(x, y)\, dy$ का अस्तित्व हो। तब हम रेखा समाकल $\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$ को वक्र C के अनुदिश एक कण को ले जाने में बल $F = (f(x, y), g(x, y))$ द्वारा किया गया कार्य मान सकते हैं। नीचे दिए गए उदाहरण को देख लेने पर आप इसे अच्छी तरह से समझ सकेंगे। लेकिन उदाहरण देने से पहले यहां हम एक बात बता देना चाहेंगे। रेखा-समाकल $\int_C f(x, y)\, ds$ को परिभाषित करते समय हमने यह मान लिया था कि C एक निष्कोण वक्र है। लेकिन हम इस परिभाषा को उन वक्रों पर भी लागू कर सकते हैं जो निष्कोण नहीं हैं, परन्तु खंडशः निष्कोण (piecewise smooth) हैं। खंडशः निष्कोण वक्र C वह वक्र होता है जिसमें अनेक निष्कोण वक्र $C_1, C_2, \ldots, C_n$ होते हैं जो एक-दूसरे से जुड़े होते हैं। आप चित्र 4 में एक खंडशः निष्कोण वक्र देख सकते हैं। इस प्रकार के वक्र के लिए हम निम्नलिखित परिभाषित करते हैं।



चित्र 4

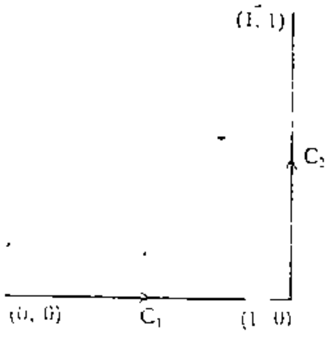
$$\int_C f(x, y)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x, y)\, dx$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x, y)\, dy$$

$$\int_C f(x, y)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x, y)\, ds$$

नीचे दिए गए उदाहरण में हमने एक खंडशः निष्कोण वक्र लिया है।

उदाहरण 5 : आइए हम (0, 0) से (1, 0) तक के रेखा-खंड के अनुदिश और फिर (1, 0) से (1, 1) तक के रेखा-खंड के अनुदिश एक कण को ले जाने में बल $F = (x^2y, xy^2)$ द्वारा किया गया कार्य मालूम करें।



चित्र 5

किया गया कार्य मालूम करने के लिए हमें रेखा-समाकल $\int_C x^2y\, dx + xy^2\, dy$ का मान मालूम करना होगा, जहां $C = C_1 + C_2$, जिसमें C_1, (0, 0) और (1, 0) को मिलाने वाला रेखा-खंड है और C_2, (1, 0) और (1, 1) को मिलाने वाला रेखा-खंड है। इसके लिए चित्र 5 देखिए। इस तरह

$$\int_C x^2y\, dx + xy^2\, dy = \int_{C_1} x^2y\, dx + xy^2\, dy + \int_{C_2} x^2y\, dx + xy^2\, dy.$$

C_1 पर $y = 0$ और $dy = 0$.

अतः $\int_{C_1} x^2y\, dx + xy^2\, dy = 0$.

C_2 पर चूंकि $x = 1$, इसलिए $dx = 0$. अतः

$$\int_{C_2} x^2 y\, dx + xy^2\, dy = \int_0^1 x^2 y\, dy = \frac{1}{3}.$$

इसलिए $\int_C x^2 y\, dx + xy^2\, dy = \frac{1}{3}$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E2) $(-2, 4)$ और $(2, 4)$ के बीच वक्र $y = x^2$ के आकार वाले तार का द्रव्यमान मालूम कीजिए जबकि इसका घनत्व $\delta(x, y) = k\,|x|$ हो।

(संकेत : यहां आपको $(-2, 4)$ से $(0, 0)$ तक और फिर $(0, 0)$ से $(2, 4)$ तक के वक्र पर अलग-अलग रेखा-समाकल का मान मालूम करना होगा।

E3) उदाहरण 5 में दिए गए बल F द्वारा

(क) परवलय $y = x^2$

(ख) रेखा $y = x$ के अनुदिश $(0, 0)$ से $(1, 1)$ तक कण को ले जाने में किया गया कार्य मालूम कीजिए।

E4) बल $F = (xy, y^2)$ द्वारा खंडशः निष्कोण वक्र $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ के अनुदिश एक कण को ले जाने में किया गया कार्य मालूम कीजिए, जहाँ

$C_1 = \{ (t, 0) \mid 0 \le t \le 1 \}$

$C_2 = \{ (1, t) \mid 0 \le t \le 1 \}$

$C_3 = \{ (1 - t, 1) \mid 0 \le t \le 1 \}$

$C_4 = \{ (0, 1 - t) \mid 0 \le t \le 1 \}$.

इस भाग को समाप्त करने से पहले हम रेखा-समाकलों के बारे में कुछ साधारण बातें बताना चाहेंगे जो परिभाषा से आसानी से प्राप्त होती हैं और जो कुछ परिकलनों में काफ़ी उपयोगी सिद्ध हो सकती हैं।

I) यदि C_1 और C_2 ऐसे दो वक्र हैं कि C_1 का अंत्य बिन्दु $= C_2$ का प्रारंभिक बिन्दु, तो

$$\int_{C_1} f(x, y)\, dx + \int_{C_2} f(x, y)\, dx = \int_{C_3} f(x, y)\, dx,$$

जहां C_3, C_1 के प्रारम्भिक बिन्दु से C_2 के अंत्य बिन्दु तक के दो पथों का सम्मिलन है।

II) $$\int_C \{f(x, y) + g(x, y)\}\, dx = \int_C f(x, y)\, dx + \int_C g(x, y)\, dx$$

III) किसी भी वास्तविक संख्या α के लिये $\int_C \alpha f(x, y)\, dx = \alpha \int_C f(x, y)\, dx$

IV) यदि C के बिन्दुओं के लिए $|f(x, y)| \le M$, तब

$$\left| \int_C f(x, y)\, dx \right| \le ML,$$

जहां $L = C$ की चाप-लम्बाई

अन्य दो रेखा-समाकलों पर भी इसी प्रकार के परिणाम लागू होते हैं।

V) $$\int_C f(x, y)\, dx = -\int_{-C} f(x, y)\, dx$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = -\int_{-C} f(x, y)\, dy$$

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{-C} f(x, y)\, ds.$$

E3) में हमने दो दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाले अलग-अलग पथों के अनुदिश एक कण को ले जाने में एक बल द्वारा किया गया कार्य मालूम करने के लिए आपको कहा था। आपको किए गए कार्य के अलग-अलग मान प्राप्त हुए होंगे। यह एक बहुत ही आम बात है। फलन का रेखा-समाकल अक्सर उस वक्र पर निर्भर करता है, जिसके अनुदिश इसे समाकलित करते हैं। लेकिन कुछ ऐसे फलन भी होते हैं जिनके रेखा-समाकल दो दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाले पथ पर निर्भर नहीं करते। अगले भाग में हम इन्हीं फलनों पर विचार करेंगे।

14.3 पथ-स्वातंत्र्य

इस भाग में हम मुख्यतः $\int_C M\,dx + N\,dy$ के प्रकार के रेखा-समाकलों पर विचार करेंगे, जहां M, N दो चरों x, y के वास्तविक मान फलन हैं। पिछले भाग में आपने यह देखा है कि एक बल द्वारा किया कार्य मालूम करने के दौरान इस प्रकार के रेखा-समाकल प्राप्त होते हैं।

अब इस परिभाषा पर गौर कीजिए :

परिभाषा 2 : मान लीजिए D, R^2 का एक प्रान्त है। यदि D के किन्हीं दो बिन्दुओं A और B के लिए रेखा-समाकल $\int_C M\,dx + N\,dy$, का A और B को मिलाने वाले D के प्रत्येक धनात्मकतः अभिविन्यस्त पथ C के लिए समान मान हो, तो हम यह कहते हैं कि $\int_C M\,dx + N\,dy$, D में पथ स्वतन्त्र (independent of path) है।

अब, हम यहां एक प्रमेय दे रहे हैं जिसमें ऐसे फलन $F = (M, N)$ बताए गए हैं जिनके लिए $\int_C (M\,dx + N\,dy)$ पथ-स्वतन्त्र हो। इस प्रमेय को **रेखा-समाकलों का मूलभूत प्रमेय** भी कहा जाता है। आप देख सकते हैं कि इस प्रमेय में और कलन के मूलभूत प्रमेय में, जिसका अध्ययन आप पहले कर चुके हैं, काफी समरूपता है।

प्रमेय 3 : मान लीजिए $F = (M, N)$ और एक प्रान्त D के एक सततत: अवकलनीय फलन f के लिए $M = f_x, N = f_y$. मान लीजिए $C, x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$ द्वारा दिया गया D में स्थित एक सरल, निष्कोण, धनात्मकतः अभिविन्यस्त वक्र है। तब

$\int_C M\,dx + N\,dy = f(B) - f(A)$, जहाँ

$A = (x(a), y(a))$ और $B = (x(b), y(b))$, C के क्रमशः प्रारम्भिक और अंत्य बिन्दु हैं।

उपपत्ति : अब

$$\int_C (M\,dx + N\,dy) = \int_C f_x\,dx + \int_C f_y\,dy$$

$$= \int_a^b f_x \frac{dx}{dt}dt + \int_a^b f_y \frac{dy}{dt}dt \quad \text{(प्रमेय 2 के अनुसार)}$$

$$= \int_a^b \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{df}{dt} dt \quad \text{शृंखला नियम के अनुसार (इकाई 7 का प्रमेय 2)}$$

$$= f(x(t), y(t)) \Big]_a^b$$

$$= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$= f(B) - f(A).$$

आप में से वे लोग, जो सदिश कलन से परिचित हैं, यह जानते हैं :

$$\int_C (M\,dx + N\,dy) = \int_C \nabla f \circ d\mathbf{r}, \text{ जहां } \nabla f = f_x\hat{i} + f_y\hat{j}$$

और $dr = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$

तब प्रमेय 3 से यह पता चलता है कि यदि f सततत: अवकलनीय हो, तो रेखा-समाकल

$$\int_C \nabla f \circ dr = f(B) - f(A)$$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि यह रेखा-समाकल, वक्र C के केवल अंत्य बिन्दुओं पर निर्भर करता है। अतः यदि A और B को मिलाने वाला एक अन्य सरल, निष्कोण, धनात्मकतः अभिविन्यस्त वक्र C_1 हो, तो

$$\int_C \nabla f \circ dr = \int_{C_1} \nabla f \cdot dr$$

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि

$$\int_C \nabla f \circ dr = \int_C M\,dx + N\,dy\,,\ \text{D में पथ-स्वतन्त्र है।}$$

प्रमेय 3 का विलोम भी सही है।

अतः हम एक अधिक प्रबल परिणाम का कथन दे सकते हैं :

प्रमेय 4 : मान लीजिए $F = (M, N)$, प्रान्त D पर सततत: है। तब रेखा-समाकल

$$\int_C M\,dx + N\,dy$$

पथ-स्वतन्त्र होता है यदि और केवल यदि D पर किसी सततत: अवकलनीय वास्तविक मान फलन f के लिए $M = f_x$ और $N = f_y$ हो।

यहां हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे।

अब, यदि $\int_C M\,dx + N\,dy$ प्रान्त D में पथ-स्वतन्त्र हो तो हम $\oint_C M\,dx + N\,dy$ के बारे में क्या कह सकते हैं, जहाँ C, D में एक संवृत वक्र हो? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए संवृत वक्र C लीजिए जिसे चित्र 6 में दिखाया गया है। C पर कोई दो बिन्दु A और B लीजिए। A से B तक के C के भाग को C_1 और B से A तक के C के भाग को C_2 मान लीजिए।

चित्र 6

तब

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_{C_1} M\,dx + N\,dy + \int_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

$$= \int_{C_1} M\,dx + N\,dy - \int_{-C_2} M\,dx + N\,dy$$

अब चूंकि C_1 और $-C_2$ के समान प्रारम्भिक और अंत्य बिन्दु हैं और $\int_C M\,dx + N\,dy$, D में पथ-स्वतन्त्र है, इसलिए

$$\int_{C_1} M\,dx + N\,dy = \int_{-C_2} M\,dx + N\,dy$$

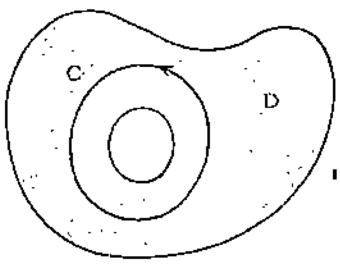
अर्थात् $$\oint_C M\,dx + N\,dy = 0\,.$$

अब, यदि एक बल F ऐसा हो कि प्रान्त D में परिभाषित किसी सततत: अवकलनीय फलन f के लिए $F = (f_x, f_y)$, तो F को संरक्षी बल (conservative force) कहा जाता है। इस तरह, ऊपर की गई चर्चा को प्रमेय 3 के साथ लेने पर यह पता चलता है कि यदि F एक संरक्षी बल हो तो एक संवृत पथ के अनुदिश एक कण को ले जाने में F द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

मान लीजिए F एक संरक्षी बल है, जहाँ $F = (f_x, f_y)$.

तब $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = f_{yx}$, क्योंकि f संतत अवकलनीय है।

$$= \frac{\partial N}{\partial x}.$$



चित्र 7

विलोम के रूप में हम इस प्रतिबंध का प्रयोग यह देखने के लिए भी कर सकते हैं कि बल संरक्षी है कि नहीं।

लेकिन ऐसा करने के लिए हमें प्रांत D पर एक और प्रतिबंध लगाना होता है। हम यह मान लेते हैं कि D एकशः संबद्ध (simply connected) है। अब एकशः संबद्ध प्रांत होता क्या है? मोटे तौर पर, प्रांत D को एकशः संबद्ध तब कहा जाता है जब उसमें कोई छिद्र न हो। उदाहरण के लिए चित्र 7 में दिखाया गया प्रांत एकशः संबद्ध नहीं है। अतः चित्र 7 में दिए गए प्रकार के प्रांत हम नहीं लेंगे। इसकी परिशुद्ध परिभाषा यह है :

परिभाषा 3 : R^2 के प्रांत D को एकशः संबंधित कहा जाता है, यदि D का प्रत्येक निष्कोण संवृत वक्र, जो स्वयं को प्रतिच्छेद नहीं करता, D में पूरी तरह से आविष्ट किसी प्रदेश की परिसीमा हो।

आयत का अभ्यंतर (interior), रेखाओं $y = a$ और $y = b, a < b$ से परिबद्ध प्रदेश, एकशः संबद्ध प्रांत के उदाहरण हैं।

अब हम एक प्रमेय का केवल कथन देंगे, जिससे संरक्षी बलों की पहचान आसानी से की जा सकती है।

प्रमेय 5 : मान लीजिए $F = (M, N)$, जहाँ M, N एकशः संबद्ध प्रांत D पर सततत: अवकलनीय हैं। F संरक्षी होता है अर्थात्

$$F = \nabla f = (f_x, f_y), \text{ यदि और केवल यदि}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

प्रमेय 3 और प्रमेय 5 रेखा-समाकल $\int_C M\,dx + N\,dy$ का मान निकालने में बहुत उपयोगी सिद्ध होते हैं। इसे हम नीचे दिए गए उदाहरण की सहायता से अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 6 : आइए हम $\int_C y \sin xy\,dx + x \sin xy\,dy$ का मान ज्ञात करें, जहाँ C, (1, 2) से (3, 4) तक का रेखा-खंड है। यहाँ $M = y \sin xy$ और $N = x \sin xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = xy \cos xy + \sin xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

इससे यह पता चलता है कि $F = (M, N)$ संरक्षी है (प्रमेय 5)। इसलिए प्रमेय 3 के अनुसार,

$$\int_C y \sin xy\,dx + x \sin xy\,dy = f(3, 4) - f(1, 2),$$

जहाँ f ऐसा है कि $F = \nabla f$.

अतः रेखा-समाकल का मान निकालने के लिए हमें f ज्ञात करना होगा। अब, चूंकि

$$\left.\begin{aligned} f_x &= M = y \sin xy \\ f_y &= N = x \sin xy \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3)$$

इसलिए $$f = \int f_x\,dx = \int y \sin xy\,dx = -\cos xy + \phi(y), \qquad \ldots (4)$$

जहाँ ϕ, y का एक फलन है।

समीकरण (4) के दोनों पक्षों को y के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$f_y = x \sin xy + \phi'(y).$$

यदि आप इसकी तुलना समीकरण (3) से करें, तो आप पाएंगे कि $\phi'(y) = 0$.

$$\therefore f(x,y) = -\cos xy + \text{एक अचर}$$

इससे हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C y \sin xy \, dx + x \sin xy \, dy = \cos 2 - \cos 12.$$

अब क्या आप नीचे दिए प्रश्न हल कर सकते हैं?

E5) प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन संरक्षी हैं :

क) $F = (y + \cos x, x - 1)$

ख) $F = (2ye^x, y^2 e^x)$

E6) यदि संभव हो तो एक ऐसा फलन f मालूम कीजिए कि

$F = (4x^3 + 9x^2 y^2, 6x^3 y + 6y^5) = \nabla f$

E7) दिखाइए कि निम्नलिखित रेखा-समाकल, पथ-स्वतन्त्र है और उसका मान ज्ञात कीजिए

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy.$$

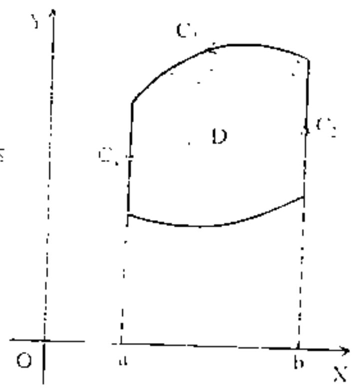
अब तक आप रेखा-समाकलों से अच्छी तरह से परिचित हो गए होंगे। अगले भाग में हम एक महत्वपूर्ण प्रमेय पर, चर्चा करेंगे। यह प्रमेय संवृत वक्र C पर के रेखा-समाकलों और D पर के, जहाँ D, C द्वारा परिबद्ध प्रदेश है, द्विक समाकल के बीच संबंध स्थापित करता है, जबकि D और C कुछ आवश्यकताओं को संतुष्ट करते हों।

14.4 ग्रीन-प्रमेय

ग्रीन-प्रमेय कलन का एक अति महत्वपूर्ण प्रमेय है और भौतिकी में इसका काफ़ी अनुप्रयोग होता है। इसकी उत्पत्ति गुरुत्वाकर्षी और वैद्युत विभव के अध्ययन के दौरान हुई थी। यह प्रमेय अंग्रेज गणितज्ञ और भौतिकविद जॉर्ज ग्रीन (1793-1841) के नाम से जाना जाता है, जिसने इसका आविष्कार किया था।

यहाँ हम ग्रीन-प्रमेय को एक विशेष प्रकार के प्रदेशों के लिए सिद्ध करेंगे और फिर यह बताएंगे कि किस प्रकार इसे अन्य व्यापक प्रदेशों पर भी लागू किया जा सकता है।

आपको याद होगा कि हमने इकाई 11 में विभिन्न प्रकार के प्रदेशों (प्रकार I, प्रकार II, प्रकार I और प्रकार II दोनों ही) के बारे में बताया है और इन प्रदेशों पर द्विक समाकलन के बारे में चर्चा की है। अब हम उन प्रदेशों के लिए जो प्रकार I और प्रकार II दोनों के ही हैं, ग्रीन-प्रमेय का कथन देंगे और उसे सिद्ध करेंगे।



चित्र 8

प्रमेय 7 (ग्रीन-प्रमेय) : मान लीजिए D, प्रकार I और प्रकार II दोनों तरह का प्रदेश है। मान लीजिए C वामावर्त दिशा में अभिविन्यस्त इसकी परिसीमा (boundary) है। अर्थात् जब हम C के अनुदिश चलते हैं तो प्रदेश D हमारी बायीं ओर होता है।

मान लीजिए P और Q के D में और C पर सतत आंशिक अवकलज हैं। तब

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

उपपत्ति : चूँकि D प्रकार I वाला प्रदेश है, इसलिए यह चित्र 8 में दिखाये गये प्रदेश जैसा है। मान लीजिए

$$D = \{ (x, y) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \}$$

C के अभिविन्यास (orientation) पर ध्यान दीजिए।

C में चार चाप C_1, C_2, C_3 और C_4 हैं। इनमें C_2 या C_4 (या दोनों ही) अपभ्रष्ट (degenerate) हो सकते हैं।

अब

$$\int_C P\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx.$$

आप देख सकते हैं कि C_2 और C_4, y-अक्ष के समांतर हैं। अतः इन दोनों ही वक्रों में x अचर है।

इसलिए $dx = 0$. इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$\int_{C_2} P\,dx = \int_{C_4} P\,dx = 0$$

इस तरह,

$$\int_C P\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx$$

अब चूँकि C_1, $\phi_1(x), a \le x \le b$ द्वारा दिया गया वक्र है और C_3, $\phi_2(x), b \le x \le a$ द्वारा दिया गया वक्र है,

इसलिए
$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, \phi_2(x))\,dx$$

$$= -\int_a^b \left[P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))\right] dx$$

$$= -\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) dx$$

$$= -\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad \dots (5)$$

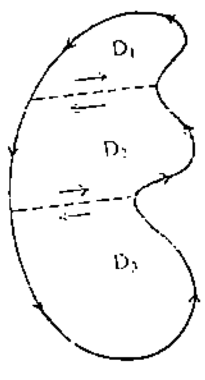
अब, चूँकि D, प्रकार II वाला भी है, इसलिए ठीक ऊपर वाली प्रक्रिया लागू करके हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\int_C Q\,dy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \qquad \dots (6)$$

(5) और (6) से हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy, \qquad \dots (7)$$

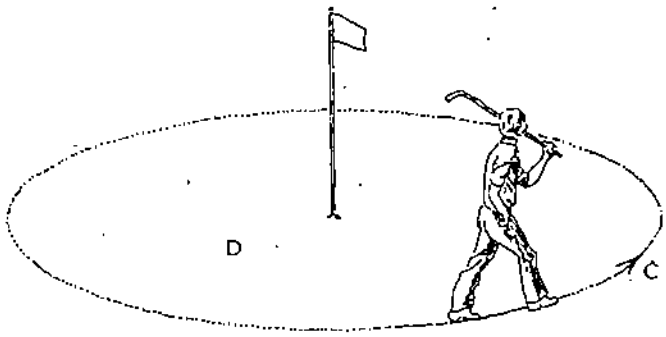
जहां D, प्रकार I और प्रकार II वाला प्रदेश है।



चित्र 9

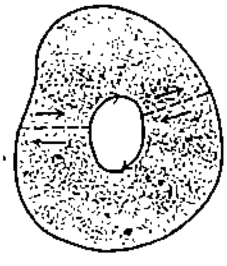
हम इसे उन प्रदेशों पर भी आसानी से लागू कर सकते हैं, जिन्हें प्रकार I और प्रकार II वाले अनेक प्रदेशों के सम्मिलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो। उदाहरण के लिए चित्र 9 में दिया गया प्रदेश लीजिए। इसे हम D_1, D_2 और D_3 के, जिनमें से प्रत्येक दोनों ही प्रकार I और प्रकार II वाला प्रदेश है, सम्मिलन के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ हमें सर्वनिष्ठ परिसीमाओं को दिए गए अभिविन्यास के प्रति काफ़ी सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। आपको याद होगा कि अभिविन्यास ऐसा होना चाहिए कि यदि आप वक्र के अनुदिश धनात्मक दिशा में चलें तो परिबद्ध प्रदेश हमेशा आपके बायीं ओर होना चाहिए (चित्र 10 देखिए)। आप देखेंगे कि यदि हम D_1, D_2,

D_3 और D_4 की परिसीमाओं पर के रेखा-समाकलों को जोड़ दें तो इन प्रदेशों की सर्वनिष्ठ परिसीमाओं के रेखा-समाकलों का निरसन हो जाता है। और, इस तरह, केवल D की परिसीमा पर ही रेखा-समाकल बचा रहेगा।



चित्र 10

यहाँ हम यह भी बता देना चाहेंगे कि ग्रीन-प्रमेय एक या एक से अधिक छिद्रों वाले प्रदेशों पर भी लागू होता है। यहाँ भी हमें संबंधित वक्रों के अभिविन्यासों को नियत करने में काफी सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। (चित्र 11 देखिए)। और जाँच कीजिए कि जब आप वक्र के अनुदिश धनात्मक दिशा में चलते हैं, तो समाकल का प्रदेश बायीं ओर पड़ रहा है कि नहीं।



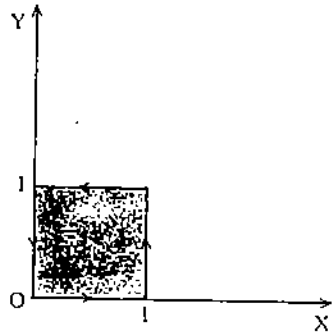
चित्र 11

कभी-कभी ग्रीन-प्रमेय का प्रयोग करने पर रेखा-समाकल के मान आसानी से ज्ञात हो जाते हैं। इसे दर्शाने के लिए यहाँ हम एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 7 : मान लीजिए C, चित्र 12 में दिखाए गए वक्र की परिसीमा है। आइए हम

$$\int_C \left(x^2 y\, dx + 2x^5 y\, dy \right)$$

का मान ज्ञात करें।



चित्र 12

ग्रीन-प्रमेय से हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C \left(x^2 y\, dx + 2x^5 y\, dy \right) = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^5 y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \right] dx\, dy$$

$$= \iint_D (10x^4 y - x^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (10x^4 y - x^2)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[2x^5 y - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y - \frac{1}{3} \right) dy$$

$$= \frac{2}{3}.$$

ग्रीन-प्रमेय की सहायता से हम उन प्रदेशों के क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं जिन पर ग्रीन-प्रमेय लागू होता है। मान लीजिए D एक ऐसा प्रदेश है जिस पर ग्रीन-प्रमेय लागू होता है और मान लीजिए C इस प्रदेश की परिसीमा है।

यदि हम (7) में $P = -y$ और $Q = x$ लें, तो हमें प्राप्त होता है,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= 2 \iint_D dx\,dy .$$

इसलिए $$\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx \qquad \ldots (8)$$

अब चूँकि (8) का बायां पक्ष प्रदेश D का क्षेत्रफल है, इसलिए

$$A = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx , \qquad \ldots (9)$$

जहाँ A, C द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल है।

इस तरह, जिन प्रदेशों पर ग्रीन-प्रमेय लागू होता है, उनके क्षेत्रफल को हम उनकी परिसीमा पर एक रेखा-समाकल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अब हम सूत्र (9) का प्रयोग एक दीर्घ वृत्त से परिबद्ध क्षेत्रफल को मालूम करने में करेंगे।

उदाहरण 8 : मान लीजिए C, दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है। C के प्राचलिक समीकरण को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$x = a \cos t,\ y = b \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

इसलिए इस दीर्घ वृत्त द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल होगा,

$$A = \frac{1}{2} \int_C x\,dy - y\,dx .$$

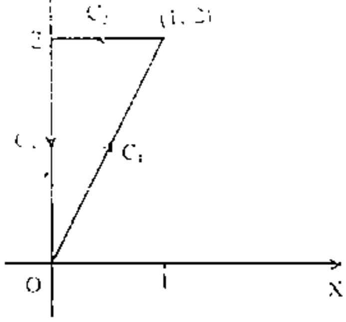
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} dt - y \frac{dx}{dt} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt$$

$$= ab\,\pi .$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।



E8) (क) प्रत्यक्ष विधि से (ख) ग्रीन-प्रमेय का प्रयोग करके $\int_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy$ का मान मालूम कीजिए, जहाँ C, साथ में दिखाए गए त्रिभुज की परिसीमा है।

E9) ग्रीन-प्रमेय का प्रयोग करके $\int_C (x^3 + 2y)\,dx + (4x - 3y^2)\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C, दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

E10) सूत्र (9) का प्रयोग करके एस्ट्रोइड $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ का क्षेत्रफल मालूम कीजिए।

इसके साथ ही यह इकाई, यह खंड और यहाँ तक कि यह पाठ्यक्रम समाप्त होता है। इस पूरे पाठ्यक्रम में हमने अनेक प्रमेयों पर चर्चा की है और इनमें से कुछ को सिद्ध भी किया है। हालांकि हमारा विशेष ज़ोर इन प्रमेयों के अनुप्रयोग पर रहा है, फिर भी इनकी उपपत्तियों का भी महत्व है, अतः यहाँ हम यह सुझाव देना चाहते हैं कि इस पाठ्यक्रम में दिए गए प्रमेयों की उपपत्तियों का अध्ययन काफ़ी सावधानी से करें। कुछ प्रमेयों की उपपत्तियाँ आपकी परीक्षा में भी पूछी जा सकती हैं।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका एक संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

14.5 सारांश

इस इकाई में हमने

1) रेखा-समाकलों $\int_C f\,dx$, $\int_C f\,dy$, $\int_C f\,ds$ को परिभाषित किया है।

2) पुनरावृत्त समाकलों का प्रयोग करके रेखा समाकलों के मान मालूम करने की विधि बतायी है : एक सरल निष्कोण धनात्मकतः अभिविन्यस्त वक्र C पर परिभाषित वास्तविक मान संतत फलन f के लिए

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$

और

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt,$$

जहाँ $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$.

3) रेखा समाकलों में पतले तार के द्रव्यमान के और बल द्वारा किए गए कार्य के व्यंजक प्राप्त किए हैं।

4) संरक्षी बल परिभाषित किए हैं और संरक्षी बलों को पहचानने के लिए एक निकष विकसित किया है।

$F = (M, N)$ संरक्षी होता है यदि प्रदेश D में परिभाषित किसी सततत: अवकलनीय फलन f के लिए $M = f_x$ और $N = f_y$.

एकशः संबंधित प्रदेश D पर $F = (M, N)$ संरक्षी होगा यदि और केवल यदि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

5) उन प्रदेशों के लिए जो दोनों ही प्रकार I और प्रकार II वाले हैं, ग्रीन प्रमेय का कथन दिया है और उसे सिद्ध किया है।

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

जहाँ D, प्रकार I और प्रकार II दोनों तरह का प्रदेश है, C, D की परिसीमा है, जो धनात्मकतः अभिविन्यस्त है। P और Q के आंशिक अवकलज D में और C पर संतत हैं।

14.6 हल और उत्तर

E1) क) $\int_C xy^{2/3}\,ds = \int_0^1 \frac{t}{2}(t^{5/2})^{2/5}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}t^3}\,dt$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 t^2\sqrt{1+25t^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{300}\int_0^1 75t^2\sqrt{1+25t^3}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{300}\left(1+25t^3\right)^{3/2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{450}\left(26^{3/2}-1\right).$$

ख) $(0,0)$ से $(\pi, 2\pi)$ तक का रेखा-खंड निम्न प्रकार व्यक्त है :

$x = t, y = 2t, 0 \le t \le \pi.$

$$\therefore \int_C (\sin x + \cos y)\,ds = \int_0^\pi (\sin t + \cos 2t)\sqrt{1+4}\,dt$$

$$= \sqrt{5}\int_0^\pi (\sin t + \cos 2t)\,dt$$

$$= 2\sqrt{5}.$$

E2) $x = t, y = t^2, -2 \le t \le 2$ से वक्र $y = x^2, -2 \le x \le 2$ व्यक्त होता है।

$$\therefore \text{ द्रव्यमान } = \int_{-2}^{2} k\,|\,x(t)\,|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$= \int_{-2}^{0} kt\sqrt{1+4t^2}\,dt + \int_0^2 kt\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$= \frac{k}{6}(17\sqrt{17}-1).$$

E3) क) $C : x = t, y = t^2, 0 \le t \le 1$

$$\therefore \text{ कार्य } = \int_C x^2y\,dx + xy^2\,dy$$

$$= \int_0^1 t^4\,dt + 2\int_0^1 t^6\,dt$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{7}$$

$$= \frac{17}{35}.$$

ख) $C : x = t, y = t, 0 \le t \le 1$

$$\therefore \text{ कार्य } = \int_0^1 t^3\, dt + \int_0^1 t^3\, dt$$

$$= \frac{1}{2}.$$

E4) $$\int_C xy\, dx + y^2\, dy = \int_{C_1} xy\, dx + y^2\, dy + \int_{C_2} xy\, dx + y^2\, dy$$

$$+ \int_{C_3} xy\, dx + y^2\, dy + \int_{C_4} xy\, dx + y^2\, dy$$

अब $\int_{C_1} xy\, dx + y^2\, dy = 0$

$$\int_{C_2} xy\, dx + y^2\, dy = \int_0^1 t^2\, dt, \quad \text{क्योंकि } x = 1, \text{ और इसलिए } dx = 0.$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \int_{C_3} xy\, dx + y^2\, dy = -\int_0^1 (1 - t)\, dt, \quad \text{क्योंकि } dx = -dt \text{ और } dy = 0$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_4} xy\, dx + y^2\, dy = -\int_0^1 (1 - t)^2\, dt, \quad \text{क्योंकि } dx = 0 \text{ और } dy = -dt$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \int_C xy\, dx + y^2\, dy = -\frac{1}{2}.$$

E5) क) $M = y + \cos x, \; N = x - 1$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\therefore$ F संरक्षी है।

ख) F संरक्षी नहीं है।

E6) $$\frac{\partial M}{\partial y} = 18x^2 y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 18x^2 y$$

$\therefore$ F संरक्षी है। इसलिए ऐसे f का अस्तित्व है कि

$F = (M, N) = (f_x, f_y)$.

अब $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y^2$

$$\therefore f = \int (4x^3 + 9x^2y^2)\, dx$$

$= x^4 + 3x^3y^2 + \phi(y)$, जहाँ ϕ, y का फलन है।

$$\therefore f_y = 6x^3y + \phi'(y) = 6x^3y + 6y^5$$

$$\therefore \phi'(y) = 6y^5$$

$\therefore \phi(y) = y^6$. (समाकलन-अचर को लेने की आवश्यकता नहीं है।)

$\therefore f = x^4 + 3x^3y^2 + y^6$ ऐसा है कि

$$F = \nabla f.$$

E7) $M = y^2 + 2xy,\ N = x^2 + 2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\therefore$ ऐसे f का अस्तित्व है कि $(M, N) = (f_x, f_y)$

अब $f_x = y^2 + 2xy \Rightarrow f = \int (y^2 + 2xy)\, dx$

$$= y^2x + x^2y + \phi(y).$$

$$\Rightarrow f_y = 2xy + x^2 + \phi'(y) = x^2 + 2xy.$$

$\Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) =$ एक अचर

$\therefore f = y^2x + x^2y$ (अचर को लेने की आवश्यकता नहीं है।) ऐसा है कि $(M, N) = \nabla f$.
$\therefore$ दिया हुआ रेखा समाकल पथ-स्वतन्त्र है।

$$\therefore \int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\, dx + (x^2 + 2xy)\, dy = f(3,1) - f(-1,2)$$

$$= 12 + 2$$

$$= 14.$$

E8) क) E8 के साथ दिया हुआ चित्र देखिए।

C_1 पर $y = 2x$

$$\therefore \int_{C_1} 4x^2y\, dx + 2y\, dy = \int_0^1 (8x^3 + 8x)\, dx = 6.$$

C_2 पर $dy = 0$

$$\therefore \int_{C_2} 4x^2y\, dx + 2y\, dy = \frac{8}{3}.$$

C_3 पर $dx = 0$,

$$\therefore \int_{C_3} 4x^2y\, dx + 2y\, dy = -4.$$

$$\therefore \int_{C} 4x^2y\, dx + 2y\, dy = -\frac{2}{3}.$$

ख) ग्रीन-प्रमेय के अनुसार

$$\int_C 4x^2y\,dx + 2y\,dy = \iint_D (0 - 4x^2)\,dx\,dy,$$

जहाँ D छायादार तिकोना प्रदेश है : $0 \le x \le 1, 2x \le y \le 2.$

अब, $$\iint_D -4x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{2x}^{2} -4x^2\,dy\right] dx$$

$$= -\frac{2}{3}.$$

E9) यहाँ $P = x^3 + 2y,\ Q = 4x - 3y^2$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - 2 = 2.$$

$$\therefore \int_C (x^3 + 2y)\,dx + (4x - 3y^2)\,dy = \iint_D 2\,dx\,dy,$$

जहाँ D, दीर्घवृत्त C से परिबद्ध प्रदेश है।

$\therefore$ दिया हुआ समाकल $= 2.$ C के अन्तर्गत क्षेत्रफल

$= 2\pi ab.$

E10) $$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^3 t\,(3a\sin^2 t\cos t)\,dt + a\sin^3 t\,(3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{3\pi a^2}{8}.$$

शब्दावली

अनुप्रयोग	application
आकाश	space
आघूर्ण	moment
गुरुत्व केन्द्र	centre of gravity
घनाकृति	solid
जड़त्व आघूर्ण	moment of inertia
त्रिक समाकल	triple integral
द्विक समाकल	double integral
पृष्ठ	surface
बहु समाकल	multiple integral
वक्र-पृष्ठ	curved surface
गोलीय निर्देशांक	spherical coordinates
ध्रुवीय कोण	polar angle
प्रक्षेप	projection
बेलनी निर्देशांक	cylindrical coordinates
सममिति	symmetry
अंत्य बिन्दु	end point
अपभ्रष्ट	degenerate
अभिविन्यास	orientation
खंडशः निष्कोण वक्र	piecewise smooth curve
निष्कोण वक्र	smooth curve
पथ-स्वातंत्र्य	independence of path
प्रदेश	region
प्राचल	parameter
प्राचलिक समीकरण	parametric equation
रेखा समाकल	line integral
वक्ररेखी समाकल	curvilinear integral
संरक्षी बल	conservative force

वीडियो प्रोग्राम : द्विक समाकलन
विषय संयोजक : डा. माणिक पटवर्धन
विज्ञान विद्यापीठ
इ. गां. रा. मु. वि.
निर्माता : सुनिल कुमार दास
संचार प्रभाग
इ. गां. रा. मु. वि.

प्रस्तावना

इस नोट में हम इस वीडियो प्रोग्राम की विषय-वस्तु के बारे में संक्षिप्त विवरण देंगे। हम आशा करते हैं कि इस दृश्य माध्यम के ज़रिए आप निम्न और उपरि गुणन-योगफलों को और अच्छी तरह से समझ सकेंगे और इस तरह आपको द्विशः समाकलन की संकल्पना को समझने में कोई कठिनाई नहीं होगी। इस प्रोग्राम के दौरान हम आपको कुछ प्रश्न देंगे और हम चाहेंगे कि इस प्रोग्राम को देख लेने के बाद आप इन प्रश्नों को हल कर लें। यहाँ हम वे प्रश्न और उनके उत्तर भी दे रहे हैं।

प्रोग्राम का संक्षिप्त विवरण

यह प्रोग्राम खंड 4 की इकाई 11 पर आधारित है। पहले हम $[a, b]$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलन के निम्न और उपरि गुणन योगफलों को और निश्चित समाकल की परिभाषा को फिर से दोहराएंगे। और इसके बाद हम एक आयत $[a, b] \times [c, d]$ पर परिभाषित दो चरों वाले वास्तविक मान फलन के लिए इन संकल्पनाओं के बारे में चर्चा करेंगे। और, तब गैर-आयताकार प्रदेशों पर द्विक समाकल की परिभाषा को लागू करने की आवश्यकता पर विचार करेंगे। यहाँ हम द्विक समाकलों के कुछ व्यावहारिक अनुप्रयोगों पर भी चर्चा करेंगे।

प्रोग्राम के दौरान हमने आपको कुछ प्रश्न दिए हैं, जिन्हें आपको प्रोग्राम देखने के बाद हल करना होगा। हम वे प्रश्न नीचे दे रहे हैं।

प्रश्न :

E1) निम्नलिखित राशियों को द्विक समाकल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(क) एक डिज़ाइनर इत्र की शीशी का डिज़ाइन बनाती है। इसका आयताकार आधार 4 सेमी × 3 सेमी है। इसका अनुप्रस्थ परिच्छेद एक परवलय है जिसका समीकरण $f(x, y) = -y^2 + 4y$ है। बताइए कि इस शीशी में कितना इत्र आ सकता है?

(ख) एक फैक्टरी का उत्पादन फलन $p(x, y) = 500x^2y^8$ है, जहाँ x, इस फैक्टरी में काम कर रहे कुल व्यक्तियों की संख्या है और y (हजारों में) खर्च किए गए रुपयों की राशि। औसत उत्पादन क्या होगा, जबकि $10 \le x \le 50$ और $20 \le y \le 40$.

E2) पुनरावृत्त समाकलों की सहायता से E1) की अपेक्षित राशियाँ मालूम कीजिए।

उत्तर :

E1) क) $\int_0^4 \int_0^3 (-y^2 + 4y)\, dy\, dx$

ख) कुल उत्पादन $= \int_{10}^{50} \int_{20}^{40} 500x^2y^8\, dy\, dx$

$$\text{औसत उत्पादन} = \frac{\text{कुल उत्पादन}}{(50-10)(40-20)}$$

E2) क) $\int\int(-y^2 + 4y)\,dy\,dx = \int_0^4 \left[\int_0^3 (-y^2 + 4y)\,dy\right] dx$

$$= \int_0^4 \left[-\frac{y^3}{3} + 2y^2\right]_0^3 dx$$

$$= \int_0^4 9\,dx$$

$$= 36.$$

कुल उत्पादन $= \int_{10}^{50}\left[\int_{20}^{40} 500\,x^2 y^8\,dy\right] dx$

$$= 500 \int_{10}^{50} x^2 \frac{y^9}{9}\Big]_{20}^{40} dx$$

$$= \frac{500}{9}(40^9 - 20^9)\int_{10}^{50} x^2\,dx$$

$$= \frac{500}{27}(40^9 - 20^9)(50^3 - 10^3)$$

औसत उत्पादन $= \frac{5}{216}(40^9 - 20^9)(50^3 - 10^3)$