स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-05
वैश्लेषिक ज्यामिति

प्रथम-खण्ड
शांकव

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-05
वैश्लेषिक ज्यामिति

खंड
1
शांकव

वैश्लेषिक ज्यामिति

यह पाठ्यक्रम द्विविम और त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति से संबंधित है जिसमें हम केवल **शांकवों और शांकवजों** पर ही चर्चा करेंगे।

स्कूल में किए गए गणित के अध्ययन से आप जान ही गए होंगे कि वैश्लेषिक ज्यामिति में निर्देश-तंत्र का प्रयोग होता है। इस प्रकार के तंत्र की खोज रने देकार्त (René Descartes) ने की थी जिसे उन्होंने 1637 में अपने लेख "La Geometrie" में प्रकाशित किया। वैश्लेषिक ज्यामिति के विकास में यह पहला प्रमुख कदम था। ज्यामिति की समस्या से प्रारंभ कर, उस समस्या को बीजीय समीकरणों की भाषा में परिवर्तित करना, फिर समीकरणों को सरल करना और उसके बाद उन समीकरणों का ज्यामितीय हल निकालना — यह उनकी समस्या को हल करने की प्रक्रिया थी। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि ज्यामिति और बीजगणित में एकैकी संगति को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करने वाले वह पहले व्यक्ति थे। हाँ, यह ज़रूर है कि इनसे काफ़ी समय पहले अरब के गणितज्ञ अल-ख्वारिज़्मी (लगभग 825 ई.) ने बीजगणित में समस्याओं को हल करने के लिए ज्यामितीय आकृतियों की सहायता ली थी। भास्कर (लगभग 1150 ई.) जैसे प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने भी ऐसा ही किया था।

La Geometrie" में देकार्त ने मूल बिन्दु से गुज़रने वाले शांकव के व्यापक समीकरण की विस्तृत जाँच भी की थी। ऐसा करने वाले वह पहले व्यक्ति नहीं थे। उनसे कई शताब्दियों पहले प्राचीन यूनानी गणितज्ञ ऐपलोनियस (लगभग 225 ई.पू.) ने शांकवों पर "Conics" नामक पुस्तक लिखी। इस पुस्तक में दी गई परिभाषा के अनुसार शांकव एक ऐसा वक्र है जो शंकु को समतल से काटने पर मिलता है। उनसे पहले मेनिक्मस ने इन वक्रों के गुणों का विस्तार से अध्ययन किया था। किन्तु यूनानियों ने शांकवों के अध्ययन के लिए ज्यामितीय विधियों का प्रयोग किया था। देकार्त के दृष्टिकोण में नयापन था — शांकवों का बीजीय नज़रिए से अध्ययन। उन्होंने गुणांकों पर ऐसे प्रतिबंध बताए जिनके अधीन शांकव दीर्घवृत्त, परवलय या अतिपरवलय होगा। किन्तु उनके प्रस्तुतीकरण को समझना आसान नहीं था।

18वीं शताब्दी के अंत में जाकर हाशेत, ब्योत और मॉन्ज जैसे गणितज्ञों ने वैश्लेषिक ज्यामिति को सरल रूप में प्रस्तुत किया। इस पाठ्यक्रम के पहले खंड में हम आपको इन गणितज्ञों द्वारा शांकवों पर किए गए वैश्लेषिक अध्ययन के प्रति उनके प्रारंभिक दृष्टिकोण से परिचित कराएंगे।

चर्चा का प्रारंभ हम शांकवों के मानक रूप से करेंगे जिससे आप शायद परिचित होंगे। पहले हम समीकरण प्राप्त करेंगे और उनके कुछ गुणों के बारे में बताएंगे, फिर हम इस अध्ययन का व्यापकीकरण करेंगे और देखेंगे कि x और y में कोई भी घात दो वाला समीकरण शांकव को निरूपित करता है। हम शांकव की स्पर्शरेखा और सामान्य रेखा की परिभाषा भी देंगे और उनके समीकरण प्राप्त करेंगे।

भौतिकी, इलैक्ट्रॉनिक्स, इंजीनियरी, सैन्य विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में शांकवों के कई गुणों का अनुप्रयोग होता है। हम इन गुणों और इनके अनुप्रयोगों पर भी चर्चा करेंगे।

खंड 2 में हम त्रिविम वैश्लेषिक ज्यामिति पर चर्चा करेंगे। हम इसमें विशेष रूप से गोले, शंकुओं और सिलेंडरों पर गौर करेंगे। इसमें आप पढ़ेंगे कि गोले का समतल परिच्छेद एक वृत्त है। आप यह भी देखेंगे कि ऐपलोनियस द्वारा दी गई शांकवों की परिभाषा और शांकवों की आधुनिक परिभाषा के अनुसार मिलने वाले वक्र समान हैं।

इस पाठ्यक्रम के खंड 3 में चर्चा का मुख्य केंद्र शांकवज होंगे, जो ऐसे पृष्ठ हैं जिन्हें 3 चरों वाले द्विघात समीकरणों से निरूपित किया जाता है। हम आपको उनके मानक रूपों से परिचित कराने के साथ-साथ उनके मूल गुणों पर भी चर्चा करेंगे। आप देखेंगे कि किसी शांकवज का समतल परिच्छेद एक शांकव है और शांकव का प्रकार उस शांकवज पर निर्भर करता है जिससे आप शुरू करते हैं।

हमने दो बातों को मानकर इस पाठ्यक्रम को तैयार किया है। पहली बात है कि आप हमारे प्रारंभिक बीजगणित (एम.टी.ई.-04) के अंतर्गत आने वाली सारी शिक्षण सामग्री का अध्ययन कर चुके हैं। दूसरे, हम यह मानकर चले हैं कि आप प्रारंभिक द्विविम वैश्लेषिक ज्यामिति से थोड़ा बहुत परिचित हैं। इसके अंतर्गत रेखाओं के समीकरण और R^2 में वृत्त के गुण आते हैं। खंड 1 में हम कई बार इन समीकरणों और संबद्ध गुणों का प्रयोग करेंगे। अतः हमने इकाई 1 में उन समीकरणों और गुणों पर संक्षेप में चर्चा की है जिनकी हमें ज़रूरत पड़ेगी।

इन खंडों को किस प्रकार प्रस्तुत किया गया, इसके बारे में अब हम कुछ कहना चाहेंगे। प्रत्येक खंड में सबसे पहले हमने आपको उस खंड से परिचित कराया है। फिर हमने खंड की इकाइयाँ प्रस्तुत की हैं। प्रत्येक इकाई में बीच-बीच में पाठ्यांश के साथ प्रश्न दिए गए हैं। जब भी आप प्रश्नों पर पहुंचें तो इन प्रश्नों को आप हल करने का प्रयास करें। ये प्रश्न इसलिए दिए गए हैं कि आप स्वयं जांच कर सकें कि आपने जो पढ़ा है उसे समझ पाए हैं या नहीं। हमने इन प्रश्नों के हल प्रत्येक इकाई के अंतिम भाग में दिए हैं।

प्रत्येक खंड के अंत में हमने एक **विविध प्रश्नावली** दी है जो खंड की पूरी शिक्षण सामग्री से संबंधित है। हालांकि इन प्रश्नों को करना अनिवार्य नहीं है, फिर भी इन्हें करने से आप पाठ्यक्रम में दी गई संकल्पनाओं को और अच्छी तरह समझ जाएंगे।

पाठ्यक्रम का अध्ययन करते हुए आप देखेंगे कि प्रत्येक इकाई भागों में बांटी गई है। यही भाग कई दफ़ा उपभागों में बांटे गए हैं। इकाई के इन भागों और उपभागों को क्रमानुसार नम्बर दिए गए हैं। ऐसा ही प्रश्नों, प्रमेयों और महत्वपूर्ण समीकरणों के साथ किया गया है। अलग-अलग इकाइयों में दी गई शिक्षण सामग्री एक-दूसरे से काफ़ी संबंधित है। इसलिए हमने संदर्भ का प्रयोग किया है। इसके लिए हमने **संकेत भाग x.y का प्रयोग किया है, जिसका अर्थ है इकाई x का भाग y।**

सत्रीय कार्य इस पाठ्यक्रम का दूसरा अनिवार्य हिस्सा है, जिसे आपको पाठ्यक्रम के सभी खंडों का अध्ययन करने के बाद करना होगा। आपके काउंसलर इसका मूल्यांकन करेंगे और विस्तृत टिप्पणियों के साथ आपको लौटा देंगे। इस प्रकार सत्रीय कार्य मूल्यांकन के साथ-साथ शिक्षण सहायक का भी काम करता है।

हमारे द्वारा भेजी गई पाठ्यक्रम सामग्री अपने आप में पूर्ण है। फिर भी यदि आपको इसके किसी भी भाग को समझने में कठिनाई होती है तो आप अपने काउंसलर की सहायता ले सकते हैं। और यदि आप विषय का और गहराई से अध्ययन करना चाहते हैं तो आप निम्नलिखित पुस्तक देख सकते हैं :

1. **निर्देशांक ज्यामिति,** उषा शर्मा
2. **घन ज्यामिति,** डॉ. शारदा, हरियाणा हिंदी ग्रंथ अकादमी
3. **A Textbook of Coordinate Geometry** by Ramesh Kumar, Konark Publishers, 1991
4. **Analytical Solid Geometry** by Shanti Narayan, S. Chand
5. **Mathematics**, A Text-book for Class XI, Part II, NCERT

ये पुस्तक आपके अध्ययन केंद्र में उपलब्ध हैं।
आशा है कि आपको इस पाठ्यक्रम को पढ़ने में आनन्द आएगा।

खंड 1 शांकव

इस खंड के साथ हम वैश्लेषिक ज्यामिति पर अपनी चर्चा शुरू करते हैं। इस खंड की तीन इकाइयों में हम केवल दो विमाओं पर चर्चा करेंगे। हम एक प्रारंभिक इकाई से शुरू करते हैं जिसमें हम रेखा के विभिन्न समीकरण देंगे। इसमें हम आपको दृढ़ पिंड गति (rigid body motion) से, एक रेखा या बिन्दु के प्रति सममिति से, तथा ध्रुवीय निर्देशांक से भी परिचित कराएंगे। इसमें से अधिकांश सामग्री से आप परिचित हैं। लेकिन अन्य दो इकाइयों में इसका अक्सर प्रयोग होगा और इसलिए हमने इसे पाठ्यक्रम में शामिल करना ज़रूरी समझा।

अगली इकाई में हम आपका परिचय शांकवों से कराएंगे तथा उनके मानक समीकरण प्राप्त करेंगे। हम उनके ज्यामितीय गुणों की चर्चा और उनका अनुरेखण भी करेंगे।

इस खंड की अंतिम इकाई में हम सिद्ध करेंगे कि कोई भी द्विघाती समीकरण एक शांकव को निरूपित करता है। हम उन प्रतिबंधों की चर्चा करेंगे जिनके अधीन द्विघाती समीकरण एक दीर्घवृत्त, अतिपरवलय, परवलय या रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है। हम किसी शांकव का अनुरेखण बनाने और उसकी स्पर्शरेखाओं को प्राप्त करने का तरीका भी बताएंगे। दो शांकवों के प्रतिच्छेदन से प्राप्त वक्रों पर चर्चा से हम अंत करेंगे।

खंड का अंत हम पूरे खंड पर आधारित एक प्रश्नावली से करेंगे।

अगले खंड में हम त्रिविम समष्टि पर गौर करेंगे। लेकिन इस खंड में दिए गए शिक्षण सामग्री का हम अक्सर प्रयोग करेंगे। इसलिए अगले खंड पर जाने से पहले यह सुनिश्चित कर लीजिए कि इस खंड की इकाइयों के उद्देश्यों को आपने प्राप्त कर लिया है।

इकाई 1 प्रारंभिक समतल ज्यामिति

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

इस छोटी इकाई में हमारा उद्देश्य आपको द्विविम ज्यामिति (two-dimensional geometry) के कुछ तथ्यों से पुनः परिचित कराना है। हम दूरी सूत्र तथा रेखा को निरूपित करने के लिए विभिन्न बीजीय तरीकों की संक्षेप में चर्चा करेंगे। फिर हम समतल (plane) में बिन्दु के ध्रुवीय निरूपण पर गौर करेंगे। फिर हम मूल बिन्दु (origin) या निर्देशांक अक्ष (co-ordinate axis) के प्रति सममिति की बात करेंगे। अंत में हम कुछ ऐसे तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे किसी निर्देशांक तंत्र (co-ordinate system) को रूपांतरित किया जा सकता है।

शायद आपको विषयों का यह संग्रह बेतरतीब लगे। लेकिन हमने इन्हें अपनी आवश्यकता के अनुसार चुना है। जो कुछ भी आप इसमें पढ़ेंगे, उसका उपयोग हम इस खंड के शेष भाग में करेंगे। अतः आगे की इकाइयों में हम इस इकाई के किसी भाग, समीकरण या सूत्र का अक्सर उल्लेख करेंगे।

शायद आप इस इकाई में दी गई सामग्री से परिचित हों। पर यह सुनिश्चित करने के लिए आप निम्नलिखित उद्देश्यों की सूची पढ़ लें और इस इकाई में दिए गए प्रश्नों को हल कर लें। वरना, आगे की इकाइयों में आपको कुछ कठिनाई हो सकती है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- द्विविम समष्टि में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी या किसी बिन्दु की किसी रेखा से दूरी मालूम कर सकेंगे;
- किसी रेखा के समीकरण का प्रवणता-अंतःखंड रूप, बिन्दु-प्रवणता रूप, द्विबिन्दु रूप, अंतःखंड रूप या प्रसामान्य रूप प्राप्त कर सकेंगे;
- यह जांच कर सकेंगे कि कोई वक्र निर्देशांक अक्षों या मूल बिन्दु के प्रति सममित है या नहीं;
- मूल बिन्दु के स्थानांतरण या अक्षों के घूर्णन के परिणामस्वरूप निर्देशांकों को परिवर्तित कर सकेंगे;
- बिन्दु के ध्रुवीय निर्देशांकों तथा कार्तीय निर्देशांकों में संबंध स्थापित कर सकेंगे;
- समीकरण का ध्रुवीय रूप प्राप्त कर सकेंगे।

1.2 रेखा के समीकरण

इस भाग में हम आपको द्विविम समष्टि में बिन्दुओं तथा रेखाओं को बीजीय रूप से निरूपित करने के तरीके याद दिलाएंगे। चूंकि हम यह समझते हैं कि आप इस पाठ्य सामग्री से परिचित हैं, हम इस पर विस्तार से चर्चा नहीं करेंगे।

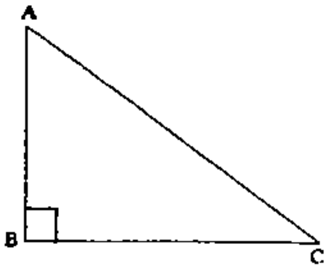
सर्वप्रथम, जैसा कि आप जानते हैं, द्विविम समष्टि कार्तीय (cartesian) निर्देशांक-तंत्र द्वारा निरूपित किया जा सकता है। ऐसा इसलिए है क्योंकि समतल के बिन्दुओं तथा वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों में 1–1 संगति होती है। यदि इस संगति के अंतर्गत कोई बिन्दु P, (x, y) द्वारा निरूपित हो, तो x, P का भुज (या x -**निर्देशांक**) कहलाता है तथा y, P की **कोटि** (या y -**निर्देशांक**) कहलाती है। यदि $P(x_1, y_1)$ और

$Q(x_2, y_2)$ समतल में दो बिन्दु हों तो उनके बीच की दूरी

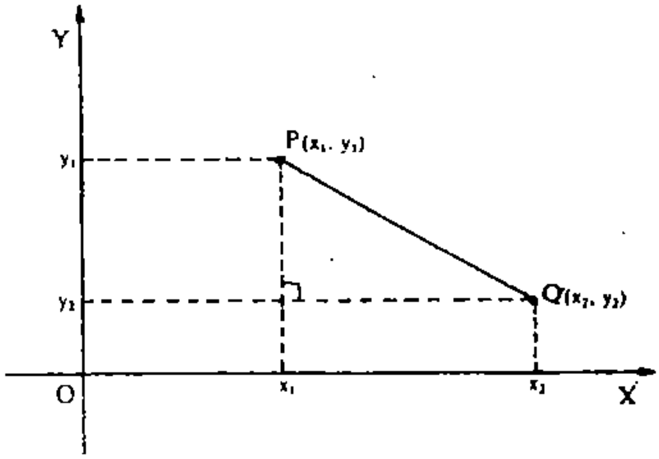
$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \ldots\ldots (1)$$

है।

पाइथैगोरस प्रमेय के अनुसार समकोण त्रिभुज ABC में $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$



चित्र 1 से तथा पाइथैगोरस प्रमेय के प्रयोग से आप देख सकते हैं कि (1) किस प्रकार प्राप्त होती है।

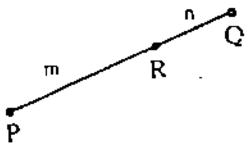


चित्र 1 : दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

(1) **दूरी सूत्र** (distance formula) कहलाता है।

एक और सूत्र जिसे आप जानते होंगे, निम्नलिखित है :

यदि बिन्दु $R(x, y)$, बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखा खंड को $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता हो (चित्र 2 देखें), तो



चित्र 2 : R रेखा खंड PQ को m : n के अनुपात में विभाजित करता है।

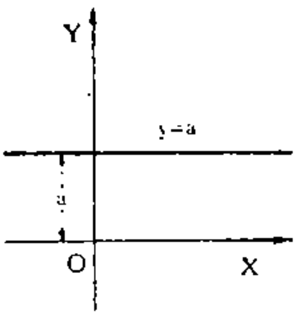
$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \text{ तथा } y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \qquad \ldots\ldots (2)$$

(2) **परिच्छेद सूत्र** (section formula) कहलाता है।

(1) और (2) के उपयोग के अभ्यास के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयत्न कीजिए।

E 1) निम्नलिखित अंत्य बिन्दुओं वाले रेखा खंड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक क्या हैं?
   क) A (5, −4) और B (−3, 2).
   ख) A (a_1, a_2) और B (b_1, b_2).

E 2) जाँच कीजिए कि त्रिभुज PQR, जहां P, Q और R, (1, 0), (−2, 3) और (1, 3) द्वारा निरूपित होते हैं, एक समबाहु त्रिभुज है या नहीं!



चित्र 3 : y = a x-अक्ष के समांतर है।

आइए, अब हम किसी सरल रेखा को बीजीय रूप में निरूपित करने के विभिन्न तरीकों को लिखें। हम उन रेखाओं से शुरू करते हैं जो किसी अक्ष के समांतर हैं। x-अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण

$$y = a. \qquad \ldots\ldots (3)$$

द्वारा निरूपित किया जाता है, जहां a कोई स्थिरांक है। ऐसा इसलिए है क्योंकि इस रेखा पर किसी भी बिन्दु का x-निर्देशांक समान होगा (चित्र 3 देखें)।

अब बताइए कि आपके विचार में y-अक्ष के समांतर किसी रेखा का समीकरण क्या होगा?

यह

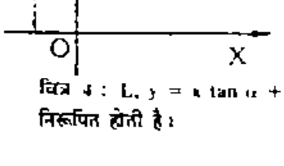
$$x = b, \qquad \ldots\ldots (4)$$

होगा, किसी स्थिरांक b के लिए।

आइए, अब हम किसी ऐसी रेखा के चार रूप ज्ञात करें जो किसी भी अक्ष के समांतर न हो। पहले, मान लीजिए, हम जानते हैं कि रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से कोण α बनाती है और y-अक्ष को (0, c) पर काटती है। तब इसका समीकरण

$$y = mx + c \qquad \ldots\ldots (5)$$

होगा, जहाँ $m = \tan\alpha$.



चित्र 4 : L, y = x tan α + c से निरूपित होती है।

m इसकी **प्रवणता** (slope) कहलाती है और c इसका y-अक्ष पर **अंतःखंड** (intercept) है। चित्र 4 से आप (5) प्राप्त कर सकते हैं, जो कि रेखा समीकरण का **प्रवणता-अंतःखंड रूप** कहलाता है।

अब, मान लीजिए हमें किसी रेखा की प्रवणता m मालूम है, और यह भी मालूम है कि बिन्दु रेखा पर है। तो, क्या हम रेखा का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं?

(5) के प्रयोग से हम रेखा के समीकरण का **बिन्दु-प्रवणता रूप**

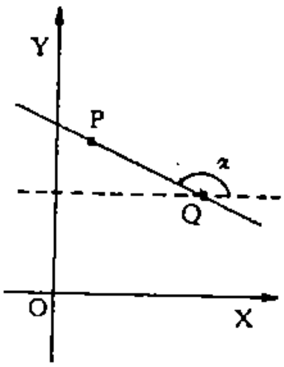
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \ldots\ldots (6)$$

प्राप्त कर सकते हैं।

यदि हमें किसी रेखा पर पड़ने वाले दो अलग बिन्दु मालूम हों, तो भी हम उस रेखा का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। यदि $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ इस रेखा पर दो बिन्दु हों (चित्र 5 देखें), तो **द्विबिन्दु रूप** में उसका समीकरण

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \ldots\ldots (7)$$

होगा। याद रखें कि हम ऐसी रेखाओं की बात कर रहे हैं जो कि किसी अक्ष के समांतर नहीं हैं। इसलिए दोनों पदों के हर शून्येतर हैं,



चित्र 5 : रेखा PQ की प्रवणता $\tan\alpha$ है।

क्या आप (7) में दी गई रेखा की प्रवणता मालूम कर सकते हैं? यदि आप इसे निम्न प्रकार पुनः लिखें,

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + \left\{ y_1 - x_1\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\right\},$$

तो आप देख सकते है कि इसकी प्रवणता $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ है, तथा अचर पद y-अक्ष पर इसका अंतःखंड है।

अब आप कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयत्न कीजिए।

E 3) निर्देशांक अक्षों के समीकरण क्या है?

E 4) उस रेखा का समीकरण मालूम कीजिए जो y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा से 1 का अंतःखंड काटती हो, तथा x-अक्ष से 120° का कोण बनाती हो।

E 5) उस रेखा का समीकरण क्या है जो मूल बिन्दु से गुज़रती है तथा x-अक्ष से θ का कोण बनाती है?

E 6) क) मान लीजिए, हम जानतें है कि किसी रेखा का x-अक्ष पर अंतःखंड 2 तथा y-अक्ष पर −3 है। तो दिखाइए कि इसका समीकरण

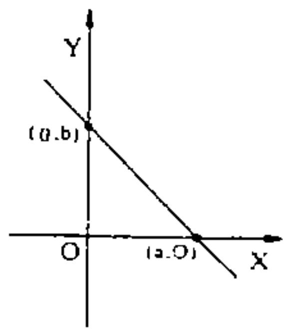
$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \text{ है।}$$

(संकेत : देखिए कि आप (7) का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं।)

ख) व्यापक तौर पर, यदि कोई रेखा L, x-अक्ष पर $a\ (\neq 0)$ अंतःखंड तथा y-अक्ष पर $b\ (\neq 0)$ अंतःखंड काटती है (चित्र 6 देखें), तो दिखाइए कि उसका समीकरण

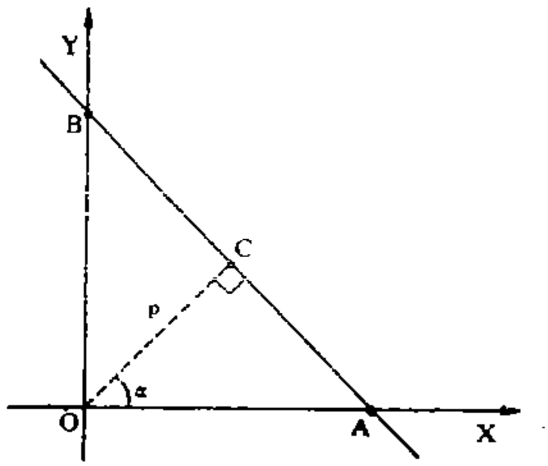
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots\ldots(8)$$

होगा। (8), L के समीकरण का **अंतःखंड रूप** कहलाता है।



चित्र 6 : L को $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से निरूपित किया जाता है।

हम किसी रेखा का समीकरण एक और रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं। मान लीजिए, हमें मूल बिन्दु से किसी रेखा L पर डाले गए लंब (perpendicular) की लंबाई p मालूम है, और यह भी मालूम है कि लंब x-अक्ष के साथ कोण α बनाता है (चित्र 7 देखें)।



चित्र 7 : रेखा AB का प्रसामान्य रूप $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ है।

तो, (8) का प्रयोग करके हम L का समीकरण **प्रसामान्य रूप** (normal form)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \qquad \ldots\ldots (9)$$

में प्राप्त कर सकते हैं।

किसी रेखा की किसी बिन्दु से दूरी बिन्दु से रेखा पर लंब की लम्बाई होती है।

उदाहरण के लिए, वह रेखा जो (0,0) से 4 इकाइयों की दूरी पर है और जिसके लिए $\alpha = 135°$, समीकरण $-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 4$ से निरूपित होती है,

अर्थात् $x - y + 4\sqrt{2} = 0$.

रूप (9) के बारे में हम यहां पर एक छोटी टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 1 : (9) में p धनात्मक है तथा x और y के गुणांक "प्रसामान्यीकृत" हैं, अर्थात् उनके वर्गों का योग 1 है। इन तथ्यों का प्रयोग करके हम किसी रेखा की मूल बिन्दु से दूरी आसानी से मालूम कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, आइए हम मूल बिन्दु से उस रेखा की दूरी मालूम करें जो आपको E 4 में प्राप्त हुई थी। हम उसके समीकरण को $-\sqrt{3}\,x - y = 1$ लिखते हैं। फिर हम पूरे को $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$ से विभाजित करते हैं, जिससे हमें $-\frac{\sqrt{3}}{2}\,x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$ मिलता है।

यह $ax + by = c$ के रूप में है, जहां $a^2 + b^2 = 1$ और $c \geq 0$. अतः इसकी मूल बिन्दु से दूरी c है, जो कि $\frac{1}{2}$ है।

अब बताइए कि क्या आपने कोई ऐसा अभिलक्षण नोट किया है जो सभी समीकरणों (3) - (8) में पाया जाता है? ये सब दो चरों में रैखिक हैं, अर्थात् $ax + by + c = 0$ के रूप के हैं, जहां $a, b, c \in \mathbf{R}$ तथा a और b में से कम से कम एक शून्येतर है। यह कोई संयोग नहीं है, जैसा कि निम्न प्रमेय हमें बताता है।

प्रमेय 1 : दो चरों वाला रैखिक समीकरण द्विविम समष्टि में एक सरल रेखा को निरूपित करता है। विलोमतः, समतल में किसी सरल रेखा का समीकरण दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण होता है।

अतः, उदाहरण के लिए $2x + 3y - 1 = 0$ एक रेखा को निरूपित करता है। इसकी प्रवणता क्या है? हम इसे $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ के रूप में लिखते हैं। इससे हम देखते हैं कि इसकी प्रवणता $(-\frac{2}{3})$ है।

क्या आप इससे सहमत हैं कि इसके अंतःखंड x तथा y अक्षों पर क्रमशः $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ हैं? और इसकी मूल बिन्दु से दूरी क्या है? यह मालूम करने के लिए हम x और y के गुणांकों को "प्रसामान्यीकृत" करते हैं, अर्थात् हम पूरे समीकरण को $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ से भाग करते हैं। हम पाते हैं कि

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\,x + \frac{3}{\sqrt{13}}\,y = \frac{1}{\sqrt{13}}$$ जो कि (9) के रूप में है।

अतः वांछनीय दूरी $\frac{1}{\sqrt{13}}$ है।

चित्र 8 : P से रेखा L की दूरी PD है।

व्यापक रूप में, किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$ की रेखा $ax + by + c = 0$ से दूरी (चित्र 8 देखें)

$$\left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \qquad \ldots\ldots(10)$$

होती है।

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E 7) बिन्दु (1,1) की उस रेखा से दूरी मालूम कीजिए जिसकी प्रवणता −1 है और जिसका y-अक्ष पर अंतःखंड $\frac{1}{2}$ है।

E 8) निम्नलिखित दूरियाँ क्या हैं?

क) $y = mx + c$ की (0,0) से।

ख) $x = 5$ की (1,1) से।

ग) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ की $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ से।

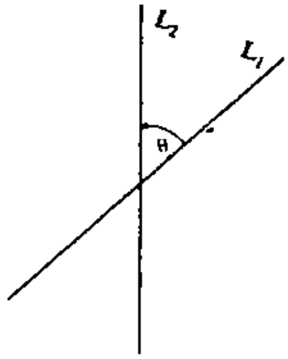
घ) (0,0) की $2x + 3y = 0$ से।

E 9) समीकरण (9) सिद्ध कीजिए।

आइए, अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण निकालें। मान लीजिए, रेखाओं के प्रवणता - अंतःखंड रूप $y = m_1x + c_1$ और $y = m_2x + c_2$ हैं (चित्र 9 देखें), तो उनके बीच का कोण θ निम्न सूत्र से प्राप्त होता है:

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \qquad \text{...... (11)}$$

tan θ धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। यदि यह धनात्मक है तो θ न्यूनकोण (acute angle) होगा। यदि $\tan\theta < 0$, तो θ रेखाओं के बीच का अधिक कोण (obtuse angle) होगा (जो चित्र 9 में $\pi - \theta$ होगा)।



चित्र 9 : रेखाओं L_1 तथा L_2 के बीच का कोण θ है।

ध्यान दीजिए कि रेखाओं के समीकरणों में अचर पदों की उनके बीच का कोण मालूम करने में कोई भूमिका नहीं होती है।

अब बताइए कि आप (11) से बता सकते हैं कि दो रेखाएं समांतर या लंब कब होंगी? अगर आपको याद है कि tan 0 और $\tan\frac{\pi}{2}$ क्या है, तो आप इसके प्रतिबंध तुरंत बता सकते हैं।

इस प्रकार, रेखाएं $y = m_1x + c_1$ और $y = m_2x + c_2$

i) समांतर होंगी यदि $m_1 = m_2$, और ...... (12)

ii) लंब होंगी यदि $m_1m_2 = -1$. ...... (13)

उदाहरण के लिए, $y = 2x + 3$ और $x + 2y = 5$ एक दूसरे पर लंब हैं, तथा $y = 2x + 3$, $y = 2x + c$ के समांतर है $\forall\, c \in \mathbf{R}$

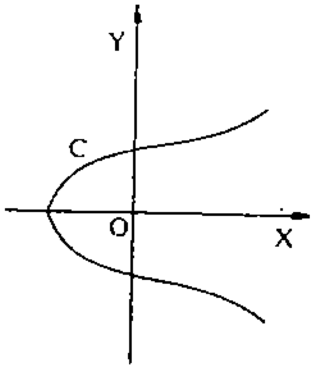
अब क्यों न आप एक प्रश्न हल करने का प्रयास करें?

E 10) क) ऐसी रेखा का समीकरण मालूम कीजिए जो $y + x + 1 = 0$ के समांतर है और बिन्दु (0,0) से गुज़रती है।

ख) उस रेखा का क्या समीकरण है जो (क) में प्राप्त रेखा पर लंब है तथा बिन्दु (2,1) से गुज़रती है?

ग) (ख) में प्राप्त रेखा और $2x = y$ के बीच का कोण क्या है?

आइए, अब हम रेखाओं पर अपनी चर्चा समाप्त करें तथा और अधिक व्यापक समीकरणों की ओर बढ़ें। अब हम एक ऐसे विषय की चर्चा करेंगे जिससे हमें अगली इकाई में शांकवों के अनुरेखण में सहायता मिलेगी।



चित्र 10 : वक्र C, x-अक्ष के प्रति सममित है।

1.3 सममिति

इस खंड को पढ़ते समय आपके सामने x और y के विभिन्न समीकरण आएंगे। उनके ज्यामितीय निरूपण **वक्र** (curve) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, समीकरण $ax + by + c = 0$ को एक रेखा निरूपित करती है, तथा एक वृत्त जिसकी त्रिज्या a तथा केन्द्र (0,0) है समीकरण $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ को निरूपित करता है।

ध्यान दीजिए कि ये समीकरण $F(x, y)=0$ के रूप के हैं, जहां $F(x, y)$ उनके वाम पक्षों को दर्शाता है।

अब मान लीजिए कि किसी समीकरण $F(x, y)=0$ को निरूपित करने वाला वक्र C इस प्रकार है कि जब (x, y) उस पर होता है, तो (x, −y) भी होता है।

तब $F(x,y) = 0 \Rightarrow F(x, -y) = 0$.

(उदाहरण के लिए, $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + (-y)^2 = a^2$.)

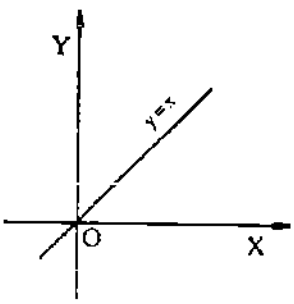
ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि C, **x-अक्ष के प्रति सममित** (symmetric) **है**। इसी प्रकार, C, **y-अक्ष के प्रति सममित होगा** यदि

$F(x, y) = 0 \Rightarrow F(-x, y) = 0$.

हम कहते हैं कि C, **मूल बिन्दु** (0,0) **के प्रति सममित है** यदि

$F(x, y) = 0 \Rightarrow F(-x, -y) = 0$.

आइए, हम एक उदाहरण देखें। वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ दोनों अक्षों तथा मूल बिन्दु के प्रति सममित है। दूसरी ओर, रेखा $y = x$ किसी भी अक्ष के प्रति सममित नहीं है, किन्तु मूल बिन्दु के प्रति सममित है।



चित्र 11 : रेखा $y = x$ मूल बिन्दु के प्रति सममित है।

ज्यामितीय रूप में, यदि कोई वक्र x-अक्ष के प्रति सममित है तो इसका अर्थ है कि वक्र का x-अक्ष के नीचे का हिस्सा x-अक्ष के ऊपर के हिस्से का दर्पण प्रतिबिंब होगा (चित्र 10 देखें)।

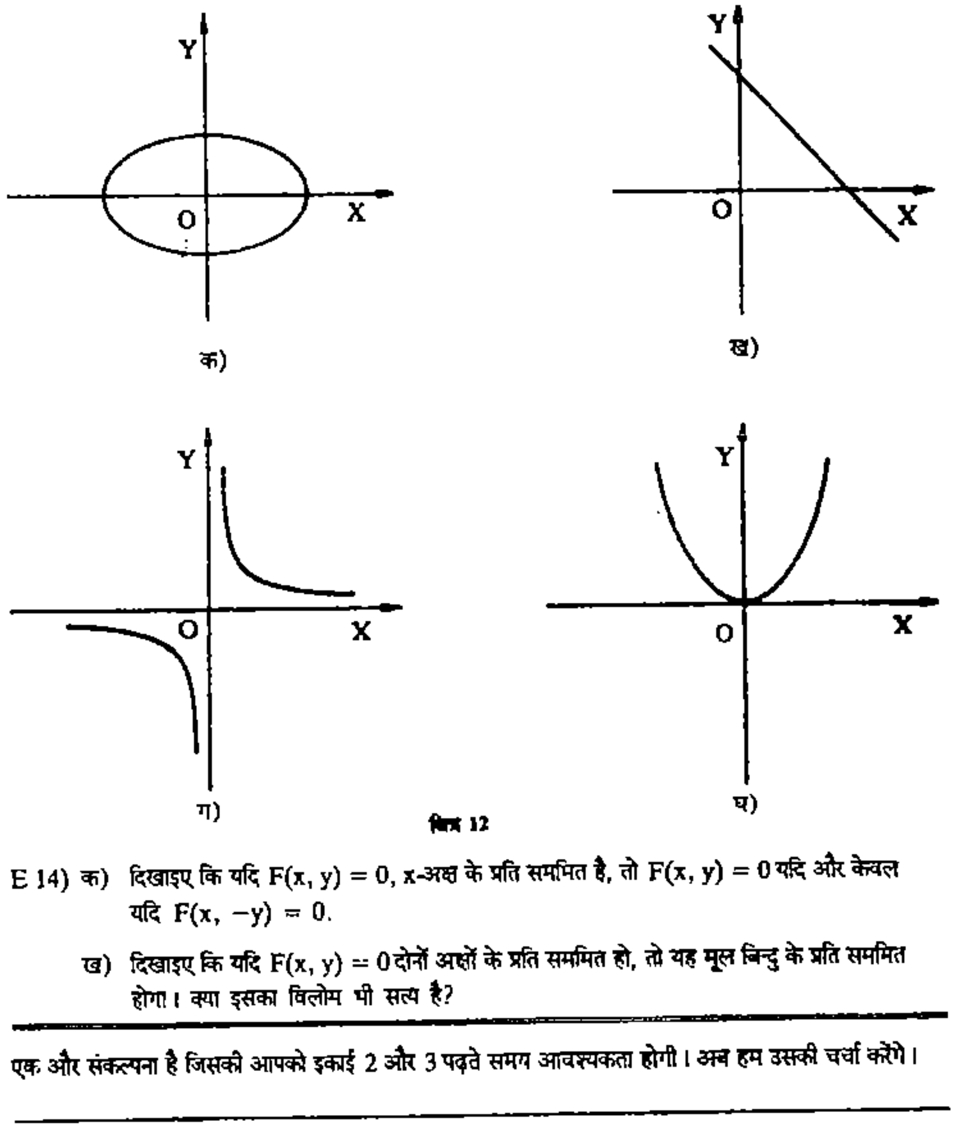
इसी प्रकार का ज्यामितीय निरूपण y-अक्ष के प्रति सममिति के लिए भी सत्य है। और मूल बिन्दु के प्रति सममिति का ज्यामितीय अर्थ क्या है? इसका अर्थ है कि वक्र के पहले चतुर्थांश के भाग का दर्पण प्रतिबिंब तीसरे चतुर्थांश में वक्र का भाग होगा और दूसरे चतुर्थांश के भाग का दर्पण प्रतिबिंब चौथे चतुर्थांश में वक्र का हिस्सा होगा (चित्र 11 देखें)।

यह जानने के लिए कि आपने सममिति की संकल्पना को समझ लिया है या नहीं, आप इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

E 11) वक्र $y^2 = 2x$ किस अक्ष के प्रति सममित है? क्या यह मूल बिन्दु के प्रति सममित है?

E 12) रेखा $y = 2$ की सममितियों के बारे में बताइए।

E 13) चित्र 12 में दिए गए वक्रों में से कौन-से x-अक्ष के प्रति सममित हैं और कौन-से मूल बिन्दु के प्रति सममित हैं?



चित्र 12

E 14) क) दिखाइए कि यदि $F(x, y) = 0$, x-अक्ष के प्रति सममित है, तो $F(x, y) = 0$ यदि और केवल यदि $F(x, -y) = 0$.

ख) दिखाइए कि यदि $F(x, y) = 0$ दोनों अक्षों के प्रति सममित हो, तो यह मूल बिन्दु के प्रति सममित होगा। क्या इसका विलोम भी सत्य है?

एक और संकल्पना है जिसकी आपको इकाई 2 और 3 पढ़ते समय आवश्यकता होगी। अब हम उसकी चर्चा करेंगे।

1.4 अक्षों का परिवर्तन

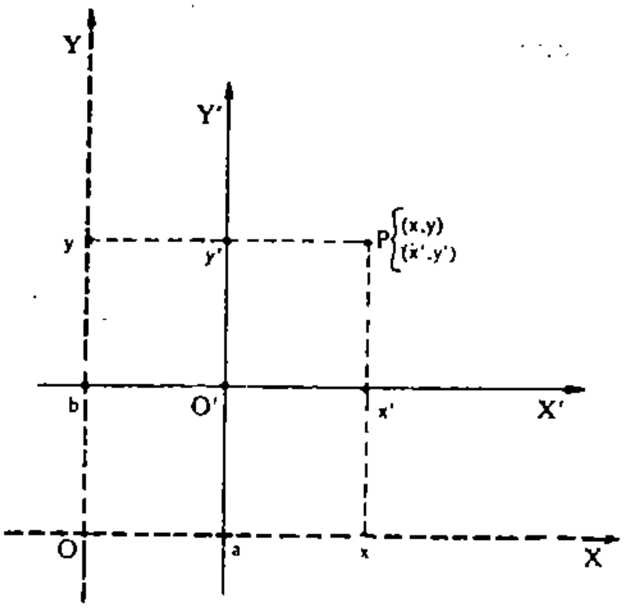
अगली इकाई में आप देखेंगे कि वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + c = 0$ है। लेकिन हम हमेशा एक ऐसा निर्देशांक तंत्र चुन सकते है जिसमें यह समीकरण सरल होकर $x^2 + y^2 = r^2$ बन जाती है, जहां r वृत्त की त्रिज्या है। यह देखने के लिए कि ऐसा क्यों होता है, हमें यह देखना होगा कि निर्देशांक अक्षों के उपयुक्त समुच्चय को कैसे चुना जाए। हमें यह भी जानना ज़रूरी है कि किसी बिन्दु के निर्देशांक, अक्षों के नए समुच्चय में रूपांतरण से कैसे प्रभावित होते हैं। इसी की चर्चा हम इस भाग में करेंगे।

अक्षों को बदलने के कई तरीके हैं। हम देखेंगे कि समकोणिक (rectangular) कार्तीय निर्देशांक तंत्र में किसी बिन्दु के निर्देशांक दो प्रकार के परिवर्तनों, स्थानांतरण (translation) तथा घूर्णन (rotation) से कैसे प्रभावित होते हैं।

1.4.1 अक्षों को स्थानांतरित करना

पहले प्रकार का अक्षों का परिवर्तन, जिस पर हम विचार करेंगे, वह मूल बिन्दु का स्थानांतरण है, बिना अक्षों की दिशा बदले। मान लीजिए, XOY एक समकोणिक कार्तीय निर्देशांक तंत्र है। मान लीजिए इस निकाय में O' के

निर्देशांक (a, b) हैं। यदि हम मूल बिन्दु को O' पर स्थानांतरित कर दें तो क्या होगा? मान लीजिए OX के समांतर O'X' नया x-अक्ष है। और OY के समांतर O'Y' नया y-अक्ष है (चित्र 13 देखिए)। अब मान लीजिए पुराने तथा नए निर्देशांक-तंत्रों में P के निर्देशांक क्रमशः (x, y) तथा (x', y') हैं। ये किस प्रकार संबद्ध हैं?



चित्र 13 : अक्षों का (a, b) से स्थानांतरण

चित्र 13 से आप देख सकते हैं कि

$x = x' + a$ और $y = y' + b$. ...... (14)

इस प्रकार, नए निर्देशांक

$x' = x - a$ और $y' = y - b$ ...... (15)

द्वारा दिए जाते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि हम मूल बिन्दु को (−1, 2) पर स्थानांतरित कर दें, तो बिन्दु P (x, y) के नए निर्देशांक $x' = x + 1$ तथा $y' = y - 2$ से दिए जाएंगे।

जब मूल बिन्दु को अक्षों के समांतर रखते हुए स्थानांतरित करते हैं, तो हम कहते हैं कि हम **अक्षों को स्थानांतरित** कर रहे हैं। अतः जब भी हम अक्षों को किसी बिन्दु (a, b) पर स्थानांतरित करते हैं, तो हम निर्देशांक तंत्र को ऐसे तंत्र में रूपांतरित कर रहे हैं जिसमें अक्ष पुराने अक्षों के समांतर हैं तथा बिन्दु (a, b) से गुज़रते हैं। संक्षेप में हम इसको **(a, b) से गुज़रने वाली समांतर अक्षों में रूपांतरण** लिख सकते हैं।

अब, यदि हम अक्षों को बिन्दु (a, b) पर स्थानांतरित करते हैं, तो इससे किसी समीकरण में क्या परिवर्तन होगा? समीकरण में केवल x के स्थान पर $x' + a$ तथा y के स्थान पर $y' + b$ लिखिए और आपको नया समीकरण मिल जाएगा। उदाहरण के लिए, सरल रेखा $x + 2y = 1$ नए निकाय में $(x'+a) + 2(y'+b) = 1$, अर्थात् $x' + 2y' + a + 2b = 1$ बन जाएगी।

अब कुछ प्रश्न।

E 15) यदि हम अक्षों को (−1, 3) पर स्थानांतरित कर दें, तो पूर्व निकाय के मूल बिन्दु के नए निर्देशांक क्या होंगे? अपने उत्तर की चित्र की सहायता से जाँच कीजिए।

E 16) द्विघाती समीकरण $5x^2 + 3y^2 + 20x - 12y + 17 = 0$ को

क) बिन्दु (−2, 2) से गुज़रने वाले, तथा

ख) बिन्दु (1, 1) से गुज़रने वाले,

समांतर अक्षों में स्थानांतरित कीजिए।

यदि आपने E 16 कर लिया है, तो आपने यह महसूस किया होगा कि मूल बिन्दु के उपयुक्त स्थानांतरण से समीकरण कितना सरल बनाया जा सकता है।

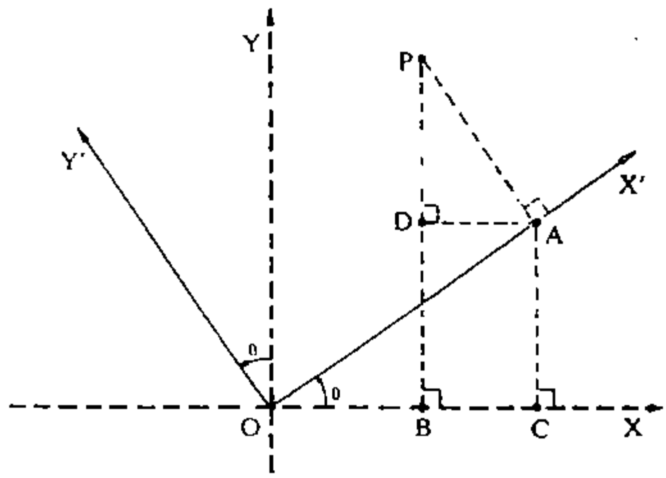
यहाँ पर हम एक महत्वपूर्ण नोट देना चाहेंगे।

नोट : जब आप किसी वक्र पर अक्षों का स्थानांतरण लागू करते हैं, तो वक्र का आकार नहीं बदलता है। उदाहरण के लिए एक रेखा, रेखा रहती है और एक वृत्त वही आमाप का वृत्त रहता है। ऐसा रूपांतरण **दृढ़ पिंड गति** (rigid body motion) कहलाता है।

आइए अब हम अक्षों के दूसरे प्रकार के परिवर्तन पर विचार करें।

1.4.2 अक्षों को घुमाना

आइए, अब हम देखें कि बगैर मूल बिन्दु को हिलाए यदि हम अक्षों की दिशा बदलें तो क्या होता है। अर्थात् हम निर्देशांकों के उस रूपांतरण पर विचार करेंगे जब समकोणिक कार्तीय निकाय को मूल बिन्दु के प्रति कोण θ से घुमाया जाता है। मान लीजिए, निर्देशांक निकाय XOY को XOY समतल में मूल बिन्दु के प्रति वामावर्त दिशा में कोण θ से घुमाया जाता है। मान लीजिए OX' और OY' नए अक्ष हैं (चित्र 14 देखें)।



चित्र 14 : अब OX और OY को कोण θ से घुमाने पर अक्ष OX' और OY' प्राप्त होते हैं।

मान लीजिए P एक बिन्दु है जिसके निर्देशांक XOY निकाय में (x, y) हैं, तथा X'OY' निकाय में (x', y') हैं। P से OX' तथा OX पर लंब क्रमशः PA तथा PB खींचिए।

OX पर लंब AC तथा PB पर लंब AD भी खींचिए। तो,
$x = OB,\ y = PB,\ x' = OA,\ y' = PA.$
और, $\angle DAO = \angle AOC = \theta$ इसलिए $\angle DPA = \theta$.

इस प्रकार, $x = OB = OC - AD$
$$= OA \cos\theta - PA \sin\theta$$
$$= x' \cos\theta - y' \sin\theta \qquad \ldots\ldots (16)$$
और $y = PB = PD + AC$
$$= x' \sin\theta + y' \cos\theta \qquad \ldots\ldots (17)$$
(16) और (17) से हम x और y को नए निर्देशांकों x' और y' के पदों में लिख सकते है।

अब, हम x' और y' को x और y के पदों में कैसे पा सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि X'Y'- निकाय से XY-निकाय को कोण $(-\theta)$ से घुमाकर प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार, यदि हम (16) और (17) में θ की जगह $-\theta$, x की जगह x' तथा y की जगह y' रखें तो हमें x' और y', x और y के पदों में प्राप्त हो जाते है।

अतः $\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \text{और } y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots (18)$

उदाहरण के लिए, अक्षों को वामावर्त दिशा में 45° से घुमाने पर बिन्दु $P(x, y)$ के नए निर्देशांक
$$x' = x\cos 45° + y\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$
$$y' = -x\sin 45° + y\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$$
होंगे।

अब, यदि हम मूल बिन्दु को स्थानांतरित करें और अक्षों को भी घुमाएं तो क्या होता है? नए निर्देशांक प्राप्त करने के लिए हमें (14) से (17) तक के सभी रूपांतरणों को लागू करने की आवश्यकता होगी।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम अक्षों को 30° से घुमाते हैं और फिर उस नए निकाय को $(\frac{1}{2}, 0)$ से स्थानांतरित करते हैं। तब इन परिवर्तनों से समीकरण $11x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 9y^2 = 12(x\sqrt{3} + y + 1)$ पर क्या असर पड़ता है? पहले हम (16) और (17) को लागू करके

$$11(x'\sqrt{3} - y')^2 + 2\sqrt{3}(x'\sqrt{3} - y')(x'+y'\sqrt{3}) + 9(x'+y'\sqrt{3})^2$$
$$= 12\{\sqrt{3}(x'\sqrt{3} - y') + (x' + y'\sqrt{3}) + 1\}$$

पाते हैं, अर्थात् $6(x' - \frac{1}{2})^2 + y'^2 = 3.$

अब अगर हम मूल बिन्दु को $(\frac{1}{2}, 0)$ पर स्थानांतरित करें और (14) का प्रयोग करें, तो हम पाते हैं कि नए निर्देशांक (X,Y), (x', y') से $x' = X + \frac{1}{2}$, $y' = Y + 0$ द्वारा संबद्ध हैं।

इस प्रकार, समीकरण $6X^2 + 4Y^2 = 3$ हो जाएगा।
है न यह अधिक सरल समीकरण, उसके मुकाबले जिससे हमने शुरू किया था? वास्तव में, हमने समीकरण को प्रत्येक चरण पर सरल बनाने के लिए स्थानांतरण और घूर्णन दोनों को सावधानी से चुना है।

नोट : अक्षों का घूर्णन एक दृढ़ पिंड गति है। इसलिए, जब इस प्रकार का रूपांतरण किसी वक्र पर लागू किया जाता है तो उसकी स्थिति बदल सकती है, किन्तु उसका आकार वही रहता है।

अब इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 17) सरल रेखा $x + y = 1$ का समीकरण लिखिए जब अक्षों को 60° से घुमाया गया हो।

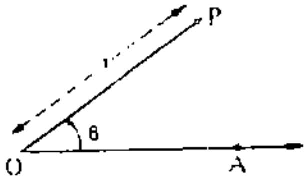
E 18) क) मान लीजिए मूल बिन्दु को (−2, 1) पर स्थानांतरित कर दिया जाता है तथा समकोणिक कार्तीय अक्षों को 45° से घुमाया जाता है। समीकरण $x^2+y^2+4x-2y+4 = 0$ का परिणामी रूपांतरण मालूम कीजिए।

ख) अब, पहले अक्ष को 45° से घुमाइए और मूल बिंदु को (−2, 1) पर स्थानांतरित कीजिए। तब (क) में दिए गए समीकरण का परिणामी रूपांतरण क्या होगा?

ग) (क) और (ख) से अक्षों के रूपांतरणों में अदल-बदल के बारे में आप क्या सीखते हैं? (आप इसके बारे में और अधिक हमारे पाठ्यक्रम "रैखिक बीजगणित" में पढ़ सकते हैं।)

अभी तक हम कार्तीय निर्देशांकों का प्रयोग कर रहे थे। लेकिन क्या कोई और निर्देशांक तंत्र है जिसका हम प्रयोग कर सकते हैं? आइए देखें।

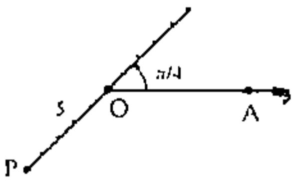
1.5 ध्रुवीय निर्देशांक



चित्र 15 : ध्रुवीय निर्देशांक

17वीं शताब्दी के अंत में गणितज्ञ बर्नोली (Bernoulli) ने ऐसे निर्देशांक-तंत्र की खोज की थी जो कार्तीय निकाय से अलग लेकिन घनिष्ठ रूप से संबद्ध है। यह **ध्रुवीय** (polar) **निर्देशांक**-तंत्र है, और इसका न्यूटन ने बहुत प्रयोग किया था। आपको इस निकाय की उपयोगिता का अनुमान इकाई 2 मे शांकवों का अध्ययन करते समय होगा। आइए, अब देखें कि ध्रुवीय निर्देशांक क्या होते हैं।

इनको परिभाषित करने के लिए, हम पहले एक **ध्रुव** (pole) O तथा **ध्रुवीय अक्ष** (polar axis) OA निर्धारित करते हैं, जैसा कि चित्र 15 में दिखाया गया है। फिर हम समतल में किसी बिंदु P को मालूम कर सकते हैं यदि हमें दूरी OP, मान लीजिए r, तथा कोण AOP, मान लीजिए θ रेडियन, ज्ञात हों। (क्या यह आपको सम्मिश्र संख्याओं के ज्यामितीय निरूपण की याद दिलाती है?) इस प्रकार समतल मे कोई बिंदु P दिया हो तो, हम उसे एक युग्म (r, θ) से निरूपित कर सकते है, जहां r, P की O से "दिष्ट दूरी" (directed distance) है तथा θ वामावर्त दिशा में रेडियन में मापित ∠ AOP है। हम "दिष्ट दूरी" शब्द का प्रयोग करते हैं क्योंकि r ऋणात्मक भी हो सकती है। उदाहरण के लिए, चित्र 16 मे बिंदु P $(5, \frac{5\pi}{4})$ या $(-5, \frac{\pi}{4})$ से निरूपित किया जा सकता है। ध्यान दीजिए कि इस विधि के अनुसार बिंदु O (0, θ) के संगत है किसी कोण θ के लिए।

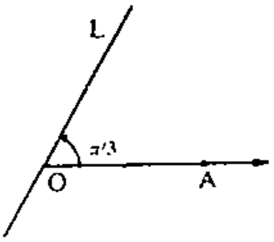


चित्र 16 : P के ध्रुवीय निर्देशांक (−5, π/4) है।

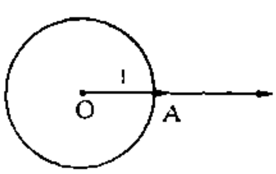
एक बिंदु के कई भिन्न ध्रुवीय निर्देशांक होते है।

इस प्रकार, किसी भी बिंदु P के लिए, हमारे पास इसके संगत वास्तविक संख्याओं का एक युग्म है। ये इसके **ध्रुवीय निर्देशांक** (polar coordinates) कहलाते हैं।

अब यदि हम θ को स्थिर रखें, मान लीजिए $\theta = \alpha$, और r को समस्त वास्तविक मान लेने दें, तो हमें रेखा OP (देखें चित्र 17) प्राप्त होती है, जहां $\angle AOP = \alpha$ इसी प्रकार, r को स्थिर रखकर, मान लीजिए $r = a$, अगर हम θ को समस्त वास्तविक मान लेने दें, तो बिंदु $P(r, \theta)$, a त्रिज्या का एक वृत्त अनुरेखित करता है जिसका केंद्र ध्रुव पर है (चित्र 18)।



चित्र 17 : रेखा L, $\theta = \frac{\pi}{3}$ से दी जाती है।



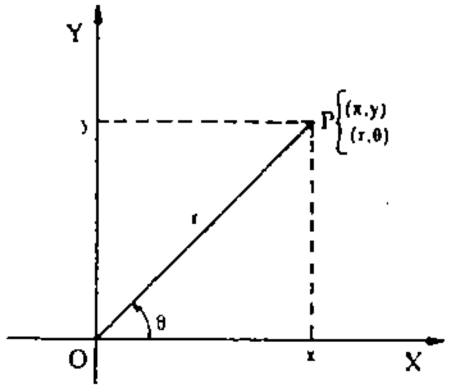
चित्र 18 : वृत्त $r = 1$

यहां ध्यान दीजिए θ के ऋणात्मक मान का अर्थ है कि कोण का माप θ है किंतु दिशा दक्षिणावर्त है। अतः, उदाहरण के लिए बिन्दु $(2, -\frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{3\pi}{2})$ से भी निरूपित होता है।

जैसा कि आपने अनुमान लगा लिया होगा, कार्तीय एवं ध्रुवीय निर्देशांक बहुत घनिष्ठ रूप से संबद्ध हैं। क्या आप संबंध बता सकते हैं? चित्र 19 से आप देख सकते है कि संबंध होगा

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, या

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots\ldots (19)$$



चित्र 19 : ध्रुवीय और कार्तीय निर्देशांक

ध्यान दीजिए कि मूल बिन्दु तथा ध्रुव यहाँ पर सम्पाती हैं। ज्यादातर ऐसा ही होता है।

समीकरणों से व्यवहार करते समय हम इस संबंध का अक्सर प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, कार्तीय निकाय में वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ का समीकरण सरल ध्रुवीय रूप $r = 5$ में समानीत हो जाता है। इसलिए, हो सकता है कि हम कार्तीय की बजाय इस सरल रूप का प्रयोग करना चाहें।

वक्रों के अनुरेखण के बारे में और जानने के लिए एम.टी.-01 (कलन) की इकाई 9 भी देखें।

निम्न प्रश्नों को हल करने से आप ध्रुवीय निर्देशांकों से और परिचित हो जाएंगे।

E 19) (9) और (19) से दिखाइए कि चित्र 7 में रेखा AB का ध्रुवीय समीकरण $r\cos(\theta - \alpha) = p$ है।

E 20) r और θ के बदलते मानों के लिए, वक्र $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 0$ का आलेख खींचिए।

E 21) निम्न समीकरणों के कार्तीय रूप ज्ञात कीजिए।

क) $r^2 = 3r\sin\theta$

ख) $r = a(1 - \cos\theta)$, जहाँ θ एक स्थिरांक है।

ध्रुवीय निर्देशांक-तंत्र के अतिरिक्त, वक्रों पर बिन्दु को निरूपित करने का एक और तरीका है। यह प्राचल (parameter) के पदों में निरूपण है। इस सरल विधि से आपका परिचय अगली इकाई में होगा, जब हम प्रत्येक शांकव पर अलग-अलग चर्चा करेंगे।

आइए, अब हम संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में क्या किया है।

1.6 सारांश

इस इकाई में हमने द्विविम वैश्लेषिक ज्यामिति की कुछ प्रारंभिक संकल्पनाओं पर संक्षेप में चर्चा की है। विशेष रूप से, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है।

1) दूरी सूत्र : (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के बीच की दूरी $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ है।

2) (x_1, y_1) तथा रेखा $ax + by + c = 0$ के बीच की दूरी $\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ है।

3) x-अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $y = a$ और y-अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $x = b$ है, जहाँ a और b स्थिरांक हैं।

4) किसी रेखा का समीकरण

   i) प्रवणता-अंतःखंड रूप में $y = mx + c$ है,

   ii) बिन्दु-प्रवणता रूप में $y - y_1 = m(x - x_1)$ है,

   iii) द्विबिन्दु रूप में $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ है,

   iv) अंतःखंड रूप में $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है,

   v) प्रसामान्य रूप में $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ है।

5) m_1 और m_2 प्रवणता वाली दो रेखाओं के बीच का कोण

   $\tan^{-1} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ है।

   रेखाएँ समांतर होंगी यदि $m_1 = m_2$, और लंब होंगी यदि $m_1 m_2 = -1$.

6) निर्देशांक अक्षों तथा मूल बिन्दु के प्रति सममिति।

7) i) यदि हम अक्षों को (a, b) पर, बगैर उनकी दिशा बदले, स्थानांतरित करें, तो नए निर्देशांक x' और y', $x' = x - a$ और $y' = y - b$ से प्राप्त होते हैं।

   ii) यदि हम अक्षों को, बिना मूल बिन्दु बदले, कोण θ से घुमा दें तो नए निर्देशांक x' और y',

   $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$

   $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$

   से प्राप्त होते हैं।

8) किसी समतल में कोइ बिन्दु P वास्तविक संख्याओं के एक युग्म (r, θ) से निरूपित होता है, जहां r, P से ध्रुव O की दिष्ट दूरी और θ वामावर्त दिशा में रेडियन में मापित वह कोण है जो OP ध्रुवीय अक्ष से बनाती है। ये P के ध्रुवीय निर्देशांक हैं। ये P के कार्तीय निर्देशांक (x, y) से $r^2 = x^2 + y^2$ और $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ द्वारा संबद्ध हैं।

अगली इकाई में हम दीर्घवृत्त और अन्य शांकवों का अध्ययन शुरू करेंगे। लेकिन वहाँ जाने से पहले, यह **सुनिश्चित कर लीजिए कि आपने भाग 1.1 में दिए गए इस इकाई के उद्देश्यों को पूरे कर लिए हैं।** इसकी जाँच करने का एक तरीका है, यह सुनिश्चित करना कि आप इकाई के सभी प्रश्न हल कर पाए या नहीं। इन प्रश्नों के हमारे हल निम्नलिखित भाग में दिए गए हैं।

1.7 हल/उत्तर

E 1) क) $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-4+2}{2} \right) = (1, -1)$

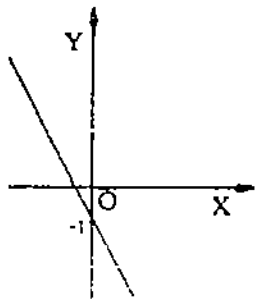
ख) $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$

E 2) $PQ = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (0-3)^2} = \sqrt{18}$

$QR = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-3)^2} = 3$

$PR = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2} = 3$

अतः त्रिभुज की भुजाएँ लंबाई में समान नहीं हैं। इसलिए, $\triangle$ PQR समबाहु नहीं है।



चित्र 20 : $y = -(\sqrt{3}x + 1)$

E 3) x और y-अक्ष क्रमशः $y = 0$ और $x = 0$ हैं।

E 4) चित्र 20 में हमने रेखा खींची है।

इसका समीकरण $y = mx + c$ है, जहाँ $c = -1$ और $m = \tan 120° = -\sqrt{3}$ है। इसलिए, वांछित समीकरण $y = -(\sqrt{3}x + 1)$ है।

E 5) यहाँ $c = 0$, अतः समीकरण $y = x \tan \alpha$ है।

E 6) क) $(2, 0)$ और $(0, -3)$ रेखा पर हैं।

अतः इसका द्विबिन्दु रूप

$\frac{y - 0}{-3 - 0} = \frac{x - 2}{0 - 2}$, अर्थात् $2y = 3(x-2)$ है।

ख) $(a, 0)$ और $(0, b)$ रेखा पर हैं। अतः इसका समीकरण

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ है।}$$

E 7) रेखा का समीकरण $y = -x + \frac{1}{2}$ अर्थात् $2x + 2y - 1 = 0$ है। $(1, 1)$ की इस रेखा से दूरी

$$\left| \frac{2.1 + 2.1 - 1}{\sqrt{4+4}} \right| = \frac{3}{\sqrt{8}} \text{ है।}$$

E 8) क) $\left| \frac{m.0 - 0 + c}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \frac{c}{\sqrt{m^2+1}}$

ख) $\left| \frac{1-5}{1} \right| = 4.$

ग) $|1 - p|$

घ) 0.

E 9) अंतःखंड रूप (8) और चित्र 7 से, हम देखते हैं कि रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \text{ है।} \qquad \text{...... (20)}$$

अब, $\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ और $\angle OBC = \alpha$

इस प्रकार, $OA = OC \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$= p \sec \alpha = \frac{p}{\cos \alpha}$$

और $OB = OC \operatorname{cosec} \alpha = \frac{p}{\sin \alpha}$

इस प्रकार, $(20) = \frac{x \cos \alpha}{p} + \frac{y \sin \alpha}{p} = 1$

$\Rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$

E 10) क) $y + x + 1 = 0$ के समांतर कोई रेखा $y + x + c = 0$ के रूप की होगी, जहाँ $c \in \mathbf{R}$. चूंकि $(0, 0)$ इस रेखा पर है, $0 + 0 + c = 0$, अर्थात् $c = 0$ होगा। अतः वांछनीय रेखा $y + x = 0$ है।

ख) रेखा $y + x = 0$ की प्रवणता -1 है। इसलिए (13) से इस रेखा पर लंब रेखा की प्रवणता 1 है। इसलिए, वांछित रेखा का समीकरण $y = x + c$ के रूप का होगा, जहाँ $c \in \mathbf{R}$ चूंकि $(2, 1)$ इस रेखा पर है, $1 = 2 + c \Rightarrow c = -1$. इसलिए, वांछनीय रेखा $y = x - 1$ है।

ग) इस स्थिति में $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, इसलिए, रेखाओं के बीच का कोण

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1-2}{1+1\times 2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ है।}$$

ध्यान दीजिए कि दोनों $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ और $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ रेखाओं के बीच के कोण हैं।

E 11) यदि हम y को $(-y)$ से समीकरण में प्रतिस्थापित करें तो यह अपरिवर्तित रहता है। अतः वक्र x-अक्ष के प्रति सममित है। यदि हम x को $(-x)$ से प्रतिस्थापित करें, तो वक्र $y^2 = -2x$ में परिवर्तित हो जाता है। अतः वक्र y-अक्ष के प्रति सममित नहीं है।

यदि हम x और y को क्रमशः $(-x)$ और $(-y)$ से समीकरण में प्रतिस्थापित करें, तो यह $y^2 = -2x$ में परिवर्तित हो जाता है। अतः यह मूल बिन्दु के प्रति सममित नहीं है।

E 12) यह किसी भी अक्ष या मूल बिन्दु के प्रति सममित नहीं है।

E 13) (क) x-अक्ष के प्रति सममित है।

(क) और (घ) y-अक्ष के प्रति सममित हैं।

(क) और (ग) मूल बिन्दु के प्रति सममित हैं।

E 14) क) वक्र x-अक्ष के प्रति सममित है। इसलिए

$F(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, -y) = 0 \; \forall \; x, y \in \mathbf{R}$.

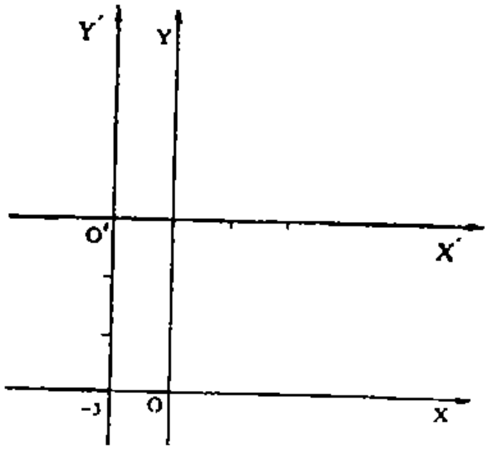
$\therefore F(x, -y) = 0 \Rightarrow F(x, -(-y)) = 0$

$\Rightarrow F(x, y) = 0 \; \forall \; x, y \in \mathbf{R}$

अतः $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, -y) = 0$

ख) वक्र दोनों अक्षों के प्रति सममित है। अब
$F(x, y) = 0$
$\Rightarrow F(x, -y) = 0$, x-अक्ष के प्रति सममिति के कारण।
$\Rightarrow F(-x, -y) = 0$, y-अक्ष के प्रति सममिति के कारण।
$\Rightarrow$ F मूल बिन्दु के प्रति सममित है।
स्पष्टतः विलोम सत्य नहीं है, जैसा कि आप चित्र 11 से देख सकते हैं।

E 15) चित्र 21 में हमने नए और पुराने निकाय दिखाए हैं।



चित्र 21 : X'O'Y' के सापेक्ष O के निर्देशांक (1, −3) हैं।

E 16) क) यदि नए निर्देशांक x' और y' हैं, तो
$x = x' - 2,\ y = y' + 2.$
इस प्रकार, समीकरण
$5(x'-2)^2 + 3(y'+2)^2 + 20(x'-2) - 12(y'+2) + 17 = 0$
हो जाता है।
$\Rightarrow 5x'^2 + 3y'^2 - 15 = 0$
$\Rightarrow \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{5} = 1$

ख) समीकरण
$5(x'+1)^2 + 3(y'+1)^2 + 20(x'+1) - 12(y'+1) + 17 = 0$
हो जाता है।
$\Rightarrow 5x'^2 + 3y'^2 + 30x' - 6y' + 33 = 0.$

E 17) यहाँ $x = \frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$ और $y = \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$

इसलिए $x + y = 1$,

$$\left(\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}\right) = 1, \text{ अर्थात्}$$

$x'(1 + \sqrt{3}) + y'(1 - \sqrt{3}) = 2$ बन जाता है।

E 18) क) मूल बिन्दु स्थानांतरित करने से, नए निर्देशांक x' और y', x और y से $x = x' - 2,\ y = y' + 1$ द्वारा संबद्ध हैं।
अतः समीकरण
$(x'-2)^2 + (y'+1)^2 + 4(x'-2) - 2(y'+1) + 4 = 0$ हो जाता है।
$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = 1$ …… (21)
अब अक्षों को 45° से घुमाने से नए निर्देशांक X और Y प्राप्त होते हैं जो
$x' = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$ और $y' = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$ से प्राप्त होते हैं।
इसलिए (21)
$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \text{ बन जाता है।}$$

$\Rightarrow X^2 - 2XY + Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2 = 2$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 = 1$

ख) यदि हम पहले अक्षों को घुमाएं तो समीकरण

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 4 = 0 \text{ बन जाता है।}$$

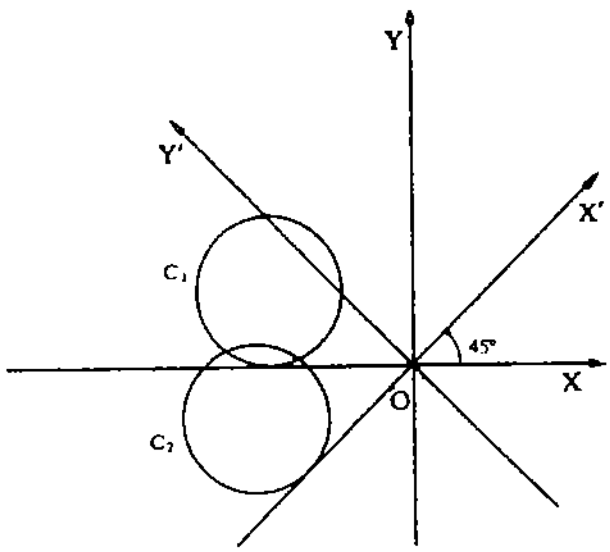
$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 4 = 0.$ ...... (22)

अब मूल बिन्दु को $(-2, 1)$ पर स्थानांतरित करने पर, समीकरण (22)

$X^2 + Y^2 + X(\sqrt{2} - 4) + Y(2 - 3\sqrt{2}) + 9 - 5\sqrt{2} = 0$

बन जाता है।

ग) (क) और (ख) से आप देख सकते है कि रूपांतरणों के क्रम में परिवर्तन से अंतर हो जाता है। अर्थात्, यदि T_1 और T_2 दो रूपांतरण है तो आवश्यक नहीं है कि T_1 के बाद T_2 का असर वही होगा जो T_2 के बाद T_1 का होगा। आरेखी रूप में, चित्र 22 में वृत्त C_1 और C_2 (क) और (ख) में अंतिम समीकरणों के संगत हैं।



चित्र 22

E 19) (9) से, L का समीकरण

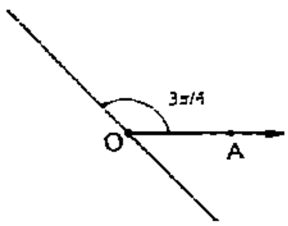
$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ है।

(19) के प्रयोग से यह

$r(\cos\theta \sin\alpha + \cos\theta \sin\alpha) = p$ बन जाता है।

$\Rightarrow r\cos(\theta - \alpha) = p.$

E 20)



चित्र 23 : रेखा $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 0$

E 21) क) चूंकि $r^2 = x^2 + y^2$ और $y = r \sin \theta$, तो समीकरण $x^2 + y^2 = 3y$ बन जाता है।

ख) समीकरण

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$ बन जाता है।

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + a \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

इकाई 2 मानक शांकव

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

इस इकाई में आप कुछ ऐसे वक्रों के बारे में पढ़ेंगे जिनसे आप शायद परिचित हों। इनका व्यवस्थित रूप से अध्ययन सबसे पहले यूनान के खगोलशास्त्री ऐपलोनियस (Apollonius) ने लगभग 225 ई.पू. में किया था। ये वक्र परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय हैं। जैसा कि आप इस पाठ्यक्रम में देखेंगे, ये शांकव (cone) के प्रतिच्छेदन से प्राप्त होते हैं।

इस इकाई का प्रारंभ हम शांकवों की परिभाषा से करेंगे। हमारी परिभाषा के अनुसार शांकव ऐसे वक्र हैं जो नाभि-नियता गुण को संतुष्ट करते हैं। इस परिभाषा से हम परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक रूपों के विशिष्ट स्थितियों पर पहुँचेंगे। इन्हें मानक रूप इसलिए कहा जाता है क्योंकि किसी भी शांकव को इन रूपों में से किसी एक में बदला जा सकता है, और तब विचाराधीन शांकव के विभिन्न गुणों का आसानी से अध्ययन किया जा सकता है। हम मानक रूपों का अनुरेखण (tracing) करेंगे और उनकी स्पर्श रेखाओं (tangents) और अभिलंबों (normals) पर गौर करेंगे। हम कुछ अन्य गुणों की चर्चा भी करेंगे, और साथ ही उनके खगोल विज्ञान, सैन्य विज्ञान, भौतिकी आदि में कुछ अनुप्रयोगों के बारे में बताएंगे।

अगली इकाई में हम शांकवों पर व्यापक रूप से चर्चा करेंगे। और तब, आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है आपके लिए अवश्य उपयोगी होगा। यदि आप इकाई के निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लेते हैं, तो यह निश्चित है कि आपने इस इकाई को अच्छी तरह से समझ लिया है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- किसी शांकव का समीकरण प्राप्त कर सकेंगे यदि आपको उसकी नाभि और नियता मालूम हो;
- किसी परवलय, दीर्घवृत्त या अतिपरवलय के कार्तीय और ध्रुवीय समीकरणों के मानक रूप प्राप्त कर सकेंगे
- दीर्घवृत्त या अतिरपवलय के डोरी गुण को सिद्ध और प्रयोग कर सकेंगे,
- किसी मानक शांकव के किसी दिए गए बिंदु पर स्पर्श रेखा या अभिलंब प्राप्त कर सकेंगे;
- यह जांच कर सकेंगे कि कोई दी गई रेखा किसी दिए गए शांकव पर स्पर्श रेखा है या नहीं;
- मानक रूप में किसी अतिपरवलय के अनंतस्पर्शी प्राप्त कर सकेंगे।

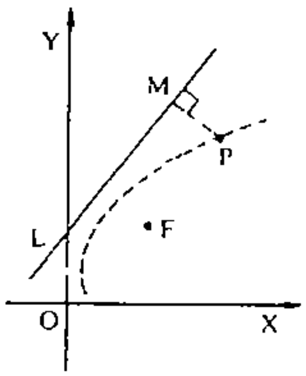
आइए अब हम शांकवों पर अपनी चर्चा आरंभ करें।

2.2 नाभि-नियता गुण

मान लीजिए आप अपने मित्र को एक गेंद उछाल कर देते हैं। गेंद का पथ क्या होगा? यह चित्र 1 में दिए गए वक्र से मिलता जुलता होगा जोकि एक परवलय है। इस भाग में हम परवलय, दीर्घवृत्त या अतिपरवलय जैसे वक्रों को करीब से देखना शुरू कर रहे हैं। ऐसे वक्रों को शंकु-परिच्छेद (conic section) या शांकव (conic) कहते हैं। ये वक्र एक ऐसे ज्यामितीय गुण को संतुष्ट करते हैं जो कोई और वक्र नहीं करता। इस गुण को हम शंकु-परिच्छेद की परिभाषा मानते हैं।

चित्र 1 : जब गेंद फेंकी जाती है तो यह परवलय का अनुरेखण करती है।

परिभाषा : एक शंकु-परिच्छेद (या शांकव) द्विविम समष्टि में उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी किसी नियत बिंदु F से दूरी किसी नियत रेखा L से दूरी का स्थिरांक (मान लीजिए, e) गुना है (चित्र 2 देखें)।



चित्र 2 : ऐसे सभी बिंदुओं P का समुच्चय, जहां PF = e PM, एक शांकव होता है।

नियत बिंदु F शांकव की **नाभि** (focus) कहलाता है। रेखा L शांकव की **नियता** (directrix) कहलाती है। संख्या e शांकव की **उत्केन्द्रता** (eccentricity) कहलाती है।

चूंकि किसी समतल में अनंततः अनेक रेखाएं और बिंदु होते हैं, आप शायद सोचें कि अनंत प्रकार के शांकव होते हैं। ऐसा नहीं है। इस खंड के शेष भाग में हम शांकवों के प्रकारों की सूची देंगे तथा उन पर विस्तार से चर्चा करेंगे। इस दिशा में पहले कदम के रूप में आइए देखें कि शांकव की परिभाषा का बीजीय मतलब क्या है।

हम किसी शंकु-परिच्छेद का कार्तीय निर्देशांक-तंत्र में समीकरण प्राप्त करेंगे। मान लीजिए, F (a, b) शांकव की नाभि है और $px + qy + r = 0$ नियता L है (चित्र 2 देखें)। मान लीजिए e शांकव की उत्केंद्रता है। तब कोई बिंदु P (x, y) शांकव पर स्थित होगा यदि और केवल यदि

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = e\left|\frac{px+qy+r}{\sqrt{p^2+q^2}}\right|$$, इकाई 1 के सूत्र (1) और (10) से

$$\iff \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}(p^2+q^2) = e^2(px+qy+r)^2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

इस प्रकार, (1) ऐसे शांकव का समीकरण है जिसकी नाभि (a, b) है, नियता $px + qy + r = 0$ है तथा उत्केंद्रता e है।

उदाहरण के लिए, जिस शांकव की उत्केंद्रता $\frac{1}{2}$ है, नाभि (1,1) पर है और नियता $x + y = 1$ है, उसका समीकरण

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y-1)^2}{2}$$ है।

अब आप एक प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E 1) उस शंकु-परिच्छेद का समीकरण मालूम कीजिए जिसकी

क) उत्केंद्रता 1 है, (2,0) उसकी नाभि है और $x = y$ उसकी नियता है;

ख) उत्केंद्रता $\frac{1}{2}$ है, $2x + y = 1$ उसकी नियता है और (0,1) उसकी नाभि है। (ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में नाभि नियता पर स्थित है।)

E 1 में आपने दो संभावनाओं को देखा है, अर्थात् नाभि नियता पर स्थित हो सकती है या नहीं हो सकती है। आइए पहले हम उस स्थिति पर विचार करें जब नाभि नियता पर स्थित नहीं है। इस स्थिति में जो शांकव हमें प्राप्त होते हैं उन्हें **अनपभ्रष्ट शांकव** (non-degenerate conic) कहते हैं। ऐसे तीन प्रकार के शांकव होते हैं, जो इस बात पर निर्भर करते है कि $e < 1$, $e = 1$, या $e > 1$.

जब $e < 1$, तो शांकव एक दीर्घवृत्त होता है; जब $e = 1$, तो हमें एक परवलय प्राप्त होता है; और जब $e > 1$, तो हमें एक अतिपरवलय प्राप्त होता है। आगे के भागों में हम इनमें से प्रत्येक शांकव की विस्तार से चर्चा करेंगे।

आइए हम उत्केंद्रता 1 के अनपभ्रष्ट शांकवों से आरंभ करें।

2.3 परवलय

इस भाग में हम परवलय के समीकरण तथा गुणों पर चर्चा करेंगे। आइए, पहले परवलय को परिभाषित करें।

परिभाषा : परवलय (parabola) द्विविम समष्टि में ऐसे सभी बिंदुओं का समुच्चय होता है जो किसी रेखा L से तथा किसी बिंदु F से समान दूरी पर है, जहाँ F, L पर नहीं है। L इसकी नियता तथा F इसकी नाभि है।

आइए, परवलय का समीकरण प्राप्त करने के लिए (1) का प्रयोग करें। पहले तो, मान लीजिए F (0,0) है तथा L एक सरल रेखा $x+c = 0$ है, जहाँ $c > 0$. (अतः L, y-अक्ष के समांतर है और F के बाईं ओर पर स्थित है।) तो, (1) के प्रयोग से हम देखते है कि परवलय का समीकरण

$x^2 + y^2 = (x + c)^2$. अर्थात्

$$y^2 = c\,(2x + c) \qquad \ldots\ldots (2)$$

है।

अब, समीकरण को सरल करने के लिए आइए मूल बिंदु को $(-\frac{c}{2}, 0)$ पर स्थानांतरित करें। यदि हम $\frac{c}{2} = a$ रखें, तो हम मूल बिंदु को $(-a, 0)$ पर स्थानातरित कर रहे है। भाग 1.4.1 से आप जानते है कि नए निर्देशांक x' और y',

$x = x' - a$ और $y = y'$ द्वारा प्राप्त होते है।

इस प्रकार (2)

$y'^2 = 4ax'$ वन जाता है।

इस परवलय की नाभि (X'Y' तंत्र में) $(a, 0)$ पर है तथा नियता का समीकरण $x' + a = 0$ है। अतः हमने यह पाया है कि समीकरण

$$y^2 = 4ax \qquad \ldots\ldots (3)$$

एक ऐसा परवलय को निरूपित करता है जिसकी नियता $x + a = 0$ है तथा जिसकी नाभि $(a, 0)$ है। यह परवलय के समीकरण का एक मानक रूप है। परवलय के समीकरण के तीन और मानक रूप है। ये है :

$$x^2 = 4ay, \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$y^2 = -4ax, \qquad \ldots\ldots (5)$$

$$x^2 = -4ay, \qquad \ldots\ldots (6)$$

जहाँ $a > 0$.

इन समीकरणों को मानक रूप इसलिए कहा जाता है क्योंकि, जैसा कि आप इकाई 3 में देखेंगे, किसी परवलय के समीकरण को इनमें से किसी एक रूप में रूपांतरित कर सकते हैं। जिन रूपांतरणों का हम प्रयोग करते हैं वे भाग 1.4 में दी गई दृढ़ पिंड गतियाँ है। अतः ये रूपांतरित किए जाने वाले वक्र के ज्यामितीय गुणों को प्रभावित नहीं करते है। और जैसा कि आप आगे के उपभागों में देखेंगे, मानक रूपों की ज्यामिति का अध्ययन आसान है। अतः जब हमें परवलय का समीकरण मिल जाता है तो हम उसे मानक रूप में रूपांतरित करके इसके गुणों का अध्ययन करते हैं। और, ये गुण उसी परवलय के गुण है जिससे हमनें शुरू किया था।

आइए, अब हम मानक रूपों का ज्यामितीय वर्णन देखें।

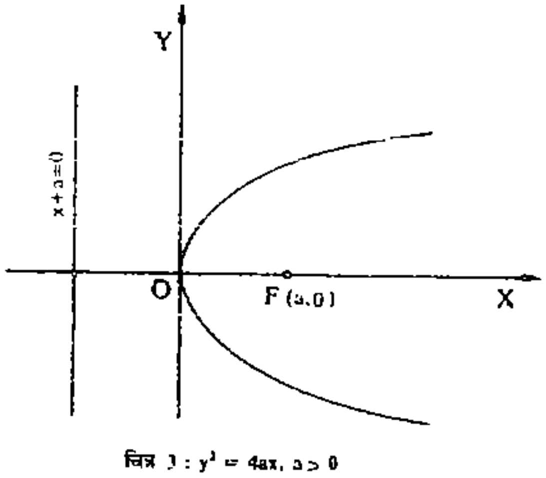
2.3.1 मानक रूपों का वर्णन

आइए, अब देखें कि परवलय कैसा दिखाई देता है। हम (3) के अनुरेखण से शुरू करते है। इसके लिए, आइए देखें कि समीकरण से हमें क्या जानकारी मिल सकती है। पहले तो, वक्र प्रत्येक अक्ष को केवल (0,0) पर काटता है। इसके बाद, हम पाते हैं कि परवलय के किसी बिंदु (x, y) के लिए $x \geq 0$, क्योंकि $y^2 \geq 0$. अतः वक्र पहले और चौथे चतुर्थांश में स्थित है।

और, जैसे-जैसे x बढ़ता है, वैसे-वैसे y का परिमाण भी बढ़ता है।

और अंत में, परवलय (3) x-अक्ष के प्रति सममित है, लेकिन y-अक्ष या मूल बिंदु के प्रति नहीं (देखें भाग 1.3); अतः वक्र के पहले और चौथे चतुर्थांश में स्थित हिस्से एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब है।

वक्र $y^2 = 4ax$ के बारे में इस सारी जानकारी का प्रयोग करके हम इसे चित्र 3 में अनुरेखित करते हैं।

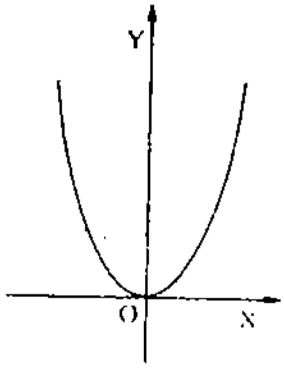


चित्र 3 : $y^2 = 4ax$, $a > 0$

नाभि से होकर जाने वाली और नियता पर लंब रेखा को परवलय का **अक्ष** (axis) कहते हैं। अतः, चित्र 3 के परवलय का अक्ष x-अक्ष है।

जिस बिंदु पर परवलय अपने अक्ष को काटता है, उसका **शीर्ष** (vertex) कहलाता है। अतः (0,0) चित्र 3 के परवलय का शीर्ष है।

अब, यदि हम (3) में x और y को आपस में बदल दें, तो क्या होगा? हमें (4) प्राप्त होगा। यह भी एक परवलय है। इसकी नाभि (0, a) पर है तथा नियता $y + a = 0$ है। यदि हम इस वक्र की सममिति और दूसरे ज्यामितीय पहलुओं पर विचार करें, तो हम पाते हैं कि इसका ज्यामितीय निरूपण चित्र 4 में दिया गया वक्र होगा। इसका शीर्ष भी (0,0) पर है लेकिन इसका अक्ष (3) का अक्ष नहीं है। इसका अक्ष है $x = 0$, अर्थात् y-अक्ष।



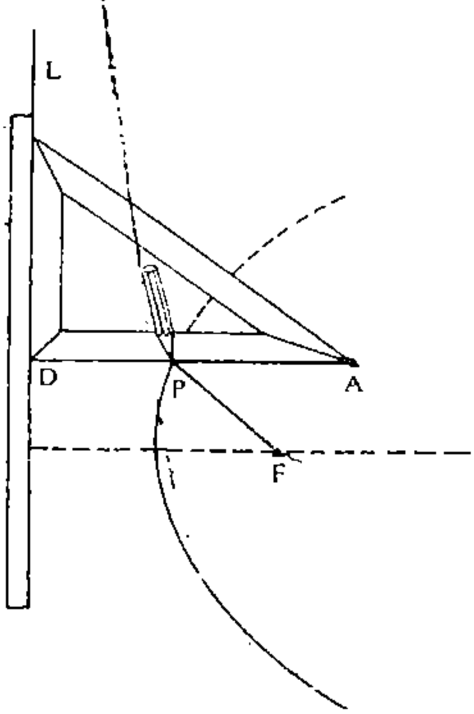
चित्र 4 : $x^2 = 4ay$, $a > 0$

अब आप कुछ परवलय स्वयं अनुरेखित कीजिए।

E 2) परवलय के मानक रूपों (5) और (6) को अनुरेखित कीजिए। उनके शीर्षों और नाभियों के निर्देशांक स्पष्ट रूप से बताइए।

अभी तक हमने ऐसे परवलयों पर विचार किया है जिनके शीर्ष (0,0) पर हैं तथा जिनकी नाभियाँ किसी एक निर्देशांक अक्ष पर स्थित हैं। इकाई 3 में आप देखेंगे कि भाग 1.4 में दिए गए अक्षों के परिवर्तन द्वारा, किसी परवलय का समीकरण हम हमेशा इनमें से किसी एक मानक रूप में प्राप्त कर सकते हैं। इस भाग में हम अपनी चर्चा को परवलय के मानक रूपों तक सीमित रखेंगे।

आइए, अब हम परवलय के अनुरेखण की एक सरल यांत्रिक विधि को देखें। किसी कागज़ पर एक सीधी रेखा L खींचिए और एक बिंदु F, जो L पर न हो, निर्धारित कीजिए। उसके बाद, जैसा कि चित्र 5 में है, डोरी के टुकड़े के एक सिरे को ड्राइंग पिन (drawing pin) की सहायता से सेट-स्क्वेयर (set square) के शीर्ष A पर लगाइए। डोरी की लंबाई सेट-स्क्वेयर की भुजा AD के बराबर होनी चाहिए।



चित्र 5 : परवलय के अनुरेखण की यांत्रिक विधि

डोरी के दूसरे सिरे को ड्राइंग पिन की सहायता से बिंदु F पर लगाइए। अब सेट-स्क्वेयर की दूसरी भुजा को रेखा L के साथ रखे फुटा के साथ-साथ खिसकाइए (जैसा चित्र 5 में) और पेंसिल की नोक P को भुजा AD के साथ इस तरह दबा कर रखिए कि डोरी तनी रहे। तब PD = PF. इस प्रकार, जैसे-जैसे P गतिमान होता है, आप एक वक्र बनाते हैं जो एक ऐसे परवलय का भाग होता है जिसकी नाभि F पर है तथा नियता L है।

इस विधि का अब आप स्वयं इस्तेमाल कीजिए। सेट-स्क्वेयर की जगह आप एक कार्डबोर्ड के टुकड़े में से एक समकोण त्रिभुज काट सकते हैं।

E 3) परवलय $x^2 + 8y = 0$ के अनुरेखण के लिए यांत्रिक विधि का प्रयोग कीजिए।

अभी तक हमने परवलय पर स्थित किसी बिंदु को उसके कार्तीय निर्देशांक x और y के पदों में अभिव्यक्त किया है। लेकिन कभी-कभी इसको एक ही चर या प्राचल t के पदों में व्यक्त करने से हमें सुविधा होती है। आप यह जाँच कर सकते हैं कि प्रत्येक $t \in \mathbf{R}$ के लिए बिंदु $(at^2, 2at)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित होता है।

इसके अतिरिक्त, इस परवलय पर कोई बिंदु (x, y), $(at^2, 2at)$ के रूप का होगा, जहाँ $t = \frac{y}{2a} \in \mathbf{R}$ अतः, कोई बिंदु परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित होगा यदि और केवल यदि उसको किसी $t \in \mathbf{R}$ के लिए $(at^2, 2at)$ द्वारा निरूपित किया जा सके। दूसरे शब्दों में,

परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित किसी बिंदु का प्राचलिक निरूपण $x = at^2$, $y = 2at$ होता है, जहाँ $t \in \mathbf{R}$.

और अब आइए हम एक रेखा और परवलय के प्रतिच्छेदन को देखें।

2.3.2 स्पर्श रेखाएं और अभिलंब

आइए हम परवलय $y^2 = 4ax$ पर विचार करें। इस पर दो अलग-अलग बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण क्या होगा (चित्र 6 देखें)?

रेखा खंड PQ परवलय की जीवा (chord) कहलाता है।

इकाई 1 से हम जानते हैं कि PQ का समीकरण

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ है।}$$

चूँकि P और Q परवलय पर स्थित हैं,
$y_1^2 = 4ax_1$ और $y_2^2 = 4ax_2$.
अतः हम PQ के समीकरण को

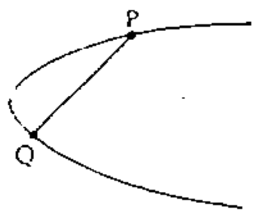
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{\frac{1}{4a}(y_2^2 - y_1^2)} \text{ लिख सकते हैं।}$$

$$\Leftrightarrow (y - y_1)(y_1 + y_2) = 4a(x - x_1)$$

(नोट कीजिए कि $y_1 \neq y_2$, चूँकि P और Q अलग-अलग हैं।)

$$\Leftrightarrow y(y_1 + y_2) - y_1y_2 = 4ax + y_1^2 - 4ax_1$$

$$\Leftrightarrow y(y_1 + y_2) = 4ax + y_1y_2, \text{ चूँकि } y_1^2 = 4ax_1. \quad \ldots\ldots (7)$$



चित्र 6 : PQ परवलय की जीवा है।

यह परवलय पर स्थित दो अलग-अलग बिंदुओं से होकर जाने वाली किसी रेखा का समीकरण है।

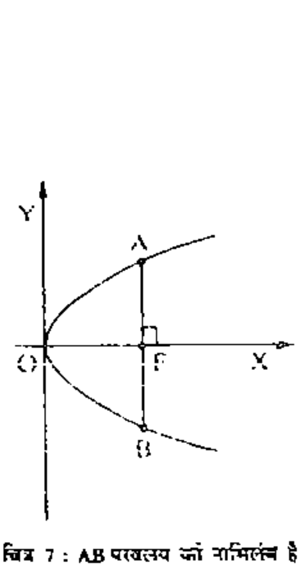
विशेषकर, A (a, 2a) और B (a, −2a) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण x = a है, जो परवलय की नियता के समांतर है। इस जीवा AB का विशेष महत्व है। इसे परवलय $y^2 = 4ax$ का **नाभिलंब** (latus rectum) कहते हैं और इसकी लम्बाई 4a है। ध्यान दीजिए कि नाभि नाभिलंब पर स्थित होती है। इस प्रकार, नाभिलंब परवलय की एक ऐसी जीवा है जो इसकी नाभि से होकर जाती है और इसके अक्ष के लंब रेखा के संगत है (चित्र 7 देखें)।

ध्यान दीजिए कि **नाभिलंब की लंबाई परवलय के समीकरण में x के गुणांक के बराबर होती है।**

इसी प्रकार, $x^2 = 4ay$ के नाभिलंब की लंबाई y के गुणांक के बराबर होती है।

अब एक प्रश्न।

E 4) $x^2 + 2y = 0$ के नाभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।



चित्र 7 : AB परवलय का नाभिलंब है।

आइए, अब हम समीकरण (7) पर वापिस चलें। मान लीजिए कि हम बिंदु Q को P के करीब लाते जाएँ, अर्थात् Q, P **की ओर प्रवृत्त होता है**। तो x_2, x_1 की ओर और y_2, y_1 की ओर प्रवृत्त होता है। इस सीमांत स्थिति में रेखा PQ को एक विशेष नाम दिया जाता है।

परिभाषा : मान लीजिए कि वक्र C पर कोई दो बिंदु P और Q हैं जो एक दूसरे के निकट हैं। तब रेखा खंड PQ, C का **छेदक** (secant) कहलाता है। जब बिंदु Q को P के और पास लाते हैं और आख़िर में वह P पर संपाती हो जाता है, तो रेखा PQ **बिंदु P पर वक्र C की स्पर्श रेखा** (tangent) हो जाती है। P को **संपर्क बिंदु** (point of contact) या **स्पर्शीय बिंदु** (point of tangency) कहते हैं।

अतः, चित्र 6 में Q जैसे-जैसे वक्र पर P की ओर बढ़ता है, वैसे-वैसे रेखा PQ की स्थिति बिंदु P (x_1, y_1) पर परवलय की स्पर्श रेखा बनने के करीब आती जाती है (चित्र 8 देखें)। अतः, (7) से हम देखते हैं कि P पर स्पर्श रेखा का समीकरण

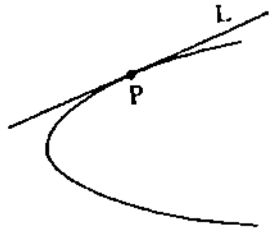
$y \cdot 2y_1 = 4ax + y_1^2$

$= 4a(x + x_1)$, चूंकि $y_1^2 = 4ax_1$ होगा।

$\Longleftrightarrow yy_1 = 2a(x + x_1)$ ...... (8)

अतः, (8) परवलय $y^2 = 4ax$ की बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है। उदाहरण के लिए, शीर्ष बिंदु पर (3) की स्पर्श रेखा $x = 0$, अर्थात् y-अक्ष होगी।

और बिंदु (4, 2) पर $y^2 = x$ की स्पर्श रेखा का समीकरण क्या होगा? यह होगा $y\,y_1 = \frac{x+x_1}{2}$, जहां $x_1 = 4$ और $y_1 = 2$, अर्थात् $4y = x+4$.



चित्र 8 : रेखा L बिंदु P पर परवलय की स्पर्श रेखा है।

क्या आपने ध्यान दिया है कि हमने (3) से (8) कैसे प्राप्त किया। हम आपको इसके लिए नीचे दिए गए टिप्पणी में एक व्यावहारिक नियम बताते हैं।

टिप्पणी 1 : बिंदु (x_1, y_1) पर परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा का समीकरण प्राप्त करने के लिए हम y^2 के स्थान पर yy_1 और x के स्थान पर $\frac{1}{2}(x + x_1)$ लिखते हैं। इसी प्रकार, $x^2 = 4ay$ की उस पर स्थित बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$xx_1 = 2a(y + y_1)$ होगा।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 5) निम्नलिखित स्पर्श रेखाओं के समीकरण मालूम कीजिए :

क) $x^2 + 2y = 0$ की इसके शीर्ष पर, और

ख) $y^2 + 4x = 0$ की उसके नाभिलंब के सिरों पर।

E 6) ऐसी रेखा का उदाहरण दीजिए जो $y^2 = 4ax$ को केवल एक बिंदु पर काटती है किन्तु परवलय की स्पर्श रेखा नहीं है।

तो आपने देखा है कि यदि कोई परवलय और उस पर एक बिंदु दिया हो तो उस बिंदु पर स्पर्श रेखा कैसे प्राप्त की जाती है। लेकिन, यदि कोई रेखा दी हुई हो, तो क्या हम बता सकते हैं कि वह किसी दिए हुए परवलय की स्पर्श रेखा है या नहीं? आइए देखें कि किन परिस्थितियों में रेखा $y = mx + c$, $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा होगी।

यदि $y = mx + c$ परवलय से (x_1, y_1) पर मिलती है, तो

$y_1^2 = 4ax_1$ और $y_1 = mx_1 + c$.

इसलिए $(mx_1 + c)^2 = 4ax_1$, अर्थात्

$m^2x_1^2 + (2mc - 4a)x_1 + c^2 = 0.$ ...... (9)

अब दो संभावनाएं हो सकती हैं—$m = 0$ और $m \neq 0$. क्या पहली स्थिति हो सकती है? क्या रेखा $y = c$, $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा हो सकती है? मान लीजिए, यह बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा है। तो $y = c$ और $yy_1 = 2a(x + x_1)$ समान होंगे। यह संभव नहीं है, क्योंकि $a \neq 0$.

इसलिए, $y = m + c$ को $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा होने के लिए यह आवश्यक है कि $m \neq 0$. तब (9) x_1 में एक द्विघाती समीकरण होगा। अतः इसके दो मूल होंगे। प्रत्येक मूल के लिए हमें रेखा और परवलय का एक प्रतिच्छेदी बिंदु मिलेगा।

अतः कोई रेखा किसी परवलय को अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर काट सकती है। यदि (9) के मूल वास्तविकता और अलग-अलग हों तो रेखा और परवलय के दो अलग-अलग उभयनिष्ट बिंदु होते हैं। यदि (9) के मूल वास्तविक और संपाती हों, तो रेखा परवलय से एक बिंदु पर ही मिलेगी। और यदि (9) के मूल अधिकल्पित हों तो रेखा परवलय को कहीं नहीं काटेगी।

इसलिए, यदि $y = mx + c$, $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा है तो (9) का विविक्तकर (discriminant) शून्य होना चाहिए, अर्थात्

$(2mc - 4a)^2 = 4m^2c^2$

$\Rightarrow 4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 = 4m^2c^2$

$\Rightarrow c = \frac{a}{m}$, चूंकि $m \neq 0$.

इस प्रकार

$\boxed{\text{सरल रेखा } y = mx + c,\ y^2 = 4ax \text{ की स्पर्श रेखा होगी, यदि } m \neq 0 \text{ और } c = \frac{a}{m}.}$

और तब, संपर्क बिंदु क्या होगा? चूँकि (9) के संपाती मूल हैं, हम देखते हैं कि

$$x_1 = \frac{4a - 2mc}{2m^2} = \frac{4a - 2m\frac{a}{m}}{2m^2} = \frac{a}{m^2} \text{ और तब}$$

$$y_1 = mx_1 + c = m\left(\frac{a}{m^2}\right) + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$$

इस प्रकार $y = mx + \frac{a}{m}$ बिंदु $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ पर $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा होगी।

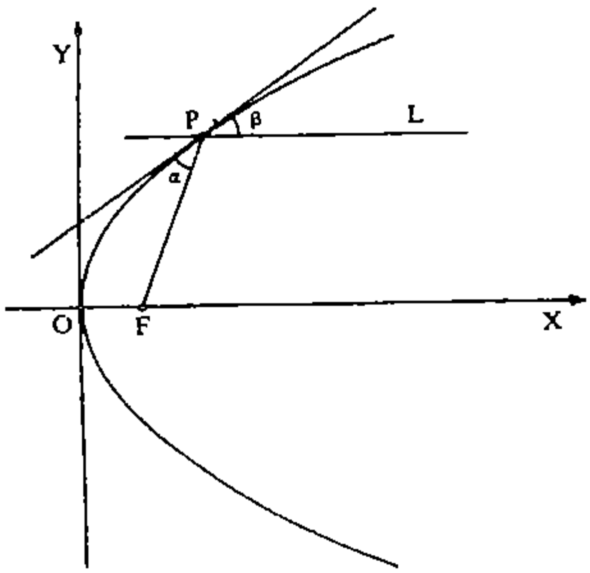
स्पर्श रेखा होने की शर्त का प्रयोग करके उदाहरण के लिए हम यह कह सकते हैं कि रेखा $3x + 2y = 5$, $y^2 + 15x = 0$ की स्पर्श रेखा है लेकिन $y^2 = 15x$ की नहीं।

और अब एक प्रश्न।

E 7) m और c पर किन प्रतिबंधों से $y = mx + c$, $x^2 = 4ay$ की स्पर्श रेखा होगी?

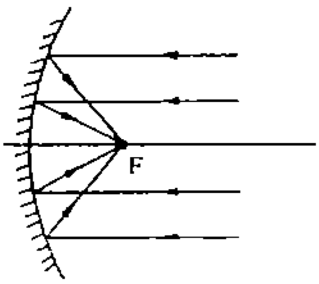
F नाभि वाले परवलय पर किसी बिंदु P की नाभीय त्रिज्या (focal radius) रेखा खंड PF है।

परवलय की स्पर्श रेखा के अनेक गुण होते हैं, जिनमें से एक के ख़ास तौर पर बहुत से व्यावहारिक अनुप्रयोग हैं। यह है परावर्ती गुण (reflecting property). इसके अनुसार, मान लीजिए परवलय की अक्ष के समांतर कोई रेखा L परवलय से किसी बिंदु P पर मिलती है (चित्र 9 देखें)। तब बिंदु P पर परवलय की स्पर्श रेखा, L तथा नाभीय त्रिज्या PF के साथ बराबर कोण बनाती है। अर्थात्, चित्र 9 में, $\alpha = \beta$.



चित्र 9 : परवलय का परावर्ती गुण

इस गुण को परावर्ती गुण कहने का कारण इसका निम्नलिखित अनुप्रयोग है :



चित्र 10 : एक परवलयिक दर्पण

एक परवलय के आकार का दर्पण, अर्थात् परवलयिक (parabolic) दर्पण लीजिए (चित्र 10 देखें)। यदि परवलय के अक्ष के समांतर प्रकाश की किरण दर्पण पर पड़ती है, तो परावर्तित किरण परवलय की नाभि से होकर जाएगी। अतः अक्ष के समांतर किरणों का पुंज परावर्तन के बाद नाभि पर अभिसरित होता है। इसी प्रकार, प्रकाश की वे किरणें जो नाभि पर स्थित स्रोत से निकलती हैं, अक्ष के समांतर पुंज के रूप में परावर्तित होंगी। इसी कारण, गाड़ी के अग्रदीपों (headlights) और खोजबत्तियों में परवलयिक दर्पणों का प्रयोग किया जाता है।

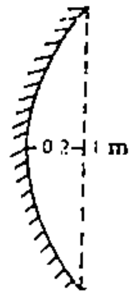
इसी गुण के कारण ही प्राचीन यूनानी गणितज्ञ आर्किमिडीज़ (Archimedes) परवलयिक परावर्तकों का प्रयोग बंदरगाह में शत्रुओं के जहाज़ों में आग लगाने के लिए कर सके। वे यह कैसे कर सके? आर्किमिडीज़ ने बड़ी बुद्धिमत्ता से निम्नलिखित तथ्य का प्रयोग किया:

यदि परवलयिक परावर्तक को सूर्य की ओर घुमा दिया जाए तो सूर्य की किरणें परावर्तित होकर नाभि पर अभिसरित हो जाएंगी, और उस बिंदु पर ऊष्मा उत्पन्न करेंगी। यह तथ्य सौर कुकरों (solar cookers) जैसे सौर ऊर्जा संग्राहकों का भी आधार है।

परावर्ती गुण परवलयिक रेडियो तथा दृश्य दूरबीन, रेडार, आदि के प्रयोग का भी आधार है।

निम्नलिखित प्रश्न परावर्ती गुण के बारे में है।

E 8) 1 मी. चौड़ा और 0.2 मी. गहरा परवलयिक दर्पण एक खोजबत्ती के लिए बनाना है। प्रकाश स्रोत को कहां पर रखना चाहिए? चित्र 11 में हमने दपर्ण का एक अनुप्रस्थ काट (cross section) दिया है। (**संकेत** : परवलय $y^2 = 4ax$ है और (0.2, 0.5) इस पर स्थित है।)

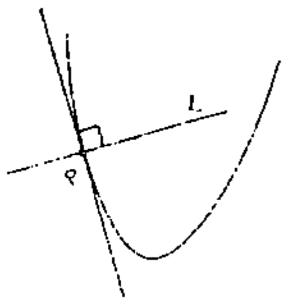


चित्र 11

आइए अब कुछ ऐसी रेखाओं पर विचार करें जिनकी स्पर्श रेखाओं के साथ अक्सर चर्चा की जाती है। ये अभिलंब हैं।

परिभाषा : किसी वक्र पर स्थित बिंदु P पर वक्र का **अभिलंब** (normal) वह सरल रेखा है जो P पर वक्र की स्पर्श रेखा पर लंब है और P से गुज़रती है (चित्र 12 देखें)।

उदाहरण के लिए, किसी परवलय का अक्ष उसके शीर्ष पर अभिलंब है।



चित्र 12 : L परवलय पर स्थित बिंदु P पर अभिलंब है।

अब, मान लीजिए $P(x_1, y_1)$, $y^2 = 4ax$ पर एक बिंदु है। तो, आप जानते हैं कि P पर स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1 = 2a(x + x_1)$ होता है।

यदि $y_1 = 0$, तो $x_1 = 0$ और (0,0) पर अभिलंब $y = 0$, अर्थात् परवलय का अक्ष है।

अब मान लीजिए कि $y_1 \neq 0$. तब (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2a}{y_1}$ है। इसलिए, अभिलंब की प्रवणता $-\frac{y_1}{2a}$ होगी (इकाई 1 का समीकरण (13) देखें)। तब, इकाई 1 से आप जानते हैं कि (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ होगा, अर्थात्

$$y = -\frac{y_1 x}{2a} + y_1 + \frac{y_1^3}{8a^2}, \qquad \ldots\ldots (10)$$

चूंकि $y_1^2 = 4ax_1$.

नोट कीजिए कि (10) तब भी लागू होगा, जब $y_1 = 0$. अतः उदाहरण के लिए, (1,1) पर $y^2 = x$ के अभिलंब का समीकरण क्या होगा? यहाँ $a = \frac{1}{4}$, $x_1 = y_1 = 1$. इसलिए, (10) के द्वारा हम पाते हैं कि वांछनीय समीकरण $y = -2x + 1 + 2 = -2x + 3$ है।

इस भाग का अंत हम कुछ सरल प्रश्नों के साथ करते हैं।

E 9) बिंदु (1,1) पर परवलय $x^2 = 4y$ की स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण मालूम कीजिए।

E 10) वक्र $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा $y = mx + \frac{a}{m}$ के संपर्क बिंदु पर अभिलंब का समीकरण क्या है?

इसके साथ हम परवलय के मानक रूपों पर अपनी लंबी चर्चा समाप्त करते है। अब आइए हम ऐसे शांकव पर विचार करें जिसकी नाभि उसकी नियता पर नहीं होती है और जिसकी उत्केन्द्रता 1 से कम है।

2.4 दीर्घवृत्त

जैसा कि इस भाग का शीर्षक बताता है, इसमें हम दीर्घवृत और उसके गुणों को पढ़ेंगे। आइए हम एक परिभाषा से आरंभ करें।

परिभाषा : दीर्घवृत्त (ellipse) ऐसे बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी किसी नियत बिन्दु F से दूरी, उनकी F से न गुज़रने वाली किसी नियत रेखा L से दूरी की $e\ (< 1)$ गुना है।

आइए हम इसका कार्तीय समीकरण मालूम करें। इसके लिए, हम भाग 2.2 में समीकरण (1) पर वापस चलेंगे। परवलय की स्थिति की तरह, हम यह मान कर आरंभ करते हैं कि F मूल बिंदु है और L, किसी स्थिरांक c के लिए, $x + c = 0$ है। तब (1) $x^2 + y^2 = e^2(x + c)^2$ हो जाती है, जो

$$\left(x - \frac{ce^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2c^2}{(1 - e^2)^2}$$

के तुल्य है। (जाँच कीजिए!)

यदि अब हम मूल बिंदु को $\left(\frac{ce^2}{1 - e^2}, 0\right)$ पर स्थानांतरित करें, तो नए X'Y' तंत्र में समीकरण

$$x'^2 + \frac{y'^2}{1-e^2} = \frac{e^2c^2}{(1-e^2)^2}$$ हो जाता है।

यह $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ के रूप का है,

जहाँ $a = \frac{ec}{(1-e^2)}$ और $b^2 = \frac{(ec)^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2)$.

X'Y'-तंत्र में, नाभि $(-ae, 0)$ पर है और नियता $x' + ae + c = 0$, अर्थात् $x' + \frac{a}{e} = 0$ है।

नोट कीजिए कि $b^2 = a^2(1-e^2)$ और $e < 1$, इसलिए $b^2 < a^2$.

अतः नाभि $(-ae, 0)$ और नियता $x + \frac{a}{e} = 0$ वाले दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ है,} \qquad \ldots\ldots (11)$$

जहाँ $b^2 = a^2(1-e^2)$.

(11) दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप है। परवलय की तरह, यहाँ भी हम अक्षों को इस प्रकार घुमा सकते हैं और स्थानांतरित कर सकते हैं कि किसी भी दीर्घवृत्त को किसी a और b के लिए इस रूप में रखा जा सके। इसको हम मानक रूप इसलिए कहते हैं क्योंकि यह दीर्घवृत के किन्हीं भी ज्यामितीय गुणों की जाँच करने या दीर्घवृत्त से संबद्ध प्रश्नों को हल करने के लिए एक सुविधाजनक रूप है।

आइए, अब हम (11) का ध्यान से अध्ययन करें और इसे अनुरेखित करने का प्रयास करें।

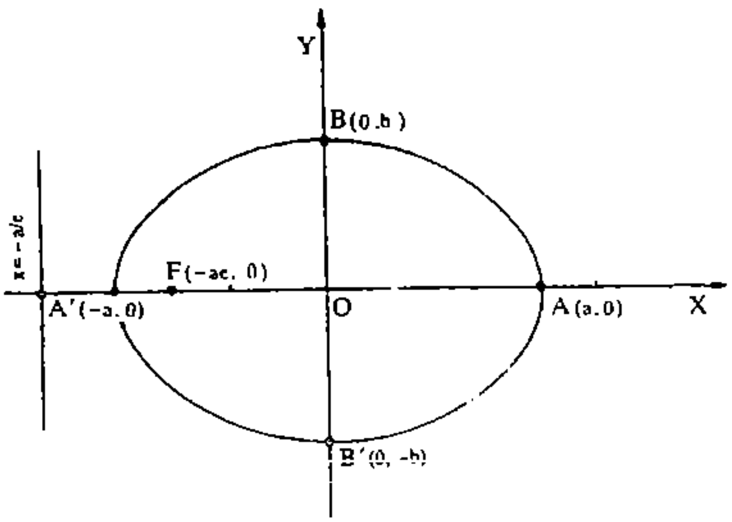
2.4.1 मानक रूप का वर्णन

आइए हम वक्र की सममिति के अध्ययन से आरंभ करें (भाग 1.3 देखें)। क्या आप इससे सहमत हैं कि वक्र मूल बिंदु के प्रति सममित है, और दोनों निर्देशांक अक्षों के प्रति भी? इस वजह से दीर्घवृत को पहले चतुर्थांश में अनुरेखित करना ही काफ़ी होगा। ऐसा क्यों है? क्योंकि दूसरे चतुर्थांश का भाग इस भाग का y-अक्ष में परावर्तन होगा; और शेष वक्र इन दोनों चतुर्थांशों में वक्र के भाग का x-अक्ष में परावर्तन होगा।

आगे, आइए देखें कि (11) निर्देशांक अक्षों को कहाँ पर काटता है। (11) में $y = 0$ रखने पर हम $x = \pm a$ पाते हैं; और $x = 0$ रखने पर हम $y = \pm b$ पाते हैं। अतः (11) अक्षों को चार बिंदुओं $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ पर काटता है।

तीसरे, आइए देखें कि समतल के किस क्षेत्र में दीर्घवृत्त परिभाषित है। आप देख सकते हैं कि यदि $|x| < a$, तो y अधिकल्पित है। अतः दीर्घवृत्त $x = -a$ और $x = a$ के बीच स्थित होना चाहिए। इसी प्रकार यह $y = b$ और $y = -b$ के बीच स्थित होना चाहिए।

यह जानकारी हमें वक्र का अनुरेखण करने में सहायता देती है, जिसे हमने चित्र 13 में दिया है।



चित्र 13 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

वक्र की सममिति को देख कर शायद आपको लगे कि $(ae, 0)$ भी एक नाभि होगी। ऐसा ही है। (11) की दूसरी नाभि $F'(ae, 0)$ है, जिसकी संगत नियता $x = \frac{a}{e}$ है।

इस प्रकार, (11) की दो नाभियाँ $F(-ae, 0)$ और $F'(ae, 0)$ हैं; और इसकी दो नियताएं $x = \frac{a}{e}$ और $x = -\frac{a}{e}$ हैं।

दीर्घवृत्त की वह जीवा जो नाभियों से होकर जाती है, दीर्घवृत्त का **दीर्घ अक्ष** (major axis) कहलाती है। दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु दीर्घवृत्त के शीर्ष कहलाते हैं। अतः, चित्र 13 में A और A' शीर्ष हैं और जीवा AA' दीर्घ अक्ष। इसकी लंबाई 2a है।

दीर्घ अक्ष का मध्य बिंदु **दीर्घवृत्त का केन्द्र** (centre) कहलाता है। आप देख सकते हैं कि दीर्घवृत्त (11) का केन्द्र (0,0) है।

दीर्घवृत्त की वह जीवा जो इसके केन्द्र से गुज़रती है और दीर्घ अक्ष पर लंब होती है, दीर्घवृत्त का **लघु अक्ष** (minor axis) कहलाती है। चित्र 13 में लघु अक्ष रेखा खंड B'B है। इसकी लंबाई 2b है।

आइए, अब एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 1 : दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 1$ की उत्केन्द्रता, नाभियाँ और केन्द्र मालूम कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ है।

(11) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

चूँकि $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}(1 - e^2)$,

अर्थात् $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

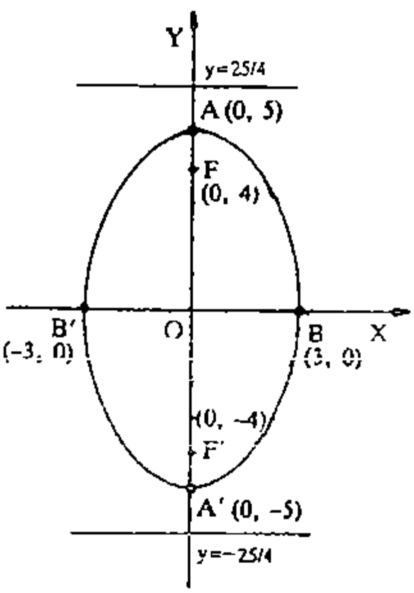
नाभियाँ $(\pm\, ae, 0) = (\pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0)$ है। और केन्द्र तो (0,0) ही है।

आइए अब हम ऐसे दीर्घवृत्त का चित्र बनाएं जिसका दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर है। इस स्थिति में (11) a और b आपस में बदल जाते हैं।

उदाहरण 2 : दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ का चित्रण कीजिए।

हल : यह दीर्घवृत्त x-अक्ष को $(\pm 3, 0)$ पर और y-अक्ष को $(0, \pm 5)$ पर काटता है। अतः, इसका दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर और लघु अक्ष x-अक्ष पर है। इस प्रकार, (11) के a और b आपस में बदल गए हैं। नोट कीजिए कि इस दीर्घवृत्त का केन्द्र भी (0,0) है। और, यदि e इस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता है तो $9 = 25(1 - e^2)$ इसलिए $e = \dfrac{4}{5}$. इस प्रकार नाभियाँ (0, 4) और (0, −4) पर स्थित हैं। (याद रखिए कि यहां दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर है। इस दीर्घवृत्त की नियताएं $y = \pm \dfrac{25}{4}$ हैं।

हम दीर्घवृत्त का रेखाचित्र चित्र 14 में दे रहे हैं।



चित्र 14 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

अब कुछ प्रश्न।

E 11) $3x^2 + 4y^2 = 12$ के दीर्घ और लघु अक्षों की लंबाइयां, उत्केन्द्रता, शीर्षों के निर्देशांक और नाभियाँ मालूम कीजिए। इस प्रकार इसका रेखाचित्र बनाइए।

E 12) केन्द्र $(0, 0)$, शीर्ष $(\pm a, 0)$ और उत्केन्द्रता 0 वाले दीर्घवृत्त का समीकरण मालूम कीजिए। इस दीर्घवृत्त का रेखाचित्र बनाइए। आपको जो चित्र मिलता है, क्या उसका कोई और नाम है?

E 13) खगोलशास्त्री जॉन कैप्लर ने 1609 में यह खोज की कि पृथ्वी और अन्य ग्रहों के गति का पथ करीबन एक दीर्घवृत्त है जिसकी एक नाभि पर सूर्य है। यदि पृथ्वी की सूर्य से न्यूनतम और अधिकतम दूरियों का अनुपात 29 : 30 है, तो पृथ्वी की कक्षा (orbit) की उत्केन्द्रता मालूम कीजिए।

E 14) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4(1-e^2)} = 1$, जहाँ e इसकी उत्केन्द्रता है, पर विचार कीजिए। उन

दीर्घवृत्तों का रेखाचित्र बनाइए जो आपको

$e = \frac{1}{4}$, $e = \frac{1}{2}$ और $e = \frac{3}{4}$ लेने पर प्राप्त होते हैं। क्या आप e के परिमाण

और दीर्घवृत्त की समतलता (या सपाटता) में कोई संबंध मालूम कर सकते हैं?

E 12 आपको यह बताता है कि **वृत्त दीर्घवृत्त की एक विशेष** स्थिति है, और $(0, 0)$ केन्द्र और त्रिज्या a वाले **वृत्त का समीकरण**

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots\ldots (12)$$

है।

आप वृत्त की नियताओं के बारे में सोच रहे होंगे। नीचे दिए गए नोट में हम उनके बारे में बताएंगे।

नोट : जैसे-जैसे किसी दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता कम होती जाती है उसकी नियताएं केन्द्र से दूर होती जाती हैं। और अंत में जब $e = 0$ होता है, तो नियताएं अनंत पर स्थित रेखाएं हो जाती हैं।

आइए, अब हम किसी दीर्घवृत्त का **प्राचलिक निरूपण** बताएं। परवलय की तरह, हम दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर किसी बिंदु को प्राचल t के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इस स्थिति में, आप यह जाँच कर सकते हैं कि दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु (x, y), $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, जहाँ $0 \leq t < 2\pi$, द्वारा दिया जाता है। नोट कीजिए कि शीर्ष $t = 0$ और $t = \pi$ के संगत होंगे।

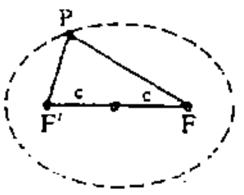
आइए, अब हम दीर्घवृत्त के कुछ महत्वपूर्ण गुणों को देखें।

2.4.2 डोरी गुण

इस भाग में हम एक ऐसे गुण का ज़िक्र करेंगे जो दीर्घवृत्त की विशेषता है। आइए, हम समीकरण (11) पर वापस चलें। इसकी नाभियाँ $F(ae, 0)$ और $F'(-ae, 0)$ हैं। अब दीर्घवृत्त पर स्थित कोई बिंदु $P(x, y)$ लीजिए। P की नाभीय दूरियां PF और PF' हैं। उनका योग क्या है? यदि आप दूरी सूत्र प्रयोग करें, तो आप पाएंगे कि $PF + PF' = 2a$, जो एक स्थिरांक है और दीर्घ अक्ष की लंबाई है। यह गुण किसी भी दीर्घवृत्त के लिए सत्य है। आइए हम इसका कथन औपचारिक रूप में बताएं।

प्रमेय 1 : क) दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिंदु P की नाभीय दूरियों का योग दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष की लंबाई के बराबर होता है।

ख) विलोमतः, किसी समतल में उन सब बिंदुओं P का समुच्चय जिनकी समतल के दो नियत बिंदुओं F और F' से दूरियों का योग अचर है, एक दीर्घवृत्त होता है।



चित्र 15

उपपत्ति : हमने (क) पहले ही सिद्ध कर दिया है। आइए, हम (ख) सिद्ध करें। हम अपने निर्देशांक-तंत्र को इस प्रकार घुमा सकते हैं और स्थानांतरित कर सकते हैं, कि F और F' x-अक्ष पर स्थित हों और रेखा खंड FF' का मध्यबिंदु (0,0) हो। तब, यदि F के निर्देशांक $(c, 0)$ हैं तो F', $(-c, 0)$ के द्वारा दिखाया जाएगा। मान लीजिए, $P(x, y)$ ऐसा कोई बिंदु है कि $PF + PF' = 2a$, जहाँ a एक स्थिरांक है (चित्र 15 देखें)। तब, दूरी सूत्र से हम पाते हैं कि

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

वर्ग करने तथा सरल करने पर हम पाते हैं कि

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

अब, चूँकि PFF' एक त्रिभुज है,
$FF' < PF + PF'$
इसलिए, $2c < 2a$, अर्थात्, $c < a$.
अतः हम उपरोक्त समीकरण को
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ जहाँ } b = \sqrt{a^2 - c^2},$$
के रूप में लिख सकते हैं।

इसकी (11) से तुलना करने पर हम देखते हैं कि समस्त बिंदुओं (x, y) का समुच्चय, जो दी गई शर्तें पूरी करते हैं, ऐसा दीर्घवृत्त है जिसकी नाभियाँ F और F' हैं और दीर्घ अक्ष की लंबाई 2a है।

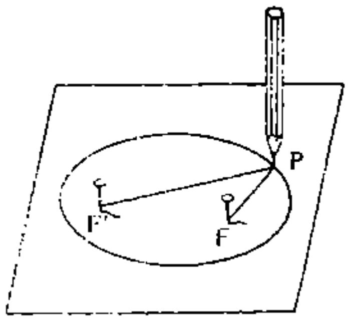
गणितज्ञ अकसर प्रमेय 1 को दीर्घवृत्त की परिभाषा मानते हैं। अर्थात्,

> **एक दीर्घवृत्त किसी समतल में ऐसे समस्त बिंदुओं का समुच्चय होता है जिनकी समतल में दो नियत बिंदुओं से दूरियों का योग स्थिर होता है।**

दीर्घवृत्त का यह गुण **डोरी गुण** या **रज्जु गुण** भी कहलाता है क्योंकि यह दीर्घवृत्त को बनाने की निम्नलिखित विधि का आधार है।

दीर्घवृत्त बनाने की एक यांत्रिक विधि :

एक डोरी का टुकड़ा लीजिए जिसकी लंबाई 2a हो, और उसके सिरों को एक कागज़ पर नियत बिंदुओं F और F' (जहाँ $FF' < 2a$) पर जोड़िए (चित्र 16 देखें)। उसके बाद एक पेंसिल की नोक P के साथ डोरी को दो खंडों में खींचिए। अब, पेंसिल की नोक को डोरी के साथ-साथ खिसकाते हुए कागज़ पर चारों ओर घुमाइए। यह सुनिश्चित कीजिए कि डोरी हमेशा तनी रहे। ऐसा करने से बिंदु P एक दीर्घवृत्त का अनुरेखण करेगा। जिसकी नाभियाँ F और F' हैं और दीर्घ अक्ष की लंबाई 2a है।



चित्र 16 : डोरी का प्रयोग करके एक दीर्घवृत्त का रेखाचित्रण बनाना।

अब आप इस विधि का प्रयोग करने का प्रयास कीजिए।

E 15) अभी हमने जो विधि बताई है उसका प्रयोग करके एक ऐसा दीर्घवृत्त बनाइए जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है। इसके लिए डोरी की लंबाई 4 इकाई लीजिए। दीर्घवृत्त के शीर्षों और नाभियों के निर्देशांक क्या होंगे?

दीर्घवृत्त का एक और गुण है जो इसे इंजीनियरी के लिए बहुत उपयोगी बनाता है। इसके बारे में हम आपको स्पर्श रेखाओं पर चर्चा करते वक्त बताएंगे।

2.4.3 स्पर्श रेखाएं और अभिलंब

भाग 2.3.2 में आपने परवलय की स्पर्श रेखा के बारे में पढ़ा था। इसी तरीके से हम दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखाओं की चर्चा करेंगे।

मान लीजिए, $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ दीर्घवृत्त
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर दो अलग-अलग बिंदु हैं। यदि $x_1 = x_2 = c$, तो PQ का समीकरण
$$x = c \qquad \ldots\ldots(13)$$
होता है।

इसी प्रकार, यदि $y_1 = y_2 = d$, तो PQ का समीकरण
$$y = d \qquad \ldots\ldots(14)$$
होता है।

यदि $x_1 \neq x_2$ और $y_1 \neq y_2$ तो PQ का समीकरण
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ होता है।

$$\Rightarrow \frac{(y - y_1)(y_1 + y_2)}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{(x - x_1)(x_1 + x_2)}{x_2^2 - x_1^2}$$

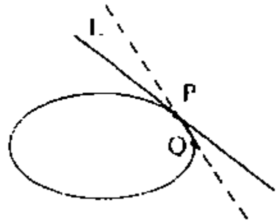
$$\Rightarrow \frac{(y - y_1)(y_1 + y_2)}{b^2} = \frac{(x - x_1)(x_1 + x_2)}{a^2}, \text{ चूँकि } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{y(y_1 + y_2)}{b^2} = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + 1, \qquad \ldots\ldots(15)$$

चूँकि (x_1, y_1) दीर्घवृत्त पर स्थित है।

अतः (13), (14) और (15) P और Q को जोड़ने वाली रेखा के समीकरण की विभिन्न संभावनाएँ हैं।

अब P पर स्पर्श रेखा का समीकरण प्राप्त करने के लिए, हम देखें कि जैसे-जैसे Q, P की ओर प्रवृत्त होता है PQ के समीकरण को क्या होता है (चित्र 17 देखें)। इस स्थिति में, क्या आप चित्र 13 से यह देख सकते हैं कि हमको केवल (15) पर विचार करने की आवश्यकता है? ऐसा इसलिए है क्योंकि जैसे-जैसे Q, P के पास पहुँचता है रेखा PQ किसी भी अक्ष के समांतर नहीं हो सकती है।



चित्र 17

अब, जैसे-जैसे x_2, x_1 के पास जाता है और y_2, y_1 के वैसे-वैसे (15) से दी गई रेखा सीमांत स्थिति की ओर बढ़ती है, और अंत में (15)

$2\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) = 2$ बन जाता है, अर्थात्

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \qquad \ldots\ldots (16)$$

इस प्रकार, (16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण है बिंदु (x_1, y_1) पर।

टिप्पणी 1 से आप पहले ही इस समीकरण की शायद अपेक्षा कर रहे होंगे। यहाँ पर भी वही व्यावहारिक नियम काम करता है, अर्थात्, x^2 के स्थान पर xx_1 और y^2 के स्थान पर yy_1 लिखिए।

उदाहरण के लिए, उदाहरण 2 में दिए गए दीर्घवृत्त की बिंदु $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ पर स्पर्श रेखा

$2x\left(\frac{1}{2}\right) + 3y\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1$, अर्थात्

$x + \sqrt{\frac{3}{2}}\, y = 1$ है।

अब स्पर्श रेखा पर इस प्रश्न को हल कीजिए।

E 16) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के शीर्षों और लघु अक्ष के सिरों पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण मालूम कीजिए।

आइए, अब हम किसी बिंदु (x_1, y_1) पर (11) के अभिलंब का समीकरण मालूम करें। यदि $y_1 = 0$, तो E 15 से आप जानते हैं कि स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{\pi}{2}$ होगी, और इस प्रकार इन बिंदुओं पर अभिलंब केवल x-अक्ष होगा, अर्थात् $x = 0$. इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि उन बिंदुओं पर, जहाँ $x_1 = 0$ है, अभिलंब y-अक्ष है।

अब मान लीजिए $x_1 \neq 0$, $y \neq 0$. (x_1, y_1) पर अभिलंब की प्रवणता क्या होगी? (16) से आप जानते हैं कि स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$ है। इसलिए, (x_1, y_1) पर दीर्घवृत्त के अभिलंब की प्रवणता $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ है

(इकाई 1 का (13) देखें)।

अतः, (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण

$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ है, अर्थात्

$$\frac{y - y_1}{y_1/b^2} = \frac{x - x_1}{x_1/a^2} \qquad \ldots\ldots (17)$$

अब इस प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 17) $x^2 + 4y^2 = 8$ को (2, 1) पर स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण मालूम कीजिए।

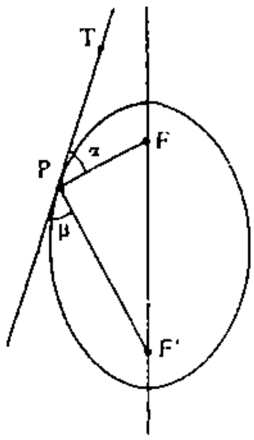
दीर्घवृत्त का व्यास (diameter) वह जीवा है जो केन्द्र में होकर गुज़रती है।

E 18) दिखाइए कि दीर्घवृत्त के किसी व्यास के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

अब, भाग 2.3.2 में हमने परवलय के परावर्ती गुण की चर्चा की थी। क्या आप समझते हैं कि दीर्घवृत्त के लिए भी यह गुण लागू होगा? वही गुण लागू नहीं होता है, लेकिन उस जैसा एक गुण है।

परावर्ती गुण : दीर्घवृत्त की किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा उस बिंदु के नाभीय त्रिज्याओं के साथ समान कोण बनाती है।

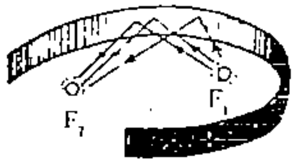
अर्थात्, यदि आप बिंदु P पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा PT लें (चित्र 18 देखें), तो यह रेखाएँ PF और PF' के साथ समान कोण बनाती है।



चित्र 18 : $\alpha = \beta$

हम इसको यहां सिद्ध नहीं करेंगे। लेकिन इसकी उपपत्ति एक प्रश्न के तौर पर आपके लिए छोड़ते हैं (विविध प्रश्नावली देखें)।

परावर्ती गुण के कारण, प्रकाश (या ध्वनि, या किसी दूसरी तरह की तरंग) की एक किरण जो चमकीली दीर्घवृत्तीय सतह की एक नाभि से निकलती है परावर्तित होकर दूसरी नाभि पर वापस जाती है (चित्र 19 देखें)। इस तथ्य का एक अनुप्रयोग मरमरश्रावी गैलरी (whispering gallery) बनाने के लिए होता है।



चित्र 19

अब एक प्रश्न इस गुण के उपयोग पर।

E 19) एक बिंदु स्रोत से उत्सर्जित सारे प्रकाश को 6 मी. दूर एक दूसरे बिंदु पर एकत्र करने के लिए एक दीर्घवृत्तीय परावर्तक तैयार करना है। यदि परावर्तक की चौड़ाई 10 मी. है, तो इसको कितना ऊंचा होना चाहिए?

आइए, अब देखें कि किन परिस्थितियों में एक दी गई रेखा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा होगी।

मान लीजिए, रेखा $y = mx + c$ है।

y का मान दीर्घवृत्त के समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1, \text{ अर्थात्}$$

$$x^2(b^2 + a^2m^2) + 2mca^2x + a^2(c^2 - b^2) = 0.$$

$y = mx + c$ एक स्पर्श रेखा तभी होगी जबकि x में इस द्विघाती समीकरण के मूल समान हों। ऐसा तब होगा जब इसका विविक्तकर शून्य होगा, अर्थात्,

$$4m^2c^2a^4 = 4(b^2 + a^2m^2)\,a^2(c^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2m^2 + b^2 \qquad \ldots\ldots(18)$$

अतः (18), रेखा $y = mx + c$ की दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का स्पर्श रेखा होने की शर्त है।

अब आपके लिए इस प्रतिबंध के प्रयोग का एक अवसर है।

E 20) जाँच कीजिए कि $y = x + 5$ दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 1$ को स्पर्श करती है या नहीं।

अब हम दीर्घवृत्त पर अपनी चर्चा समाप्त करेंगे और एक दूसरे मानक शांकव पर गौर करेंगे।

2.5 अतिपरवलय

आइए अब हम उस शांकव पर विचार करें जो हमें समीकरण (1) में $e > 1$ लेने पर प्राप्त होता है, अर्थात् अतिपरवलय। आइए हम इसे परिभाषित करें।

परिभाषा : अतिपरवलय (hyperbola) ऐसे बिन्दुओं का समुच्चय है जिनकी किसी नियत बिंदु F से दूरी, उनकी F से न गुज़रने वाली किसी नियत रेखा L से दूरी की $e(>1)$ गुना होती है।

दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक समीकरण को प्राप्त करने की विधियां समान हैं। नीचे दिए गए प्रश्न में हम आप से अतिपरवलय के लिए इस समीकरण को प्राप्त करने को कहेंगे।

E 21) क) दिखाइए कि एक शांकव, जिसकी नाभि (0,0) पर है, नियता $x + c = 0$ है और उत्केन्द्रता $e > 1$ है, उसका समीकरण

$$\left(x + \frac{ce^2}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{e^2c^2}{(e^2-1)^2} \text{ है।}$$

ख) समीकरण

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ जहाँ } a = \frac{ec}{e^2-1},\ b = a\sqrt{e^2-1}$$

प्राप्त करने के लिए मूल बिंदु को उपयुक्त रूप से स्थानांतरित कीजिए।

ग) $X'Y'$-तंत्र में नाभि के निर्देशांक और नियता का समीकरण क्या है?

E 22) जिस शांकव की नाभि $(-ae, 0)$ पर है और नियता $x = -\frac{a}{e}$, जहां $e\ (>1)$ उत्केन्द्रता है, उसका समीकरण क्या है?

अन्य शांकवों की तरह, हम किसी दिए गए अतिपरवलय की नाभि को $(-ae, 0)$, और इसकी नियता को $x = \frac{-a}{e}$ पर ला सकते हैं। अपने निर्देशांक अक्षों को स्थानांतरित करके और घुमाके इस प्रकार, हम किसी अतिपरवलय के समीकरण को E 21 में आपको प्राप्त समीकरण, अर्थात्

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \ldots\ldots(19)$$

जहां $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, में रूपांतरित कर सकते हैं।

अतः (19) अतिपरवलय के समीकरण का मानक रूप है।

आइए अब इस वक्र का अनुरेखण करें।

2.5.1 मानक रूप का वर्णन

सममिति और अन्य गुणों के लिए आइए हम (19) का अध्ययन करें।

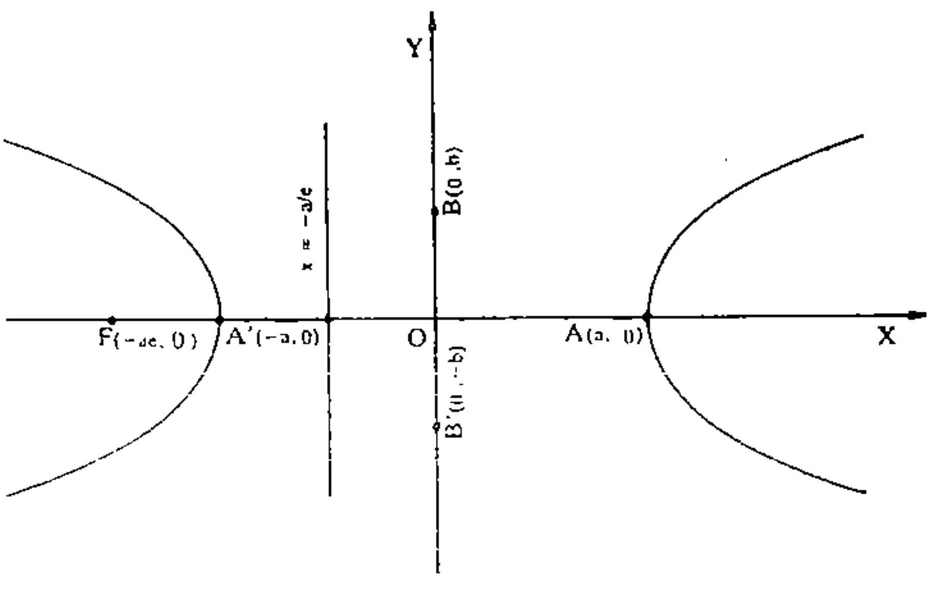
पहले तो, यदि $-a < x < a$, तो y का ऐसा कोई वास्तविक मान नहीं है जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को संतुष्ट करता हो। अतः रेखाएं $x = -a$ और $x = a$ के बीच वक्र का कोई हिस्सा नहीं है।

दूसरे, यह दोनों अक्षों और (0,0) के प्रति सममित है। इसलिए इसको पहले चतुर्थांश में अनुरेखित करना काफ़ी होगा।

तीसरे, बिंदु $(\pm a, 0)$ इस पर स्थित हैं और यह y-अक्ष को काटता नहीं है।

अंत में, चूंकि $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$, जैसे-जैसे x बढ़ेगा, वैसे-वैसे y भी बढ़ेगा।

अतः अतिपरवलय दोनों x और y दिशाओं में अनंत की ओर बढ़ता है। हमने इस शांकव को चित्र 20 में दिखाया है। आप देख सकते है कि अन्य शांकवों से अलग इसकी दो असंयुक्त (disjoint) शाखाएँ हैं।



चित्र 20 : अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

वक्र की सममिति को देख कर क्या आप महसूस करते हैं कि इसकी एक और नाभि और नियता है?

आप जाँच कर सकते हैं कि इसकी एक और नाभि (ae, 0) है जिसकी संगत नियता $x = \frac{a}{e}$ है।

अतिपरवलय अपनी नाभियों को जोड़ने वाली रेखा को दो बिंदुओं पर काटता है। ये बिंदु इसके **शीर्ष** कहलाते हैं। इसके शीर्षों को जोड़ने वाला रेखा खंड इसका **अनुप्रस्थ अक्ष** (transverse axis) कहलाता है। (कुछ लोग शीर्षों को जोड़ने वाली रेखा को अनुप्रस्थ अक्ष कहते हैं।)

अतः, चित्र 20 में बिंदु $A'(-a, 0)$ और $A(a, 0)$ अतिपरवलय के शीर्ष हैं, और रेखा खंड AA' इसका अनुप्रस्थ अक्ष है। इस अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई $2a$ है।

अनुप्रस्थ अक्ष का मध्य बिंदु अतिपरवलय का **केन्द्र** है। चित्र 20 में रेखा खंड BB', जहां $B(0, b)$ है और $B'(0, -b)$ है, दिए गए अतिपरवलय का **संयुग्मी अक्ष** (conjugate axis) कहलाता है।

नोट कीजिए कि यह अनुप्रस्थ अक्ष पर लंब है और इसका मध्यबिंदु अतिपरवलय का केन्द्र है। इसको संयुग्मी अक्ष कहने का कारण यह है कि यह (19) के **संयुग्मी अतिपरवलय** (conjugate hyperbola)
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष बन जाता है। (इस पाठ्यक्रम में हम संयुग्मी अतिपरवलय की चर्चा नहीं करेंगे। यदि आप उसके बारे में और जानना चाहें तो आप रमेश कुमार की 'A Textbook of Coordinate Geometry' देख सकते हैं।)

आइए, अतिपरवलय के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 3 : अतिपरवलय $4x^2 - 9y^2 = 36$ के शीर्ष, उत्केन्द्रता, नाभियाँ और अक्ष मालूम कीजिए।

हल : समीकरण को मानक रूप में हम $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ लिख सकते हैं :

इसकी (19) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $a = 3$, $b = 2$.

अतः शीर्ष $(\pm 3, 0)$ है।

अब, चूँकि $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, हम पाते हैं कि $e^2 = \frac{13}{9}$ इस प्रकार उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{13}}{3}$ है। तब, नाभियाँ $(\pm ae, 0)$, अर्थात् $(\pm\sqrt{13}, 0)$ हैं। अनुप्रस्थ अक्ष बिंदुओं $(3, 0)$ और $(-3, 0)$ को जोड़ने वाला रेखा खंड है, और संयुग्मी अक्ष $(0, 2)$ और $(0, -2)$ को जोड़ने वाला रेखा खंड है।

अब आप कुछ प्रश्नों को करने का प्रयास कीजिए।

E 23) $\sqrt{2}$ उत्केन्द्रता वाले अतिपरवलय का मानक समीकरण मालूम कीजिए। (ऐसा अतिपरवलय **समकोणीय अतिपरवलय** (rectangular hyperbola) कहलाता है।)

E 24) ऐसे अतिपरवलय का समीकरण मालूम कीजिए जिसका केन्द्र (0,0) है, जिसके अक्ष निर्देशांक अक्षों पर हैं, और जिसके लिए

क) एक शीर्ष (0, 3) पर है और अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई संयुग्मी अक्ष की लंबाई की दुगनी है,

ख) एक शीर्ष (2, 0) पर और नाभि $F(\sqrt{13}, 0)$ पर है।

E 25) क) दिखाइए कि अतिपरवलय (19) के किसी बिंदु $P(x, y)$ से नाभीय त्रिज्याओं की लंबाइयाँ $|ex + a|$ और $|ex - a|$ हैं।

ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए (क) का अनुरूप क्या है?

E 26) कोई अतिपरवलय जितना अधिक उत्केन्द्र होगा, उतनी ही अधिक उसकी शाखाएं उसके अनुप्रस्थ अक्ष से फैलेंगी। सत्य या असत्य? क्यों?

अन्य शांकवों की तरह, हम अतिपरवलय पर स्थित किसी भी बिंदु का प्राचलिक निरूपण कर सकते हैं। आपके हिसाब से यह क्या होगा? क्या समीकरण $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, $\forall\, t \in R$ से आपको सहायता मिलती है? इसके प्रयोग से हम (19) पर किसी बिंदु को $x = a \sec t$, $y = b \tan t$, के पदों में लिख सकते हैं, जहाँ $t \in R$ और $0 \le t < 2\pi$.

आइए अब हम अतिपरवलय के कुछ गुण देखें।

2.5.2 डोरी गुण

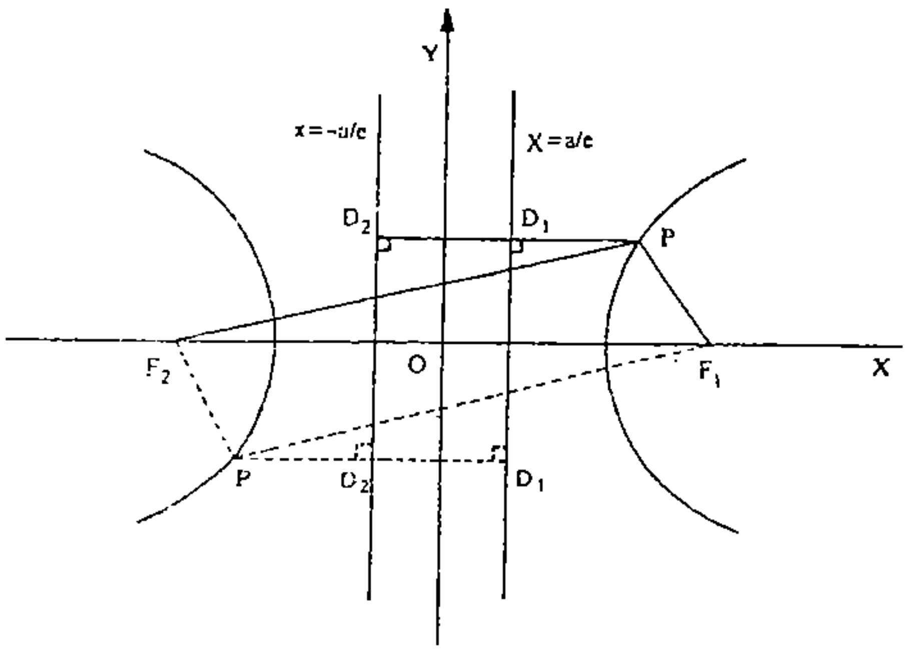
प्रमेय 1 में आपने देखा कि दीर्घवृत्त एक ऐसे बिंदु द्वारा अनुरेखित पथ है जिसकी दो नियत बिंदुओं से दूरियों का योग एक स्थिरांक है। ऐसा ही गुण अतिपरवलय के लिए सत्य है। केवल, इस स्थिति में हम दूरियों के अंतर को देखते हैं।

प्रमेय 2: क) अतिपरवलय पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का अंतर उसके अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई के बराबर होता है।

ख) विलोमत: ऐसे सभी बिंदुओं P का समुच्चय जिनके लिए $|PF_1 - PF_2| = 2a$, जहाँ F_1 और F_2 दो नियत बिंदु हों, a एक स्थिरांक हो और $F_1F_2 > 2a$, एक अतिपरवलय होता है।

उपपत्ति : क) जैसा कि आप जानते हैं, हम यह मान सकते हैं कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

मान लीजिए $P(x, y)$ इस पर एक बिंदु है और इसकी नाभियां F_1 और F_2 हैं। इसके अलावा, मान लीजिए D_1 और D_2 दोनों नियताओं पर P से डाले गए लंबों के पाद हैं (चित्र 21 देखें)। चित्र में आप दोनों स्थितियां देख सकते हैं — जब P अतिपरवलय की पहली शाखा पर है या दूसरी पर।



चित्र 21 : $|PF_1 - PF_2|$ स्थिरांक है।

अब, परिभाषा के अनुसार,

$PF_1 = ePD_1$ और $PF_2 = ePD_2$, इसलिए, $|PF_1 - PF_2| = e\,|PD_1 - PD_2| = e\left(\frac{2a}{e}\right) = 2a$,

जो कि अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई है।

(E 25 (क) का प्रयोग करके भी आप इसे सिद्ध कर सकते हैं।)

अगले प्रश्न में हम आपसे (ख) को सिद्ध करने के लिए कह रहे हैं।

E 27 प्रमेय 2 (ख) सिद्ध कीजिए। प्रतिबंध $F_1F_2 > 2a$ का प्रयोग कहाँ होता है?

प्रमेय 2 डोरी गुण कहलाता है। इसके कारण का अनुमान आपने लगा लिया होगा। यह डोरी की सहायता से अतिपरवलय बनाने के यांत्रिक विधि का आधार है। क्योंकि यह तरीका दीर्घवृत्त को बनाने की विधि से अधिक जटिल है हम इसे यहाँ नहीं बताएंगे।

डोरी गुण विश्व युद्धों में परास (range) का माप मालूम करने और नौसंचालन (navigation) के लिए विकसित प्रणाली -- अतिपरवलयिक संचालन (hyperbolic navigation) का आधार भी है।

और अब हम देखेंगे कि अतिपरवलय की स्पर्श रेखा कैसे मालूम करते हैं।

2.5.3 स्पर्श रेखाएं और अभिलंब

आपने दीर्घवृत्त और अतिपरवलय की विशेषताओं में समानता को नोट किया होगा। अतिपरवलय पर दो बिंदुओं को जोड़ने वाली जीवा का समीकरण और स्पर्श रेखा का समीकरण भी भाग 2.4,3 के अनुसार प्राप्त किए जाते हैं। हम इसकी विस्तृत जानकारी यहाँ नहीं देंगे। यह कहना काफ़ी है कि ये सभी समीकरण दीर्घवृत्तीय स्थिति में b^2 के स्थान पर $-b^2$ रखकर प्राप्त किए जा सकते हैं।

अतः $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित किसी बिंदु (x_1, y_1) पर इस अतिपरवलय की स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \text{ है।} \qquad \ldots\ldots (20)$$

और, किसी बिंदु (x_1, y_1) पर $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अभिलंब का समीकरण

$$a^2\left(\frac{x - x_1}{x_1}\right) + b^2\left(\frac{y - y_1}{y_1}\right) = 0 \text{ है।} \qquad \ldots\ldots (21)$$

इसी प्रकार, किसी सरल रेखा $y = mx + c$ के $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्पर्श रेखा होने का प्रतिबंध

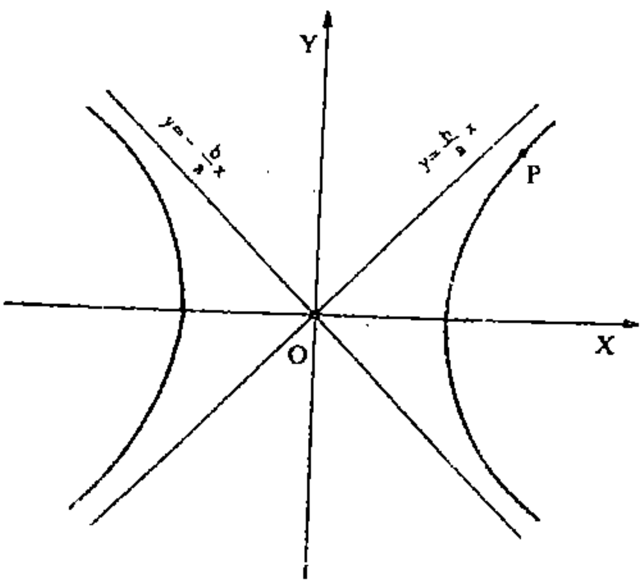
$c^2 = a^2m^2 - b^2$ है।

अब, एक छोटा प्रश्न।

E 28) क) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ के प्रत्येक शीर्ष पर स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण मालूम कीजिए।

ख) क्या $3y = 2x$ इस अतिपरवलय की स्पर्श रेखा है? यदि हाँ, तो स्पर्श बिंदु ज्ञात कीजिए।

अब हम आपको अतिपरवलय की कुछ विशेष स्पर्श रेखाओं से परिचित कराएंगे। अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा रेखाएं $y = \pm\frac{b}{a}x$ पर विचार कीजिए (चित्र 22 देखें)। ये रेखाएं स्पर्शिता की शर्त पूरी करती हैं। ये अतिपरवलय की स्पर्श रेखाओं के ऐसे युग्म हैं जो इसके केन्द्र से गुज़रती हैं। ऐसी स्पर्श रेखाएं अतिपरवलय के **अनंतस्पर्शी** (asymptote) कहलाते हैं।



चित्र 22 : $y = \pm\frac{b}{a}x$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अनंतस्पर्शी हैं।

अब, मान लीजिए पहले चतुर्थांश में अतिपरवलय की शाखा पर कोई बिंदु P (x, y) है। तो, इसकी $y = \frac{b}{a}x$ से दूरी

$$\frac{|ay - bx|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(ay + bx)}$$

$$= \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\,(bx + b\sqrt{x^2-a^2})}$$, चूंकि $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ और $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$$= \frac{a^2b}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(x + \sqrt{x^2 - a^2})}$$ है।

जैसे-जैसे x बढ़ता है ये दूरी छोटी होती जाती है। अतः जैसे-जैसे P अतिपरवलय की शाखा $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ पर अनंत की ओर प्रवृत्त होता है, इसकी $y = \frac{b}{a}x$ से दूरी शून्य की ओर प्रवृत होती है। लेकिन, अनंतस्पर्शी वक्र को वास्तव में कभी काटता नहीं है। इसलिए हम कहते है कि इसका स्पर्श बिंदु अनंत दूरी पर है। आप जाँच कर सकते है कि यह $y = \frac{-b}{a}x$ के लिए भी सत्य है। वास्तव में, वे स्पर्श रेखाएं जिनके स्पर्श बिंदु 'अनंत पर' हों अनंतस्पर्शी कहलाते हैं।

अब ये प्रश्न कीजिए।

अनंतस्पर्शियों पर विस्तृत चर्चा एम.टी.ई -01 में की गई है।

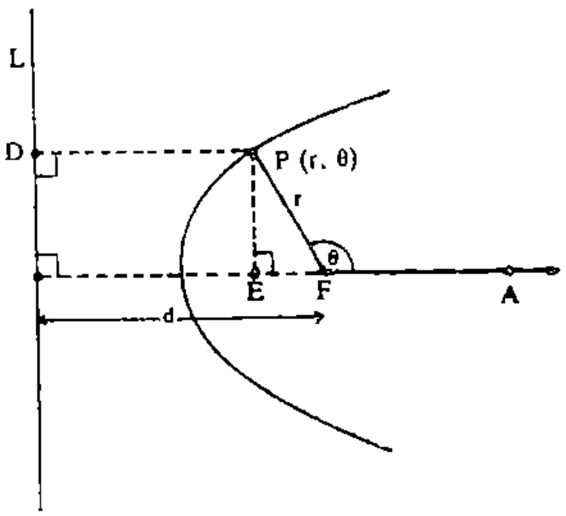
E 29) समकोणीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ के अनंतस्पर्शी मालूम कीजिए। क्या ये a के किसी भी मान के लिए एक से हैं?

E 30) a और b पर किन प्रतिबंधों के अधीन अतिपरवलय (19) के अनंतस्पर्शी एक दूसरे पर लंब होंगे?

अभी तक हमने शांकवों के कार्तीय और प्राचलिक समीकरणों की चर्चा की है। लेकिन कुछ अनुप्रयोगों में शांकव का ध्रुवीय समीकरण (भाग 1.5 देखें) अधिक उपयोगी होता है। तो आइए देखें कि यह समीकरण क्या है।

2.6 शांकवों का ध्रुवीय समीकरण

उत्केन्द्रता e वाले शांकव पर विचार कीजिए। नाभि F को ध्रुव मानिए। हम शांकव को इस तरह घुमा सकते हैं कि F के संगत नियता L ध्रुव के बाएं तरफ पर पड़े, जैसा चित्र 23 में है। मान लीजिए रेखा FA, जो नियता पर लंब है, ध्रुवीय अक्ष है और d, F और L के बीच की दूरी है।



चित्र 23 : शांकव का ध्रुवीय समीकरण प्राप्त करना।

मान लीजिए P (r, θ) शांकव पर कोई बिंदु है। तब, यदि D और E, P से L और FA पर डाले गए लंबों के पाद हों, तो

$PF = ePD$

$\Rightarrow r = e\,(d - EF) = e\,(d - r\cos(\pi - \theta))$

$= e\,(d + r\cos\theta)$

$$\Rightarrow r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}, \qquad \ldots\ldots (22)$$

जो शांकव का ध्रुवीय समीकरण है।

क्या आप इससे मानक शांकवों के ध्रुवीय समीकरण मालूम कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, परवलय (3) का ध्रुवीय समीकरण $r = \frac{d}{(1 - \cos \theta)}$ है, जहाँ $d = 2a$.

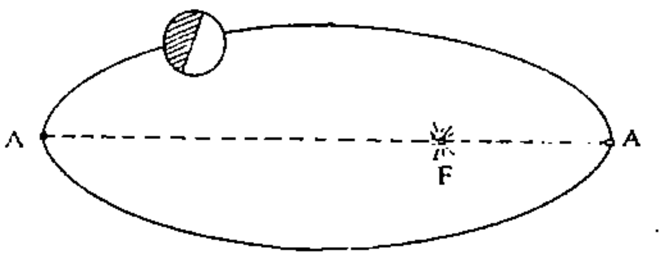
अब, मान लीजिए आप नाभि F के संगत नियता L को F के दांयी ओर लेकर शांकव का ध्रुवीय समीकरण प्राप्त करने का प्रयास करते हैं। क्या आपको (22) प्राप्त होगा? आप यह जाँच कर सकते हैं कि अब समीकरण

$$r = \frac{ed}{(1 + e \cos \theta)}, \qquad \ldots\ldots (23)$$

होगा।

आइए, अब हम ध्रुवीय रूप के एक अनुप्रयोग पर विचार करें।

उदाहरण 4 : चित्र 24 में हमने पृथ्वी की दीर्घवृत्तीय कक्षा को दिखाया है, जिसमें सूर्य एक नाभि पर है। दीर्घवृत्त पर सूर्य के सबसे नज़दीक बिंदु A उपसौर (perihelion) कहलाता है; और सूर्य से सबसे दूर वाला बिंदु A′ अपसौर (aphelion) कहलाता है।



चित्र 24 : सूर्य के चारों ओर पृथ्वी की कक्षा में अपसौर और उपसौर।

दिखाइए कि उपसौर दूरी $FA = \frac{ed}{1+e}$ और अपसौर दूरी $FA' = \frac{ed}{1-e}$, जहाँ d, (22) और (23) में दिया गया है।

हल : A के ध्रुवीय निर्देशांक (FA, 0) है और A′ के (FA′, π) है। अतः (23) से हम पाते है कि $FA = \frac{ed}{1+e}$ और $FA' = \frac{ed}{1-e}$.

यह जानने के लिए कि हमने इस भाग में जो कुछ किया है उसे आपने समझ लिया है या नहीं, आप निम्नलिखित प्रश्न कीजिए।

E 31) मान लीजिए दीर्घवृत्त $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ के दीर्घ अक्ष की लंबाई 2a है। दिखाइए कि $a = \frac{ed}{1 - e^2}$.

E 32) एक धूमकेतु (comet) एक परवलयाकार पथ पर चल रहा है। एक ध्रुवीय निर्देशांक तंत्र इस परवलय के तल में इस प्रकार प्रविष्ट किया जाता है कि सूर्य नाभि पर हो और ध्रुवीय अक्ष परवलय के अक्ष पर उस दिशा में खींची गई हो। जिस दिशा में वक्र खुला है। जब धूमकेतु सूर्य के केंद्र से 3.0×10^7 कि.मी. पर है, तब सूर्य से धूमकेतु की ओर कोई किरण ध्रुवीय अक्ष से $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाती है। इस स्थिति में निम्नलिखित मालूम कीजिए :

क) इस परवलयिक पथ का समीकरण,

ख) धूमकेतु की सूर्य से न्यूनतम दूरी,

ग) धूमकेतु और सूर्य के बीच की दूरी जब $\theta = \frac{\pi}{2}$

तो इस इकाई में आपने ऐसे विभिन्न शांकवों का कार्तीय, प्राचलिक और ध्रुवीय निरूपण देखा जिनकी नाभियाँ संगत नियताओं पर स्थित नहीं है। आप जानते हैं कि ऐसे शांकव **अनपभ्रष्ट शांकव** है। अगर किसी शांकव की नाभि उसके संगत नियता पर स्थित हो, तो वह शांकव **अपभ्रष्ट शांकव** (degenerate conic) कहलाता है। हम इनके बारे में गहराई में नहीं जाएंगे। लेकिन आइए इनके विभिन्न प्रकारों की सूची देखें। अपभ्रष्ट शांकव की 5 किस्में हैं : बिंदु, प्रतिच्छेदी रेखाओं का युग्म, अलग-अलग समांतर रेखाओं का युग्म, संपाती रेखाओं का युग्म और रिक्त समुच्चय।

आइए, अब हम संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में क्या बताया है।

2.7 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों की चर्चा की है।

1) शांकवों का नाभि-नियता परिभाषी गुण।

2) परवलय का मानक रूप $y^2 = 4ax$ है। इसकी नाभि $(a, 0)$ पर है, और नियता $x = -a$ है। इसकी उत्केन्द्रता 1 है।
   अन्य मानक रूप $x^2 = 4ay$, $x^2 = -4ay$ और $y^2 = -4ax$ हैं, जहां $a > 0$.

3) $y^2 = 4ax$ की इस पर स्थित बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा $yy_1 = 2a(x+x_1)$ है।

4) $y = mx + c$, $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा होगी यदि $c = \frac{a}{m}$.

5) $y^2 = 4ax$ का (x_1, y_1) पर अभिलंब
   $y = -\frac{y_1}{2a}x + y_1 + \frac{y_1^3}{8a^2}$ है।

6) उत्केंद्रता e (<1) वाले दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है, जहाँ $b^2 = a^2(1-e^2)$.
   इसकी नाभियाँ $(\pm ae, 0)$ और नियताएं $x = \pm\frac{a}{e}$ हैं।

7) दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिंदु की नाभीय दूरियों का योग उसके दीर्घ अक्ष की लंबाई के बराबर होता है।

8) बिंदु (x_1, y_1) पर दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ है।

9) $y = mx + c$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा होगी यदि $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

10) (x_1, y_1) पर $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलंब $\frac{b^2}{y_1}(y - y_1) = \frac{a^2}{x_1}(x - x_1)$ होता है।

11) e (> 1) उत्केंद्रता वाले अतिपरवलय के समीकरण का मानक रूप
   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ है, जहाँ $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. इसकी नाभियां $(\pm ae, 0)$ और
   नियताएं $x = \pm\frac{a}{e}$ हैं।

12) अतिपरवलय पर किसी बिंदु की नाभीय दूरियों का अंतर उसके अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई के बराबर होता है।

13) (x_1, y_1) पर $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण
   $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ होता है।

14) $y = mx + c$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा होगी यदि $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

15) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का (x_1, y_1) पर अभिलंब $\frac{a^2}{x_1}(x-x_1) + \frac{b^2}{y_1}(y-y_1) = 0$ होता है।

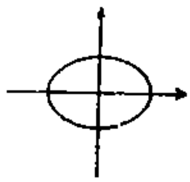
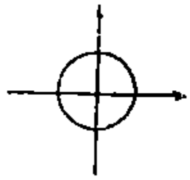
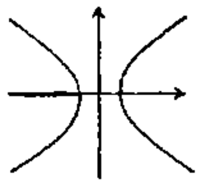
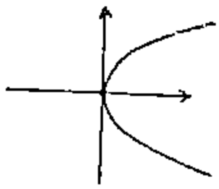
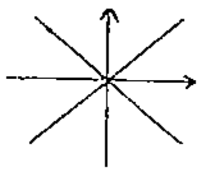
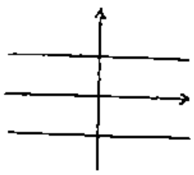
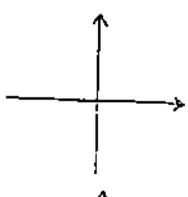
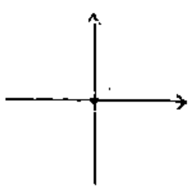
16) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अनंतस्पर्शियों के समीकरण $y = \pm\frac{b}{a}x$ होते हैं।

17) किसी बिंदु का
   क) परवलय $y^2 = 4ax$ पर प्राचलिक निरूपण $(at^2, 2at)$ है, जहाँ $t \in \mathbf{R}$;
   ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर प्राचलिक निरूपण $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ है, जहाँ $0 \leq \theta < 2\pi$;
   ग) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर प्राचलिक निरूपण $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ है जहाँ $0 \leq \theta < 2\pi$

18) उत्केंद्रता e वाले किसी शांकव का ध्रुवीय समीकरण
   $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ या $r = \frac{ed}{1 + \cos\theta}$ होगा, जो इस पर निर्भर करेगा कि विचाराधीन नियता संगत नाभि के बाई ओर या दांयी ओर पर है। यहाँ d नाभि की नियता से दूरी है।

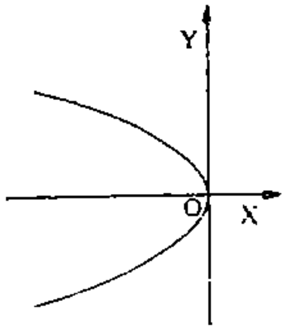
19) संभव शांकवों की सूची निम्नलिखित सारणी में दी गई है।

सारणी 1 : शांकवों के मानक रूप

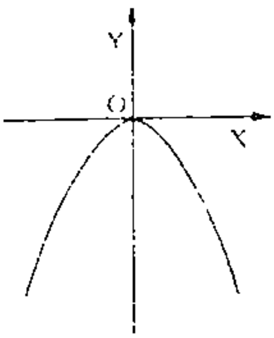
शांकव	मानक समीकरण	चित्र
दीर्घवृत्त	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$	
वृत्त	$x^2 + y^2 = a^2, a \neq 0$	
अतिपरवलय	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$	
परवलय	$y^2 = 4px, p > 0$	
प्रतिच्छेदी रेखा-युग्म	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, a, b \neq 0$	
समांतर रेखा-युग्म	$y^2 = a^2, a > 0$	
संपाती रेखा-युग्म	$y^2 = 0$	
बिन्दु शांकव	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, a, b \neq 0$	

और अब आप जाँच करना चाहेंगे कि आपने इस इकाई के उद्देश्यों (भाग 2.1 देखें) को प्राप्त कर लिए हैं या नहीं। अगर आप इकाई के प्रश्नों के हमारे हल देखना चाहेंगे, तो हमने नीचे के भाग में उन्हें दिए हैं।

2.8 हल/उत्तर



चित्र 25 : $y^2 = -4ax,\ a>0$



चित्र 26 : $x^2 = -4ay,\ a>0$

E 1) क) इच्छित समीकरण

$$(x-2)^2 + y^2 = 1^2 \ \frac{(x-y)^2}{2} \text{ होगा।}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 8 = 0.$$

ख) इच्छित समीकरण $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\ \frac{(2x+y-1)^2}{5}$ है, अर्थात्

$$16x^2 - 4xy + 19y^2 + 4x - 38y + 19 = 0.$$

E 2) चित्र 25 में हमने परवलय $y^2 = -4ax,\ a>0$, अनुरेखित किया है। इसका शीर्ष $(0,0)$ है, और नाभि $(-a,0)$ है।
चित्र 26 में हमने $x^2 = -4ay,\ a>0$, अनुरेखित किया है। इसका शीर्ष $(0,0)$ है और नाभि $(0, -a)$ है।

E 3) परवलय चित्र 26 के परवलय जैसा है।

E 4) परवलय $x^2 = -2y$ है। अतः, इसकी नाभि $(0, -\frac{1}{2})$ है और नाभिलंब $y = -\frac{1}{2}$ है।

E 5) क) समीकरण $xx_1 + 2\left(\frac{y+y_1}{2}\right) = 0$ है, जहाँ $x_1 = y_1 = 0$, अर्थात् $y = 0$.

ख) नाभिलंब के सिरे $(-1, 2)$ और $(-1, -2)$ है। इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएं $x + y - 1 = 0$ और $x - y - 1 = 0$ हैं।

E 6) परवलय का अक्ष इसे केवल शीर्ष पर काटता है, लेकिन यह शीर्ष पर स्पर्श रेखा नहीं है।

E 7) नोट करने की पहली बात यह है कि कोई स्पर्श रेखा परवलय के अक्ष के समांतर नहीं हो सकती है। और किसी m के लिए, रेखा (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा होगी यदि $x_1^2 = 4ay_1,\ y_1 = mx_1 + c$, और $x_1^2 = 4a(mx_1 + c)$ के संपाती मूल हों। अतः, $y = mx + c$ स्पर्श रेखा होगी यदि $m \neq \tan\frac{\pi}{2}$ और $c = -am^2$.

E 8) हमें परवलय की नाभि मालूम करना है। हम जानते हैं कि $(0.2, 0.5)$ इस पर स्थित है। अतः $0.25 = 4a(0.2) = 0.8\ a \Rightarrow a = 0.3125.$

E 9) स्पर्श रेखा $x = 2(y + 1)$ है। इसकी प्रवणता $\frac{1}{2}$ है। अतः अभिलंब $y - 1 = -2(x - 1)$ है।

E 10) संपर्क बिंदु $\left(\frac{a}{2}, \frac{2a}{m}\right)$ है। अभिलंब की प्रवणता $-\frac{1}{m}$ है। अतः इसका समीकरण होगा

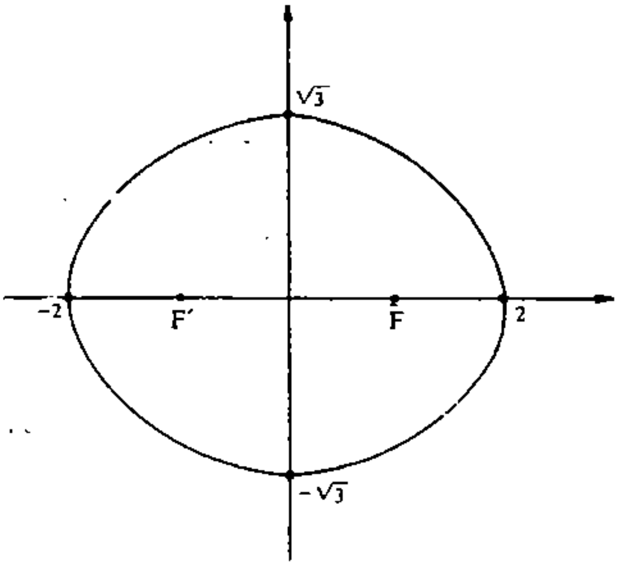
$$y - \frac{2a}{m} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{a}{m^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x + my = a\left(2 + \frac{1}{m^2}\right)$$

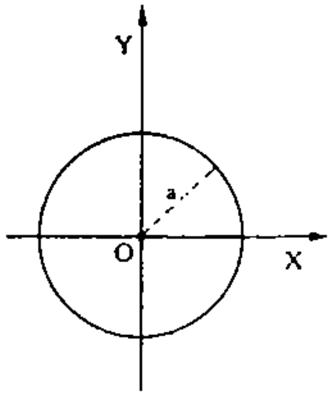
E 11) समीकरण को $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ लिखा जा सकता है।

दीर्घ अक्ष की लंबाई 4 है और यह x-अक्ष पर स्थित है। लघु अक्ष की लंबाई $2\sqrt{3}$ है।
$\therefore (\sqrt{3})^2 = 2^2\ (1 - e^2)$, जहाँ e उत्केंद्रता है।
$\Rightarrow e = \frac{1}{2}$.
शीर्ष $(\pm 2, 0)$ हैं और नाभियां $(\pm 1, 0)$ हैं। हम वक्र को चित्र 27 में अनुरेखित करते हैं।

E 12) समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ है, अर्थात् $x^2 + y^2 = a^2$. दोनों नाभियां केन्द्र $(0,0)$ पर है। इस स्थिति में, दीर्घवृत्त चित्र 28 में दिया हुआ वृत्त बन जाता है।



चित्र 27



चित्र 28 : वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$

E 13) न्यूनतम और अधिकतम दूरियां शीर्षों की उस नाभि से दूरियाँ हैं जिस पर सूर्य स्थित है।

तो मान लीजिए, कक्षा $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ है और सूर्य (ae, 0) पर है। शीर्ष (a, 0) और (−a,0) पर स्थित हैं। तब

$\frac{a - ae}{a + ae} = \frac{29}{30} \Rightarrow e = \frac{1}{59}$

E 14) जैसे-जैसे e बढ़ता है लघु अक्ष छोटी होती जाती है, और दीर्घवृत्त अधिक सपाट होता जाता है। अतः, दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता उसकी सपाटता (या समतलता) का माप है।

E 15) आपका दीर्घवृत्त चित्र 27 में दिए गए दीर्घवृत्त की तरह होना चाहिए। इसके शीर्ष (±2, 0) होंगे। इसकी नाभियाँ (±1, 0) होंगी।

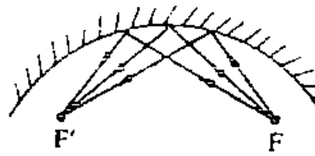
E 16) (a, 0) पर स्पर्श रेखा $\frac{xa}{a^2} + \frac{y.0}{b^2} = 1 \Rightarrow x = a$ है। इसी प्रकार, (−a,0), (0 b) और (0,−b) पर स्पर्श रेखाएं क्रमशः $x = -a$, $y = b$ और $y = -b$ हैं।

E 17) स्पर्श रेखा $2x + 4y = 8$ है, अर्थात् $x + 2y = 4$. इसलिए, अभिलंब की प्रवणता 2 है। अतः, इसका समीकरण $y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 3$ है।

E 18) मान लीजिए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है। किसी व्यास का समीकरण $y = mx$ होगा, किसी m के लिए, क्योंकि यह (0,0) से गुज़रेगा। और, यदि व्यास का एक सिरा (x_1, y_1) है, तो $y_1 = mx_1$. इस प्रकार, $(-x_1, -y_1)$ भी दीर्घवृत्त और रेखा $y = mx$ पर स्थित होगा। अतः यह व्यास का दूसरा सिरा है। इसलिए, हमें (x_1, y_1) और $(-x_1, -y_1)$ पर स्पर्श रेखाएं प्राप्त करने की आवश्यकता है।

ये क्रमशः $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ और $-\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}\right) = 1$ हैं।

चूंकि दोनों की प्रवणताएँ $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ हैं, वे समांतर हैं।



चित्र 29

E 19) हमने चित्र 29 में परावर्तक का अनुप्रस्थ काट दिखाया है। इस दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष 10 मी. है और नाभियाँ (±3, 0) पर स्थित हैं। इसलिए, इसकी उत्केन्द्रता $e = \frac{3}{5}$ है।

इसलिए, यदि h इसकी ऊंचाई है, तो $h = 5\sqrt{1 - e^2} = 4$ मी.

E 20) इस मामले में $a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{1}{3}$, $c = 5$ और $m = 1$.

$\therefore c^2 \neq a^2m^2 + b^2$. इसलिए, रेखा दिए गए दीर्घवृत्त पर स्पर्श रेखा नहीं है।

E 21) क) (1) के प्रयोग से, हम देखते हैं कि $x^2 + y^2 = e^2(x + c)^2$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{ce^2}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{e^2c^2}{(e^2 - 1)^2}$$

जैसा भाग 2.4 में।

ख) मूल बिंदु को $\left(\frac{-ce^2}{e^2 - 1}, 0 \right)$ पर स्थानांतरित करने से (क) में दिया गया समीकरण

$x'^2 - \frac{y'}{e^2 - 1} = \frac{e^2c^2}{(e^2 - 1)^2}$ बन जाता है।

$\Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, जहाँ $a = \frac{ec}{e^2 - 1}$ और $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.

ग) X'Y'-तंत्र में नाभि $(-ae, 0)$ है और नियता $x + \frac{a}{e} = 0$ है।

E 22) वांछनीय समीकरण

$(x + ae)^2 + y^2 = e^2(x + \frac{a}{e})^2$ है

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$$

E 23) वांछनीय समीकरण

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(2 - 1)} = 1 \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$ है।

E 24) क) इस स्थिति में अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष के साथ है। इसलिए हम (19) में x और y को आपस में बदलते हैं। और, अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 6 है।

इसलिए वांछनीय समीकरण

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$ है,

$\Rightarrow y^2 - 4x^2 = 9.$

ख) यहाँ अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष पर है, और $a = 2$ और $ae = \sqrt{13}$. $\therefore e = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

इस प्रकार, वांछनीय समीकरण

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4\left(\frac{13}{4} - 1\right)} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

E 25) क) नाभियाँ $F(-ae, 0)$ और F' $(ae, 0)$ पर स्थित हैं। अतः $PF = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2}$.

लेकिन, चूँकि P अतिपरवलय पर स्थित है,

$y^2 = (x^2 - a^2)(e^2 - 1)$

$\therefore PF = \sqrt{(ex + a)^2} = |ex + a|$

इसी प्रकार, $PF' = |ex - a|$

ख) इस मामले में $PF = ex + a$ तथा $PF' = a - ex$. भाग 2.4.2 से आपको याद होगा कि $PF + PF' = 2a$.

किसी अतिपरवलय का नाभिलंब नाभि से होकर जाने वाली और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंब जीवा है।

E 26) मान लीजिए आप अनुप्रस्थ अक्ष नियत कर देते है और अतिपरवलय की उत्केंद्रता बढ़ाते हैं। आप देखेंगे कि इसके नाभिलंबों की लंबाइयाँ बढ़ती हैं। अतः दिया गया कथन सत्य है।

E 27) मान लीजिए $F_1F_2 = 2c$ और मान लीजिए $(0,0)$, F_1F_2 का मध्य बिंदु है। तो F_1 के निर्देशांक $(-c,0)$ और F_2 के $(c,0)$ होंगे। यदि P के निर्देशांक (x, y) हैं, तो

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$\Rightarrow \left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a$

$\Rightarrow (x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2)^2 = \sqrt{(x^2 - c^2)^2 + 2y^2(c^2 + x^2) + y^4}$,

वर्ग करने और सरल करने पर।

$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$, पुनः वर्ग करने और सरल करने पर।

E 28) क) शीर्ष $(2, 0)$ और $(-2, 0)$ हैं। इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएं क्रमशः $x = 2$ और $x = -2$ हैं। इन दोनों बिंदुओं पर अभिलंब x-अक्ष है।

ख) यहाँ $a^2 = 4$, $b^2 = 9$, $m = \frac{2}{3}$, $c = 0$.

$\therefore c^2 \neq a^2m^2 - b^2$. $\therefore 3y = 2x$ दिए गए अतिपरवलय पर स्पर्श रेखा नहीं है।

E 29) $y = \pm x$, जो a पर निर्भर नहीं है। अतः ये किसी भी समकोणीय अतिपरवलय के अनंतस्पर्शी हैं।

E 30) $y = \frac{b}{a}x$ और $y = -\frac{b}{a}x$ एक दूसरे पर लंब होंगे यदि और केवल यदि

$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{-b}{a}\right) = -1$, अर्थात्, यदि और केवल यदि $a = b$, अर्थात्, यदि और केवल यदि अतिपरवलय समकोणीय है।

E 31) उदाहरण 4 की तरह, आप दिखा सकते हैं कि $FA = \frac{ed}{1-e}$ और $FA' = \frac{ed}{1+e}$, जहां A और A' दीर्घवृत्त के शीर्ष हैं और F एक नाभि है।

तब $2a = AA' = FA + FA' = \frac{2ed}{1-e^2}$

$\therefore a = \frac{ed}{1-e^2}$

E 32) क) चूंकि वक्र एक परवलय है, इसका समीकरण $r = \frac{d}{1 - \cos\theta}$ है। हम यह भी जानते हैं कि

$(3.0 \times 10^7, \frac{\pi}{3})$ इस पर स्थित है।

$\therefore d = 3.0 \times 10^7 (1 - \cos\frac{\pi}{3}) = 1.5 \times 10^7$ कि.मी.

अतः वांछनीय समीकरण

$$r = \frac{1.5 \times 10^7}{1 - \cos\theta} \text{ है।}$$

ख) न्यूनतम दूरी तब होगी जब धूमकेतु परवलय के शीर्ष पर होता है, अर्थात्, जब $\theta = \pi$.

अतः, न्यूनतम दूरी $= \frac{1.5 \times 10^7}{2}$ कि.मी. है।

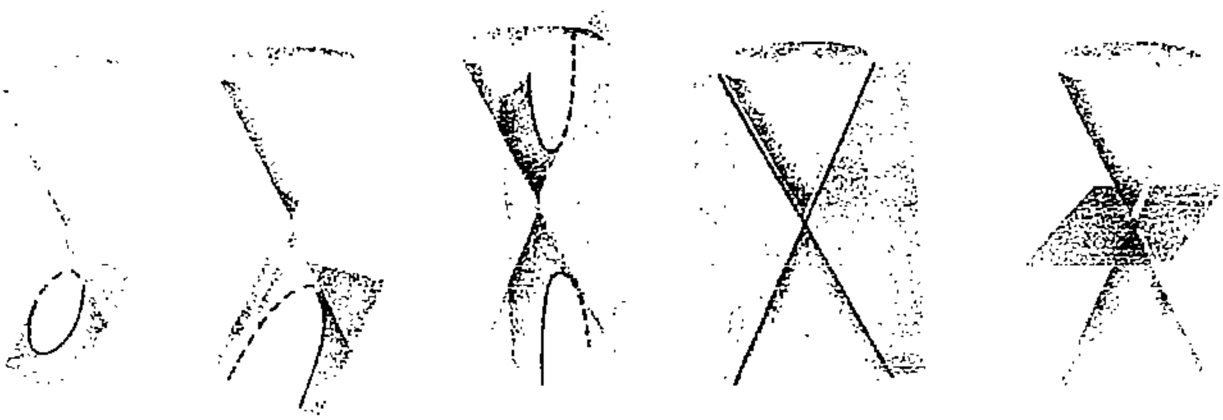
ग) वांछनीय दूरी 1.5×10^7 कि.मी. है।

इकाई 3 शांकवों का व्यापक सिद्धांत

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक समीकरण पढ़े हैं। हमने इन वक्रों और दूसरे शांकवों को शांकव के नाभि-नियता गुण द्वारा परिभाषित किया है। इस परिभाषी गुण की खोज पापस (Pappus) ने लगभग 320 ई. में प्राचीन यूनानियों द्वारा शांकव परिच्छेदों की परिभाषा के बहुत बाद की थी। अपनी किताब "Conics" में प्राचीन यूनानी गणितज्ञ एपलोनियस ने इन वक्रों को शंकु और समतल के प्रतिच्छेद के रूप में परिभाषित किया। आप शंकुओं के बारे में बाद में इकाई 6 में पढ़ेंगे, लेकिन आइए हम आपको चित्रों द्वारा दिखाएं (चित्र 1 देखें) कि शांकव कैसे शंकु के समतल परिच्छेद (planar section) होते हैं।



चित्र 1 : किसी शंकु का समतल परिच्छेद एक (क) दीर्घवृत्त, (ख) परवलय, (ग) अतिपरवलय, (घ) रेखाओं का युग्म, या (ङ) बिंदु हो सकता है।

इस इकाई में हम एक ऐसा परिणाम सिद्ध करेंगे जो शायद आपको आश्चर्यचकित करे। इस परिणाम के अनुसार, व्यापक द्विघाती समीकरण $ax^2 + hxy + by^2 + gx + fy + c = 0$ हमेशा किसी शांकव को निरूपित करता है। आप देखेंगे कि इसके गुणांकों पर अलग-अलग प्रतिबंध लगाने से यह विभिन्न प्रकार के शांकवों को निरूपित करता है।

इकाई 2 में आपने शांकवों को वर्गीकृत करने का एक तरीका देखा। ऐसा करने का एक और तरीका है जिसे आप भाग 3.3 में पढ़ेंगे। हम विभिन्न प्रकार के शांकवों के ज्यामितीय गुणों की चर्चा करेंगे और देखेंगे कि उन्हें कैसे अनुरेखित किया जा सकता है। उसके बाद, हम शांकव की स्पर्श रेखाओं की चर्चा करेंगे। और अन्त में हम देखेंगे कि दो शांकवों के प्रतिच्छेद से हमें कौन से वक्र प्राप्त हो सकते हैं।

इस इकाई के साथ हम शांकवों पर अपनी चर्चा समाप्त करेंगे। लेकिन अगले दो खंडों की इकाइयों में भी आप इनको पाएंगे। अतः यदि आप नीचे दिए गए उद्देश्यों को प्राप्त कर लेते हैं तो शेष पाठ्यक्रम को समझने में आपको आसानी होगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- किसी द्विघाती व्यंजक द्वारा निरूपित शांकव को पहचान सकेंगे;
- किसी शांकव का केन्द्र (अगर हो तो) और उसके अक्ष मालूम कर सकेंगे;
- किसी दिए गए शांकव को अनुरेखित कर सकेंगे;
- किसी दिए गए शांकव की किसी दिए गए बिंदु पर स्पर्श रेखा और अभिलंब मालूम कर सकेंगे;
- दो दिए गए शांकवों के प्रतिच्छेद बिंदुओं से होकर जाने वाले शांकवों के समीकरण प्राप्त कर सकेंगे।

3.2 व्यापक द्विघाती समीकरण

इकाई 2 में आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि प्रत्येक शांकव का मानक समीकरण $ax^2 + hxy + by^2 + gx + fy + c = 0$ के रूप का एक द्विघाती समीकरण है, किन्हीं $a, b, c, f, g, h \in \mathbf{R}$ के लिए और जहाँ a, h, b में से कम से कम एक शून्येतर है।

इस भाग में हम आपको दिखाएंगे कि इसका विलोम भी सत्य है। अर्थात् हम यह सिद्ध करेंगे कि व्यापक द्विघात समीकरण

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \quad \ldots\ldots(1)$$

जैसा कि आप देखेंगे, हम xy, x और y के गुणांकों को 2h, 2g और 2f क्रमशः लिखते हैं ताकि आगे चलकर सरलतम व्यंजक प्राप्त हों।

जहाँ a, h, b में से कम से कम एक शून्येतर है, को किसी शांकव के मानक समीकरण के रूप में रूपांतरित किया जा सकता है। यह हम निर्देशांक अक्षों को स्थानांतरित करके और घुमा कर प्राप्त कर सकते हैं। आइए देखें कैसे।

पहले तो हम XY-निकाय को O के प्रति "उपयुक्त" कोण θ से घुमाकर xy के पद को हटा देते हैं। θ को चुनने के तरीके को आप थोड़ा आगे चलकर देखेंगे। अब, इकाई 1 के समीकरण (16) और (17) से, हम देखते हैं कि (1),

$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2g(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2f(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + c = 0$ हो जाता है।

$\Rightarrow (a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta)x'^2 - 2[(a-b)\sin\theta\cos\theta - h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]x'y' + (a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta)y'^2 + (2g\cos\theta + 2f\sin\theta)x' + (2f\cos\theta - 2g\sin\theta)y' + c = 0.$

$x'y'$ पद नहीं रहेगा यदि $(a-b)\sin\theta\cos\theta = h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, अर्थात्,

$\frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta = h\cos 2\theta.$

इसलिए, $x'y'$ के पद से छुटकारा पाने के लिए, यदि $a = b$ तो हम $\theta = \frac{\pi}{4}$ चुन सकते हैं;

अन्यथा, हम $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$ चुन सकते हैं।

(हम हमेशा एक ऐसा θ चुन सकते हैं जो $-\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{4}$ के बीच में स्थित हो।)

इस तरह से चुने गए θ के लिए $x'y'$ का पद शून्य हो जाता है।

अतः, यदि हम अक्षों को कोण $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$ से घुमा दें तो (1) द्विघाती समीकरण

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Gx' + 2Fy' + C = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

में रूपांतरित हो जाता है, जहाँ $A = a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta$, और $B = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$.

इस प्रकार, $A + B = a + b$. और, थोड़ी सी गणना से आप जाँच कर सकते हैं कि $ab - h^2 = AB$.

अब विभिन्न परिस्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं।

स्थिति 1 ($ab - h^2 = 0$) : इस स्थिति में हम देखते हैं कि या तो $A = 0$ या $B = 0$. अतः मान लीजिए कि $A = 0$. तब हम यह दावा करते हैं कि B शून्येतर होगा। क्या आप सहमत हैं? क्या होगा यदि $A = 0$ और $B = 0$? ऐसी स्थिति में हमें $a = 0$, $b = 0$ और $h = 0$ प्राप्त होगा, जो हमारी इस मान्यता का खंडन करता है कि (1) एक द्विघाती समीकरण है।

अब, चूंकि $c>a$, हम इस समीकरण को $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ लिख सकते हैं, जो कि एक अतिपरवलय है।

अतः मान लीजिए $A = 0$ और $B \neq 0$. तब (2) को

$$B\left(y'+\frac{F}{B}\right)^2 = -2Gx' - C + \frac{F^2}{B} \qquad \text{......(3)}$$

लिखा जा सकता है।

अब यदि $G = 0$, तो उपरोक्त समीकरण

$$\left(y'+\frac{F}{B}\right)^2 = \frac{F^2-BC}{B^2}$$ होता है, अर्थात्

$$y'+\frac{F}{B} = \pm\sqrt{\frac{F^2-BC}{B^2}}.$$

यदि $F^2 \geqslant BC$, तो यह समांतर रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है, और यदि $F^2 < BC$, तो यह रिक्त समुच्चय को निरूपित करता है।

दूसरी ओर, यदि $G \neq 0$, तो हम (3) को

$$\left(y'+\frac{F}{B}\right)^2 = \frac{-2G}{B}\left(x'+\frac{C}{2G}-\frac{F^2}{2BG}\right)$$ लिख सकते हैं।

अब यदि हम मूल बिंदु को $\left(\frac{F^2}{2BG}-\frac{C}{2G}, \frac{-F}{B}\right)$ पर स्थानांतरित कर दें, तो समीकरण

$Y^2 = -\frac{2G}{B}X$ हो जाता है, जहाँ X, Y नए निर्देशांक हैं। भाग 2.3 से आप जानते हैं कि यह नाभि $\left(-\frac{G}{2B}, 0\right)$ और नियता $X=\frac{G}{2B}$ वाले परवलय को निरूपित करता है।

आइए, अब हम दूसरी स्थिति देखें।

स्थिति 2 ($ab - h^2 \neq 0$): अब A और B दोनों शून्येतर हैं। (2) को हम

$$A\left(x'+\frac{G}{A}\right)^2 + B\left(y'+\frac{F}{B}\right)^2 = \frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C$$

लिख सकते हैं। आइए, हम मूल बिंदु को $\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B}\right)$ पर स्थानांतरित करें और स्थिरांक $\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C$ को k बुलाएं। तब यह समीकरण

$$AX^2 + BY^2 = k \qquad \text{...... (4)}$$

हो जाता है, जहाँ X और Y नए निर्देशांक हैं।

अब, यदि $k = 0$ तो क्या होगा? यदि A और B दोनों का एक सा चिन्ह हो, अर्थात् यदि $AB = ab - h^2 > 0$, तो (4) बिंदु (0,0) को निरूपित करता है। और, यदि $ab - h^2 < 0$, तो (4) रेखा-युग्म $X = \pm\sqrt{-\frac{B}{A}}\,Y$ को निरूपित करता है।

और, यदि $k \neq 0$, तो क्या होता है? तब हम (4) को

$$\frac{X^2}{\frac{k}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{B}} = 1 \qquad \text{...... (5)}$$

लिख सकते हैं।

क्या यह समीकरण आपको जाना पहचाना लगता है? भाग 2.4 से आप देख सकते हैं कि यदि $\frac{k}{A}$ और $\frac{k}{B}$ दोनों धनात्मक हों, अर्थात्, यदि $k > 0$ और $AB = ab - h^2 > 0$, तो यह एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है। लेकिन, यदि $\frac{k}{A} < 0$ और $\frac{k}{B} < 0$, तो क्या होगा? ऐसी स्थिति में $k < 0$ और $ab - h^2 > 0$. और तब (5) रिक्त समुच्चय को निरूपित करता है।

और, यदि $\frac{k}{A}$ और $\frac{k}{B}$ के चिन्ह विपरीत हों, अर्थात् यदि $AB = ab - h^2 < 0$, तो (5) क्या निरूपित करेगा? एक अतिपरवलय।

अतः हमने $ab - h^2$ की, और इस प्रकार (1) की, सभी संभावनाओं को देख लिया है। इस प्रकार हमने निम्नलिखित परिणाम सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 1 : व्यापक द्विघाती समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक शांकव को निरूपित करता है।

इस प्रमेय को सिद्ध करते समय आपने व्यंजक $ab - h^2$ का महत्व देखा होगा। आइए, हम $ab - h^2$ के चिन्ह के अनुसार $ax^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा निरूपित विभिन्न प्रकार के अनअपभ्रष्ट और अपभ्रष्ट शांकवों को एक सारणी में लिखें। (इकाई 2 से आपको याद होगा कि अपभ्रष्ट शांकव वह शांकव होता है जिसकी नाभि उसकी संगत नियता पर स्थित होती है।)

सारणी 1 : शांकवों का वर्गीकरण

प्रतिबंध	शांकवों के प्रकार	
	अनअपभ्रष्ट	अपभ्रष्ट
$ab - h^2 = 0$	परवलय	समांतर रेखाओं का युग्म या रिक्त समुच्चय
$ab - h^2 > 0$	दीर्घवृत्त	बिंदु या रिक्त समुच्चय
$ab - h^2 < 0$	अतिपरवलय	प्रतिच्छेदी रेखाओं का युग्म

सारणी 1 हमें सभी प्रकार के संभावित शांकवों के बारे में बताती है। नीचे दिया गया प्रश्न इसी के बारे में है।

E 1) क) सभी प्रकार के पाए जाने वाले शांकव लिखिए। इनमें से कौन से अपभ्रष्ट हैं?

ख) यदि (1) वृत्त निरूपित करता हो, तो क्या $ab - h^2 = 0$?

आइए, अब हम ऊपर की उपपत्ति में दी गई विधि को कुछ उदाहरणों में प्रयोग करें।

उदाहरण 1 : $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 124x + 132y + 324 = 0$ द्वारा निरूपित शांकव को मालूम कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण (1) के रूप का है, जहाँ $a = 9, b = 16, h = -12$. आइए, अब हम अक्षों को कोण θ से घुमाएं जहाँ

$\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b} = \dfrac{24}{7}$, अर्थात् $\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{24}{7}$, अर्थात्

$12\tan^2\theta + 7\tan\theta - 12 = 0$.

अतः हम $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ ले सकते हैं, और तब $\sin\theta = \dfrac{3}{5}, \cos\theta = \dfrac{4}{5}$.

तब, नए निर्देशांक तंत्र में दिया गया समीकरण

$$25y'^2 - \frac{124}{5}(4x' - 3y') + \frac{132}{5}(3x' + 4y') + 324 = 0, \text{ अर्थात्}$$

$$\left(y' + \frac{18}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}x' \text{ हो जाता है।}$$

आइए, अब हम मूल बिंदु को $\left(0, \dfrac{-18}{5}\right)$ पर स्थानांतरित करें। तब समीकरण

$Y^2 = \dfrac{4}{5}X$ हो जाता है, जहाँ X और Y नए निर्देशांक हैं।

क्या आप इस समीकरण द्वारा निरूपित शांकव को पहचानते हैं? इकाई 2 से आप जानते हैं कि यह एक परवलय है। चूँकि जिन रूपांतरणों का हमने प्रयोग किया है वे वक्र को नहीं बदलते हैं, मूल समीकरण भी परवलय को निरूपित करता है।

उदाहरण 2 : शांकव $x^2 - 2xy + y^2 = 2$ को पहचानिए।

हल : यहां पर चूंकि $a = b = 1$, हम $\theta = 45°$ लेते हैं। तो, आइए हम अक्षों को 45° से घुमाएं। नए निर्देशांक x' और y',

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \text{ और } y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

द्वारा दिए जाते हैं।

तब, नए निर्देशांक तंत्र में

$x^2 - 2xy + y^2 = 2$, $y'^2 = 1$ में रूपांतरित हो जाता है, जो रेखाओं $y' = 1$ और $y' = -1$ के युग्म को निरूपित करता है।

इसी तरीके से आप नीचे दिया गया प्रश्न कर सकते हैं।

E 2) निम्नलिखित शांकवों को पहचानिए :

क) $x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}\,x = 2$,

ख) $9x^2 - 6xy + y^2 - 40x - 20y + 75 = 0$.

अभी तक आपने देखा है कि कोई भी द्विघाती समीकरण निम्नलिखित शांकवों में से एक को निरूपित करता है :

परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय, सरल रेखाओं का युग्म, बिंदु, रिक्त समुच्चय।

लेकिन, सारणी 1 से आप देख सकते हैं कि यदि हमें $ab - h^2$ का मान मालूम भी हो, तो भी हम तुरंत नहीं कह सकते कि शांकव क्या है। अतः किसी दिए गए शांकव को पहचानने के लिए हमें हर बार प्रमेय 1 की प्रक्रिया को दोहराना पड़ता है। क्या कोई संक्षिप्त उपाय है? हाँ, है। (1), रेखाओं का युग्म निरूपित करे, इसके लिए हमारे पास एक सरल प्रतिबन्ध है। यह प्रमेय 1 की उपपत्ति से कुछ गणनाओं के बाद, या स्वतंत्र रूप से प्राप्त किया जा सकता है। हम इसका केवल कथन देंगे, और तब देखेंगे कि किसी दिए गए शांकव को पहचानने के छोटे तरीके के लिए इसको कैसे प्रयोग किया जाए।

एम टी ई -04 की इकाई 5 में दी गई सारणिक (determinant) की परिभाषा को याद कीजिए।

प्रमेय 2 : द्विघाती समीकरण

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

रेखाओं के युग्म को निरूपित करेगा यदि और केवल यदि

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$, अर्थात्, सारणिक

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

और आगे, यदि प्रतिबंध संतुष्ट हो तो रेखाओं के बीच का कोण $\tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right]$ होता है।

ऊपर दिया हुआ 3×3 सारणिक दिए गए शांकव का **विविक्तकर** (discriminant) कहलाता है। आप देख सकते हैं कि विविक्तकर में भरमार प्रतीत नहीं होती यदि हम समीकरण गुणांकों को h, g और f के बजाए 2h, 2g और 2f लें।

आइए, हम प्रमेय 2 के उपयोग के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 3 : दिखाइए कि $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$ रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है। इन रेखाओं के बीच का कोण मालूम कीजिए।

हल : प्रमेय 2 के संबंध में, इस स्थिति में $a = 1, h = \frac{-5}{2}, b = 6, g = 0 = f = c$. अतः संबद्ध विविक्तकर

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{-5}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ है,

जो 0 है, जैसा कि आप हमारे 'प्रारंभिक बीजगणित' के पाठ्यक्रम से जानते हैं।

अतः दिया गया समीकरण रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है।

उनके बीच का कोण $\tan^{-1}\left(\frac{2}{7}\sqrt{\frac{25}{4} - 6}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$ है।

उदाहरण 4 : $2x^2 + 5xy + y^2 = 1$ द्वारा निरूपित शांकव मालूम कीजिए।

हल : इस स्थिति में $ab - h^2 = -23 < 0$. अतः, सारणी 1 से हम जानते हैं कि समीकरण एक अतिपरवलय या रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है।

इसके अतिरिक्त, इस स्थिति में विविक्तकर होगा,

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{17}{4} \neq 0.$$

इसलिए, प्रमेय 2 से हम जानते हैं कि दिया गया समीकरण रेखाओं के युग्म को निरूपित नहीं करता है।

अतः यह एक अतिपरवलय को निरूपित करता है।

अब आप ये प्रश्न कीजिए।

E 3) जाँच कीजिए कि $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है या नहीं।

E 4) दिखाइए कि वास्तविक द्विघाती समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ रेखाओं के एक युग्म को निरूपित करता है।

E 5) प्रमेय 2 में दिया गया समीकरण a, b और h पर किन प्रतिबंधों के अधीन
क) समांतर रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है?
ख) लंब रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है?

अभी तक हमने सारे शांकवों को एकीकृत रूप में पढ़ा है। अब हम उनको उनके केन्द्रीयता (centrality) के गुण के अनुसार वर्गीकृत करेंगे।

3.3 सकेन्द्रीय और अकेन्द्रीय शांकव

इकाई 2 में दीर्घवृत्त पर अपनी चर्चा में हमने कहा था कि दीर्घ अक्ष का मध्य बिंदु दीर्घवृत्त का केंद्र था। इस बिंदु को केन्द्र कहने की वजह एक ऐसा गुण है जिसे हम आप से निम्नलिखित प्रश्न में सिद्ध करने को कह रहे हैं।

E 6) समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए इस दीर्घवृत्त पर एक बिंदु $P(x_1, y_1)$ है और O, (0,0) है। दिखाइए कि रेखा PO दीर्घवृत्त को बिंदु $P'(-x_1, -y_1)$ पर भी काटती है।

आपने जो अभी सिद्ध किया है वह यह है कि

O (0,0) से गुज़रने वाली दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की प्रत्येक जीवा को O द्विभाजित करता है।

इसी प्रकार, बिंदु O (0,0) से होकर जाने वाली अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की प्रत्येक जीवा O से द्विभाजित होती है। अतः निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार, O उपरोक्त दीर्घवृत्त और अतिपरवलय का केंद्र है।

परिभाषा : किसी शांकव C का केन्द्र वह बिंदु है जो उससे होकर जाने वाली C की किसी भी जीवा को द्विभाजित करता है।

जैसा कि आप देखेंगे, सब शांकवों का केंद्र नहीं होता है। जिस शांकव का एक केंद्र होता है, उसे **सकेन्द्रीय शांकव** (central conic) कहते हैं। उदाहरण के लिए, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय सकेन्द्रीय शांकव हैं।

अब, बताइए कि क्या किसी सकेन्द्रीय शांकव के एक से अधिक केंद्र हो सकते हैं? मान लीजिए इसके दो केंद्र C_1 और C_2 हैं। तब रेखा C_1C_2 द्वारा अंतःखंडित शांकव की जीवा को C_1 और C_2 दोनों द्विभाजित करते हैं, जो संभव नहीं है।

किसी सकेन्द्रीय शांकव का एकमात्र केंद्र होता है।

आइए देखें कि इस बिंदु को कैसे मालूम कर सकते हैं।

शांकव (1) पर विचार कीजिए। मान लीजिए यह सकेन्द्रीय है और उसका केंद्र मूलबिंदु पर है। तब हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है, जिसे हम बिना उपपत्ति के बताएंगे।

प्रमेय 3 : कोई भी सकेन्द्रीय शांकव, जिसका केंद्र (0, 0) पर है, समीकरण

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$

से निरूपित होता है, किन्हीं $a, h, b \in R$ के लिए।

यह परिणाम सकेंद्रीय शांकवों के बारे में निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करने के लिए प्रयोग किया जाता है। इस पाठ्यक्रम में हम प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे, लेकिन हम इसको अक्सर प्रयोग करेंगे।

प्रमेय 4 : मान लीजिए $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ कोई सकेन्द्रीय शांकव है। तब इसका केन्द्र रेखाओं $ax + hy + g = 0$ और $hx + by + f = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु होगा।

यह प्रमेय हमें बताता है कि यदि रेखाएं $ax + hy + g = 0$ और $hx + by + f = 0$ प्रतिच्छेदित होती है, तो शांकव सकेन्द्रीय है और इन रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु शांकव का केंद्र होता है। लेकिन, यदि रेखाएं प्रतिच्छेदित न हो, तो क्या होगा? तब विचारणीय शांकव सकेन्द्रीय नहीं हो सकता है, अर्थात् यह **अकेन्द्रीय (non-central)** होगा। अतः, यदि इन रेखाओं की प्रवणता समान हो, अर्थात्, यदि $ab = h^2$ तो शांकव अकेन्द्रीय होगा।

अतः हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है:

शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (i) सकेन्द्रीय होगा यदि $ab \neq h^2$, और (ii) अकेन्द्रीय होगा यदि $ab = h^2$.

क्या यह परिणाम और सारणी 1 आपको बताते हैं कि कौन से शांकव अकेन्द्रीय हैं? आप तुरंत बता सकते हैं कि परवलय का केन्द्र नहीं होता है।

आइए, देखें कि शांकवों के केन्द्र संबंधी उपरोक्त परिणामों को हम कैसे प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 5 : क्या शांकव $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$, सकेन्द्रीय है? यदि है, तो इसका केंद्र मालूम कीजिए।

हल : इस स्थिति में $a = 17, b = 8, h = -6, g = 23, f = -14$. अतः $ab \neq h^2$. इसलिए शांकव सकेंद्रीय है। इसका केंद्र रेखाओं $17x - 6y + 23 = 0$ और $3x - 4y + 7 = 0$ का प्रतिच्छेदी बिंदु है, जो $(-1, 1)$ है।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E 7) क्या E 3 में दिया गया शांकव सकेन्द्रीय है? यदि हाँ, तो इसका केन्द्र मालूम कीजिए।

E 8) शांकव $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ को पहचानिए। यदि यह सकेन्द्रीय हो, तो इसका केन्द्र मालूम कीजिए।

E 9) कौन से अपभ्रष्ट शांकव सकेन्द्रीय होते हैं और कौन से नहीं?

एक बात जो इस उपभाग में बताई गई है, यह है कि परवलय एक अकेन्द्रीय शांकव है, जबकि दीर्घवृत्त और अतिपरवलय सकेन्द्रीय शांकव है। आइए, अब हम देखें कि क्या इस तथ्य से हमें किसी दिए गए द्विघाती समीकरण के संगत शांकव को अनुरेखित करने में सहायता मिल सकती है।

3.4 शांकव का अनुरेखण

मान लीजिए आपको एक द्विघाती समीकरण दिया गया है। क्या आप इसका ज्यामितीय निरूपण करने के लिए इससे पर्याप्त ज्यामितीय जानकारी प्राप्त कर सकते हैं? अब आप इस स्थिति में हैं कि यह जाँच कर सकें कि यह रेखाओं का युग्म है या नहीं। आप यह भी बता सकते है कि यह सकेन्द्रीय शांकव है या नहीं। लेकिन, अभी भी एक ऐसी जानकारी है जिसकी आपको शांकव का अनुरेखण करने के लिए ज़रूरत पड़ेगी। आपको इसके अक्ष या अक्षों के समीकरण/समीकरणों (जैसी स्थिति हो) को जानने की ज़रूरत है।

तो, आइए देखें कि अक्ष कैसे मालूम करें। हम सकेन्द्रीय और अकेन्द्रीय शांकवों पर अलग-अलग विचार करेंगे।

3.4.1 सकेन्द्रीय शांकव

मान लीजिए हमें एक सकेन्द्रीय शांकव का समीकरण दिया गया है। यदि आवश्यक हो तो अक्षों को स्थानांतरित करके हम यह मान सकते है कि इसका केन्द्र (0,0) पर स्थित है। तब, प्रमेय 3 से इसका समीकरण

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1, \qquad \ldots\ldots(6)$$

होगा, जहाँ $a, h, b \in \mathbf{R}$.

प्रमेय 1 में आपने देखा कि यदि हम निर्देशांक अक्षों को कोण $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2h}{a-b}$ से घुमा दें तो शांकव के अक्ष निर्देशांक अक्षों पर स्थित होंगे। अतः शांकव के अक्ष निर्देशांक अक्षों से कोण θ बनाते हैं। (यहाँ यदि $a = b$, तो हम $\theta = 45°$ लेते हैं।) अब,

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2h}{a-b}$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + \left(\frac{a-b}{h}\right)\tan\theta - 1 = 0$$

यह $\tan\theta$ में एक द्विघाती समीकरण है, और इसलिए θ के दो मानों, मान लीजिए θ_1 और θ_2, से संतुष्ट होता है। तब शांकव के अक्षों की प्रवणताएं $\tan\theta_1$ और $\tan\theta_2$ होती हैं। ध्यान दीजिए कि अक्ष परस्पर लंब हैं चूंकि $(\tan\theta_1)(\tan\theta_2) = -1$.

अब शांकव के अक्षों की लंबाई मालूम करने के लिए, हम (6) को ध्रुवीय रूप में लिखते हैं (भाग 1.5 देखें)। इसके लिए हम (6) में $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ रखते हैं। तब हम

$r^2(a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta - b\sin^2\theta) = 1$ पाते हैं।

$$\Rightarrow r^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta}, \ 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta \text{ लिखने पर।}$$

$$= \frac{1+\tan^2\theta}{a + 2h\tan\theta + b\tan^2\theta} \qquad \ldots\ldots(7)$$

यदि हम (7) में $\tan\theta_1$ और $\tan\theta_2$ रखें, तो हमें r के संगत मान मिलेंगे, जो संगत अर्धाक्षों की लंबाइयां होंगी।

अर्धाक्ष (semi-axis) अक्ष का आधा भाग होता है।

अभी हमने जो कुछ किया है आइए हम उसका प्रयोग उदाहरण 5 के शांकव के अनुरेखण के लिए करें। चूँकि $ab - h^2 > 0$, प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि यह एक दीर्घवृत्त है। आपने पहले ही देख लिया है कि इसका केन्द्र $(-1, 1)$ पर स्थित है।

रूप (6) में समीकरण प्राप्त करने के लिए हमें अक्षों को केंद्र $(-1, 1)$ पर स्थानांतरित करने की आवश्यकता है। तब समीकरण

$\frac{17}{20}x'^2 - \frac{3}{5}x'y' + \frac{2}{5}y'^2 = 1$ हो जाता है।

अब हम अक्षों की दिशाएं

$\tan^2\theta - \frac{3}{2}\tan\theta - 1 = 0$ से मालूम कर सकते हैं। इससे हमें $\tan\theta = 2, -\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

अतः हम $\theta_1 = \tan^{-1}2 = 63.43°$ (लगभग) और $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}2$ ले सकते हैं।

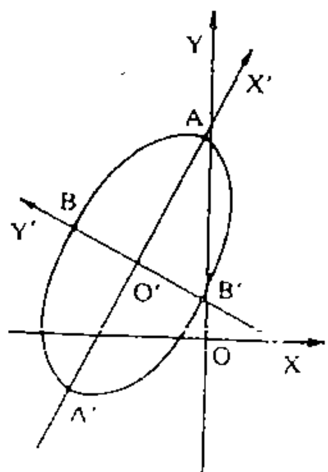
अर्धाक्षों की लंबाइयां, r_1 और r_2, इन मानों को (7) में रखने से प्राप्त होती हैं। इस प्रकार,

$$r_1^2 = \frac{1+4}{\frac{17}{20} - \frac{6}{5} + \frac{8}{5}} = 4 \Rightarrow r_1 = 2, \text{ और}$$

$$r_2^2 = \frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{17}{20} - \frac{3}{10} + \frac{1}{10}} = 1 \Rightarrow r_2 = 1.$$

इस प्रकार, दीर्घ अक्ष की लंबाई 4 है और लघु अक्ष की 2 है।

तो, अब हम शांकव का अनुरेखण कर सकते हैं। पहले हम x-अक्ष से $\tan^{-1}2$ का कोण बनाती हुई तथा बिंदु $O'(-1, 1)$ से होकर जाने वाली रेखा $O'X'$ खींचते हैं (चित्र 2 देखें)। फिर हम $O'X'$ पर लंब $O'Y'$ खींचते हैं। अब हम $O'X'$ पर बिंदु A' और A इस प्रकार लेते हैं कि $A'O' = 2$ और $O'A = 2$. इसी प्रकार हम $O'Y'$ पर B और B' को इस प्रकार लेते हैं कि $O'B = 1$ और $O'B' = 1$. वांछनीय दीर्घवृत्त के अक्ष AA' और BB' हैं। वक्र के अनुरेखण में और मदद के लिए हम यह जाँच कर सकते हैं कि यह x और y अक्षों को कहाँ पर काटता है। यह x-अक्ष को $(-4, 0)$, $(-2.2, 0)$ पर और y-अक्ष को $(0, 2.7)$ और $(0, 0.8)$ पर काटता है। अतः वक्र वैसा होगा जैसा हमने चित्र 2 में दिखाया है।



चित्र 2 : दीर्घवृत्त $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$

अब आप देखिए कि इस भाग में जो कुछ किया है वह आपने समझ लिया है या नहीं।

E 10) E 8 में दिए गए शांकव को अनुरेखित कीजिए।

E 11) गुणांकों पर किन प्रतिबंधों के अधीन $x^2 + 2hxy + y^2 + 2fy = 0$ सकेन्द्रीय होगा? और तब, उसका केन्द्र और अक्ष मालूम कीजिए।

अभी तक आपने देखा है कि सकेन्द्रीय शांकव को कैसे अनुरेखित किया जाए। आइए, अब हम अकेन्द्रीय शांकव के अनुरेखण पर गौर करें।

3.4.2 परवलय

इस भाग में हम परवलय का अक्ष मालूम करने और इस प्रकार उसे अनुरेखित करने की एक विधि को देखेंगे। हम इस तथ्य का प्रयोग करेंगे कि यदि (1) परवलय है तो यह

$$\left(\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = k\left(\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right) \qquad \ldots\ldots(8)$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ $Ax + By + C = 0$ परवलय का अक्ष है और $A'x + B'y + C' = 0$ शीर्ष पर स्पर्श रेखा है, और इसलिए, ये एक दूसरे पर लंब हैं।

इस परवलय का शीर्ष (x_1, y_1), $Ax + By + C = 0$ और $A'x + B'y + C' = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु है, k इसके नाभिलंब की लंबाई है, और $F\left(x_1 + \frac{k}{4}\cos\theta, y_1 + \frac{k}{4}\sin\theta\right)$ इसकी नाभि है, जहाँ $\tan\theta$ अक्ष की प्रवणता है।

आइए, इस विधि को एक उदाहरण की सहायता से समझें।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि शांकव
$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ एक परवलय है। इसका अक्ष मालूम कीजिए और इसे अनुरेखित कीजिए।

हल : यहाँ $a = 1, b = 1, h = 1. \therefore ab - h^2 = 0$. इसके अतिरिक्त, शांकव का विविक्तकर

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ है।}$$

इसलिए, प्रमेय 2 से, समीकरण एक रेखा-युग्म को निरूपित नहीं करता है। इस प्रकार, प्रमेय 1 से हम जानते है कि दिया गया शांकव एक परवलय है।

दिए गए समीकरण को हम $(x + y)^2 = 2x + 1$ लिख सकते हैं। अब हम एक स्थिरांक c को समीकरण में लाएंगे ताकि समीकरण को हम (8) के रूप में लिख सकें। तो, आइए हम समीकरण को
$(x + y + c)^2 = 2x + 1 + 2cx + 2cy + c^2$, अर्थात्
$$(x + y + c)^2 = 2(1 + c)x + 2cy + c^2 + 1 \qquad \ldots\ldots(9)$$
के रूप में लिखें।

c को हम इस प्रकार चुनेंगे कि रेखाएं $x + y + c = 0$ और $2(1 + c)x + 2cy + c^2 + 1 = 0$ लंब हों। इकाई 1 के समीकरण (13) से आप जानते हैं कि इसके लिए प्रतिबंध है।

$$(-1)\left(\frac{-2(1 + c)}{2c}\right) = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}.$$

तब (9)

$\left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 = x - y + \frac{5}{4}$ हो जाता है, अर्थात्

$$\left(\frac{x + y - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x - y + \frac{5}{4}}{\sqrt{2}}\right)$$

यह (8) के रूप में है।
अतः परवलय का अक्ष $x + y - \frac{1}{2} = 0$ है, और शीर्ष पर स्पर्श रेखा $x - y + \frac{5}{4} = 0$ है। शीर्ष इन दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु है, अर्थात् $\left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$ परवलय के नाभिलंब की लंबाई $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है। इस प्रकार, नाभि

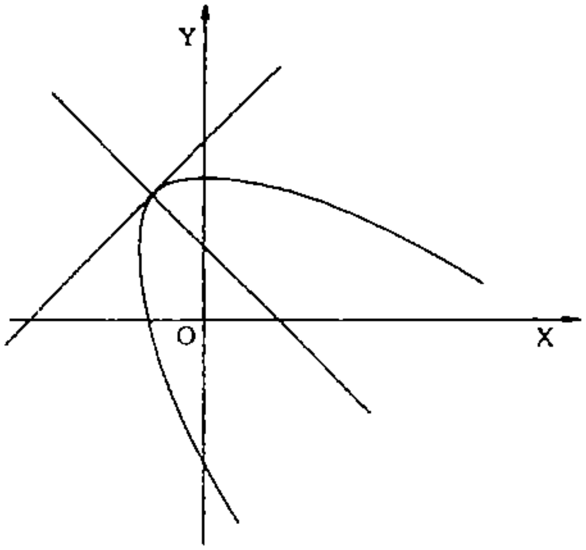
$\left(-\frac{3}{8}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\cos\theta,\ \frac{7}{8}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin\theta\right)$ पर है, जहाँ θ वह कोण है जो अक्ष x-अक्ष से बनाता है,

अर्थात् $\theta = \tan^{-1}(-1)$.

$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

इसलिए, नाभि $F\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ है।

परवलय और निर्देशांक अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु कौन से हैं? ये $(1+\sqrt{2}, 0)$, $(1-\sqrt{2}, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ हैं। अतः परवलय का अनुरेखण वैसा होगा जैसा हमने चित्र 3 में दिखाया है।



चित्र 3 : परवलय $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$

क्या उदाहरण से आपको परवलय के अनुरेखण की विधि को समझने में सहायता मिली है? निम्नलिखित प्रश्न से आपको यह जानने में मदद मिलेगी।

E 12) शांकव $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$ को अनुरेखित कीजिए।

आइए अब हम देखें कि किसी शांकव की स्पर्श रेखाएं कैसे प्राप्त की जाती हैं।

3.5 स्पर्श रेखाएं

इकाई 1 में आपने मानक रूप में शांकवों की स्पर्श रेखाओं के समीकरणों का अध्ययन किया था। अब हम व्यापक शांकव (1) की स्पर्श रेखा की चर्चा करेंगे।

तो, शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ पर दो अलग-अलग बिंदु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ लीजिए।

यदि $x_1 = x_2 = \alpha$ (मान लीजिए), तो रेखा PQ, $x = \alpha$ होगी। इसी प्रकार, यदि $y_1 = y_2 = \alpha$ (मान लीजिए), तो रेखा PQ, $y = \alpha$ होगी।

अन्यथा, रेखा PQ

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, होगी। ...... (10)

चूंकि P और Q शांकव पर स्थित हैं

$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ..... (11)

और $ax_2^2 + 2hx_2y_2 + by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$ ...... (12)

तब (12) − (11)

$\Rightarrow a(x_2^2 - x_1^2) + 2h(x_2y_2 - x_1y_1) + b(y_2^2 - y_1^2) + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$

$\Rightarrow a(x_2^2 - x_1^2) + 2h(x_2y_2 - x_1y_2 + x_1y_2 - x_1y_1) + b(y_2^2 - y_1^2)$
$\quad + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)\{a(x_1 + x_2) + 2hy_2 + 2g\} + (y_2 - y_1)\{b(y_1 + y_2) + 2hx_1 + 2f\} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{-(a(x_1 + x_2) + 2hy_2 + 2g)}{(b(y_1 + y_2) + 2hx_1 + 2f)}$$

इसको (10) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$y - y_1 = -\left(\frac{a(x_1 + x_2) + 2hy_2 + 2g}{b(y_1 + y_2) + 2hx_1 + 2f}\right)(x - x_1) \qquad \ldots\ldots (13)$$

जैसे-जैसे (x_2, y_2), (x_1, y_1) की ओर प्रवृत्त होता है, वैसे-वैसे (13), बिंदु (x_1, y_1) पर शांकव की स्पर्श रेखा के समीकरण की ओर प्रवृत्त होता है।

इस प्रकार, $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$(y - y_1)(by_1 + hx_1 + f) + (x - x_1)(ax_1 + hy_1 + g) = 0$ होता है।

$\Longleftrightarrow x(ax_1 + hy_1 + g) + y(by_1 + hx_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$, (11) के प्रयोग से।

$\Longleftrightarrow axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad \ldots\ldots (14)$

इस प्रकार, (14) शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ का, उस पर स्थित बिंदु (x_1, y_1) पर, स्पर्श रेखा का समीकरण है।

(14) से आप देख सकते हैं कि हम किसी शांकव की स्पर्श रेखा का समीकरण प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित व्यावहारिक नियम प्रयोग कर सकते हैं।

बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण पाने के लिए शांकव के समीकरण में x^2 के बदले xx_1, y^2 के बदले yy_1, $2x$ के बदले $(x + x_1)$, $2y$ के बदले $(y + y_1)$ और $2xy$ के बदले $(xy_1 + yx_1)$ लिखिए।

उदाहरण के लिए, परवलय $y^2 - 4ax = 0$ की किसी बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$ है। इसको हमने पहले ही भाग 2.3.2 में देखा था।

वास्तव में, जैसा कि आप इकाई 2 से सत्यापित कर सकते हैं, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक रूपों की स्पर्श रेखाओं के समीकरण भी (14) की विशेष स्थितियाँ हैं।

अब आप कुछ बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएं मालूम करने का प्रयास कीजिए।

E 13) E 8 में दिए गए शांकव की उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं और अभिलंबों के समीकरण प्राप्त कीजिए जिन पर वह y-अक्ष को काटता है।

इकाई 2 में आपने देखा है कि हर कोई रेखा किसी दिए गए मानक शांकव की स्पर्श रेखा नहीं होती है। आइए अब हम देखें कि कौन सी रेखाएं व्यापक शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की स्पर्श रेखाएं हो सकती है। इकाई 2 के अपने अनुभव के आधार पर क्या आप वे प्रतिबंध बता सकते है जिनके अधीन रेखा $px + qy + r = 0$ इस शांकव की स्पर्श रेखा होगी? मान लीजिए यह बिंदु (x_1, y_1) पर शांकव की स्पर्श रेखा है। अब या तो $p \neq 0$ या $q \neq 0$. मान लीजिए $p \neq 0$. तब हम शांकव के समीकरण में

$x = -\dfrac{(qy + r)}{p}$ रख सकते हैं।

हम पाते हैं कि

$$\frac{a}{p^2}(qy + r)^2 - \frac{2hy}{p}(qy + r) + by^2 - \frac{2g}{p}(qy + r) + 2fy + c = 0$$

$$\Rightarrow (aq^2 - 2hpq + bp^2)y^2 - 2y(prh + pqg - aqr - p^2f) + (ar^2 - 2gpr + cp^2) = 0$$

y में इस द्विघाती समीकरण के मूल हमें दी गई रेखा और शांकव के प्रतिच्छेद बिंदुओं के y निर्देशांक देते हैं। रेखा एक स्पर्श रेखा होगी यदि ये बिंदु संपाती हों, अर्थात् यदि द्विघाती समीकरण के संपाती मूल हों, अर्थात् यदि

$(prh + pqg - aqr - p^2f)^2 = (aq^2 - 2hpq + bp^2)(ar^2 - 2gpr + cp^2) \ldots\ldots (15)$

सारणिक के पदों में (एम.टी.ई.-04, इकाई 5 देखें), हम इस प्रतिबंध को

$$\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots\ldots (16)$$

लिख सकते हैं।

अतः (15), या सारणिक प्रतिबंध (16), हमें यह बताता है कि $px + qy + r = 0$ व्यापक शांकव की स्पर्श रेखा है या नहीं।

उदाहरण के लिए, रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करेगी यदि

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2a & m \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2a & 0 & 0 & c \\ m & -1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (-2a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ m & -1 & c \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2a & 0 & c \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, पहली पंक्ति के साथ प्रसार करने पर।

$\Rightarrow (-2a)(cm - 2a) - m(2ac) = 0$

$\Rightarrow c = \frac{a}{m}$.

यह वही प्रतिबंध है जो हमें भाग 2.3.2 में मिला था।

अब आप इन प्रश्नों को कीजिए।

E 14) क्या रेखा $x + 4y = 0$ शांकव $x^2 + 4xy + 3y^2 - 5x - 6y + 3 = 0$ की स्पर्श रेखा है? इस शांकव की वे सभी स्पर्श रेखाएं मालूम कीजिए जो दी गई रेखा के समांतर हैं।

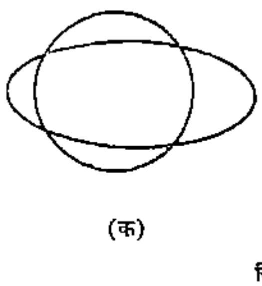
E 15) क) सिद्ध कीजिए कि $ax + by + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ को स्पर्श करेगी यदि $(ag + bf - 1)^2 = (a^2 + b^2)(g^2 + f^2 - c)$

ख) विशेषकर, $y = Mx + C$, C पर किन प्रतिबंधों के अधीन $x^2 + y^2 = A^2$ को स्पर्श करेगी?

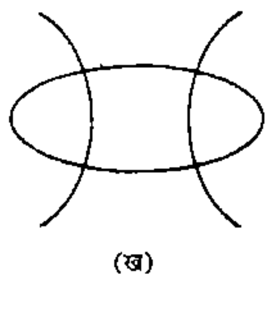
इस भाग में आपने देखा कि एक रेखा एक शांकव को अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। आइए अब हम देखें कि जब दो शांकव एक दूसरे को काटते हैं, तो हमें क्या प्राप्त होता है।

3.6 शांकवों का प्रतिच्छेद

एक दीर्घवृत्त और एक वृत्त (चित्र 4 (क)) या एक दीर्घवृत्त और एक अतिपरवलय (चित्र 4 (ख)) के प्रतिच्छेद पर विचार कीजिए।



(क)



(ख)

चित्र 4 : प्रतिच्छेदी शांकव

आप देख सकते हैं कि ये शांकव चार बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। लेकिन, क्या कोई भी दो शांकव चार बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं? निम्नलिखित परिणाम इस प्रश्न का उत्तर देता है।

प्रमेय 5 : व्यापक रूप में, दो शांकव चार बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

उपपत्ति : मान लीजिए दो शांकवों के समीकरण

$ax^2 + 2(hy + g)x + by^2 + 2fy + c = 0$, और

$a_1x^2 + 2(h_1y + g_1)x + b_1y^2 + 2f_1y + c_1 = 0$ हैं।

इन समीकरणों को x में द्विघाती समीकरण माना जा सकता है। यदि हम इनमें से x का निराकरण करें, तो हमें y में घात चार वाला एक समीकरण प्राप्त होगा। इसके चार मूल होंगे। इनमें से प्रत्येक मूल के संगत हमें x का एक मूल प्राप्त होगा। इसलिए व्यापक रूप में दो शांकवों के चार प्रतिच्छेद बिंदु होते हैं।

चूँकि वास्तविक गुणांकों वाले किसी घात चार वाले समीकरण के दो या चार सम्मिश्र मूल हो सकते हैं (एम.टी.ई.-04, इकाई 3 देखें), दो शांकव

(i) चार वास्तविक बिंदुओं,

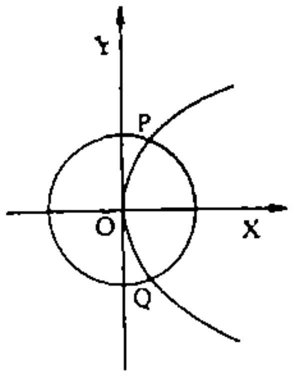
(ii) दो वास्तविक और दो अधिकल्पित बिंदुओं, या

(iii) चार अधिकल्पित बिंदुओं

पर प्रतिच्छेदित हो सकते हैं।

ये प्रतिच्छेद बिंदु अलग-अलग हो सकते हैं, या इनमें से कुछ संपाती हो सकते हैं, या सभी संपाती हो सकते हैं।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।



चित्र 5 : $y^2 = 2x$ और $x^2 + y^2 = 1$ बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं।

उदाहरण 7 : परवलय $y^2 = 2x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के प्रतिच्छेद बिंदु मालूम कीजिए (चित्र 5 देखें)।

हल : यदि (x_1, y_1) एक प्रतिच्छेद बिंदु हो तो $x_1^2 + y_1^2 = 1$ और $y_1^2 = 2x_1$. इन समीकरणों में से y_1 का निराकरण करने पर, हम पाते हैं कि

$x_1^2 + 2x_1 = 1$, अर्थात् $(x_1 + 1)^2 = 2$.

इसलिए $x_1 = -1 \pm \sqrt{2}$.

तब $y_1^2 = 2x_1$ से हम पाते हैं कि

$y_1 = \pm \sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{1/2}$, यदि $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, और

$y_1 = \pm \sqrt{2}\, i (\sqrt{2} - 1)^{1/2}$, यदि $x_1 = -1 - \sqrt{2}$.

इस प्रकार, केवल दो वास्तविक प्रतिच्छेद बिंदु हैं, अर्थात् $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{1/2})$

और $(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^{1/2})$.

इसीलिए चित्र 5 में आप केवल दो प्रतिच्छेद बिंदु देख सकते हैं।

अब आपके लिए एक प्रश्न।

E 16) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ के प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात कीजिए।

आपने देखा है कि दो शांकव चार वास्तविक या अधिकल्पित बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब हम उन शांकवों का समीकरण मालूम करेंगे जो इन बिंदुओं से होकर गुज़रते हैं।

मान लीजिए, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

और $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c = 0$

दो शांकवों के समीकरण हैं।

हम इन्हें संक्षिप्त रूप में क्रमशः $S = 0$ और $S_1 = 0$ से दर्शाएंगे।

तब, प्रत्येक $k \in \mathbf{R}$ के लिए, $S + k S_1 = 0$, x और y में एक द्विघाती समीकरण है। अतः k के प्रत्येक मान के लिए यह एक शांकव है।

दूसरी ओर, दोनों शांकवों का कोई भी प्रतिच्छेद बिंदु दोनों समीकरणों $S = 0$ और $S_1 = 0$ को संतुष्ट करता है इस प्रकार, यह $S + kS_1 = 0$ को संतुष्ट करता है।

अतः, शांकव $S + k S_1 = 0$, $S = 0$ और $S_1 = 0$ के सब प्रतिच्छेद बिंदुओं से होकर गुज़रता है।

इस प्रकार हमने निम्न परिणाम को सिद्ध किया है

प्रमेय 6 : दो शांकवों $S = 0$ और $S_1 = 0$ के प्रतिच्छेद से होकर गुज़रने वाले किसी शांकव का समीकरण $S + k S_1 = 0$ के रूप का है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.

k के विभिन्न मानों के लिए, हमें $S = 0$ और $S_1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदुओं से होकर गुज़रने वाले विभिन्न शांकव प्राप्त होते हैं। लेकिन, क्या ये सब शांकव एक प्रकार के होंगे? इसके उत्तर के लिए आप निम्नलिखित प्रश्नों को कीजिए।

E 17) यदि $S = 0$ और $S_1 = 0$ समकोणीय अतिपरवलय हैं तो दिखाइए कि k के समस्त वास्तविक मानों के लिए $S + k S_1 = 0$ एक समकोणीय अतिपरवलय होगा।

(संकेत : याद कीजिए कि यदि $a + b = 0$ हो, तो $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक समकोणीय अतिपरवलय होता है।)

E 18) मान लीजिए $S = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ और $S_1 = xy - 9 = 0$.

k पर किन प्रतिबंधों के अधीन $S + k S_1 = 0$

क) एक दीर्घवृत्त होगा?

ख) एक परवलय होगा?

ग) एक अतिपरवलय होगा?

अब हम शांकवों पर अपनी चर्चा के अंत पर आ गए हैं। आइए देखें कि इस इकाई में हमने क्या किया है।

3.7 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों की चर्चा की है।

1) व्यापक द्विघाती समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक शांकव को निरूपित करता है। यह

   i) एक रेखाओं का युग्म होगा यदि और केवल यदि

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

   इसके अतिरिक्त, यदि प्रतिबंध संतुष्ट होता है, तो रेखाओं के बीच का कोण $\tan^{-1}\left[\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right]$ होगा;

   ii) एक परवलय होगा यदि $ab - h^2 = 0$ और (i) में सारणिक प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है;

   iii) एक दीर्घवृत्त होगा यदि $ab - h^2 > 0$;

   iv) एक अतिपरवलय होगा यदि $ab - h^2 < 0$.

2) दीर्घवृत्त और अतिपरवलय सकेन्द्रीय शांकव हैं; अतिपरवलय एक अकेन्द्रीय शांकव है।

3) मूलबिंदु पर केन्द्र वाला सकेन्द्रीय शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ के रूप का होता है, जहाँ $a, h, b, \in \mathbf{R}$.

4) यदि $ax + hy + g = 0$ और $hx + by + f = 0$ प्रतिच्छेदित हों तो $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक सकेन्द्रीय शांकव को निरूपित करता है। और तब, शांकव का केन्द्र इन रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु होता है। इस शांकव के अक्षों की प्रवणताएं समीकरण

$$\tan^2\theta + \left(\frac{a-b}{h}\right)\tan\theta - 1 = 0$$ के मूल होती हैं।

5) शांकव का अनुरेखण।

6) शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ की बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा
   $axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$
   होती है।
   और, कोई रेखा $px + qy + r = 0$ दिए गए शांकव की स्पर्श रेखा होगी यदि

$$\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7) दो शांकव चार बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित होते हैं। ये बिंदु वास्तविक हो सकते है या अधिकल्पित।

8) शांकवों $S = 0$ और $S_1 = 0$ के चारों प्रतिच्छेद बिंदुओं से होकर गुज़रने वाले शांकव का समीकरण $S + k S_1 = 0$ होता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.

3.8 हल/उत्तर

E 1) क) अनअपभ्रष्ट शांकव 3 प्रकार के होते हैं :
   परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय।
   अपभ्रष्ट शांकव 5 प्रकार के होते हैं:
   बिंदु, प्रतिच्छेदित होने वाली रेखाओं का युग्म, अलग समांतर रेखाओं का युग्म, संपाती रेखाओं का युग्म, रिक्त समुच्चय।

   ख) वृत्त दीर्घवृत्त की एक विशिष्ट स्थिति है। अतः यदि (1) एक वृत्त को निरूपित करता है तो $ab - h^2 > 0$.

E 2) क) $x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}\,x - 2 = 0$
   यहाँ $a = 1 = b, h = -1$.

यदि हम अक्षों को $\frac{\pi}{4}$ से घुमाएं तो नए निर्देशांक x' और y',

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ और $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ द्वारा दिए जाते हैं।

अतः दिया गया समीकरण

$2y'^2 + x' - y' = 2$ बन जाता है।

$$\Leftrightarrow y'^2 - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}x' = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(y' - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}x' + \frac{17}{16} = -\frac{1}{2}\left(x' - \frac{17}{8}\right)$$

अब यदि हम मूल बिंदु को $\left(\frac{17}{8}, \frac{1}{4}\right)$ पर स्थानांतरित करें, तो समीकरण परवलय

$Y^2 = -\frac{1}{2}X$ बन जाता है, जहाँ X और Y नए निर्देशांक है।

ख) $9x^2 - 6xy + y^2 - 40x - 20y + 75 = 0.$

यहाँ $a = 9, b = 1, h = -3.$

तो आइए हम अक्षों को कोण θ से घुमाएं, जहाँ

$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{6}{8}\right) \therefore \tan 2\theta = -\frac{3}{4}.$

अतः हम $\tan\theta = 3$ ले सकते हैं, जिससे $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

तब, $X'Y'$-निकाय में समीकरण

$\frac{59}{5}y'^2 - 10\sqrt{10}\,x' - 10\sqrt{10}\,y' + 75 = 0$ हो जाता है, जो रूपांतरित होकर परवलय का समीकरण हो जाता है।

E 3) इस स्थिति में $a = 3, b = 2, c = 2, f = \frac{5}{2} = g, h = \frac{7}{2}.$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

इसलिए दिया गया समीकरण रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है।

E 4) यहाँ संबद्ध विविक्तकर

$$\begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ है।}$$

अतः दिया गया समीकरण रेखाओं के युग्म को निरूपित करता है।

E 5) क) रेखाएं समांतर होंगी यदि $\sqrt{h^2 - ab} = 0$, अर्थात् $ab - h^2 = 0$.

ख) रेखाएं लंब होंगी यदि $a + b = 0$.

E 6) चूँकि P दीर्घवृत्त पर स्थित है, इसलिए P' भी होगा। PO का समीकरण

$\frac{y - y_1}{-y_1} = \frac{x - x_1}{-x_1}$ है, अर्थात् $x_1(y - y_1) = y_1(x - x_1)$.

चूँकि $(-x_1, -y_1)$ इस समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए P' भी इस रेखा पर स्थित है। इस प्रकार, हमने परिणाम दिखा दिया है।

E 7) इस स्थिति में $ab \neq h^2$. इसलिए शांकव सकेन्द्रीय है। इसका केन्द्र

$3x + \frac{7}{2}y + \frac{5}{2} = 0$ और $\frac{7}{2}x + 2y + \frac{5}{2} = 0$

का प्रतिच्छेद बिंदु है, अर्थात् $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

E 8) इस स्थिति में $a = 1 = b$, $h = -\frac{3}{2}$.

$\therefore ab - h^2 = -\frac{5}{4} < 0$

इसलिए दिया गया समीकरण सकेन्द्रीय है, और अतिपरवलय या एक प्रतिच्छेदी रेखाओं का युग्म हो सकता है।

चूंकि $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 21 \end{vmatrix} \neq 0,$

प्रमेय 2 के प्रयोग से हम कह सकते हैं कि समीकरण एक अतिपरवलय को निरूपित करता है। इसका केन्द्र

$x - \frac{3}{2}y + 5 = 0$ और $-\frac{3}{2}x + y - 5 = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु, अर्थात् $(-2, 2)$ है।

E 9) सकेन्द्रीय अपभ्रष्ट शांकवः

बिंदु, प्रतिच्छेदी रेखाओं का युग्म।

अकेन्द्रीय अपभ्रष्ट शांकव :

अलग समांतर रेखाओं का युग्म, संपाती रेखाओं का युग्म।

रिक्त समुच्चय सकेन्द्रीय और अकेन्द्रीय दोनों है।

E 10) समीकरण $(-2, 2)$ केन्द्र वाला एक अतिपरवलय को निरूपित करता है। यदि हम मूलबिंदु को $(-2, 2)$ पर स्थानांतरित करें, तो समीकरण $-x'^2 + 3x'y' - y'^2 = 1$ हो जाता है।

यहाँ $a = -1$, $b = -1$, $h = \frac{3}{2}$.

अतः शांकव के अक्ष x - अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{3\pi}{4}$ कोण बनाते हैं।

अतः θ के इन मानों को (7) में रखने पर, हम अर्धाक्षों की लंबाइयां r_1 और r_2, $r_1^2 = 2$ और $r_2^2 = -\frac{2}{5}$ को हल करने पर पाते हैं। इस प्रकार, $r_1 = \sqrt{2}$ और $r_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$

यहाँ पर ध्यान दीजिए कि यद्यपि r_2^2 ऋणात्मक है हम अक्ष को लंबाई की गणना करने के लिए केवल इसका परिमाण चाहते है।

अब आप जानते है कि यदि e अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है तो

$r_2 = r_1 \sqrt{e^2 - 1}$, अर्थात् $\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{2}\sqrt{e^2 - 1}$

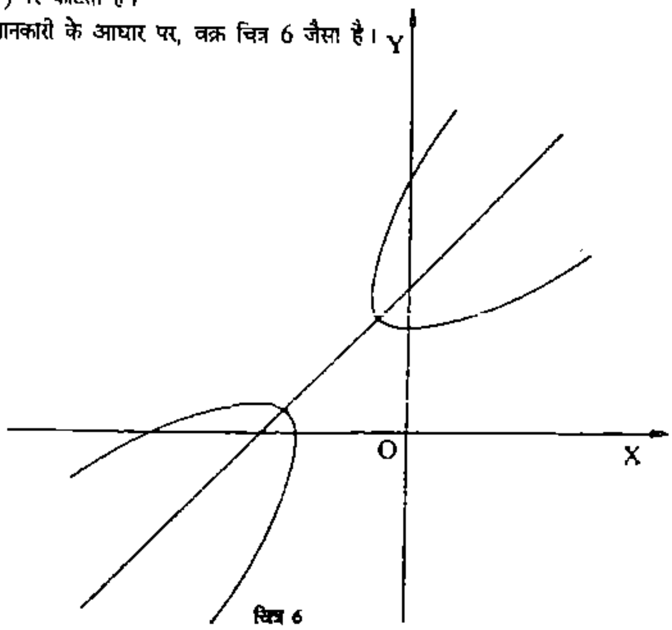
$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{6}{5}}$

अब आइए हम यह भी देखें कि अतिपरवलय x और y अक्षों को कहाँ पर काटता है। दिए गए समीकरण में $y = 0$ रखने पर, हम पाते है कि

$x^2 + 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = -3, -7.$

अतः अतिपरवलय x-अक्ष को $(-3, 0)$ और $(-7, 0)$ पर काटता है। इसी प्रकार, दिए गए समीकरण में $x = 0$ रखने पर और y के लिए हल करने पर हम देखते हैं कि अतिपरवलय y-अक्ष को $(0, 3)$ और $(0, 7)$ पर काटता है।

इस सभी जानकारी के आधार पर, वक्र चित्र 6 जैसा है।



चित्र 6

E 11) यह सकेन्द्रीय होगा यदि $h^2 \neq 1$ और तब इसका केन्द्र $x + hy = 0$ और $hx + y + f = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु होगा, जो $\left(\frac{hf}{1-h^2}, \frac{-f}{1-h^2} \right)$ है। यदि हम मूलबिंदु को इस बिंदु पर स्थानांतरित करें तो दिया गया समीकरण $X^2 - 2hXY + Y^2 = \frac{f^2}{1-h^2}$ में रूपांतरित हो जाएगा।

$$\Longleftrightarrow \frac{1-h^2}{f^2} X^2 - \frac{2h(1-h^2)}{f^2} XY + \frac{1-h^2}{f^2} Y^2 = 1.$$

यह सकेन्द्रीय शांकव के मानक रूप $AX^2+2HXY+BY^2 = 1$ में है। यहाँ $A = B = \frac{1-h^2}{f^2}$

इसलिए, शांकव के अक्ष x-अक्ष से $45°$ और $135°$ के कोण बनाते हैं। चूंकि ये केन्द्र से गुज़रते हैं, इनके समीकरण

$$y + \frac{f}{1-h^2} = x - \frac{hf}{1-h^2} \text{ और}$$

$$y + \frac{f}{1-h^2} = -\left(x - \frac{hf}{1-h^2} \right) \text{ है।}$$

E 12) शांकव एक परवलय है चूँकि $ab = h^2$, और रेखा-युग्म को निरूपित करने के लिए सार्गणिक प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है।

हम समीकरण को

$(2x - y)^2 = 8x + 6y - 5$ लिख सकते हैं।

हम समीकरण में एक स्थिरांक c को लाते हैं, और इसे

$(2x - y + c)^2 = 8x + 6y - 5 + 4cx - 2cy + c^2$ लिखते हैं।

$\Longleftrightarrow (2x - y + c)^2 = 4(2 + c)x + 2(3 - c)y + c^2 - 5$

हम c को इस प्रकार चुनते हैं कि

$$2\left(\frac{4(2+c)}{2(c-3)} \right) = -1 \Rightarrow c = -1.$$

तब, वक्र का समीकरण

$(2x - y - 1)^2 = 4(x + 2y - 1)$ हो जाता है।

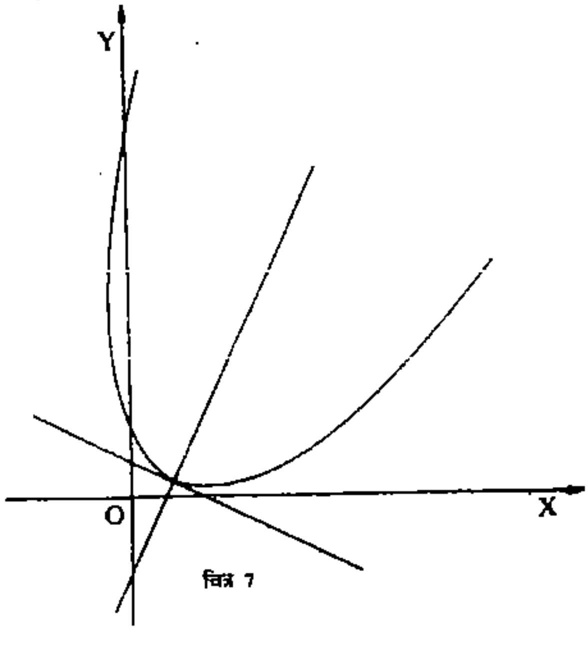
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{5}} \right)$$

इस परवलय का शीर्ष $2x - y - 1 = 0$ और $x + 2y - 1 = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु, अर्थात् $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right)$ है। नाभि $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\theta, \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\theta \right)$ पर है, जहाँ $\tan\theta = 2$.

$$\therefore \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ नाभि $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$ पर स्थित है :

वक्र y-अक्ष को (0, 1) और (0, 5) पर काटता है। यह x-अक्ष को नहीं काटता है। अतः परवलय का आकार वैसा होगा जैसा हमने चित्र 7 में दिया है।



चित्र 7

E 13) शांकव का समीकरण

$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ है।

E 10 से आपको मालूम है कि यह अक्षों को $(-3, 0), (-7, 0), (0, 3), (0, 7)$ पर काटता है।

$(-3, 0)$ पर स्पर्श रेखा

$-3x - \frac{3}{2}(x.0 - 3y) + y\,0 + 5(x - 3) - 5(y - 0) + 21 = 0$ है।

इसकी प्रवणता 4 है।

अतः $(-3, 0)$ पर अभिलंब की प्रवणता $-\frac{1}{4}$ है।

अतः इसका समीकरण $y = -\frac{1}{4}(x + 3)$ है।

आप इसी प्रकार जाँच कर सकते हैं कि $(-7, 0)$, $(0, 3)$ और $(0, 7)$ पर स्पर्श रेखाएं क्रमशः

$4x - 11y + 28 = 0$,

$x - 4y + 12 = 0$,

$11x - 4y + 28 = 0$ हैं।

इन बिंदुओं पर अभिलंब क्रमशः

$y = \frac{4}{11}(x + 7)$,

$y - 3 = \frac{1}{4}x$,

$y - 7 = \frac{11}{4}x$ हैं।

E 14) $x + 4y = 0$ दिए गए शांकव की स्पर्श रेखा होगी यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ -\frac{5}{2} & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -\frac{5}{2} & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow 40 = 0$, जो असत्य है।

अतः दी गई रेखा दिए गए शांकव की स्पर्श रेखा नहीं है।

दी गई रेखा के समांतर कोई रेखा $x + 4y + c = 0$ के रूप की होगी। यह दिए गए शांकव की स्पर्श रेखा होगी यदि (15) संतुष्ट हो, अर्थात्

$(5c + 28)^2 = 3(3c^2 + 24c + 48)$

$\Longleftrightarrow c = -5$ या -8.

अतः वांछनीय स्पर्श रेखाएं

$x + 4y - 5 = 0$ और $x + 4y - 8 = 0$ हैं।

E 15) क) (15) का प्रयोग करके हम देखते हैं कि प्रतिबंध

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & g & a \\ 0 & 1 & f & b \\ g & f & c & 1 \\ a & b & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ है।}$$

$\Longleftrightarrow b(f - bc) - (1 - bf) + g\{af + b(bg - af)\}$

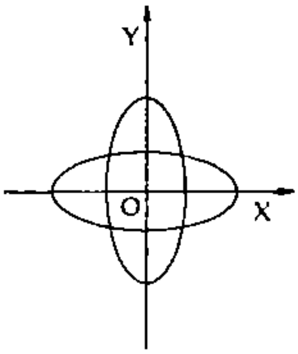
$+ a\{(ac - g) + f(bg - af)\} = 0$

$\Longleftrightarrow b^2g^2 + a^2f^2 + 2bf - 2abfg - b^2c - 1 + 2ag - a^2c = 0.$

दोनों तरफ़ a^2g^2 जोड़ने पर और सरल करने पर हमें दिया गया प्रतिबंध प्राप्त होता है।

ख) (क) में हम $g = 0 = f$, $c = -A^2$, $-\frac{a}{b} = M$, $-\frac{1}{b} = C$ रखते हैं।

अतः $y = Mx + C$ के $x^2+y^2 = A^2$ को स्पर्श करने का प्रतिबंध $C^2 = A^2(M^2 + 1)$ है। इस प्रकार, $C = A\sqrt{M^2+1}$.



चित्र 8

E 16) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ में $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$

रखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{a^2}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore y = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

तब $x^2 = a^2\left[1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right] = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

इस प्रकार प्रतिच्छेद के 4 बिंदु

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ और $\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

हैं। यह स्थिति हमने चित्र 8 में दर्शाई है।

E 17) मान लीजिए $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

और $S_1 = a_1x^2 + 2h_1xy + b_1 y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

समकोणीय अतिपरवलय है। तब

$a + b = 0$ और $a_1 + b_1 = 0$.

$\therefore (a + b) + k(a_1 + b_1) = 0 \ \forall \ k \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (a + k a_1) + (b + k b_1) = 0 \ \forall \ k \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow S + k S_1 = 0$ एक समकोणीय अतिपरवलय है $\forall \ k \in \mathbf{R}$.

E 18) $S + k S_1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - k\,xy + \frac{y^2}{4} - (1 + 9k) = 0.$$

क) यह शांकव एक दीर्घवृत्त होगा यदि

$$\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{k^2}{4} > 0, \text{ अर्थात् } k^2 < \frac{1}{9}.$$

ख) शांकव एक परवलय होगा यदि

$$k^2 = \frac{1}{9} \text{ और } \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-k}{2} & 0 \\ \frac{-k}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -(1+9k) \end{vmatrix} \neq 0,$$

अर्थात् यदि $k = \pm\frac{1}{3}$ और $(1 + 9k)\left[\frac{1}{36} - \frac{k^2}{4}\right] \neq 0$

लेकिन ऐसा नहीं हो सकता है। इसलिए, शांकव एक परवलय नहीं हो सकता है।

यह रेखाओं का एक युग्म होगा यदि $k = \pm\frac{1}{3}$.

ग) शांकव एक अतिपरवलय होगा यदि $k^2 > \frac{1}{9}$ और $k = -\frac{1}{9}, \pm\frac{1}{3}$

विविध प्रश्नावली

(यह भाग ऐच्छिक है।)

इस भाग में हमने इस खंड की विषय वस्तु से संबंधित कुछ प्रश्न एकत्रित किए हैं। शांकवों को और अच्छी तरह समझने के लिए आप इन्हें करना चाहेंगे। प्रश्नों के हल प्रश्नों के बाद दिए गए हैं ताकि आप अपने उत्तरों को जाँच कर सकें।

1. ऐसे बिंदु P के पथ का समीकरण मालूम कीजिए जिसकी बिंदुओं $(1, 0)$ और $(-1, 0)$ से दूरियों के वर्ग का योग 8 है।

एक गतिमान बिंदु द्वारा अनुरेखित पथ उसका बिंदुपथ (locus) कहलाता है

2. बिंदुओं $(1, 0)$, $(0, -6)$ और $(3, 4)$ से होकर गुज़रने वाले वृत्त का समीकरण मालूम कीजिए।
(**संकेतः** किसी वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ होता है।)

3. परवलय का परावर्ती गुण सिद्ध कीजिए।
(**संकेतः** इकाई 2 के चित्र 9 में दिखाइए कि $\alpha = \beta$.)

4. इकाई 3 का प्रमेय 2 सिद्ध कीजिए।

5. एक वृत्त परवलय $y^2 = 4ax$ को बिंदुओं $(at_i^2, 2at_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ के लिए, में काटता है। सिद्ध कीजिए कि $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$.
(**संकेत** : t_1, t_2, t_3, t_4 उस द्विघाती समीकरण के हल हैं जो वृत्त के समीकरण में $x = 2at^2$, $y = 2at$ रखने से प्राप्त होता है।)

6. वक्र $xy = 0$ और $xy - 4x - 5y + 20 = 0$ अनुरेखित कीजिए।

7. यदि $ax^2 + by^2 + cx + cy = 0$ सरल रेखाओं का युग्म निरूपित करे, तो इसके गुणांकों में क्या संबंध होगा?

8. वह कोण मालूम कीजिए जिससे अक्षों को घुमाने पर समीकरण $Ax + By + c = 0$, $x =$ स्थिरांक के रूप में समानीत हो जाता है, और स्थिरांक का मान ज्ञात कीजिए।

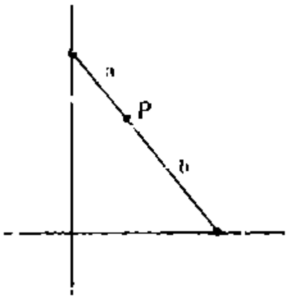
9. सिद्ध कीजिए कि $y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ एक ऐसा परवलय निरूपित करता है जिसका अक्ष x-अक्ष के समांतर है। इसका शीर्ष और इसके नाभिलंब का समीकरण मालूम कीजिए।

10. सिद्ध कीजिए कि $y^2 = 4ax$ की उन सब जीवाओं के मध्य बिंदुओं का समुच्चय, जो इसके शीर्ष से गुज़रती हैं, परवलय $y^2 = 2ax$ है।

11. क) सिद्ध कीजिए कि $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$ का ऋणात्मक, शून्य या धनात्मक होना इस बात पर निर्भर करता है कि बिंदु (x_1, y_1), दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ के अंदर है, उस पर है या उसके बाहर है।

ख) बिंदु $(4, -3)$ दीर्घवृत्त $5x^2 + 7y^2 = 1$ के अंदर है या बाहर?

12. दी हुई लंबाई $a + b$ का एक रेखाखंड इस प्रकार गति करता है कि इसके सिरे हमेशा दो नियत लंब रेखाओं पर हैं (चित्र 1 देखें)। सिद्ध कीजिए कि इस रेखा खंड को अनुपात $a : b$ में विभाजित करने वाले बिंदु द्वारा अनुरेखित पथ दीर्घवृत्त है।



चित्र 1

13. अतिपरवलयों $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ और $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण मालूम कीजिए।

14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अभिलंब x और y-अक्षों को क्रमशः M और N पर काटता है। M और N से क्रमशः x और y अक्षों के लंब खींची गई रेखाएं बिंदु P पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि P का बिंदुपथ परवलय $a^2x^2 - b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2$ है।

15. इकाई 2 के चित्र 20 में दिए गए अतिपरवलय पर विचार कीजिए। A और A' से संयुग्मी अक्ष के समांतर रेखाएं खींचिए, और B और B' से अनुप्रस्थ अक्ष के समांतर रेखाएं खींचिए। दिखाइए कि इस प्रकार बने आयत के विकर्ण अतिपरवलय के अनंतस्पर्शियों पर स्थित होते हैं।

अतिपरवलय के अनंतस्पर्शी खींचने का एक तरीका।

16. निम्नलिखित समीकरणों से कौन से शांकव निरूपित होते हैं?
क) $(x - y)^2 + (x - a)^2 = 0$.
ख) $r \sin^2 \theta = 2a \cos \theta$.

ग). $\frac{1}{r} = 1 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$

17. शांकवों

क) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$,

ख) $xy - y^2 = a^2$,

ग) $(3x - 4y + 1)(4x + 3y + 1) = 1$,

को अनुरेखित कीजिए।

18. बिंदु (1, 1) से और $x^2 + 2xy + 5y^2 - 7x - 8y + 6 = 0$ के सरल रेखाओं के युग्म $2x - y - 5 = 0$ और $3x + y - 11 = 0$ के प्रतिच्छेद से होकर जाने वाले शांकव का समीकरण मालूम कीजिए।

हल

1. मान लीजिए P, (x, y) है। तब

$\{(x-1)^2 + y^2\} + \{(x+1)^2 + y^2\} = 8$

$\Longleftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 6$

$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 3$, जो केंद्र (0, 0) और त्रिज्या $\sqrt{3}$ वाला एक वृत्त है।

2. मान लीजिए, समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है। चूंकि (1, 0), (0, −6) और (3, 4) इस पर स्थित हैं,

$1 + 2g + c = 0$,

$36 - 12f + c = 0$,

$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$

g, f और c में इन तीन रैखिक समीकरणों को हल करने पर, हम पाते हैं कि

$g = -\frac{71}{4}, f = \frac{47}{8}, c = \frac{69}{2}$

अतः समीकरण

$x^2 + y^2 - \frac{71}{2}x + \frac{47}{4}y + \frac{69}{2} = 0$ है।

3. परवलय $y^2 = 4ax$ है। किसी बिंदु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा T, $yy_1 = 2a(x + x_1)$ है।

इसलिए $\tan\alpha = \frac{2a}{y_1}$

रेखा PF, जहाँ F (a, 0) नाभि है, $\frac{y - y_1}{-y_1} = \frac{x - x_1}{a - x_1}$ है। इसकी प्रवणता $\frac{y_1}{x_1 - a}$ है।

अतः $\tan\beta = \dfrac{\frac{y_1}{x_1 - a} - \frac{2a}{y_1}}{1 + \frac{2a}{x_1 - a}}$, इकाई 1 के (11) के प्रयोग से।

$= \frac{2a}{y_1}$, तथ्य $y_1^2 = 4ax_1$ के प्रयोग से।

इस प्रकार $\tan\alpha = \tan\beta$, और α और β दोनों 90° से कम या बराबर हैं।

$\therefore \alpha = \beta$.

4. हम दिखाना चाहते हैं कि

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...... (1)

को दो रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है यदि और केवल यदि इसका विविक्तकर शून्य हो।

यदि $a \neq 0$, हम पूरे समीकरण (1) को a से गुणा करते हैं और x की घात के घटते क्रम में क्रमबद्ध करते हैं। हम पाते हैं कि

$a^2x^2 + 2ax(hy + g) = -aby^2 - 2afy - ac$.

वाम पक्ष पर पूर्ण वर्ग करने पर हम पाते हैं कि

$a^2x^2 + 2ax(hy + g) + (hy + g)^2 = y^2(h^2 - ab) + 2y(gh - af) + g^2 - ac$.

$\Longleftrightarrow ax + hy + g = \pm\sqrt{y^2(h^2 - ab) + 2y(gh - af) + g^2 - ac}$

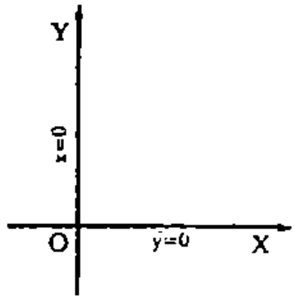
इससे हम x को y के केवल एकघाती पदों में प्राप्त कर सकते हैं यदि और केवल यदि वर्गमूल चिन्ह के अन्दर की राशि पूर्ण वर्ग हो, अर्थात यदि और केवल यदि $(gh - af)^2 = (h^2 - ab)(g^2 - ac)$,

$\Longleftrightarrow abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$.

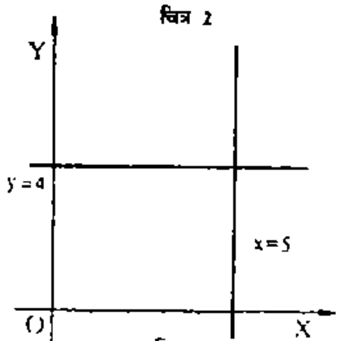
$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

5. मान लीजिए वृत्त का समीकरण
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है।
इसमें $x = at^2$, $y = 2at$ रखने पर, हम पाते हैं कि
$a^2t^4 + 4a^2t^2 + 2agt^2 + 4aft + c = 0.$
हम जानते हैं कि इसके चार मूल t_1, t_2, t_3, t_4 हैं। अतः एम.टी.ई.-04 से आप जानते हैं कि मूलों का योग
$\frac{1}{a^2}$ (t^3 का गुणांक) होगा।
$\therefore t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$

6. $xy = 0$ रेखाओं $x = 0$ और $y = 0$ का युग्म है। हमने इसे चित्र 2 में अनुरेखित किया है।
$xy - 4x - 5y + 20 = 0$ एक रेखायुग्म है क्योंकि इसका विविक्तकर शून्य है। वास्तव में, हम इसको आसानी से निम्नलिखित रूप में गुणनखंड कर सकते हैं:
$(x - 5)(y - 4) = 0.$
अतः ये रेखाओं $x = 5$ और $y = 4$ का युग्म निरूपित करता है, जिसे हमने चित्र 3 में अनुरेखित किया है।



चित्र 2



चित्र 3

7. $ax^2 + by^2 + cx + cy = 0$ एक रेखायुग्म निरूपित करता है यदि और केवल यदि

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & b & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (a+b)\,\frac{c^2}{4} = 0$$

$\Longleftrightarrow a = -b$ या $c = 0.$

8. आइए हम अक्ष को कोण θ से घुमाएं। तब समीकरण
$A(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + B(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + C = 0$
$\Longleftrightarrow x'(A\cos\theta + B\sin\theta) + y'(B\cos\theta - A\sin\theta) + C = 0$
यह x' = स्थिरांक के रूप में समानीत होगा यदि और केवल यदि $B\cos\theta = A\sin\theta.$
अर्थात्, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right).$
और तब समीकरण होगा

$$x'\left(A\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + B\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + C = 0$$

$$\Longleftrightarrow x' = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

अतः, स्थिरांक $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ है।

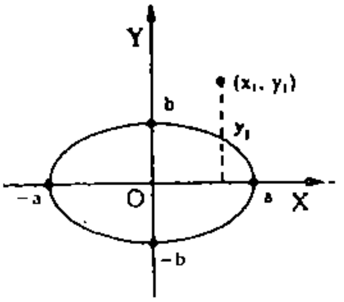
9. हम दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:
$y^2 = -(2Ax + 2By + C)$
$\Longleftrightarrow (y + k)^2 = -2Ax - 2By - C + 2ky + k^2$, जहाँ k एक स्थिरांक है।
$\Longleftrightarrow (y + k)^2 = -2Ax + 2(k - B)y + k^2 - C.$
हम k इस प्रकार चुनते हैं कि
$Ax + (B - k)y + \frac{C - k^2}{2} = 0$, y-अक्ष के समांतर हो, अर्थात्, $k = B$. तब समीकरण

$(y + B)^2 = -2A\left(x + \frac{C - B^2}{2A}\right)$ हो जाता है। इसका अक्ष $y + B = 0$ है, शीर्ष

$\left(\dfrac{B^2-C}{2A}, -B\right)$ और नाभिलंब का समीकरण

$x = \dfrac{B^2-A^2-C}{2A}$ होगा।

10. P (x_1, y_1) और O (0, 0) से होकर जाने वाली जीवा का मध्य बिंदु



चित्र 4

Q $\left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$ होगा। चूंकि $y_1^2 = 4ax_1$, $\left(\dfrac{y_1}{2}\right)^2 = 2a\left(\dfrac{x_1}{2}\right)$.

अतः इस प्रकार से सभी Q का समुच्चय $y^2 = 2ax$ होगा।

11. क) पहले तो, यदि (x_1, y_1) दीर्घवृत्त पर स्थित हो, तो ज़ाहिर है कि

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

अब, यदि (x_1, y_1) दीर्घवृत्त के बाहर हो (चित्र 4 देखें) तो

या तो $|x_1| > a$ या $|y_1| > b$.

$\therefore x_1^2 > a^2$ या $y_1^2 > b^2$.

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$$

इसी तरह आप दिखा सकते हैं कि यदि (x_1, y_1) दीर्घवृत्त के अन्दर स्थित है, तो

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1.$$

ख) चूंकि $5(16) + 7(9) = 143 > 11$, बिंदु दीर्घवृत्त के बाहर होगा।

12. मान लीजिए लंब रेखाएं निर्देशांक अक्ष हैं। मान लीजिए रेखा खंड अक्षों को $(x, 0)$ और $(0, y)$ पर काटता है। तो P के निर्देशांक $(X, Y) = \left(\dfrac{ax}{a+b}, \dfrac{by}{a+b}\right)$ हैं।

अब, चूंकि $x^2 + y^2 = (a+b)^2$

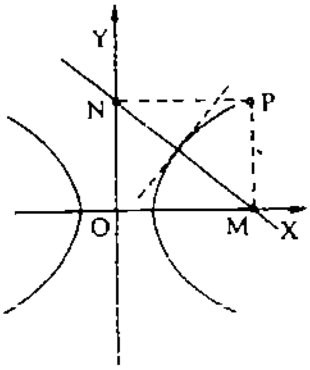
$$\Rightarrow \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ax}{a+b}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{by}{a+b}\right)^2 \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

अतः P द्वारा अनुरेखित पथ दीर्घवृत्त

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ है।



चित्र 5

13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की कोई स्पर्श रेखा $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ है, और

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ की कोई स्पर्श रेखा $x = m_1y + \sqrt{a^2m_1^2 - b^2}$ है।

ये दोनों रेखाएं समान होंगी अगर $\dfrac{1}{m} = m$ और $\sqrt{a^2m^2-b^2} = -\dfrac{1}{m_1}\sqrt{a^2m_1^2-b^2}$

$\Longleftrightarrow a^2m^2 - b^2 = a^2 - m^2b^2$

$\Longleftrightarrow m^2 = 1$, अगर $a^2 \neq b^2$.

अतः उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएं $y = x + \sqrt{a^2-b^2}$ और $y = -x + \sqrt{a^2-b^2}$ हैं।

14. स्थिति के आरेखी निरूपण के लिए चित्र 5 देखें।

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ का P (x_1, y_1) पर अभिलंब

$\dfrac{a^2}{x_1}(x - x_1) + \dfrac{b^2}{y_1}(y - y_1) = 0$ है।

अतः, M, $\left(\frac{(a^2+b^2)x_1}{a^2}, 0\right)$ है और N, $\left(0, \frac{(a^2+b^2)y_1}{b^2}\right)$ है।

अतः, P के निर्देशांक

$$\left(\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)x_1, \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)y_1\right) \text{ है।}$$

अब, चूँकि (x_1, y_1) अतिपरवलय पर स्थित है,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^2 x_1^2 - \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)^2 y_1^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow a^2X^2 - b^2Y^2 = (a^2+b^2)^2, \text{ जहाँ } X = \frac{a^2+b^2}{a^2}x_1 \text{ और } Y = \frac{a^2+b^2}{b^2}y_1.$$

अब जैसे P बदलता है X और Y बदलते है, लेकिन हमेशा समीकरण $a^2x^2 - b^2y^2 = (a^2+b^2)^2$ को संतुष्ट करते हैं। अतः, यह बिंदु P का बिंदुपथ है।

15. रेखाएं (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ पर मिलती हैं। अतः आयत के विकर्ण $y = \frac{b}{a}x$ और $y = \frac{-b}{a}x$ पर हैं, जोकि अतिपरवलय के अनंतस्पर्शी हैं।

16. क) $(x-y)^2 + (x-a)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow 2x^2 - 2xy + y^2 - 2ax + a^2 = 0.$

यहाँ $a = 2, b = 1, h = -1, g = -a, f = 0, c = a^2$

$\therefore ab - h^2 > 0$, अतः शांकव एक दीर्घवृत्त है।

ख) $r \sin^2\theta = 2a\cos\theta$.

कार्तीय निर्देशांक में बदलने पर, यह समीकरण $y^2 = 2ax$, एक परवलय है।

ग) $\frac{1}{r} = 1 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$

$\Longleftrightarrow 1 = \sqrt{x^2+y^2} + x + \sqrt{3}\,y$, चूँकि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$\Longleftrightarrow 2y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 2x + 2\sqrt{3}\,y + 1 = 0$

यहाँ $ab - h^2 < 0$ और इसका विविक्तकर

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

अतः, वक्र एक अतिपरवलय को निरूपित करता है।

17. क) आप जाँच कर सकते है कि $ab - h^2 = 0$ और विविक्तकर शून्येतर है। अतः, समीकरण एक परवलय को निरूपित करता है। हम इसे

$(3x - 4y)^2 = 18x + 101y - 19$ लिख सकते हैं।

$\Longleftrightarrow (3x - 4y + c)^2 = (6c + 18)x + y(101 - 8c) + c^2 - 19,$

जहाँ हम स्थिरांक c इस प्रकार से चुनते है कि

$3(6c + 18) - 4(101 - 8c) = 0$

$\Rightarrow c = 7.$

तब, दिया गया समीकरण

$(3x - 4y + 7)^2 = 15(4x + 3y + 2)$ होगा

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{3x - 4y + 7}{5}\right]^2 = 3\left[\frac{4x + 3y + 2}{5}\right]$$

अतः, परवलय का अक्ष $4x + 3y + 2 = 0$ है। शीर्ष $3x - 4y + 7 = 0$ और $4x + 3y + 2 = 0$ का प्रतिच्छेद है, अर्थात् $\left(\frac{-29}{25}, \frac{22}{25}\right)$.

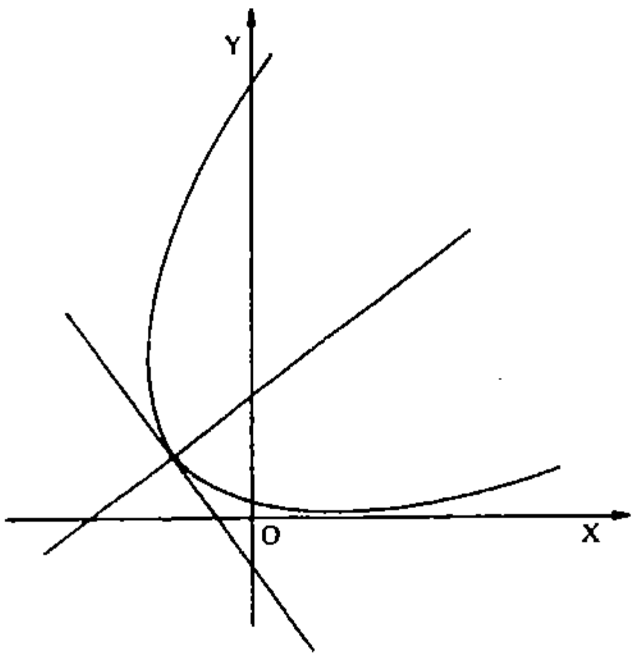
इसके नाभिलंब की लंबाई 3 है। इसकी नाभि है

$$F\left(-\frac{29}{25} + \frac{3}{4}\cos\theta, \frac{22}{25} + \frac{3}{4}\sin\theta\right), \text{ जहाँ } \tan\theta = -\frac{4}{3}$$

$\therefore$ F, $(-0.71, 0.28)$ है।

वक्र y-अक्ष को $\frac{101 \pm \sqrt{(101)^2 - 64 \times 19}}{32}$ पर काटता है, अर्थात्

लगभग $\frac{49}{8}$ और $\frac{3}{16}$ यह x-अक्ष को काटता नहीं है। हमने इसे चित्र 6 में अनुरेखित किया है।



चित्र 6

ञ) $xy - y^2 = 1$

यह एक अतिपरवलय है। इसका केन्द्र $-\frac{1}{2}y = 0$ और $-\frac{1}{2}x + y = 0$ का प्रतिच्छेद, अर्थात् $(0, 0)$ है। इसके अक्ष निर्देशांक अक्षों से कोण θ बनाते है, जहाँ $\tan 2\theta = 1$. अतः अनुप्रस्थ अक्ष की प्रवणता $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ है, और संयुग्मी अक्ष की प्रवणता $\theta_2 = \frac{5\pi}{8}$ है।

चूँकि $\tan\theta_1 = .41$, अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई r_1 होगी, जहाँ

$$r_1^2 = \frac{1 + (.41)^2}{-(.41) + (.41)^2} = \frac{1.168}{.758} = 1.54.$$

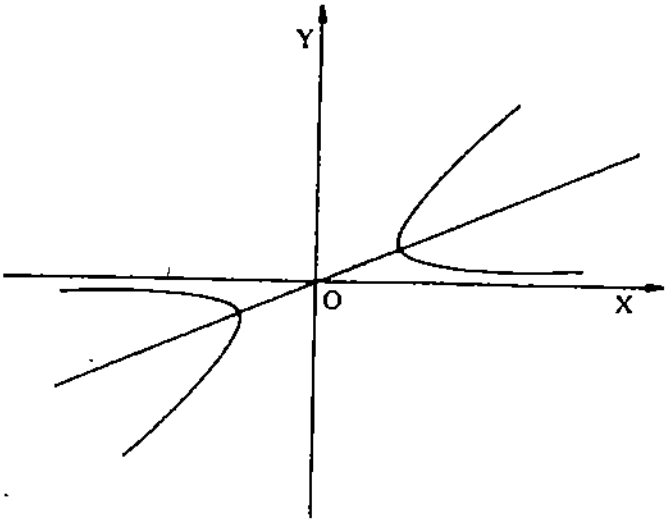
$\therefore r_1 = 1.24$, लगभग।

इसी प्रकार $r_2 = 91$.

अतः इसकी उत्केन्द्रता 1.24 है।

यह अक्षों को नहीं काटता है।

इस जानकारी की मदद से, हमने वक्र को चित्र 7 में अनुरेखित किया है।



चित्र 7

ग) समीकरण एक अतिपरवलय है जिसका केन्द्र $3x - 4y + 1 = 0$ और $4x + 3y + 1 = 0$ का प्रतिच्छेदन, अर्थात् $\left(-\frac{7}{25}, \frac{1}{25}\right)$ है। यहाँ $a = 12, b = -12, h = -\frac{7}{2}$.

अतः, इसके अक्ष निर्देशांक अक्षों से कोण θ_1 और θ_2 बनाते है, जहाँ $\tan\theta_1$ और $\tan\theta_2$ समीकरण $\tan^2\theta - \frac{a-b}{h}\tan\theta - 1 = 0$ के मूल है।

$\Longleftrightarrow \tan^2\theta - \frac{48}{7}\tan\theta - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow \tan\theta_1 = 7$ और $\tan\theta_2 = -\frac{1}{7}$

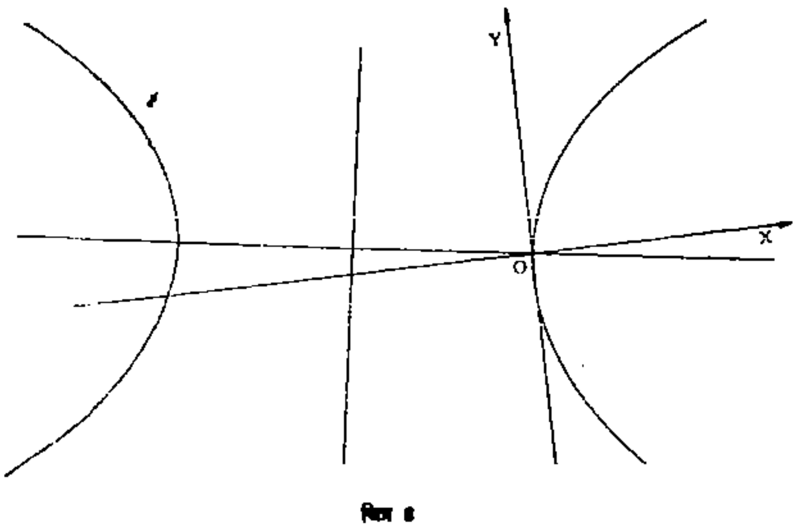
$\Longleftrightarrow \theta_1 = 81.9°$ (लगभग) और $\theta_2 = 171.9°$ (लगभग)।

इसके अक्षों की लंबाई r_1 और r_2 है, जहाँ

$$r_1^2 = \frac{1+49}{12 - 7 \times 7 - 12 \times 49} = -\frac{2}{25} \Rightarrow r_1 = .28.$$

$$r_2^2 = \frac{1 + \frac{1}{49}}{12 - 7(-\frac{1}{7}) - \frac{12}{49}} = \frac{2}{25} \Rightarrow r_2 = .28.$$

वक्र निर्देशांक अक्षों को $(0, 0)$, $(\frac{-7}{12}, 0)$, $(0, \frac{-1}{12})$ पर काटता है। अतः इसका रेखाचित्र चित्र 8 में दिया है।



चित्र 8

18) मान लीजिए

$S_1 = x^2 + 2xy + 5y^2 - 7x - 8y + 6 = 0$ और

$S_2 \equiv (2x - y - 5)(3x + y - 11) = 0$

तब वांछनीय शांकव $S_1 + k\,S_2 = 0$ है, जहां हम k को इस प्रकार चुनते हैं कि (1, 1) वक्र पर स्थित हो। इस प्रकार, वक्र

$(1+6k)\,x^2 + (2-k)\,xy + (5-k)\,y^2 - (7+37\,k)\,x - (8-6k)\,y + (6+55k) = 0.$

चूंकि (1, 1) इस पर स्थित है, $k = \dfrac{1}{28}$

अतः शांकव

$34\,x^2 + 55\,xy + 139\,y^2 = 233\,x - 218\,y + 223 = 0.$

शब्दावली

अंतःखंड	intercept
अंत्य बिन्दु	endpoint
अक्ष	axis
अचर पद	constant term
अकेन्द्रीय	non-central
अतिपरवलय	hyperbola
अधिकल्पित	imaginary
अधिक कोण	obtuse angle
अर्धाक्ष	semi-axis
अनंतस्पर्शी	asymptote
अनपभ्रष्ट शांकव	non-degenerate conic
अनुप्रस्थ अक्ष	transverse axis
अनुप्रस्थ काट	cross section
अनुरेखण	tracing
अनुरेखित करना	to trace
अपभ्रष्ट शांकव	degenerate conic
अभिलंब	normal line
अभिलक्षण	characteristic
आलेख	graph
उत्केंद्रता	eccentricity
एकीकृत	unified
कक्षा	orbit
कार्तीय	Cartesian
केन्द्र	centre
केन्द्रीयता	centrality
कोटि	ordinate
क्रमित युग्म	ordered pair
घूर्णन	rotation
चतुर्थांश	quadrant
छेदक	secant
जीवा	chord
डोरी गुण, रज्जु गुण	string property
त्रिज्या	radius
दक्षिणावर्त	clockwise
दर्पण प्रतिबिंब	mirror image
दिष्ट दूरी	directed distance
दीर्घ अक्ष	major axis
दीर्घवृत्त	ellipse
दूरी सूत्र	distance formula
दृढ़ पिंड गति	rigid body motion
द्विघाती	quadratic
द्विभाजित करना	to bisect
द्विविम	two-dimensional
ध्रुव	pole
ध्रुवीय समीकरण	polar equation
नाभि	focus
नाभिलंब	latus rectum
नाभीय त्रिज्या	focal radius
निकाय, तंत्र	system
नियता	directrix
निराकरण करना	to eliminate
निर्देशांक	coordinate

निर्देशांक तंत्र	coordinate system
न्यूनकोण	acute angle
परवलय	parabola
परिच्छेद सूत्र	section formula
परिमाण	magnitude
प्रतिच्छेद बिन्दु	point of intersection
प्रतिस्थापित करना	to substitute
प्रवणता	slope
प्रसामान्य रूप	normal form
प्रसामान्यीकृत करना	to normalise
प्राचल	parameter
बिंदु पथ	locus
भुज	abscissa
भुजा	side
मध्य बिंदु	midpoint
मानक रूप	standard form
मापित	measured
मूल बिन्दु	origin
रेखा खंड	line segment
रूपांतरित करना	to transform
लंब	perpendicular, normal
लघु अक्ष	minor axis
वक्र	curve
वामावर्त	anticlockwise
विलोमतः	conversely
विविक्तकर	discriminant
वैश्लेषिक	analytical
व्यापक	general
व्यास	diameter
शांकव	conic
शीर्ष	vertex
संगति	correspondence
संपर्क बिन्दु	point of contact
संयुग्मी अक्ष	conjugate axis
संयुग्मी अतिपरवलय	conjugate hyperbola
सकेंद्रीय	central
समकोणिक	rectangular
समतल परिच्छेद	planar section
समबाहु त्रिभुज	equilateral triangle
सममिति	symmetry
समष्टि	space
समानीत करना	to reduce
सम्पाती	coincident
सम्मिश्र संख्या	complex number
सारणिक	determinant
स्थानांतरण	translation
स्पर्श बिन्दु	point of tangency
स्पर्शरेखा	tangent line
स्थिरांक	constant

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-05
वैश्लेषिक ज्यामिति

खंड

2

गोला, शंकु और बेलन

खंड 2 गोला, शंकु और बेलन

इस खंड में हम आपका परिचय कुछ आधारभूत घन ज्यामिति से कराएंगे। हम त्रिविम समष्टि में रेखाओं और समतलों पर एक इकाई से प्रारम्भ करेंगे। इस इकाई में आप देखेंगे कि 3-समष्टि में कोई समतल 3 चरों वाले रैखिक समीकरण द्वारा निरूपित होता है जबकि कोई रेखा ऐसे दो समीकरणों से निरूपित होती है। हम रेखाओं और समतलों के प्रतिच्छेद की भी चर्चा करेंगे।

इस खंड की अगली इकाई में आप गोलों का वैश्लेषिक नज़रिये से अध्ययन करेंगे। इस अध्ययन में गोले का समीकरण और गोले के स्पर्शतल का समीकरण मालूम करना शामिल होगा। हम आपको यह भी दिखाएंगे कि गोले और समतल का प्रतिच्छेद और दो या अधिक गोलों का प्रतिच्छेद क्या होता है।

इस खंड की अन्तिम इकाई में हम शंकु और बेलन पर गौर करेंगे। आप देखेंगे कि ये रेखज पृष्ठ (ruled surfaces) हैं, अर्थात् उन रेखाओं के समुच्चय हैं जो कुछ प्रतिबंधों को संतुष्ट करती हैं। हम शंकु का, शंकु के स्पर्श तल का और विशेष प्रकार के बेलन का समीकरण भी मालूम करेंगे।

पिछले खंड की भाँति, इस खंड के अंत में हमने **विविध प्रश्नों** का समुच्चय दिया है। ये प्रश्न पूरे खंड की संपूर्ण सामग्री पर आधारित हैं। इनको करने से आपको यह सामग्री समझने में और अधिक सहायता मिलेगी।

गोला, शंकु और बेलन शांकवज (conicoid) की विशिष्ट स्थितियाँ हैं, जो अगले खंड की मुख्य संकल्पना है। हम इन दोनों खंडों को संगठित करके, इन पृष्ठों को केवल शांकवजों के व्यापक सिद्धांत का विशिष्ट उदाहरण मान कर इनका अध्ययन कर सकते थे। किंतु, हम समझते हैं कि इनको पहले करने से आप व्यापक सिद्धांत को और आसानी से समझ सकेंगे। इसी कारण हमने इन पृष्ठों और इनके ज्यामितीय गुणों को इस खंड में अलग से प्रस्तुत किया है। अतः यदि आप यह सुनिश्चित कर लें कि आपने इस खंड की इकाइयों के उद्देश्यों को प्राप्त कर लिया है, तो अगले खंड को समझना आपके लिए सरल होगा।

इकाई 4 प्रारंभिक त्रिविम ज्यामिति

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

इस इकाई से हम त्रिविम समष्टि, या 3-समष्टि, की वैश्लेषिक ज्यामिति पर अपनी चर्चा आरंभ करते हैं। इस इकाई का लक्ष्य आपको त्रिविम समष्टि में बिंदुओं, रेखाओं और समतलों की कुछ आधारभूत जानकारी देना है। हम कार्तीय निर्देशांकों के संक्षिप्त परिचय से प्रारम्भ करेंगे। फिर हम एक रेखा और एक समतल को बीजीय रूप से निरूपित करने के विभिन्न तरीकों की चर्चा करेंगे। हम रेखाओं के बीच के कोणों, समतलों के बीच के कोणों और समतल और रेखा के बीच के कोणों की चर्चा भी करेंगे।

इस इकाई में बताए गए तथ्यों का शेष पाठ्यक्रम में निरंतर प्रयोग किया जाएगा। इसलिए, हमारा सुझाव है कि आप इस इकाई के सब प्रश्नों को करें। और, अगली इकाई आप तब तक शुरू न करें जब तक आप यह सुनिश्चित न कर लें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं।

उद्देश्य

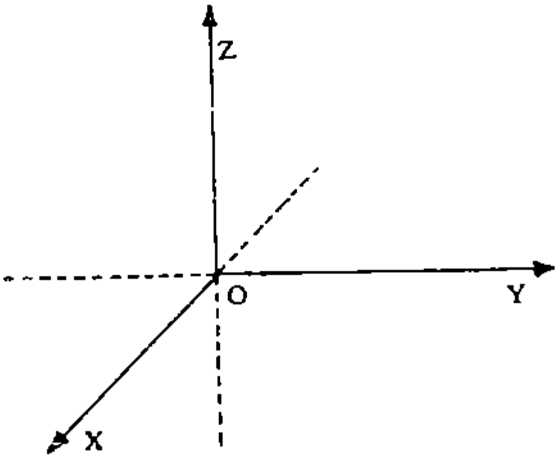
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- त्रिविम समष्टि में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच की दूरी मालूम कर सकेंगे;
- किसी रेखा की दिक्कोज्याएं और दिक्-अनुपात प्राप्त कर सकेंगे;
- किसी रेखा के समीकरण विहित रूप में या द्विबिंदु रूप में प्राप्त कर सकेंगे;
- किसी समतल का समीकरण त्रिबिंदु रूप में, अंतःखंड रूप में या प्रसामान्य रूप में प्राप्त कर सकेंगे;
- किसी बिंदु की किसी समतल से दूरी मालूम कर सकेंगे;
- दो रेखाओं के बीच या दो समतलों के बीच या एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण मालूम कर सकेंगे;
- दो रेखाओं के या एक रेखा और एक समतल के प्रतिच्छेद बिंदु मालूम कर सकेंगे।

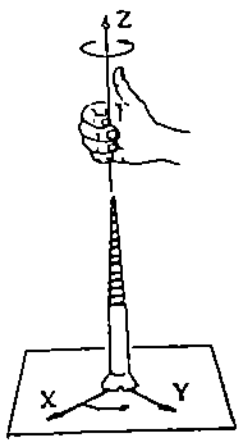
आइए, अब हम 3-समष्टि में बिंदुओं पर अपनी चर्चा प्रारम्भ करें।

4.2 बिंदु

आइए, हम द्विविम निर्देशांक तंत्र के त्रिविम समष्टि में व्यापकीकरण से शुरू करें। आप जानते हैं कि द्विविम समष्टि में कोई बिंदु दो वास्तविक संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है। त्रिविम समष्टि में किसी बिंदु की स्थिति पता लगाने के लिए हमें तीन संख्याएं देनी पड़ती हैं। ऐसा करने के लिए हम समष्टि में तीन परस्पर लंब रेखाएं (अक्ष) लेते हैं जो बिंदु O पर (चित्र 1 (क) देखें) प्रतिच्छेदित होती है। O **मूल बिंदु** कहलाता है। इन रेखाओं पर धनात्मक रेखाएं OX, OY और OZ इस प्रकार चुनी जाती हैं कि यदि O पर स्थित कोई दक्षिणावर्ती पेंच (right-handed screw) (चित्र 1 (ख) देखें) OX से OY की ओर घुमाया जाए तो वह OZ की दिशा में आगे बढ़ता है।



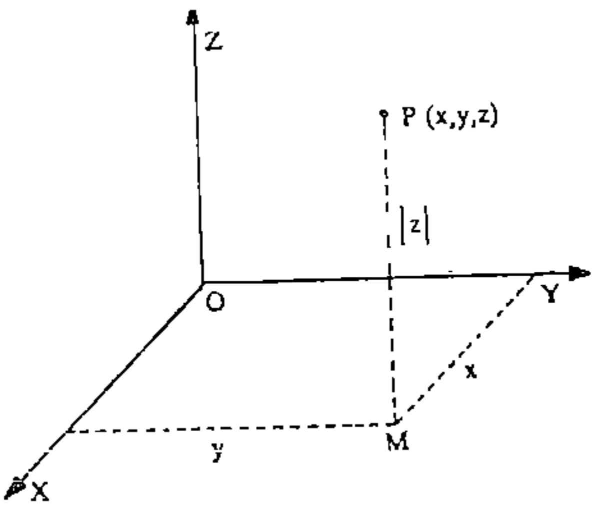
(क)



(ख)

चित्र 1: त्रिविम में कार्तीय निर्देशांक अक्ष

किसी बिंदु P के 3-समष्टि में निर्देशांक मालूम करने के लिए हम P से समतल XOY पर लंब का पाद लेते हैं (चित्र 2 देखें)। इसको M कहिए। मान लीजिए समतल XOY में M के निर्देशांक (x, y) हैं और MP की लंबाई $|z|$ है। तब P के निर्देशांक (x, y, z) होंगे।



चित्र 2

z धनात्मक है या ऋणात्मक, यह इस बात पर निर्भर है कि MP धनात्मक दिशा OZ में है या नहीं।

अतः 3-समष्टि में प्रत्येक बिंदु P के लिए एक वास्तविक संख्याओं का क्रमित त्रिक (x, y, z,), अर्थात् $\mathbf{R}^3$ का अवयव होता है।

विलोमतः, यदि वास्तविक संख्याओं का कोई क्रमित त्रिक दिया हो तो हम 3-समष्टि में एक ऐसा बिंदु P आसानी से मालूम कर सकते हैं जिसके निर्देशांक दिया गया त्रिक हो। अतः 3-समष्टि और समुच्चय $\mathbf{R}^3$ के बीच एकैकी संगति (one-to-one correspondence) होती है। इस कारण से त्रिविम समष्टि को प्रायः प्रतीक $\mathbf{R}^3$ से दर्शाया जाता है। इसी तरह के कारण से समतल को $\mathbf{R}^2$ से और रेखा को $\mathbf{R}$ से दर्शाया जाता है।

अब द्विविम समष्टि में, किसी बिंदु P (x, y) की मूल बिंदु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ होती है। चित्र 2 के प्रयोग से, क्या आप इस व्यंजक को तीन विभाओं के लिए विस्तार कर सकते हैं? पाइथैगोरस के प्रमेय से हम देखते हैं कि

$$OP^2 = OM^2 + MP^2$$

$$= (x^2 + y^2) + z^2$$

$$\therefore\ OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

अतः, P (x, y, z) की मूल बिंदु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ है। और तब, दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी क्या होगी? यह दूरी सूत्र (distance formula)

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad \ldots (1)$$

है, जैसा कि आप इकाई 1 के समीकरण 1 से आशा कर सकते हैं।

(1) का प्रयोग करके, हम एक ऐसे बिंदु R(x, y, z) के निर्देशांक प्राप्त कर सकते हैं जो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को अनुपात m : n में विभाजित करता है। ये

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n},\ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n},\ z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n} \quad \ldots (2)$$

हैं।

उदाहरण के लिए, एक ऐसा बिंदु A प्राप्त करने के लिए जो P (1, 0, 0) और Q (1, 1, 1) को समत्रिभाजित करे, हम (2) में m =1 और n=2 लेते हैं। तब A के निर्देशांक $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ होंगे।

नोट कीजिए कि यदि हमने (2) में m = 2, n = 1 लिया होता तो हम एक और बिंदु $(1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ पाते जो PQ को समत्रिभाजित करता है।

अब आप कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 1) P (1, 1, −1) और Q (−1, 1, 1) के बीच की दूरी मालूम कीजिए। उस बिंदु R के निर्देशांक क्या हैं जो PQ को 3:4 के अनुपात में विभाजित करता है?

E 2) P (a, b, c) और Q (r, s, t) को जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु मालूम कीजिए।

आइए अब हम रेखाओं पर गौर करें।

4.3 रेखाएं

इकाई 1 में हमने 2-समष्टि में रेखाओं को देखा था। इस भाग में हम आपको दिखाएंगे कि 3-समष्टि में रेखाओं को बीजीय रूप में कैसे निरूपित किया जाता है। आप देखेंगे कि इस स्थिति में रेखा दो रैखिक समीकरणों के समुच्चय द्वारा निर्धारित होती है, न कि एक रैखिक समीकरण द्वारा, जैसा 2-समष्टि में होता है।

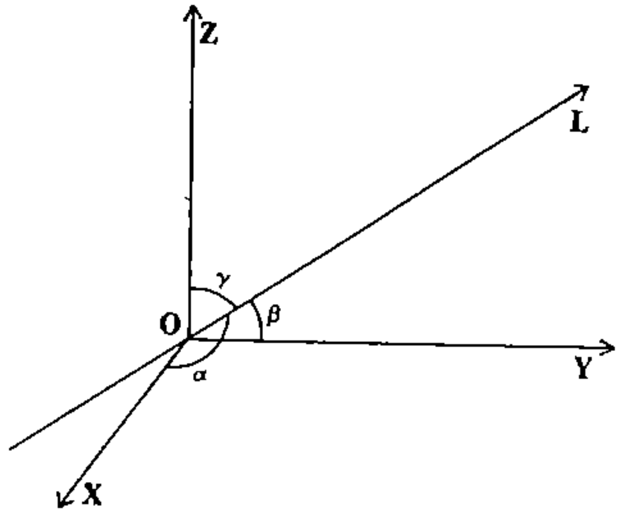
आइए हम कोणों के त्रिक (triplet) से शुरू करें जो 3-समष्टि में रेखा की दिशा को अद्वितीयतः निर्धारित करते हैं।

4.3.1 दिक्काज्याएं

आइए हम मूल बिंदु O और OX, OY, OZ अक्षों के कार्तीय निर्देशांक तंत्र पर विचार करें। अब समष्टि में O से गुज़रती हुई एकदिष्ट रेखा (directed line) L लीजिए (चित्र 3 देखें)। मान लीजिए L, x, y और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः α, β और γ कोण बनाती है। तो हम $\cos \alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ को L की **दिक्कोज्याएँ** (direction cosines) कहते हैं।

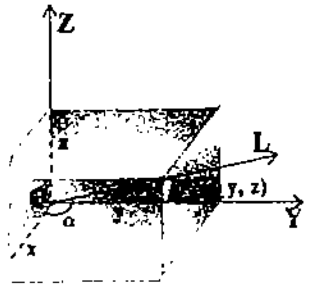
उदाहरण के लिए x-अक्ष की दिक्कोज्याएं $\cos 0, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}$, अर्थात् 1, 0, 0 हैं।

नोट कीजिए कि दिक्कोज्याएं विचाराधीन निर्देशांक तंत्र पर निर्भर करती हैं।



चित्र 3: $\cos \alpha$, $\cos \beta$ और $\cos \gamma$ रेखा L की दिक्कोज्याएँ हैं।

अब समष्टि में कोई दिष्ट रेखा L लीजिए। दिए गए निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष हम इसकी दिक्कोज्याएं कैसे मालूम कर सकते हैं? जाहिर है कि वे O से होकर जाने वाली उस रेखा की दिक्कोज्याएं होंगी जिसकी दिशा वही है जो कि L की है। उदाहरण के लिए, बिंदु (1, 1, 1) से होकर जाने वाली x-अक्ष के समांतर रेखा की दिक्कोज्याएं 1, 0, 0 हैं।



चित्र 4

अब आइए हम किसी रेखा की दिक्कोज्याओं के कुछ साधारण गुणों पर विचार करें। मान लीजिए किसी रेखा L की किसी दिए गए निर्देशांक तंत्र के प्रति दिक्कोज्याएं $\cos \alpha$, $\cos \beta$ और $\cos \gamma$ हैं। हम मान सकते हैं कि मूल बिंदु L पर स्थित है। मान लीजिए P (x, y, z), L पर स्थित एक बिंदु है। तब, आप चित्र 4 से देख सकते हैं कि

$x = OP \cos \alpha$, $y = OP \cos \beta$ और $z = OP \cos \gamma$.

चूँकि $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OP^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

हम पाते हैं कि

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \dots (3)}$$

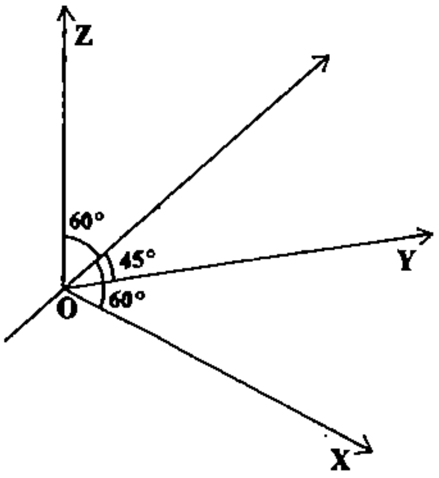
रेखा की दिक्कोज्याओं का यह साधारण गुण अनेकों प्रकार से उपयोगी है, जैसा कि आप इस पाठ्यक्रम में आगे देखेंगे। आइए, हम इसके उपयोग के एक उदाहरण पर विचार करें।

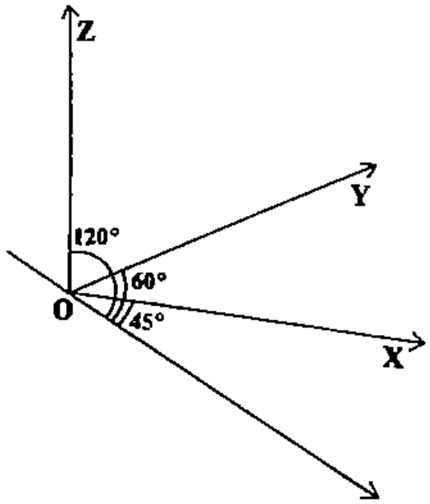
उदाहरण 1: यदि कोई रेखा x और y-अक्षों से क्रमशः $\frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाती है, तो वह कोण क्या होगा जो यह z-अक्ष से बनाती है?

हल: (3) में $\alpha = \frac{\pi}{4}$ और $\beta = \frac{\pi}{3}$ रखिए। तब यदि γ वह कोण है जो रेखा z-अक्ष से बनाती है, तो हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos \gamma = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} \text{ या } \frac{2\pi}{3}$$

अतः ऐसी दो रेखाएं होंगी जो हमारी परिकल्पना को संतुष्ट करती हैं। (आश्चर्यचकित न हों, चित्र 5 देखें।)





चित्र 5

वे z-अक्ष से क्रमशः $\frac{\pi}{3}$ और $\frac{2\pi}{3}$ कोण बनाती हैं।

एक और संख्या त्रिक हैं जो रेखा की दिक्कोज्याओं से संबद्ध है।

परिभाषा : तीन संख्याएं a, b और c दिक्कोज्याएं l, m और n वाली रेखा के **दिक्-अनुपात** (direction ratios) कहलाते हैं, यदि $a = kl$, $b = km$, $c = kn$, किसी $k \in \mathbf{R}$ के लिए अतः कोई त्रिक जो किसी रेखा की दिक्कोज्याओं के समानुपाती हो उसके दिक्-अनुपात कहलाते हैं।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{2}$, 1, 1 दिक्कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ वाली किसी रेखा के दिक्-अनुपात हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न कर सकते हैं।

E 3) यदि $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ किसी रेखा की दिक्कोज्याएं हैं, तो दिखाइए कि

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$$

E 4) क) y और z अक्षों की,
ख) XY-समतल में रेखा $y = mx + c$ की
दिक्कोज्याएँ मालूम कीजिए।

E 5) मान लीजिए L मूल बिंदु से होकर जाने वाली कोई रेखा है और P (a, b, c) इस पर कोई बिंदु है। दिखाइए कि a, b, c L के दिक्-अनुपात हैं।

E 6) मान लीजिए कि चित्र 3 में दी गई रेखा L की दिशा हम विपरीत दिशा में बदल देते हैं। अब L की दिक्कोज्याएं क्या होंगी?

आइए अब हम देखें कि दिक्कोज्याएँ या दिक्-अनुपात रेखा का समीकरण मालूम करने के लिए कैसे प्रयोग किए जा सकते हैं।

4.3.2 सरल रेखा के समीकरण

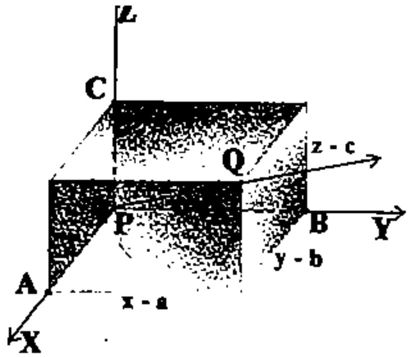
अब हम किसी रेखा के समीकरण विभिन्न रूपों में मालूम करेंगे। मान लीजिए कि किसी रेखा की दिक्कोज्याएं l, m और n हैं और बिंदु P(a, b, c) इस पर स्थित है।

तब यदि Q (x, y, z) इस पर स्थित कोई और बिंदु है, तो आइए PQ विकर्ण वाले एक लंबकोणिक समांतर षट्फलक (cuboid) बनाएँ (चित्र 6 देखें)।

तब $PA = x-a$, $PB = y-b$ और $PC = z-c$, अब यदि $PQ = r$, तो आप देख सकते हैं कि

$\cos\alpha = \frac{x-a}{r}$, अर्थात्

$l = \frac{x-a}{r}$, इसी प्रकार, $m = \frac{y-b}{r}$, $n = \frac{z-c}{r}$



चित्र 6: (x−a), (y−b) और (z−c) PQ के दिक्-अनुपात हैं।

इस प्रकार रेखा पर स्थित कोई बिंदु समीकरणों

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \qquad \ldots (4)$$

को संतुष्ट करता है।

(नोट कीजिए कि (4) का मतलब समीकरणों के युग्म

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m}$ और $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ या $\frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n}$

और $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ या $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m}$ और $\frac{z-a}{l} = \frac{z-c}{n}$ है।)

विलोमतः, (4) के रूप में समीकरणों का कोई युग्म (a, b, c) से होकर जाने वाली और दिक्-अनुपात l, m और n वाली सरल रेखा को निरूपित करता है। (4) **किसी सरल रेखा के समीकरणों का विहित रूप** (canonical form) कहलाता है।

उदाहरण के लिए, (1, 1, 1) से होकर गुज़रने वाली और $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ दिक्कोज्याओं वाली सरल रेखा के समीकरण

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{z-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \text{, अर्थात्}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{(-1)} = \frac{z-1}{1} \text{ हैं।}$$

नोट कीजिए कि यह (4) के रूप का है, लेकिन 1, −1, 1 इसके दिक्-अनुपात हैं; दिक्कोज्याएं नहीं।

टिप्पणी 1 : (4) से हम देख सकते हैं कि (a, b, c) से होकर गुज़रने वाली और दिक्कोज्याओं l, m, n वाली रेखा के समीकरण

$$x = a + lr,\ y = b + mr,\ z = c + nr \qquad \ldots (5)$$

हैं, जहां $r \in \mathbf{R}$.

यह किसी रेखा के समीकरणों का प्राचल r के पदों में **एक-प्राचल रूप** है।

आइए अब हम (4) का प्रयोग रेखा के समीकरणों का एक और रूप मालूम करने के लिए करें। मान लीजिए P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) किसी रेखा L पर स्थित हैं। तब यदि l, m और n इसकी दिक्कोज्याएँ हों तो (4) हमें बताता है कि L के समीकरण

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \qquad \ldots (6)$$

हैं।

चूँकि Q, L पर स्थित है, हम पाते हैं कि

$$\frac{x_2-x_1}{l} = \frac{y_2-y_1}{m} = \frac{z_2-z_1}{} \qquad \ldots (7)$$

तब (6) और (7) से हम पाते हैं कि

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \dots (8)$$

(8) इकाई 1 के समीकरण (7) का व्यापकीकरण है और 3-समष्टि में किसी रेखा के समीकरणों का **द्विबिंदु रूप** (two-point form) कहलाता है।

उदाहरण के लिए, (1, 2, 3) और (0, 1, 4) से होकर गुज़रने वाली रेखा के समीकरण

$x-1 = y-2 = -(z-3)$ हैं।

नोट कीजिए कि (8) प्राप्त करते समय हमने यह भी दिखाया है कि

> यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ किसी रेखा L पर स्थित हैं तो x_2-x_1, y_2-y_1 और z_2-z_1, L के दिक्-अनुपात हैं।

अब कुछ प्रश्न कीजिए।

E 7) (−1, 0, 1) और (1, 2, 3) को जोड़ने वाली रेखा के समीकरण मालूम कीजिए।

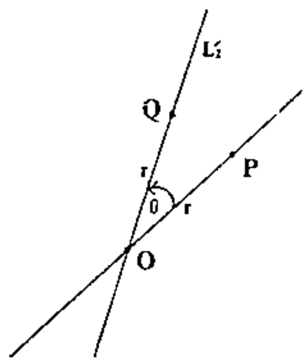
E 8) दिखाइए कि (2, 4, 3) और (−3, 5, 3) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण $x + 5y = 2z$, $z = 3$ हैं।

आइए अब देखें कि दो रेखाएं कब लंब होती हैं।

4.3.3 दो रेखाओं के बीच का कोण

इकाई 1 में आपने देखा कि किसी समतल में दो रेखाओं के बीच का कोण उनकी प्रवणताओं के पदों में प्राप्त किया जा सकता है। अब हम त्रिविम समष्टि में दो रेखाओं के बीच का कोण उनकी दिक्कोज्याओं के पदों में मालूम करेंगे।

मान लीजिए रेखाओं L_1 और L_2 की दिक्कोज्याएं, क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हैं। मान लीजिए L_1 और L_2 के बीच का कोण θ है। अब हम मूल बिंदु से होकर जाने वाली दो ऐसी रेखाएं L_1' और L_2' खींचते हैं जिनकी दिक्कोज्याएं क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हैं। तब L_1' और L_2' पर क्रमशः P और Q इस प्रकार चुनिए कि OP = OQ = r. तब P के निर्देशांक (l_1r, m_1r, n_1r) और Q के (l_2r, m_2r, n_2r) होंगे। साथ ही, OP और OQ के बीच का कोण θ है (चित्र 7 देखें)। अब



चित्र 7

$$PQ^2 = (l_1 - l_2)^2r^2 + (m_1 - m_2)^2r^2 + (n_1 - n_2)^2r^2$$
$$= 2(1 - l_1l_2 - m_1m_2 - n_1n_2)r^2,$$

$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$ का प्रयोग करने पर। साथ ही, चित्र 7 और प्रारम्भिक त्रिकोणमिति के प्रयोग से हम जानते हैं कि

: $= OP^2 + OQ^2-$ ...)Q cos θ

संबंध

$- n_1n_2$ ... (9)

...सकते हैं कि दोनों रेखाएं कब लंब होंगी? वे लंब होंगी यदि

... यदि और केवल यदि

... (10)

हम ... की दिक्कोज्याओं की बजाय दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1

- त्रि ... यह ... कि L_1 और L_2 लंब होंगे यदि और

केवल यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$? यदि आप दिक्-अनुपात की परिभाषा का प्रयोग करें, तो आप देखेंगे कि ऐसा ही है।

और, दो रेखाएँ कब समांतर होंगी? ज़ाहिर है कि वे समांतर होंगी यदि उनकी दिशाएं एक ही हैं या विपरीत हैं। अतः ऊपर दी गई रेखाएं L_1 और L_2 समांतर होंगी यदि और केवल यदि $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, या $l_1 = -l_2$, $m_1 = -m_2$, $n_1 = -n_2$.

विशेष रूप से, इसका अर्थ है कि यदि a, b, c और a′, b′, c′ क्रमशः L_1 और L_2 के दिक्-अनुपात हों, तो

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,.$$

हमने जो कुछ बताया है आइए उसे संक्षेप में कहें।

> दो रेखाएं जिनके दिक्-अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हैं
>
> (i) लंब होंगी यदि और केवल यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$;
>
> (ii) समांतर होंगी यदि और केवल यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

उदाहरण के लिए, रेखा $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ x-अक्ष के समांतर नहीं होगी क्योंकि 2, 1, 3 और 1, 0, 0 समानुपाती नहीं हैं।

आगे, $x = y = z$ और $x = -y, z = 0$ लंब होंगी क्योंकि 1, 1, 1 और 1, −1, 0 इन दोनों रेखाओं के दिक्-अनुपात हैं और $1.(1) + 1(-1) + 1(0) = 0$.

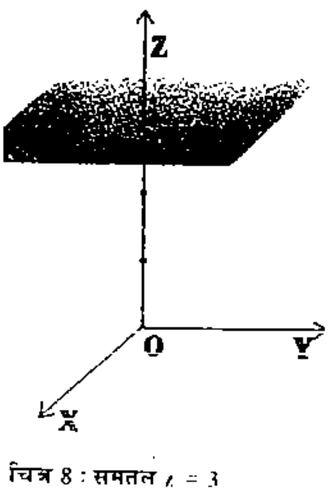
अब आप कुछ प्रश्न कीजिए।

E 9) दिक्-अनुपातों 1, 1, 2 और $\sqrt{3}, -\sqrt{6}, 4$ वाली रेखाओं के बीच का कोण मालूम कीजिए।

E 10) यदि तीन रेखाओं के दिक्-अनुपात 1, 2, 3; 1, −2, 1; 4, 1, −2 हों, तो दिखाइए कि वे परस्पर लंब हैं।

इस भाग में आपने देखा कि त्रिविम समष्टि में कोई रेखा रैखिक समीकरणों के युग्म से निरूपित होती है। अगले भाग में आप देखेंगे कि इसका अर्थ यह है कि रेखा दो समतलों का प्रतिच्छेद होती है।

4.4 समतल



चित्र 8 : समतल $z = 3$

इस भाग में आप देखेंगे कि एक रैखिक समीकरण त्रिविम समष्टि में एक समतल को निरूपित करता है। हम समतलों के प्रतिच्छेद और रेखा और समतल के प्रतिच्छेद की चर्चा भी करेंगे।

आइए, पहले हम समतल के कुछ बीजीय निरूपण देखें।

4.4.1 समतल के समीकरण

चित्र 1 (क) में दिए गए XY-समतल पर विचार कीजिए। इस समतल में प्रत्येक बिंदु का x-निर्देशांक 0 है। इसके विलोम, कोई भी बिंदु जिसका z-निर्देशांक शून्य हो वह XY-समतल में होगा। अतः समीकरण $z = 0$, XY-समतल को निरूपित करता है।

इसी तरह, $z = 3$ उस समतल को निरूपित करता है जो XY-समतल के समांतर है और जो इससे 3 इकाई ऊपर स्थित है (चित्र 8)।

और YZ-समतल का समीकरण क्या होगा? क्या आप सहमत हैं कि यह $x = 0$ है?

नोट कीजिए कि इनमें से प्रत्येक समतल इस गुण को संतुष्ट करता है कि यदि दो बिंदु इस पर

स्थित हों, तो उनको जोड़ने वाली रेखा भी उस पर स्थित होगी। यह गुण संमतल का पारिभाषिक गुण है।

परिभाषा : एक **समतल** ऐसे बिंदुओं का समुच्चय होता है कि जब भी P और Q इसमें हों, तो P और Q को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित सभी बिंदु भी इसमें होंगे।

ऊपर दिए गए समतलों के बारे में आपने एक और बात पर गौर किया होगा कि उनके समीकरण x, y और z में रैखिक हैं। यह तथ्य प्रत्येक समतल के लिए सही है, जैसा कि आप निम्नलिखित प्रमेय में देखेंगे।

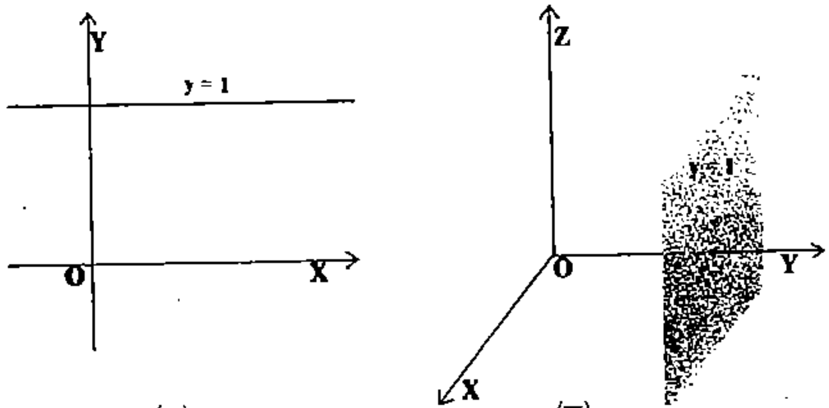
प्रमेय 1 : व्यापक रैखिक समीकरण $Ax + By + Cz + D = 0$, जहां A, B, C में से कम से कम एक शून्येतर हो, त्रिविम समष्टि में एक समतल को निरूपित करता है। इसके अतिरिक्त, इसका विलोम भी सही है।

इस परिणाम को हम यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे, लेकिन हम इस तथ्य का हमेशा प्रयोग करेंगे कि समतल और 3 चरों वाले रैखिक समीकरण में कोई अंतर नहीं है। अतः उदाहरण के लिए, प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि $2x + 5z = y$ एक समतल को निरूपित करता है।

यहाँ पर हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी देना चाहते हैं।

टिप्पणी 2 : 2-समष्टि में एक रैखिक समीकरण एक रेखा को निरूपित करता है, जबकि 3-समष्टि में एक रैखिक समीकरण एक समतल को निरूपित करता है। उदाहरण के लिए,

$y = 1$ चित्र 9 (क) में दी गई रेखा है और चित्र 9 (ख) में दिया गया समतल है।



(क) (ख)

चित्र 9 : एक ही समीकरण 2-समष्टि में एक रेखा को निरूपित करता है और 3-समष्टि में एक समतल को निरूपित करता है।

आइए अब हम समतल का समीकरण विभिन्न रूपों में प्राप्त करें। हम निम्नलिखित परिणाम से शुरू करते हैं।

प्रमेय 2 : तीन असंरेख (non-collinear) बिंदु एक समतल को निर्धारित करते हैं। वास्तव में, असंरेख बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से होकर गुज़रने वाला अद्वितीय समतल सारणिक समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (11)$$

से दिया जाता है।

इस परिणाम को हम यहां सिद्ध नहीं करेंगे लेकिन इसका काफी प्रयोग करेंगे।

उदाहरण के तौर पर, आइए हम उस समतल का समीकरण मालूम करें जो बिंदुओं (1, 1, 0), (−2, 2, −1) और (1, 2, 1) से गुज़रता है। यह

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ होगा।}$$

$$\Rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Rightarrow 2x + 3y - 3z = 5.$$

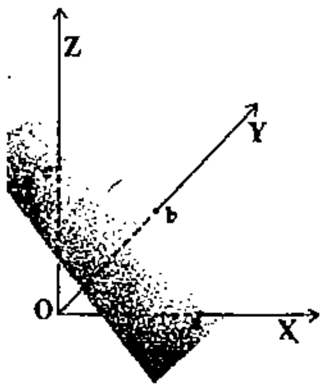
अब आप कुछ प्रश्न कीजिए।

E 11) दिखाइए कि चार बिंदु (0, −1, −1), (4, 5, 1), (3 9, 4) और (−4, 4, 4) समतलीय (coplanar) हैं, अर्थात एक ही समतल में स्थित हैं।
(**संकेत**: इनमें से किन्हीं तीन बिंदुओं से जाने वाले समतल का समीकरण प्राप्त कीजिए और देखिए कि क्या चौथा बिंदु उस पर स्थित है।)

E 12) दिखाइए कि जो समतल, तीनों अक्षों पर 2, −1, 5 के अन्तःखंड बनाती है, उसका समीकरण

$\frac{x}{a} + \frac{y}{(-1)} + \frac{z}{5} = 1$ होगा।

(**संकेत**: समतल द्वारा x-अक्ष पर 2 का अंतःखंड बनाने का अर्थ है कि यह x-अक्ष को (2, 0, 0) पर काटता है।)



चित्र 10: समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

क्या आपने E12 में समीकरण के अंतःखंडों और गुणांकों के संबंध पर ध्यान दिया?

व्यापक तौर पर, आप यह जांच कर सकते हैं कि निर्देशांक अक्षों पर a, b और c अंतःखंड बनाने वाले समतल (चित्र 10 देखें) का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad \ldots (12)$$

है।

ऐसा इसलिए है क्योंकि (a, 0, 0), (0, b, 0) और (0, 0, c) इस पर स्थित हैं।

(12) समतल के समीकरण का **अंतःखंड रूप** कहलाता है।

आइए देखें कि इस रूप का हम कैसे उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 2: समतल $2x-3y+5z = 4$ के निर्देशांक अक्षों पर अंतःखंड मालूम कीजिए।

हल: समीकरण को हम $\frac{x}{2} - \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{z}{\frac{4}{5}} = 1$ लिखते हैं।

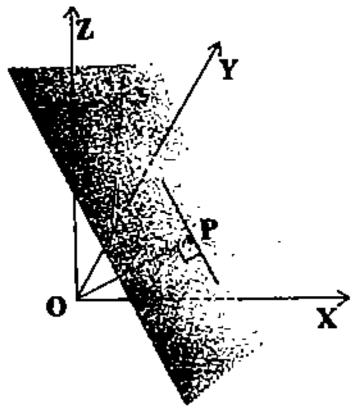
अतः अक्षों पर अंतःखंड 2, $\frac{-4}{3}$ और $\frac{4}{5}$ हैं।

अब (12) के प्रयोग पर आधारित एक प्रश्न।

E 13) दिखाइए कि समतल $ax + by + cz + d = 0$ और $Ax + By + Cz + D = 0$ एक समान होंगे यदि और केवल यदि a, b, c, d और A, B, C, D समानुपाती हों।

(**संकेत**: समीकरण को अंत:खंड रूप में फिर से लिखिए। दो समतल एक होंगे यदि और केवल यदि अक्षों पर उनके अंत:खंड समान हों।)

आइए, अब हम समतल के समीकरण के एक और रूप पर विचार करें। इसके लिए मूलबिंदु से दिए गए समतल पर आइए हम एक लंब डालें (चित्र 11 देखें)। मान लीजिए कि यह समतल से बिंदु P पर मिलता है। मान लीजिए $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, OP की दिक्कोज्याएं हैं और $p = |OP|$.



चित्र 11: समतल के समीकरण का प्रसामान्य रूप प्राप्त करना।

इसके अतिरिक्त, मान लीजिए समतल x, y और z अक्षों से अंत:खण्ड क्रमशः a, b और c बनाता है। तब

$$\cos\alpha = \frac{p}{a}, \quad \cos\beta = \frac{p}{b} \text{ और } \quad \cos\gamma = \frac{p}{c} \qquad \ldots (13)$$

अब, (12) से हम जानते हैं कि समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ है।

तब (13) के प्रयोग से, यह समीकरण

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad \ldots (14)$$

हो जाता है।

यह समतल के समीकरण का **प्रसामान्य रूप** (normal form) कहलाता है।

उदाहरण के लिए, आइए हम चित्र 9 (ख) में दिए गए समतल के समीकरण का प्रसामान्य रूप मालूम करें। मूलबिंदु से इस पर डाले गए लंब की लंबाई 1 है और यह x-अक्ष पर है। अतः इसकी दिक्कोज्याएं 1, 0, 0 हैं। इस प्रकार, (14) से हमें इसका समीकरण $x = 1$ प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि (14) $Ax + By + Cz = D$ के रूप का है, जहां $|A| \le 1, |B| \le 1, |C| \le 1, A^2 + B^2 + C^2 = 1$ और $D \ge 0$.

अब मान लीजिए हमें एक समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ दिया जाता है। इसके समीकरण से क्या हम मूलबिंदु से इस पर डाले गए लंब की लंबाई मालूम कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए हम E 13 का प्रयोग करेंगे।

मान लीजिए समतल का प्रसामान्य रूप में समीकरण $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ है। यह वही होना चाहिए जो समतल का दिया गया समीकरण है। अतः E 13 से हम देखते हैं कि एक ऐसा स्थिरांक k होता है कि
$\cos\alpha = kA, \cos\beta = kB, \cos\gamma = kC, p = -kD$.
तब, (3) से हम पाते हैं कि

$$k^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \text{ अर्थात् } k = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{इसलिए, } p = -kD = \frac{\pm D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

जहां हम D का निरपेक्ष मान (absolute value) लेते हैं, चूंकि $p \ge 0$.

अतः समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ पर मूल बिंदु से लंब की लंबाई

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \ldots (15)$$

है।

उदाहरण के लिए, मूल बिंदु से $x + y + z = 1$ पर लंब की लंबाई $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

अब आइए हम एक कदम और आगे चलें। हम बिंदु (a, b, c) और समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ के बीच की दूरी मालूम करेंगे, अर्थात् बिंदु से समतल पर लंब की लंबाई। इसको प्राप्त करने के लिए बिना अक्षों की दिशा बदले हम मूल बिंदु को (a, b, c) पर स्थानांतरित करते हैं। तब, भाग 1.4.1 की तरह, यदि X, Y, Z नए निर्देशांक हों तो $x = X + a, y = Y + b, z = Z + c$.

अक्षों के स्थानांतरण पर हमने विस्तार से इकाई 1 में चर्चा की है

अतः नए निर्देशांकों में समतल का समीकरण

अतः नए निर्देशांकों में समतल का समीकरण

$A(X+a)+B(Y+b)+C(Z+c)+D=0$ है।

इस प्रकार, (a, b, c) से समतल $Ax+By+Cz+D=0$ पर लंब की लंबाई वही है जो नए मूल बिंदु से $A(X+a)+B(Y+b)+C(Z+c)+D=0$ पर लंब की है, अर्थात

$$\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \ldots (16)$$

उदाहरण के लिए, $(4, 3, 1)$ से $3x-4y+12z+14=0$

पर लंब की लंबाई $p = \dfrac{|12-12+12+14|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \dfrac{26}{13} = 2$ है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्न कीजिए।

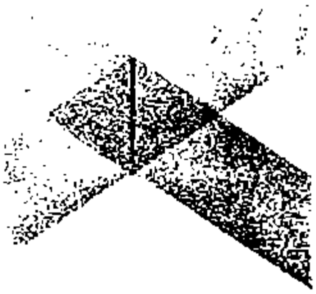
E 14) $(2, 3, -5)$ की प्रत्येक निर्देशांक समतल से और $x+y+z=1$ से दूरी मालूम कीजिए।

E 15) दिखाइए कि यदि (a, b, c) से समतलों $x+y+z=0$, $x=z$ और $x+z=2y$ की दूरियों के वर्गों का योग 9 है, तो $a^2+b^2+c^2=9$.

अब तक आप समतल के विभिन्न समीकरणों से परिचित हो गए होंगे। आइए अब हम समतलों के प्रतिच्छेद की चर्चा करें।

4.4.2 प्रतिच्छेदी समतल और रेखाएं

भाग 4.3.2 में आपने देखा कि रेखा दो रैखिक समीकरणों से निरूपित होती है। अतः यह इन समीकरणों द्वारा निरूपित दो समतलों का प्रतिच्छेद है (चित्र 12 देखें)।



चित्र 12: सरल रेखा दो समतलों की प्रतिच्छेद होती है।

व्यापक रूप में, हम निम्नलिखित टिप्पणी देते हैं।

टिप्पणी 3 : कोई भी सरल रेखा $ax+by+cz+d=0$, $Ax+By+Cz+D=0$ के रूप में रैखिक निकाय द्वारा निरूपित होती है।

हम इसे संक्षेप में $ax+by+cz+d=0=Ax+By+Cz+D$ लिखते हैं।

उदाहरण के लिए, $3x+5y+z-1=0=2x+1$ समतलों $3x+5y+z=1$ और $2x+1=0$ के प्रतिच्छेद से प्राप्त रेखा को निरूपित करता है।

अब मान लीजिए हमें एक रेखा

$ax+by+cz+d=0=Ax+By+Cz+D$ दी हुई है। यह रेखा स्पष्टतः दोनों समतलों $ax+by+cz+d=0$ और $Ax+By+Cz+D=0$ पर स्थित है। वास्तव में, यह $k\in\mathbf{R}$ के लिए

$$(ax+by+cz+d)+k(Ax+By+Cz+D)=0 \qquad \ldots (17)$$

से निरूपित अनंततः अनेक समतलों पर स्थित है। ऐसा इसलिए है क्योंकि बिंदु (x, y, z) रेखा पर स्थित होगा यदि और केवल यदि यह $ax+by+cz+d=0$ और $Ax+By+Cz+D=0$ दोनों पर स्थित हो।

आइए हम (17) के उपयोग का एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 3 : रेखा $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{1}$ और बिंदु $(0, 7, -7)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण मालूम कीजिए।

हल : रेखा $2(x+1)=-3(y-3)$ और $x+1=-3(z+2)$ का प्रतिच्छेद है,

अर्थात् $2x+3y-7=0=x+3z+7$.

अतः (17) से, इससे होकर गुज़रने वाला कोई भी समतल

$(2x+3y-7)+k(x+3z+7)=0$ के रूप का होगा, किसी $k\in\mathbf{R}$ के लिए।

चूंकि $(0, 7, -7)$ इस पर स्थित है, हम पाते हैं कि

$2I - 7 + k(-2I + 7) = 0$, अर्थात् $k = 1$.

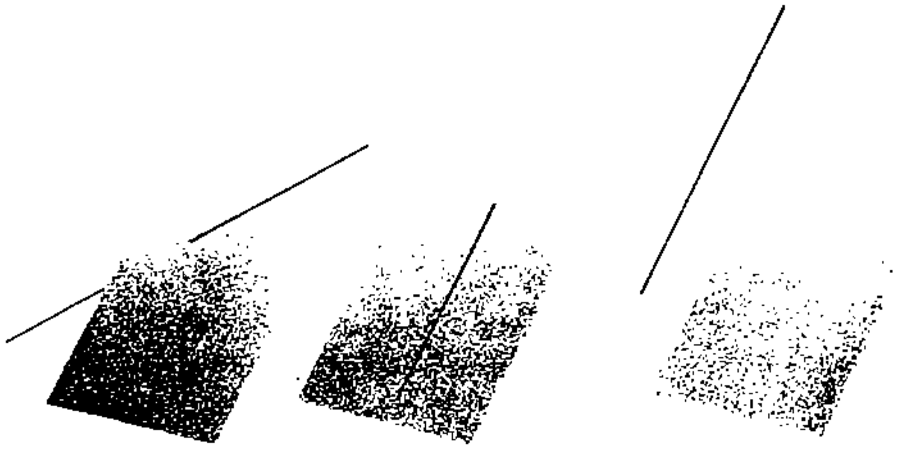
अतः वांछनीय समतल

$3x + 3y + 3z = 0$, अर्थात् $x + y + z = 0$ है।

इसी प्रकार से आप निम्नलिखित प्रश्न कर सकते हैं।

E 16) $(1, 2, 0)$ और रेखा $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 1$, $x + y = z$ से गुज़रने वाले समतल का समीकरण मालूम कीजिए।

अब, यदि एक रेखा और एक समतल दिए हों, तो ये क्या हमेशा प्रतिच्छेद करेंगे? और, यदि हाँ, तो उनका प्रतिच्छेद कैसा होगा? चित्र 13 में हम आपको तीनों संभावनाएं दिखाते हैं।



(क) (ख) (ग)

चित्र 13: (क) एक रेखा और एक समतल का प्रतिच्छेद एक बिंदु हो सकता है, या (ख) रेखा समतल पर स्थित हो सकती है, या (ग) हो सकता है कि वे बिल्कुल प्रतिच्छेद न करें।

आइए हम कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 4: जांच कीजिए कि समतल $x + y + z = 1$ और सरल रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ प्रतिच्छेद करते हैं या नहीं। यदि करते हैं, तो उनका प्रतिच्छेद बिंदु मालूम कीजिए।

हल : टिप्पणी 1 से आप जानते हैं कि रेखा पर कोई बिंदु प्राचल t के पदों में $x = t$, $y = 1+2t$ और $z = 2 + 3t$ लिखा जा सकता है। इसलिए यदि रेखा और समतल प्रतिच्छेद करते हैं, तो किसी t के लिए $(t, 1 + 2t, 2 + 3t)$ समतल $x + y + z = 1$ पर स्थित होना चाहिए। आइए, इन मानों को समीकरण में रखें। हम पाते हैं कि $t + 1 + 2t + 2 + 3t = 1$, अर्थात् $6t = -2$, अर्थात् $t = -\frac{1}{3}$. अतः रेखा और समतल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं और प्रतिच्छेद बिंदु $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ है।

उदाहरण 5 : (क) $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{-2}$ और $3x + 2y + 6z = 12$,

(ख) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ और $x+z = 1$

के प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल : क) रेखा पर स्थित कोई बिंदु $(2k-2, 3k-3, -2k + 4)$ के रूप का होगा, जहाँ $k \in \mathbf{R}$. अतः यदि कोई प्रतिच्छेद बिंदु है, तो वह इस त्रिक को $3x + 2y + 6z = 12$ में रखने पर प्राप्त होगा। अतः हम पाते हैं कि

$$3(2k-2) + 2(3k-3) + 6(-2k + 4) = 12$$

$$\Rightarrow 0 = 0.$$

यह सभी $k \in \mathbf{R}$ के लिए सत्य है। अतः प्रत्येक $k \in \mathbf{R}$ के लिए, त्रिक

$(2k-2, 3k-3, -2k+4)$ समतल पर स्थित होगा। इसका मतलब है कि पूरी रेखा समतल में स्थित है।

ख) रेखा पर स्थित कोई बिंदु $(2t+1, t+2, -2t+3)$ के रूप का होगा, जहाँ $t \in \mathbf{R}$. यह $x+z = 1$ पर स्थित होगा यदि, किसी t के लिए, $(2t+1)+(-2t+3) = 1$, अर्थात् यदि $4 = 1$, जो असत्य है। अतः रेखा और समतल प्रतिच्छेद नहीं करते हैं।

आप इसी विधि का प्रयोग दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु मालूम करने के लिए कर सकते हैं। निम्नलिखित प्रश्नों को हल करके आप यह जांच कर सकते हैं कि आपने विधि को समझ लिया है या नहीं।

E 17) रेखा $x = y = z$ और समतल $x + 2y + 3z = 3$ का प्रतिच्छेद बिंदु मालूम कीजिए।

E 18) दिखाइए कि रेखा $x-1 = \frac{1}{2}(y-3) = \frac{1}{3}(z-5)$

रेखा $\frac{1}{3}(x+1) = \frac{1}{5}(y-4) = \frac{1}{7}(z-9)$ को काटती है।

आइए, अब हम कोई दो समतलों पर विचार करें। क्या हम उनके बीच का कोण मालूम कर सकते हैं? हम ऐसा कर सकते हैं, यदि हम निम्नलिखित परिभाषा जानते हों तो।

परिभाषा: दो समतलों के बीच का कोण मूल बिंदु से उन पर डाले गए अभिलंबों के बीच का कोण होता है।

तो, आइए अब हम दो समतलों के बीच का कोण मालूम करें। मान लीजिए प्रसामान्य रूप में समतलों के समीकरण $l_1x + m_1y + n_1z = p_1$ और $l_2x + m_2y + n_2z = p_2$ हैं। तो अभिलंबों के बीच का कोण

$$\cos^{-1}(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) \qquad \dots (18)$$

होगा।

व्यापक रूप में, यदि समतलों $ax + by + cz + d = 0$ और $Ax + By + Cz + D = 0$ के बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \dots (19)$$

ऐसा इसलिए है क्योंकि a, b, c और A, B, C समतलों पर अभिलंबों के दिक्-अनुपात हैं, इसलिए $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ और $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ उनकी दिक्कोज्याएँ हैं।

इस प्रकार,

> समतल $ax + by + cz + d = 0$ और $Ax + By + Cz + D = 0$
>
> i) समांतर होंगे यदि और केवल यदि $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, और
>
> ii) लंब होंगे यदि और केवल यदि $aA + bB + cC = 0$.

आइए, हम इन प्रतिबंधों के उपयोग के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 6: समतलों $7x-4y+7z+16 = 0$ और $4x+3y-2z+13 = 0$ की प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाने वाले और समतल $2x-y-2z+5 = 0$ के लंब समतल का समीकरण मालूम कीजिए।

हल: प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाने वाले समतल का व्यापक समीकरण

$7x-4y+7z+16+k(4x+3y-2z+13)=0$ के द्वारा दिया जाता है।

$\Rightarrow (7+4k)x + (3k-4)y + (7-2k)z + 13k+16 = 0$

यह $2x-y-2z+5 = 0$ पर लंब होगा, यदि

$2(7 + 4k) - (3k-4) - 2(7-2k) = 0$, अर्थात् $k = -\frac{4}{9}$.

अतः समतल का वांछनीय समीकरण

$47x - 48y + 71z + 92 = 0$ है।

अब इन प्रश्नों को हल कीजिए।

E 19) (1, 2, 3) से होकर जाने वाले और $3x + 4y - 5z = 0$ के समांतर समतल का समीकरण मालूम कीजिए।

E 20) समतलों $x + 2y + 2z = 5$ और $2x + 2y + 3 = 0$ के बीच का कोण मालूम कीजिए।

E 21) दिखाइए कि रेखा $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ और समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ के बीच का कोण

$\sin^{-1}\left[\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right]$ है।

(संकेत : वांछनीय कोण रेखा और समतल पर अभिलंब के बीच के कोण का पूरक है।)

और अब आइए इस इकाई में हमने जो कुछ किया है उसे संक्षेप में बता कर इसे समाप्त करें।

4.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर गौर किया है।

(1) दूरी सूत्र : बिंदुओं (x, y, z) और (a, b, c) के बीच की दूरी $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ है।

(2) उस बिंदु के निर्देशांक जो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को जोड़ने वाले रेखा खंड को अनुपात $m : n$ में विभाजित करता है,

$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right)$ होते हैं।

(3) यदि $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ किसी रेखा की दिक्कोज्याएं हैं, तो $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(4) बिंदु (a, b, c) से होकर जाने वाली और $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ दिक्कोज्याओं वाली रेखा के समीकरणों का विहित रूप $\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$ है।

(5) (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण का द्विबिंदु रूप

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ है।

(6) a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दिक्-अनुपातों वाली दो रेखाओं के बीच का कोण

$\cos^{-1}\left[\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right]$ है।

अतः ये रेखाएँ लंब होंगी यदि और केवल यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, और समांतर होंगी यदि और केवल यदि $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$, किसी $k \in \mathbf{R}$ के लिए।

(7) किसी समतल का समीकरण $Ax + By + Cz + D = 0$ के रूप का होता है, जहाँ $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ और A, B, C में से सब शून्य नहीं हैं।

इसके विलोम, ऐसा समीकरण हमेशा एक समतल को निरूपित करता है।

(8) तीन बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) से निर्धारित समतल

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ होता है।}$$

(9) उस समतल का समीकरण जो x, y और z-अक्षों से क्रमशः a, b और c के अंतःखंड बनाता है, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ होता है।

(10) समतल के समीकरण का प्रमामान्य रूप $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$ होता है, जहाँ p मूल बिंदु से समतल पर डाले गए लंब की लंबाई है, और $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ लंब की दिक्कोज्याएं हैं।

(11) किसी बिंदु (a, b, c) से समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई $\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

होती है।

(12) रेखा दो समतलों का प्रतिच्छेद होती है।

(13) रेखा $ax + by + cz + d = 0 = Ax + By + Cz + D$ में होकर जाने वाले समतल का व्यापक समीकरण $(ax + by + cz + d) + k(Ax + By + Cz + D) = 0$ होता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.

(14) समतलों $ax + by + cz + d = 0$ और $Ax + By + Cz + D = 0$ के बीच का कोण
$\cos^{-1}\left[\frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right]$
होता है।

और अब आप **भाग 4.1 में दिए गए उद्देश्यों** पर फिर विचार करें, और देखें कि क्या वे पूरे हो गए हैं। इसको जांचने का एक तरीका यह है कि आप यह देखें कि क्या आपने इकाई में दिए सभी प्रश्न हल कर लिए हैं। आप प्रश्नों के हमारे हल देखना चाहेंगे। हमने उनको अगले भाग में दिया है।

4.6 हल/उत्तर

E 1) $PQ = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8}$

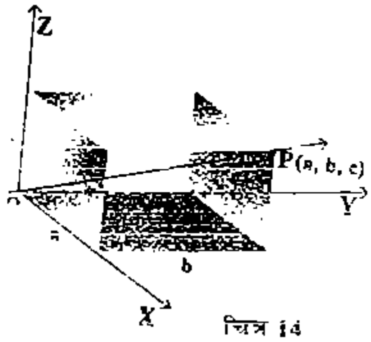
R के निर्देशांक $\left(\frac{1}{7}, 1, -\frac{1}{7}\right)$ हैं।

E 2) $\left(\frac{a+r}{2}, \frac{b+s}{2}, \frac{c+t}{2}\right)$

E 3) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2.$

E 4) (क) क्रमशः 0, 1, 0 और 0, 0, 1.

(ख) XY-समतल में कोई रेखा z–अक्ष से $\frac{\pi}{2}$ कोण बनाती है। अब, यदि $m = \tan\theta$, तो $y = mx + c$, x-अक्ष से θ कोण और y-अक्ष से $\frac{\pi}{2} - \theta$ कोण बनाती है। अतः इसकी दिक्कोज्याएं $\cos\theta, \sin\theta, 0$ हैं।



चित्र 14

E 5) चित्र 14 में हमने स्थिति को दिखाया है। मान लीजिए $OP = r$ तब आप देख सकते हैं कि L की दिक्कोज्याएं $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ हैं। इस प्रकार a, b, c, L के दिक्-अनुपात हैं।

E 6) अब रेखा L, x, y और z-अक्षों की धनात्मक दिशाओं में क्रमशः $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, और $\pi-\gamma$ कोण बनाती है। अतः इसकी दिक्कोज्याएँ $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$ और $-\cos\gamma$ हैं।

7) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$

8) समीकरण

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{0}$$ = r (मान लीजिए) हैं, अर्थात्

$-(x+3) = 5(y-5)$ और $z = 3$, अर्थात्

$x + 5y = 22, z = 3.$

9) दिक्-अनुपात 1, 1, 2 वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ,

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}, \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$ है, अर्थात्

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$$

इसी प्रकार, दूसरी रेखा की दिक्कोज्याएं

$$\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{-\sqrt{6}}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{-\sqrt{6}}{5}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{5\sqrt{6}}(8 + \sqrt{3} - \sqrt{6})$$

10) चूँकि $1(1) + 2(-2) + 3(1) = 0$,

$1(4) - 2(1) + 1(-2) = 0$ और

$1(4) + 2(1) + 3(-2) = 0$,

इसलिए रेखाएँ परस्पर लंब होंगी।

11) पहले तीन बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ होगा।

$\Rightarrow 5x - 7y + 11z + 4 = 0.$

चूँकि $(-4, 4, 4)$ इसे संतुष्ट करता है, चारों बिंदु समतलीय हैं।

12) बिंदु (2, 0, 0), (0, −1, 0), (0, 0, 5) समतल पर स्थित हैं। अतः इसका समीकरण होगा।

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 10y + 2z = 10$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{(-1)} + \frac{z}{5} = 1.$$

13) दोनों समतलों के अंतःखड क्रमशः $\frac{-d}{a}, \frac{-d}{b}, \frac{-d}{c}$

और $\frac{-D}{A}$, $\frac{-D'}{B}$, $\frac{-D}{C}$ हैं।

अतः समतल संपाती होंगे यदि और केवल यदि

$$\frac{-d}{a} = \frac{-D}{A}, \frac{-d}{b} = \frac{-D}{B}, \frac{-d}{c} = \frac{-D}{C} \text{ है,}$$

अर्थात् यदि और केवल यदि $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D}$, अर्थात्

यदि और केवल यदि a, b, c, d और A, B, C, D समानुपाती हों।

E 14) (2, 3, −5) की XY-समतल z = 0 से

दूरी $\frac{|-5|}{\sqrt{1^2}} = 5$

इसी प्रकार, (2, 3, −5) की x = 0 और y = 0 से दूरी क्रमशः 2 और 3 है।

इसकी x + y + z = 1 से दूरी

$$\frac{|2+3-5-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ है।}$$

E 15) हम जानते हैं कि $\frac{|a+b+c|^2}{3} + \frac{|a-c|^2}{2} + \frac{|a-2b+c|^2}{6} = 9.$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9.$

E 16) दी गई रेखा से गुज़रने वाले समतल का समीकरण

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - 1) + k(x + y - z) = 0 \text{ है,} \quad \dots (20)$$

जहां $k \in \mathbf{R}$ इस प्रकार चुना जाता है कि (1, 2, 0) समतल पर स्थित हो।

$\therefore (\cos\alpha + 2\cos\beta - 1) + 3k = 0 \qquad k = \frac{1}{3}(1 - \cos\alpha - 2\cos\beta).$

इस प्रकार वांछनीय समीकरण k के इस मान को (20) में रखने से प्राप्त होता है।

E 17) रेखा पर कोई बिंदु (t, t, t) है। रेखा और समतल प्रतिच्छेद करेंगे यदि किसी $t \in \mathbf{R}$ के लिए t + 2t + 3t = 3

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}.$

अतः समतल और रेखा केवल एक बिंदु $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

E 18) पहली रेखा पर कोई बिंदु (t + 1, 2t + 3, 3t + 5) द्वारा दिया जाता है, जहां $t \in \mathbf{R}$, दूसरी रेखा पर कोई बिंदु (3k − 1, 5k + 4, 7k + 9) द्वारा दिया जाता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$. ये रेखाएं प्रतिच्छेद करेंगी यदि t + 1 = 3k − 1, 2t + 3 = 5k + 4 और 3t + 5 = 7k + 9 किसी t और $k \in \mathbf{R}$ के लिए।

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि ये संगत हैं और k = 5 हमें उभयनिष्ठ बिंदु देता है। अतः प्रतिच्छेद बिंदु (14, 29, 44) हैं।

E 19) 3x + 4y − 5z = 0 के समांतर कोई समतल

3x + 4y − 5z + k = 0 के रूप का होता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.

चूँकि (1, 2, 3) इस पर स्थित है,

3 + 8 − 15 + k = 0.

$\Rightarrow k = 4.$

अतः वांछनीय समतल 3x + 4y − 5z + 4 = 0 है।

E 20) यदि कोण θ है, तो

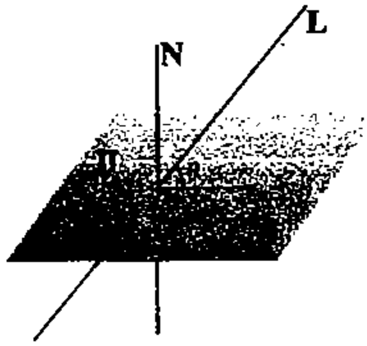
$$\cos\theta = \frac{1(2) + 2(2) + 2(0)}{\sqrt{9}\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

E 21) यदि रेखा और समतल के बीच का कोण θ है, तो $\frac{\pi}{2} - \theta$ रेखा और समतल पर अभिलंब के बीच का कोण होगा (चित्र 15 देखें)। अब, A, B, C अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं। अतः,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$



चित्र 15: रेखा समतल π से कोण θ बनाती है, और π पर लंब N से कोण (π/2−θ)

इकाई 5 गोला

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ सं.**

5.1 प्रस्तावना

इस इकाई के साथ हम त्रिविम वस्तुओं पर अपनी चर्चा शुरू करते हैं। जैसा कि इकाई के शीर्षक से मालूम होता है, हम यहाँ पर गोले (sphere) के विभिन्न पहलुओं पर विचार करेंगे। गोला आपके लिए नया नहीं है। जब आप बच्चे थे तो आप गेंदों से अवश्य खेले होंगे। आपने नींबू, संतरे और तरबूज़ जैसे फल भी अवश्य खाए होंगे। ये सभी वस्तु गोल आकार की हैं। लेकिन, वैश्लेषिक ज्यामिति के दृष्टिकोण से यह सब गोले नहीं हैं।

इस इकाई में आप देखेंगे कि एक ज्यामितिविद् किसको गोला कहता है। हम गोले का व्यापक समीकरण भी प्राप्त करेंगे। उसके बाद हम गोले के रैखिक और समतल परिच्छेदों की चर्चा करेंगे। विशेष रूप से हम गोले की स्पर्शरेखाओं और स्पर्श तलों के समीकरणों पर विचार करेंगे। अन्त में, आप देखेंगे कि दो गोलों का प्रतिच्छेद क्या होता है, और किसी दिए गए वृत्त से होकर कितने गोले जा सकते हैं।

गोले रासायनिक यौगिकों के क्रिस्टलों की संरचना के अध्ययन का समग्र भाग हैं। आप पाएंगे कि इनके गुणों का प्रयोग वास्तुविदों और इंजीनियरों ने भी किया है। अतः गोलों का वैश्लेषिक अध्ययन केवल हमारी गणितीय जिज्ञासा की संतुष्टि करने के लिए नहीं है।

गोला, दीर्घवृत्तज (ellipsoid) की एक विशिष्ट स्थिति है, जैसा कि आप खंड 3 का अध्ययन करते समय देखेंगे। अतः यदि आप इस इकाई की सामग्री को अच्छी तरह समझ लें, तो इससे आपको अगली इकाई को पढ़ते समय सहायता मिलेगी। दूसरे शब्दों में, यदि आप निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लेते हैं तो आपको खंड 3 को समझने में आसानी होगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

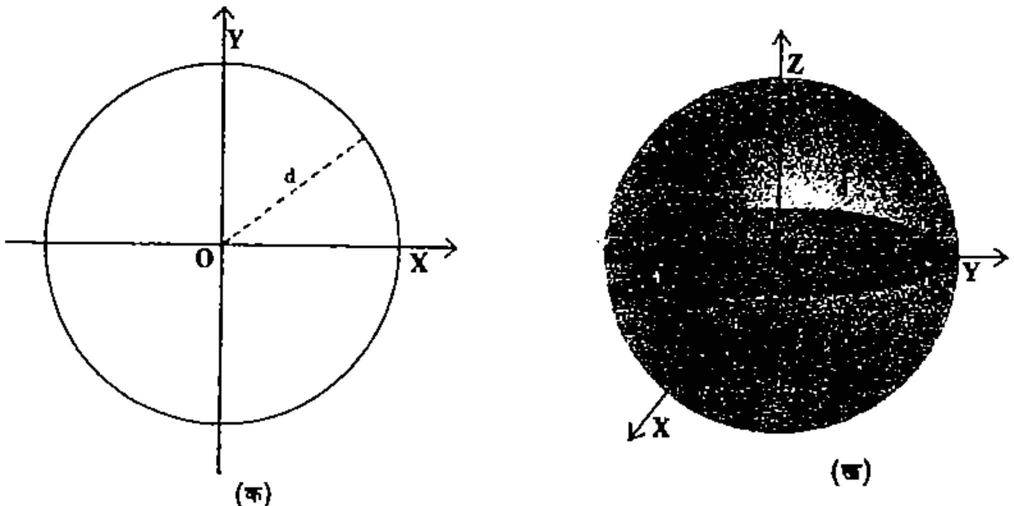
- गोले का समीकरण मालूम कर सकेंगे यदि आपको उसका केन्द्र और त्रिज्या मालूम है;
- यह जांच कर सकेंगे कि कोई तीन चरों वाला दिया गया द्विघाती समीकरण किसी गोले को निरूपित करता है या नहीं;
- यह जांच कर सकेंगे कि क्या कोई दी हुई रेखा किसी दिए गए गोले की स्पर्श रेखा है;
- किसी दिए गए गोले का किसी दिए हुए बिंदु पर स्पर्श तल प्राप्त कर सकेंगे;
- दो प्रतिच्छेदी गोलों का प्रतिच्छेद-कोण प्राप्त कर सकेंगे;
- किसी दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले गोलों का कुल मालूम कर सकेंगे।

आइए अब हम देखें कि गोला क्या होता है और हम इसे बीजीय रूप में कैसे निरूपित कर सकते हैं।

5.2 गोले के समीकरण

2-समष्टि में आप जानते हैं कि किसी नियत बिंदु से नियत दूरी d पर स्थित बिंदुओं का समुच्चय एक वृत्त होता है। गोला इसका 3-समष्टि में व्यापकीकरण है (चित्र 1 देखें)।

परिभाषा: 3-समष्टि में उन सब बिंदुओं का समुच्चय, जो किसी बिंदु C (a, b, c) से नियत दूरी d पर स्थित हैं, एक **गोला** (sphere) होता है जिसका **केन्द्र** (centre) c और **त्रिज्या** (radius) d है।



चित्र 1: (क) एक वृत्त, (ख) एक गोला जिसका केन्द्र मूल बिंदु है और त्रिज्या d है।

गोले तो आपके लिए नए नहीं हैं। एक गेंद और एक संतरा गोलाकार होते हैं। फिर भी, जब हम वैश्लेषिक ज्यामिति में गोले की बात करते हैं तो हमारा मतलब गोले के पृष्ठ से होता है। अतः हमारे लिए एक खोखली गेंद गोला है और ठोस क्रिकेट की गेंद गोला नहीं है।

आइए अब हम त्रिज्या d और केन्द्र C (a, b, c) वाले गोले का समीकरण मालूम करें। यदि P (x, y, z) गोले पर कोई बिंदु है, तो दूरी सूत्र (इकाई 4 का (1)) से हम पाते हैं कि

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2, \qquad \dots (1)$$

जो कि वांछनीय समीकरण है।

उदाहरण के लिए, केन्द्र (0, 0, 0) और त्रिज्या 1 इकाई वाले गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ है।

अब यदि हम (1) का प्रसार करें तो हम द्विघाती समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 0$ पाते हैं।

इसको देखकर आप पूछ सकते हैं कि क्या a, u, v, w, d $\in \mathbf{R}$ के लिए

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \dots (2)$$

के प्रकार का समीकरण हमेशा गोले को निरूपित करता है। ऐसा है कि यदि $a \neq 0$, तो (2) एक गोले को निरूपित करता है। (यदि a = 0, तो क्या होगा? इकाई 4 में आपको इसका उत्तर मिलेगा।)

आइए (2) को हम निम्न प्रकार से लिखें:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2u}{a}x + \frac{2v}{a}y + \frac{2w}{a}z = \frac{-d}{a}.$$

समीकरण के दोनों ओर $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{w^2}{a^2}$ जोड़ने पर,

हम पाते हैं कि

$$(x+\frac{u}{a})^2 + (y+\frac{v}{a})^2 + (z+\frac{w}{a})^2 = \frac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}$$

इसकी (1) से तुलना करने पर, हम देखते हैं कि यह एक गोला है जिसका केन्द्र $(\frac{-u}{a}, \frac{-v}{a}, \frac{-w}{a})$ है और त्रिज्या $\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2-ad}}{|a|}$ है।

हमने अभी तक जो कुछ कहा है, उसे निम्नलिखित प्रमेय में संक्षेप में पढ़िए।

प्रमेय 1 : गोले का व्यापक समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

इसका केंद्र $(-u, -v, -w)$ है और त्रिज्या $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ है।

नोट कीजिए कि उपरोक्त व्यापक समीकरण एक **वास्तविक गोला** होगा यदि और केवल यदि $u^2 + v^2 + w^2 - d \geq 0$. अन्यथा यह एक **अधिकल्पित गोला** होगा, अर्थात्, ऐसा गोला जिस पर कोई वास्तविक बिंदु नहीं है।

अतः हमने यह देखा है कि

> x, y और z में एक द्विघाती समीकरण एक गोले को निरूपित करता है यदि और केवल यदि
>
> i) x^2, y^2, z^2 के गुणांक बराबर हैं, और
>
> ii) समीकरण में xy, yz या xz के कोई पद नहीं हैं।

अब आप देखिए कि अभी तक की चर्चा को आपने समझ लिया है या नहीं।

E 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$ द्वारा निरूपित गोले का केन्द्र और त्रिज्या मालूम कीजिए।

E 2) क्या $2x^2 + 1 + 2y^2 + 3 + 2z^2 + 5 = 0$ एक गोले को निरूपित करता है?

E 3) गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ का केन्द्र और त्रिज्या मालूम कीजिए।

अब यदि आप गोले के व्यापक समीकरण को देखें तो पाएंगे कि इसमें चार स्वेच्छ अचर u, v, w, d हैं। अतः यदि हमें गोले पर स्थित 4 बिंदु मालूम हों तो हम इसका समीकरण प्राप्त कर सकते हैं।

आइए, एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 1: बिंदुओं (0, 0, 0), (0, 1, −1), (−1, 2, 0) और (1, 2, 3) से होकर जाने वाले गोले का समीकरण मालूम कीजिए।

हल : मान लीजिए समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

चूंकि 4 दिए गए बिंदु इस पर स्थित हैं, इनके निर्देशांकों को इस समीकरण को संतुष्ट करना चाहिए। अतः हम पाते हैं कि

$d = 0$

$2 + 2v - 2w + d = 0$

$5 - 2u + 4v + d = 0$

$14 + 2u + 4v + 6w + d = 0$

इस युगपत् रैखिक समीकरणों (simultaneous linear equations) के निकाय को हल करने पर (खंड 2, एम.टी.ई.-04 देखें), हम पाते हैं कि

$$u = \frac{-15}{14},\ v = \frac{-25}{14},\ w = \frac{-11}{14},\ d = 0.$$

अतः वांछनीय गोला

$7(x^2+y^2+z^2) - 15x - 25y - 11z = 0$ है।

नोट कीजिए कि ऐसा हो सकता है कि चार बिंदुओं के प्रतिस्थापन से प्राप्त निकाय असंगत (inconsistent) हो, अर्थात्, इसका कोई हल न हो। (ऐसी स्थिति हो सकती है यदि इनमें से तीन बिंदु एक रेखा पर हों।) ऐसी स्थिति में इन बिंदुओं से होकर जाने वाला कोई गोला नहीं होगा।

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E 4) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ और $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ से होकर जाने वाले गोले का समीकरण मालूम कीजिए।

E 5) क्या $(4, 0, 1), (10, -4, 9), (-5, 6, -11)$ और $(1, 2, 3)$ से होकर जाने वाला कोई गोला है? यदि हाँ, तो उसका समीकरण मालूम कीजिए।

अब यदि गोले पर स्थित चार बिंदुओं के बजाय, हमें केवल इसके किसी एक व्यास के दो सिरों के निर्देशांक मालूम हों, तो भी हम इसका समीकरण निर्धारित कर सकते हैं। आइए देखें कैसे। मान लीजिए $A(x_1, y_1, z_1)$ और $B(x_2, y_2, z_2)$ गोले के किसी व्यास के सिरे हैं (चित्र 2 देखें)। तब, यदि $P(x, y, z)$ गोले पर कोई बिंदु है, तो PA और PB एक दूसरे पर लंब होंगी। अतः इकाई 4 के (10) से हम देखते हैं कि

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + (z-z_1)(z-z_2) = 0 \quad \dots (3)$$

यह समीकरण गोले पर किसी भी बिंदु द्वारा संतुष्ट होता है, और इसलिए यह गोले का समीकरण है।

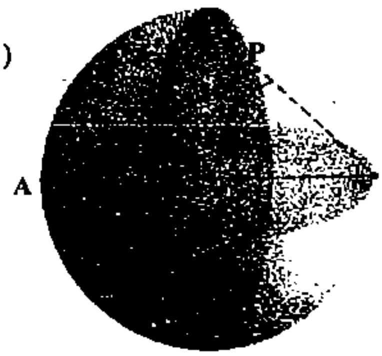
उदाहरण के लिए, उस गोले का समीकरण जिसके किसी व्यास के सिरे $(-3, 5, 1)$ और $(3, 1, 7)$ हैं,

$(x+3)(x-3) + (y-5)(y-1) + (z-1)(z-7) = 0$,

अर्थात्, $x^2 + y^2 + z^2 = 6y + 8z - 3$ है।

नीचे दिए गए प्रश्न में आप गोले के समीकरण का व्यास रूप प्राप्त कर सकते हैं।

किसी गोले का व्यास वह रेखा खंड है जो उसके केन्द्र से होकर जाता है और जिसके सिरे गोले पर स्थित हों।



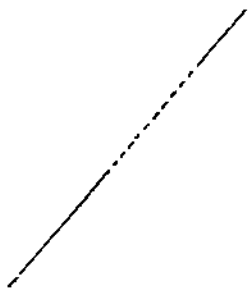
चित्र 2

E 6) बिंदुओं $(3, 4, 5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाले रेखा खंड पर बनाए गए गोले का समीकरण मालूम कीजिए।

अब तक आप गोलों से परिचित हो गए होंगे। आइए अब हम देखें कि एक रेखा या समतल गोले को कब प्रतिच्छेद करता है।

5.3 स्पर्शरेखाएं और स्पर्श तल

इस भाग में हम पहले यह देखेंगे कि एक रेखा और एक गोले के कितने उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते हैं। फिर हम यही बात एक समतल और एक गोले के लिए देखेंगे।



चित्र 3 : गोले का प्रतिच्छेद करती हुई एक रेखा

5.3.1 स्पर्शरेखाएं

मान लीजिए आप एक खोखली गेंद लेते हैं और एक बुनने वाली सलाई से इसमें आर-पार छेद करते हैं। तब, गेंद और सलाई के दो उभयनिष्ठ बिंदु होंगे (चित्र 3 देखें)।

क्या आप सोचते हैं कि यह बात गोले का प्रतिच्छेद करने वाली किसी भी रेखा के लिए सत्य है? देखिए, नीचे दिया गया प्रमेय इस बारे में क्या कहता है।

प्रमेय 2: एक रेखा और एक गोला के अधिक से अधिक दो उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते हैं।

उपपत्ति : मान लीजिए $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

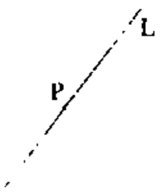
और $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = t$ (कहिए) क्रमशः दिए गए गोला और रेखा हैं। तब रेखा पर कोई बिंदु $(\alpha t + a, \beta t + b, \gamma t + c)$ जहां $t \in \mathbf{R}$ के रूप का होता है। यदि यह गोले पर स्थित है, तो

$$(\alpha t + a)^2+(\beta t + b)^2+(\gamma t + c)^2+2u(\alpha t + a)+2v(\beta t + b)+2w(\gamma t + c) + d = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t^2 + 2t(a\alpha + b\beta + c\gamma + u\alpha + v\beta + w\gamma)$$
$$+ (a^2 + b^2 + c^2 + 2ua + 2vb + 2wc + d) = 0 \quad \ldots (4)$$

यह t में द्विघाती है। अतः यह t के दो मान देता है। t के प्रत्येक मान के लिए हमें एक प्रतिच्छेद बिंदु मिल जाएगा। अतः रेखा और गोला अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकते हैं।

नोट कीजिए कि (4) के अलग-अलग वास्तविक मूल, वास्तविक संपाती मूल या अलग-अलग अधिकल्पित मूल हो सकते हैं। तदनुसार, यह रेखा गोले को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद, एक बिंदु पर प्रतिच्छेद या बिल्कुल प्रतिच्छेद नहीं करेगी।



चित्र 4: L गोले को केवल एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है।

परिभाषाएं : यदि कोई रेखा किसी गोले को दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तो इसे गोले की **छेदक रेखा** (secant line) कहते हैं। यदि कोई रेखा किसी गोले को एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है, तो वह बिंदु P पर गोले की **स्पर्शरेखा** कहलाती है; और P स्पर्श रेखा का **स्पर्श बिंदु** कहलाता है।

उदाहरण के लिए, चित्र 3 में रेखा L गोले की छेदक रेखा है; और चित्र 4 में रेखा L गोले की बिंदु P पर स्पर्श रेखा है।

अब (4) के मूल संपाती होंगे यदि और केवल यदि

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + u\alpha + v\beta + w\gamma)^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ua + 2vb + 2wc + d) \quad \ldots (5)$$

इस प्रकार, (5), $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ के $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ पर स्पर्श रेखा होने का प्रतिबंध है।

आइए अब एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 2: गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ द्वारा रेखा $x-3 = y = 3$ पर बनाया गया अंतःखंड मालूम कीजिए।

हल : रेखा पर कोई बिंदु $(t + 3, t, t)$ के रूप का होगा, जहाँ $t \in \mathbf{R}$. यह गोले पर स्थित होगा यदि $(t + 3)^2 + t^2 + t^2 = 9 \Rightarrow 3t^2 + 6t = 0$

$\Rightarrow t = 0, -2.$

अतः प्रतिच्छेद बिंदु (3, 0, 0) और (1, −2, −2) हैं। इस प्रकार, अंतःखंड इन दोनों बिंदुओं के बीच की दूरी है, जो

$\sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$ है।

अब आप कुछ प्रश्न करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 7) जांच कीजिए कि क्या $\frac{x+3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y + 10z = 0$ की स्पर्श रेखा है।

E 8) यदि हम शांकव की स्पर्शरेखा प्राप्त करने का व्यावहारिक नियम (इकाई 3 देखें) गोले पर लागू करें, तो क्या हमें गोले की स्पर्शरेखा का समीकरण मिलेगा? क्यों?

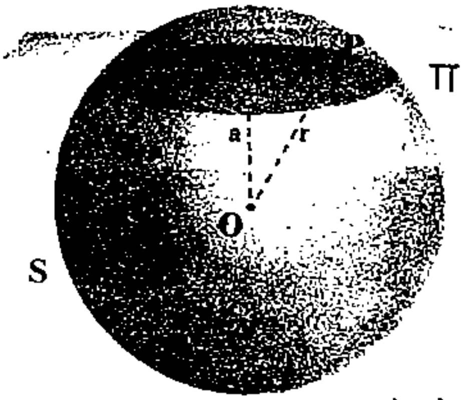
आइए अब हम एक समतल और एक गोले के प्रतिच्छेद की चर्चा करें।

5.3.2 स्पर्श तल

एक गोला और इसको प्रतिच्छेद करने वाले एक समतल पर विचार कीजिए। इस प्रतिच्छेद का रूप क्या होगा? निम्नलिखित परिणाम आपको इसका उत्तर देगा।

प्रमेय 3 : किसी गोले का समतल परिच्छेद एक वृत्त होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए S एक त्रिज्या r और केन्द्र O वाला गोला है (चित्र 5 देखें), और मान लीजिए कोई समतल π इसका प्रतिच्छेद करता है।



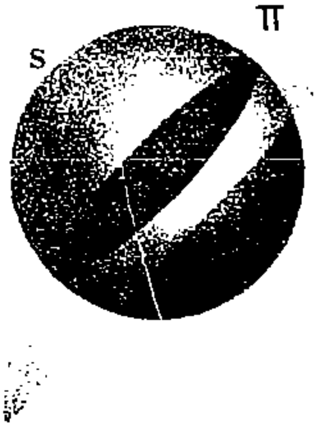
चित्र 5: गोले का समतल प्रतिच्छेद एक वृत्त होता है।

O से π पर एक लंब ON खींचिए, और मान लीजिए ON= a. अब मान लीजिए P एक ऐसा बिंदु है जो π और S दोनों पर है। तो, OP = r और

$OP^2 = ON^2 + NP^2$.

इस प्रकार, $NP = \sqrt{r^2-a^2}$, जो कि एक स्थिरांक है। अतः S और π का प्रतिच्छेद π में ऐसे बिंदुओं का समुच्चय है जो एक नियत बिंदु N से नियत दूरी पर हैं। अतः यह समतल π में केन्द्र N और त्रिज्या $\sqrt{r^2 - a^2}$ का एक वृत्त है।

यदि उपरोक्त उपपत्ति में a = 0, तो समतल गोले के केंद्र से गुज़रेगा। इस स्थिति में, प्रतिच्छेद वृत्त की त्रिज्या r है, और यह गोले का **वृहत् वृत्त** (great circle) कहलाता है (चित्र 6 देखें)।



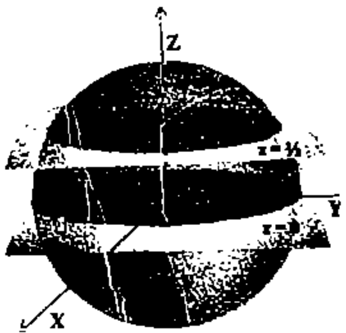
चित्र 6: S और π का प्रतिच्छे
S का एक वृहत् वृत्त है।

नोट कीजिए कि गोले के अनंततः अनेक वृहत् वृत्त होते हैं; गोले के केन्द्र से गुज़रने वाले प्रत्येक समतल के लिए एक।

हमने देखा है कि गोले का समतल परिच्छेद एक वृत्त होता है। अब आइए हम इसका समीकरण मालूम करें। मान लीजिए, गोले का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है, और इसका प्रतिच्छेद करने वाले समतल का समीकरण $Ax + By + Cz + D = 0$ है। तब, समतल परिच्छेद का समीकरण

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 = Ax + By + Cz + D \text{ या} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0,\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right] \quad \dots (6)$$

लिखा जा सकता है।



चित्र 7 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के समतल परिच्छेद।

उदाहरण के लिए, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का समतल $z = \frac{1}{2}$ से समतल परिच्छेद (चित्र 7 देखें) का समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = z - \frac{1}{2} = 0$ है। यह समतल $z = \frac{1}{2}$ में वृत्त $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ है।

चूँकि दिए गए गोले का केंद्र (0, 0, 0) है, इसका z = 0 से प्रतिच्छेद एक वृहत् वृत्त होगा। अतः एक वृहत् वृत्त समतल z = 0 में $x^2 + y^2 = 1$ है।

आइए हम प्रमेय 3 के प्रयोग के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 3: वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$, $x - 2y + 2z = 3$ का केंद्र और त्रिज्या मालूम कीजिए।

हल : गोले का केंद्र C (4, −2, −4) है और इसकी त्रिज्या $r = \sqrt{16+4+16+45} = 9$ है।

समतल की गोले के केन्द्र से दूरी

$$d = \frac{|4+4-8-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1 \text{ है।}$$

अतः, वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{r^2 - d^2} = 4\sqrt{5}$.

वृत्त का केन्द्र C से समतल पर डाले गए लंब का पाद होगा। इसको मालूम करने के लिए हमें लंब का समीकरण मालूम करने की ज़रूरत है। इसके दिक्-अनुपात 1, −2, 2 हैं। अतः इसके समीकरण

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+4}{2} \text{ हैं।}$$

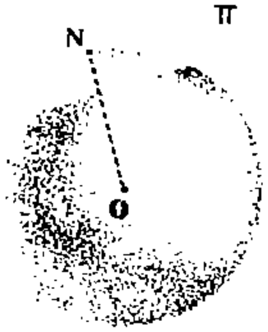
इसलिए, लंब पर कोई बिंदु (t+4, −2t − 2, 2t − 4) द्वारा दिया जाता है, जहाँ $t \in \mathbf{R}$. यदि यह बिंदु समतल पर स्थित हो तो यह वृत्त का वांछनीय केन्द्र होगा। अब

$$(t+4) - 2(-2t-2) + 2(2t-4) = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

अतः $t = \frac{1}{3}$ के लिए लंब का बिंदु समतल $x-2y+2z = 3$ पर स्थित है। अतः वृत्त का केंद्र $\left(\frac{13}{3}, \frac{-8}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ है।

इसी प्रकार आप निम्नलिखित प्रश्न कर सकते हैं।

E 9) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y - 16z + 111 = 0 = 2x + 2y + z - 17$ का केन्द्र और त्रिज्या मालूम कीजिए।



चित्र 8: समतल π बिंदु N पर गोले S का स्पर्श तल है।

अब यदि हम प्रमेय 3 की उपपत्ति में a = r लें तो प्रतिच्छेद वृत्त कैसा होगा? यह केवल एक बिंदु, अर्थात्, **बिंदु वृत्त** रह जाता है। और इस स्थिति में समतल गोले को केवल स्पर्श करता है (चित्र 8 देखें)।

परिभाषा : कोई समतल किसी गोले का किसी बिंदु P पर **स्पर्श तल** होगा यदि यह गोले को केवल P पर प्रतिच्छेदित करे।

ऐसी स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि समतल गोले को P पर **स्पर्श** करता है। P स्पर्श तल का **स्पर्शिता बिंदु** (point of tangency) या **संपर्क बिंदु**, कहलाता है।

टिप्पणी 1: यदि आप प्रमेय 3 की उपपत्ति को फिर देखें, तो आप पाएंगे कि स्पर्शिता बिंदु को गोले के केन्द्र से मिलाने वाली रेखा स्पर्श तल पर लंब है। इस तथ्य का प्रयोग हम स्पर्श तल का समीकरण प्राप्त करने के लिए करेंगे।

आइए हम बिंदु P (a, b, c) पर गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ के स्पर्श तल का समीकरण मालूम करें।

चूँकि P गोले पर स्थित है, इसलिए

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ua + 2vb + 2wc + d = 0 \qquad \dots (7)$$

इसके अतिरिक्त, चूंकि गोले का केन्द्र C (−u, −v, −w) है, CP के दिक्-अनुपात a + u, b+v, c+w हैं (इकाई 4 का समीकरण (8) देखें)।

अब, स्पर्श तल P (a, b, c) से होकर गुज़रता है। अतः इसका समीकरण

$$f(x-a) + g(y-b) + h(z-c) = 0, \qquad \dots (8)$$

होगा किसी $f, g, h \in \mathbf{R}$ के लिए।

अब, CP, (8) पर लंब है और इसलिए (8) पर अभिलंब के समांतर होगी। और f, g, h

समतल पर अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं। इसलिए, $a + u$, $b + v$, $c + w$ और f, g, h समानुपाती होंगे।

$$\therefore \frac{f}{a+u} = \frac{g}{b+v} = \frac{h}{c+w} = t, \text{ कहिए।}$$

तब (8) हमें

$(x-a)(a+u) + (y-b)(b+v) + (z-c)(c+w) = 0$ देता है।

$$\Rightarrow xa + yb + zc + ux + vy + wz = a^2 + b^2 + c^2 + ua + vb + wc \qquad \dots (9)$$

(7) और (9) का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$xa + yb + zc + ux + vy + wz = -ua-vb-wc-d$. इस प्रकार,

> बिंदु (a, b, c) पर गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ के स्पर्श तल का समीकरण
> $xa + yb + zc + u(x+a) + v(y+b) + w(z+c) + d = 0$ होता है।

क्या यह वही समीकरण है जो आपको E8 करते समय प्राप्त हुआ था? समीकरण से आप समझ गए होंगे कि गोले के स्पर्श तल के लिए (स्पर्श रेखा के लिए नहीं) ऐसा ही एक व्यावहारिक नियम है।

व्यावहारिक नियम : बिंदु (a, b, c) पर एक गोले के स्पर्श तल का समीकरण प्राप्त करने के लिए गोले के समीकरण में सिर्फ x^2 के स्थान पर ax, y^2 के स्थान पर by, z^2 के स्थान पर cz; और एकघाती पदों में x के स्थान पर $\frac{x+a}{2}$, y के स्थान पर $\frac{y+b}{2}$, z के स्थान पर $\frac{z+c}{2}$ प्रतिस्थापित कीजिए।

उदाहरण के लिए, (α, β, γ) पर $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के स्पर्श तल का समीकरण $x\alpha + y\beta + z\gamma = a^2$ होता है।

अब आप एक प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E 10) (क) $x^2+y^2+z^2+2z = 29$ का $(2, 3, -4)$ पर, और

(ख) $x^2+y^2+z^2-4y-6z+4=0$ का $(2, 3, 1)$ पर

स्पर्श तल के समीकरण मालूम कीजिए।

अतः अभी तक हमने यह देखा है कि यदि कोई समतल त्रिज्या r वाले गोले के केन्द्र से d दूरी पर है, तो

i) यदि $r < d$, तो समतल और गोला प्रतिच्छेद नहीं करते हैं;

ii) यदि $r = d$, तो समतल गोले का स्पर्श तल होता है; और

iii) यदि $r > d$, तो समतल गोले को त्रिज्या $\sqrt{r^2-d^2}$ वाले वृत्त में प्रतिच्छेद करता है।

अब यदि आपको एक गोले और एक समतल के समीकरण दिए गए हों, तो क्या आप बता सकते हैं कि समतल गोले को स्पर्श करता है या नहीं?
इसका एक तरीका यह जांच करना होगा कि गोले के केंद्र की समतल से दूरी क्या है। आइए इस विधि का प्रयोग हम गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ पर समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ के स्पर्श तल होने का प्रतिबंध प्राप्त करने के लिए करें।

अब, गोले की त्रिज्या $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ है।

गोले के केन्द्र $(-u, -v, -w)$ से समतल पर डाले गए लंब की लंबाई

$$\frac{|Au + Bv + Cw + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ है।}$$

यह दूरी गोले की त्रिज्या के बराबर होनी चाहिए क्योंकि समतल गोले का स्पर्श तल है।

$\therefore (Au + Bv + Cw + D)^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(u^2 + v^2 + w^2 - d)$, ... (10)

जो कि वांछनीय प्रतिबंध है।

आइए हम एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 4: दिखाइए कि $2x-y-2z = 16$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है, और संपर्क बिंदु मालूम कीजिए।

हल : गोले का केन्द्र $(2, -1, -1)$ है और इसकी त्रिज्या $\sqrt{2^2+1^2+1^2+3} = 3$ है।

केन्द्र से समतल $2x-y-2z-16 = 0$ पर लंब की लंबाई

$$\frac{|2.2 + 1 + 2 - 16|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$$ है, जो गोले की त्रिज्या के बराबर है। इसलिए समतल गोले को स्पर्श करता है।

मान लीजिए (x_1, y_1, z_1) संपर्क बिंदु है। तब स्पर्श तल का समीकरण

$xx_1 + yy_1 + zz_1 - 2(x + x_1) + (y + y_1) + (z+z_1) - 3 = 0$ होगा।

$\Leftrightarrow (x_1-2)x + (y_1+1)y + (z_1+1)z - 2x_1 + y_1 + z_1 - 3 = 0.$

लेकिन यह दिया गया समतल $2x - y - 2z - 16 = 0$ ही होना चाहिए। अतः इन दोनों समीकरणों में x, y, z के गुणांक और अचर पद समानुपाती होने चाहिए।

$$\therefore \frac{x_1-2}{2} = \frac{y_1+1}{-1} = \frac{z_1 + 1}{-2} = \frac{2x_1-y_1-z_1+3}{16}$$

$\Rightarrow x_1 = -2y_1, z_1 = 1+2y_1$ और तब

$$\frac{y_1+1}{-1} = \frac{2x_1-y_1-z_1+3}{16} = \frac{-7y_1 + 2}{16} \Rightarrow 9y_1 = -18$$

$\Rightarrow y_1 = -2$

$\therefore x_1 = 4$ और $z_1 = -3$

अतः संपर्क बिंदु $(4, -2, -3)$ है।

इसी विधि का प्रयोग करके, यदि हमें एक बिंदु और एक समतल दिए गए हों, तो हम वह गोला मालूम कर सकते हैं जिसका केंद्र दिया गया बिंदु है और दिया गया समतल जिसका स्पर्श तल है। नीचे दिए गए उदाहरण में हमने इसे दर्शाया है।

उदाहरण 5 : वह गोला मालूम कीजिए जिसका केन्द्र $(-1, 2, 3)$ है और जो समतल $2x - y + 2z = 6$ को स्पर्श करता है।

हल : समतल की बिंदु से दूरी

$$\frac{|-2- 2 + 6 -6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}$$ है।

यह गोले की त्रिज्या होनी चाहिए। इसलिए, चूंकि गोले का केंद्र $(-1, 2, 3)$ है, इसका समीकरण

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{16}{9}$ होगा।

अब आप कुछ प्रश्न कीजिए।

E 11) दिखाइए कि समतल $x + y + z = \sqrt{3}$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ को स्पर्श करता है। संपर्क बिंदु मालूम कीजिए।

E 12) दिखाइए कि उस गोले का समीकरण, जो निर्देशांक तलों को स्पर्श करता है और अष्टांश (octant) OXYZ में स्थित है,

$x^2 + y^2 + z^2 - 2k(x + y + z) + 2k^2 = 0$ है, किसी $k \in \mathbf{R}$ के लिए।

E 13) उस गोले का समीकरण मालूम कीजिए जिसका केन्द्र $(0, 0, 0)$ है और जो समतल $2x + y + z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है।

इस भाग में हमने देखा कि किसी रेखा या समतल के किसी गोले के साथ प्रतिच्छेद से कौन से संमुच्चय प्राप्त होते हैं। अब आइए हम दो या अधिक गोलों के प्रतिच्छेद पर चर्चा करें।

5.4 गोलों का प्रतिच्छेद

इस भाग में पहले आप देखेंगे कि दो गोलों के प्रतिच्छेद का परिणाम वही होता है जो एक गोले और एक समतल के प्रतिच्छेद का होता है, अर्थात् एक वृत्त। और फिर आप देखेंगे कि उन अनंततः अनेक गोलों को कैसे प्राप्त किया जाए जिनका प्रतिच्छेद एक दिया गया वृत्त है।

5.4.1 दो प्रतिच्छेदी गोले

आइए हम

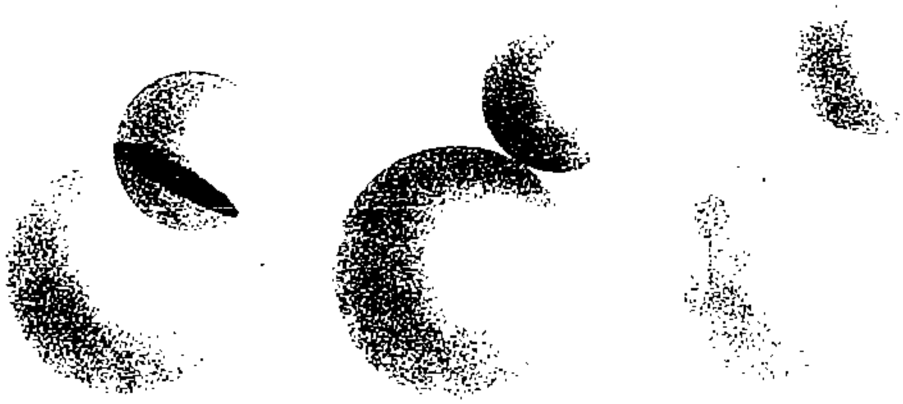
$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$, और

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$, द्वारा दिए गए दो गोलों पर विचार करें।

तब, प्रत्येक बिंदु जो $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ दोनों को संतुष्ट करता है, $S_1 - S_2 = 0$ को भी संतुष्ट करेगा, अर्थात्

$2(u_1-u_2)x+2(v_1-v_2)y+2(w_1-w_2)z+(d_1-d_2) = 0$ को। ... (11)

लेकिन इकाई 4 के प्रमेय 1 से आप जानते हैं कि यह एक समतल है। अतः गोलों $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु वही हैं जो किसी एक गोले और समतल (11) के हैं। चूँकि एक गोले और समतल का प्रतिच्छेद एक वृत्त होता है, $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ का प्रतिच्छेद एक वृत्त होगा (चित्र 9 देखें)।



चित्र 9: दो गोले एक वृत्त में प्रतिच्छेद करते हैं जो (क) एक वास्तविक वृत्त हो सकता है, (ख) बिंदु वृत्त हो सकता है, या (ग) अधिकल्पित वृत्त हो सकता है।

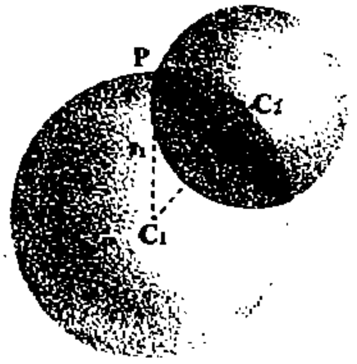
चित्र 9 (क) में प्रतिच्छेद वृत्त की धनात्मक त्रिज्या है, जबकि चित्र 9 (ख) में दो गोले केवल एक बिंदु में प्रतिच्छेद करते हैं। चित्र 9 (ग) में वे प्रतिच्छेद ही नहीं करते हैं। दृढ़ पिंडों की गति का अध्ययन करते समय आपके सामने ऐसी स्थिति आ सकती है जिसमें दो गोले एक दूसरे को बस स्पर्श करते हैं, जैसा कि चित्र 9 (ख) में है।

टिप्पणी 2: यदि $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ दो गोले हैं (ज़रूरी नहीं कि ये आपस में प्रतिच्छेद करें), तो $S_1 - S_2 = 0$ एक समतल होता है, और गोलों का **मूल समतल** (radical plane) कहलाता है।

अब, जब हमने रेखाओं या समतलों की चर्चा की तो प्रतिच्छेद-कोण (angle of intersection) के बारे में बताया था। क्या दो गोलों के प्रतिच्छेद-कोण की बात करना सार्थक होगा?

परिभाषा: दो गोलों का प्रतिच्छेद-कोण किसी संपर्क बिंदु पर इन गोलों के स्पर्श तलों के बीच का कोण होता है।

शायद आप सोचें कि क्या उपरोक्त परिभाषा "सही" है–एक संपर्क बिंदु से दूसरे तक कोण बदल सकता है। लेकिन अब आप देखेंगे कि कोण संपर्क बिंदु से स्वतंत्र होता है।



चित्र 10: दोनों गोलों के बीच का कोण θ है।

मान लीजिए गोले $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ हैं, जहां

$S_i \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_ix + 2v_iy + 2w_iz + d_i = 0$, जहाँ $i = 1, 2$.

तब उनकी त्रिज्याएं क्रमशः $r_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - d_1}$ और

$r_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - d_2}$ हैं।

मान लीजिए, d उनके केंद्रों C_1 और C_2 के बीच की दूरी है (चित्र 10 देखें)। मान लीजिए P एक प्रतिच्छेदी-बिंदु है। तो गोलों के बीच का कोण बिंदु P पर प्रत्येक गोले के स्पर्श तलों के बीच का कोण है। और यह कोण इन समतलों पर अभिलंबों PC_1 और PC_2 के बीच का कोण है। अतः यदि θ वांछनीय कोण है, तो प्रारंभिक त्रिकोणमिति से आप जानते हैं कि

$$2\,PC_1 \cdot PC_2 \cos\theta = PC_1^2 + PC_2^2 - C_1C_2^2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} \qquad \ldots (12)$$

दो गोले लंबकोणीय कहलाते हैं यदि उनका प्रतिच्छेद-कोण $\frac{\pi}{2}$ है।

अतः, विशेष रूप में, गोले लंबकोणीय (orthogonal) होंगे यदि और केवल यदि

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2$$

$$\Rightarrow (u_1^2+v_1^2+w_1^2-d_1)+(u_2^2+v_2^2+w_2^2-d_2)=(-u_1+u_2)^2+(-v_1+v_2)^2+(-w_1+w_2)^2$$

$$\Rightarrow 2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2w_1w_2 = d_1+d_2 \qquad \ldots (13)$$

अतः गोले $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$, 90° पर प्रतिच्छेद करते हैं यदि और केवल यदि (13) संतुष्ट होता है।

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 6: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ और $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ के बीच का कोण मालूम कीजिए।

हल: यहां $u_1 = 0, v_1 = 0, w_1 = 0, d_1 = -4, u_2 = -1, v_2 = 0, w_2 = 0, d_2 = 0$.

अतः दोनों गोलों के केंद्र क्रमशः (0, 0, 0) और (1, 0, 0) हैं, उनकी त्रिज्याएं 2 और 1 हैं और उनके केंद्रों के बीच की दूरी 1 है। अतः, (12) से, दोनों गोलों के बीच का कोण

$$\cos^{-1}\left(\frac{2^2 + 1^2 - 1^2}{2\,(2)\,(1)}\right) = \cos^{-1}(1) = 0 \text{ है।}$$

चित्र 11

आप इन गोलों को चित्र 11 में देख सकते हैं। ये केवल एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं, और x-अक्ष गोलों के केन्द्रों से दोनों स्पर्श तलों पर अभिलंब है।

अब आप प्रतिच्छेदी गोलों पर कुछ प्रश्न कर सकते हैं।

E 14) गोलों $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ का प्रतिच्छेद-कोण मालूम कीजिए।

E 15) समतल $3x + 2y - z + 2 = 0$ को बिंदु (1, −2, 1) पर स्पर्श करने वाले और गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ को लांबिकतः (90° पर) प्रतिच्छेद करने वाले गोले का समीकरण मालूम कीजिए।

E 16) क) क्रमशः r_1 और r_2 त्रिज्याओं और C_1 और C_2 केंद्रों वाले दो गोले परस्पर स्पर्श करेंगे यदि और केवल यदि $r_1 + r_2 = C_1C_2$. सत्य या असत्य? क्यों?

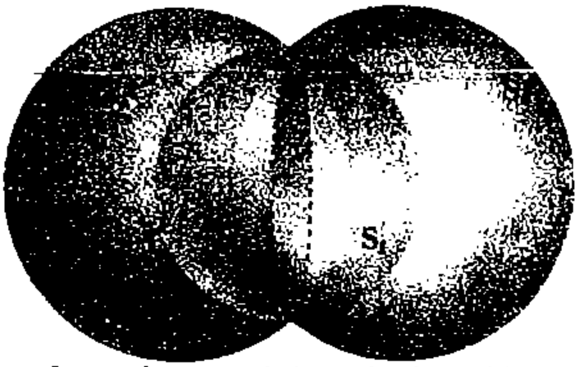
ख) r_1, r_2 और C_1C_2 पर किन प्रतिबंधों के अधीन गोले प्रतिच्छेद नहीं करेंगे?

E 17) दिखाइए कि गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ और $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2z + 10 = 0$ एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। उनका संपर्क बिंदु क्या है?

अभी तक आपने देखा है कि दो गोले एक वृत्त में प्रतिच्छेद करते हैं। आइए अब हम देखें कि यदि कोई वृत्त दिया हो तो क्या हम उससे होकर जाने वाले दो या अधिक गोले मालूम कर सकते हैं।

5.4.2 दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले गोले

मान लीजिए हमें एक वृत्त दिया गया है। क्या हम ऐसे दो अलग-अलग गोले मालूम कर सकते हैं जिनका प्रतिच्छेद यह वृत्त हो? वास्तव में, हम दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले अनेक गोले बना सकते हैं (चित्र 12 देखें)।



चित्र 12: दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले कुछ गोले

चित्र 12 में वृत्त गोले S_1 का वृहत् वृत्त है, लेकिन S_2, S_3 इत्यादि का नहीं। आइए हम देखें कि इस प्रकार के कुल (family) को बनाने का क्या तरीका है।

आप जानते हैं कि कोई वृत्त एक गोले और एक समतल का प्रतिच्छेद होता है। इसलिए इसका समीकरण $S = 0$ और $\Pi = 0$ के रूप का होता है, जहाँ
$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d$. और $\Pi = Ax + By + Cz + D$.
इस वृत्त से होकर जाने वाला कोई गोला

$$S + k\,\Pi = 0, \qquad \dots (14)$$

द्वारा दिया जाएगा, जहां k एक स्वेच्छ अचर है। सही या ग़लत? यदि आप प्रमेय 1 का प्रयोग करें, तो आप देख सकते हैं कि (14) एक गोले को निरूपित करता है।

इसके अतिरिक्त, वृत्त पर स्थित प्रत्येक बिंदु (14) को संतुष्ट करेगा।

अतः (14) दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले एक गोले को निरूपित करता है।

अतः (14) में $k \in \mathbf{R}$ के प्रत्येक मान के लिए हमें दिए गए वृत्त से होकर जाने वाला एक अलग गोला प्राप्त होता है। अतः अनंततः अनेक गोले हैं जो दिए गए वृत्त में प्रतिच्छेद करते हैं।

अब, कोई वृत्त दो गोलों $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ के प्रतिच्छेद के रूप में भी निरूपित किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में इस वृत्त को अन्तर्विष्ट करने वाले किसी गोले का समीकरण क्या होगा? यह $S_1 + kS_2 = 0$ होगा, जहाँ $k \in \mathbf{R}$. अतः अनंत समुच्चय $\{S_1 + kS_2 = 0 \mid k \in \mathbf{R}\}$ हमें दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले गोलों का कुल देता है।

आइए अब (14) के उपयोग के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 : दिखाइए कि वृत्त

$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z = 0,\ x - y + z - 2 = 0$ और

$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + z - 5 = 0,\ 2x - y + 4z - 1 = 0$

एक गोले पर स्थित हैं, और उसका समीकरण मालूम कीजिए।

हल : पहले वृत्त से होकर जाने वाले किसी गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z + k\,(x - y + z - 2) = 0$ है, अर्थात्

$$x^2 + y^2 + z^2 + kx - (k + 1)\,y + (k + 2)\,z - 2k = 0, \qquad \dots (15)$$

किसी $k \in \mathbf{R}$ के लिए।

इसी प्रकार, दूसरे वृत्त से होकर जाने वाले किसी गोले का समीकरण

$$x^2 + y^2 + z^2 + (2k_1 + 1)x - (k_1 + 3)y + (4k_1 + 1)z - (k_1 + 5) = 0 \quad \ldots (16)$$

होगा, किसी $k_1 \in \mathbf{R}$ के लिए।

दोनों वृत्तों को अन्तर्विष्ट करने वाला कोई उभयनिष्ठ गोला प्राप्त करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या $\mathbf{R}$ में किसी k और k_1 के लिए (15) और (16) संपाती होते हैं। (15) और (16) में x, y और z के गुणांकों और अचर पदों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$k = 2k_1 + 1,\ k + 1 = k_1 + 3,\ k + 2 = 4k_1 + 1,\ 2k = k_1 + 5.$

ये समीकरण $k = 3$ और $k_1 = 1$ से संतुष्ट होते हैं। अतः दोनों वृत्तों से होकर जाने वाला एक गोला है, और इसका समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 5z - 6 = 0$ है।

उदाहरण 8: वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ 2x + 3y + 4z = 5$ और मूल बिंदु से होकर जाने वाले गोले का समीकरण मालूम कीजिए।

हल: मान लीजिए गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + k\,(2x + 3y + 4z - 5) = 0$ है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.

चूँकि यह (0, 0, 0) से गुज़रता है, हम पाते हैं कि

$-9 - 5k = 0$, अर्थात्, $k = -\dfrac{9}{5}$.

अतः वांछनीय समीकरण $5\,(x^2 + y^2 + z^2) = 9\,(2x + 3y + 4z)$ है।

उदाहरण 9: उस गोले के केंद्र द्वारा अनुरेखित पथ मालूम कीजिए जो रेखाओं $y = x,\ z = 1$ और $y = -x,\ z = -1$ को स्पर्श करता है।

हल: मान लीजिए दोनों रेखाओं को स्पर्श करने वाले गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

चूँकि $y = x,\ z = 1$ इसे स्पर्श करती है, रेखा और गोले का प्रतिच्छेद केवल एक बिंदु होना चाहिए। रेखा पर कोई बिंदु $(t, t, 1)$ है, जहाँ $t \in \mathbf{R}$. यह गोले पर स्थित होगा यदि

$t^2 + t^2 + 1 + 2ut + 2vt + 2w + d = 0$

इस समीकरण के समान मूल होंगे यदि

$(u + v)^2 = 2\,(1 + 2w + d).$

इसी प्रकार, चूँकि $y = -x,\ z = -1$ गोले को स्पर्श करती है, हम पाते हैं कि

$(u - v)^2 = 2\,(1 - 2w + d).$

इन दो प्रतिबंधों को लागू करने पर, हम पाते हैं कि

$4\,uv = 4w\,(1 + 1)$, अर्थात्, $uv = 2w.$

अतः गोले का केन्द्र $(-u, -v, -w)$ समीकरण $xy + 2x = 0$ को संतुष्ट करता है।

यह दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाले किसी भी गोले के लिए सत्य है। अतः वांछनीय पथ $xy + 2z = 0$ है।

अब आप यह जांच कीजिए कि इस भाग में अभी तक हमने जो किया है वह आपने समझ लिया है या नहीं।

E 18) सिद्ध कीजिए कि वृत्त

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0,\ 5y + 6z + 1 = 0$, और

$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0,\ x + 2y - 7z = 0$

एक ही गोले पर स्थित हैं। इसका समीकरण भी मालूम कीजिए।

E 19) उन गोलों के समीकरण मालूम कीजिए जो $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ 2x + y + 3z = 3$ से गुज़रते हैं और समतल $3x + 4y = 15$ को स्पर्श करते हैं।

E 20) उस गोले का समीकरण मालूम कीजिए जिसके लिए वृत्त $2x - 3y + 4z = 8,\ x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ एक बृहत् वृत्त है।

अब हम गोलों पर अपनी चर्चा फिलहाल खत्म करते हैं। हम अगले खंड में इनका अक्सर उल्लेख करेंगे। अब आइए, हमने जो कुछ इस इकाई में पढ़ा है उस पर एक सरसरी नज़र दौड़ाएं।

5.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों का अध्ययन किया है।

1) द्विघाती समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ केन्द्र $(-u, -v, -w)$ और त्रिज्या $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ वाले गोले को निरूपित करता है।

   विलोमतः, किसी गोले का समीकरण इस रूप का होता है।

2) एक रेखा किसी गोले को अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। यदि यह गोले को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है, तो यह गोले की स्पर्श रेखा होगी।

3) एक समतल किसी गोले को एक वृत्त में प्रतिच्छेदित करता है। जब यह वृत्त एक बिंदु वृत्त P में समानीत हो जाता है, तो समतल गोले का बिंदु P पर स्पर्श तल हो जाता है।

4) गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ के बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर स्पर्श तल का समीकरण $xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x+x_1) + v(y+y_1) + w(z+z_1) + d = 0$ होता है।

   यह (x_1, y_1, z_1) को गोले के केन्द्र से जोड़ने वाली रेखा के लंब होता है।

5) दो गोलों का प्रतिच्छेद एक वृत्त होता है।

6) दो प्रतिच्छेदी गोलों

   $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$, और

   $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$

   का प्रतिच्छेद-कोण $\cos^{-1}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\right)$ होता है, जहाँ r_1 और $_2$ उनकी त्रिज्याएं हैं और d उनके केन्द्रों के बीच की दूरी है।

   विशेष तौर पर, दोनों गोले लंबकोणीय होते हैं यदि

   $2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2w_1w_2 = d_1 + d_2$

7) किसी दिए गए वृत्त से होकर जाने वाले अनंततः अनके गोले होते हैं।

अब आप भाग 5.1 में दिए गए उद्देश्यों को दोबारा देख लें, यह जांचने के लिए कि आपने उन्हें पा लिए हैं। यदि आप इकाई में दिए गए प्रश्नों के हमारे हल देखना चाहेंगे, तो हमने इन्हें अगले भाग में दिए हैं।

5.6 हल/उत्तर

E 1) इसका केंद्र $\left(-\left(\frac{-2}{2}\right), -\left(\frac{4}{2}\right), -\left(\frac{-6}{2}\right)\right) = (1, -2, 3)$ है।
इसकी त्रिज्या $\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2 - (-11)} = 5$ है।

E 2) हम समीकरण को
$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2} = 0$ लिख सकते हैं।
यह एक अधिकल्पित गोले को निरूपित करता है जिसका केन्द्र मूल बिंदु पर है।

E 3) इसका केन्द्र (0, 0, 2) और त्रिज्या 4 है।

E 4) मान लीजिए गोला $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है। तब, चूँकि

दिए गए बिंदु इस पर स्थित हैं, हम पाते हैं कि

$1 + 2u + d = 0$

$1 + 2v + d = 0$

$1 + 2w + d = 0$

$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(u + v + w) + d = 0$

इन समीकरणों को हल करने पर, हम पाते हैं कि

$u = v = w = 0, d = -1.$

अतः गोले का केन्द्र (0, 0, 0) है और त्रिज्या 1 है।

E 5) मान लीजिए ऐसा गोला है। मान लीजिए इसका समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

चूँकि दिए गए बिंदु इस पर स्थित हैं, हम रैखिक निकाय

$17 + 8u + 2w + d = 0$
$197 + 20u - 8v + 18w + d = 0$
$192 - 10u + 12v - 22w + d = 0$
$14 + 2u + 4v + 6w + d = 0$

पाते हैं।

आप जाँच कर सकते हैं कि यह निकाय असंगत है। अतः बिंदु एक गोले पर स्थित नहीं हैं।

E 6) वांछनीय समीकरण

$(x-3)(x-1) + (y-4)(y-2) + (z-5)(z-3) = 0$ है।

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 26 = 0.$

E 7) रेखा पर कोई बिंदु $(4t-3, 3t-4, 5t)$ है, जहाँ $t \in \mathbf{R}$. यह गोले पर स्थित होगा यदि

$(4t-3)^2 + (3t-4)^2 + 25t^2 + 4(4t-3) + 6(3t-4) + 10(5t) = 0.$

$\Leftrightarrow 50t^2 + 36t - 11 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-36 \pm \sqrt{(36)^2 + 2200}}{100}$

चूँकि ये वास्तविक अलग-अलग मूल हैं, रेखा गोले को दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेगी। इसलिए, यह गोले की स्पर्शरेखा नहीं होगी।

E 8) यदि हम बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर गोले $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ की स्पर्श रेखा प्राप्त करने के लिए व्यावहारिक नियम का विस्तार करें, तो हम पाते हैं कि

$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x + x_1) + v(y + y_1) + w(z + z_1) + d = 0.$

यह एक रैखिक समीकरण है, और इसलिए एक समतल को निरूपित करता है, एक रेखा को नहीं। अतः यह एक स्पर्श रेखा को निरूपित नहीं कर सकता है।

E 9) गोले का केन्द्र $C(-6, 6, 8)$ है।

इसकी त्रिज्या $r = 5$ है।

अतः C की समतल से दूरी, $d = 3$ है।
अतः वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{r^2 - d^2} = 4.$

C से समतल पर लंब के समीकरण

$\frac{x+6}{2} = \frac{y-6}{2} = z - 8$ हैं।

अतः, वृत्त का केंद्र $(-4, 8, 9)$ है।

E 10) क) $2x + 3y - 4z + (z - 4) = 29 \Leftrightarrow 2x + 3y - 3z - 33 = 0.$

ख) $2x + 3y + z - 2(y + 3) - 3(z + 1) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \ 2x + y - 2z - 5 = 0.$

E 11) गोले की त्रिज्या = 1

समतल की गोले के केंद्र (0, 0, 0) से दूरी = 1

अतः समतल गोले का स्पर्श तल है।

यदि संपर्क बिंदु (a, b, c) है, तो समतल का समीकरण $ax + by + cz - 1 = 0$,

और $x + y + z - \sqrt{3} = 0$ है।

$\therefore \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

अतः संपर्क बिंदु $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ है।

E 12) मान लीजिए समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

चूँकि समतल $x = 0$ इसका स्पर्श तल है, $(-u, -v, -w)$ की $x = 0$ से

दूरी $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = r$ होनी चाहिए।

$\therefore -u = r$

(नोट कीजिए कि $|-u| = -u$, चूँकि केंद्र उस अष्टांश में स्थित है जिसमें x, y और z निर्देशांक सब धनात्मक हैं।)

इसी प्रकार, $-v = -w = r$.

तब $u^2 + v^2 + w^2 - d = r^2 \Rightarrow d = 2r^2$.

अतः गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 2r(x + y + z) + 2r^2 = 0$ है।

E 13) इसकी त्रिज्या $\frac{|2-3|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ होनी चाहिए।

अतः, इसका समीकरण

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{6}$ है।

$\Leftrightarrow \ 6(x^2 + y^2 + z^2) - 12x + 5 = 0.$

E 14) उनके केन्द्र क्रमशः $C_1(1, -1, 2)$ और $C_2(0, 0, 0)$ हैं।

दोनों की त्रिज्याएं 2 हैं, और

$C_1C_2^2 = 6$

अतः प्रतिच्छेद-कोण

$\cos^{-1}\left(\frac{4+4-6}{2(2)(2)}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ है।

E 15) मान लीजिए गोला

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ से दिया जाता है।

तब समतल $3x + 2y - z + 2 = 0$

$x - 2y + z + u(x+1) + v(y-2) + w(z+1) + d = 0$ के समान है,

अर्थात् $x(1+u) + y(v-2) + z(w+1) + u - 2v + w + d = 0$ के समान है।

$\therefore \frac{1+u}{3} = \frac{v-2}{2} = \frac{w+1}{-1} = \frac{u-2v+w+d}{2}$

$\therefore v = \frac{2u+8}{3}, \quad w = \frac{-u-4}{3}, \quad d = \frac{4u+22}{3}.$

और, यह गोला $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ को लांबिकतः प्रतिच्छेद करता है।

अतः (13) का प्रयोग करके हम देखते हैं कि $-4u + 6v = d + 4$.

v और d का मान रखने पर हम पाते हैं कि $u = \frac{7}{2}$.

और तब $v = 5$, $w = -\frac{5}{2}$, $d = 12$. अतः वांछनीय गोला

$x^2 + y^2 + z^2 + 7x + 10y - 5z + 12 = 0$ है।

E 16) (क) यह तभी सत्य है यदि एक गोला दूसरे गोले के अंदर स्थित नहीं हैं। अन्यथा, जैसा कि चित्र 1 में है, $C_1C_2 \neq r_1 + r_2$.

(ख) यदि एक दूसरे के बाहर स्थित है और $r_1 + r_2 > C_1C_2$, तब वे प्रतिच्छेद नहीं करेंगे। यदि एक दूसरे के अंदर है और $|r_1 - r_2| > C_1C_2$ तो वे प्रतिच्छेद नहीं करेंगे।

E 17) उनके केंद्र C_1 (1, 2, 2) और C_2 (−5, 0, −1) हैं।

$\therefore C_1C_2 = 7 =$ उनकी त्रिज्याओं का योग।

अतः ये एक दूसरे को स्पर्श करते हैं।

समतल $S_1 - S_2 = 0$ उभयनिष्ठ स्पर्श तल है, जहाँ $S_1 = 0$ और $S_2 = 0$ दोनों गोले हैं। यह $6x + 2y + 3z + 5 = 0$ होगा।

संपर्क बिंदु रेखा C_1C_2 का समतल के साथ प्रतिच्छेद होगा। अब, C_1C_2,

$\frac{x+5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ द्वारा दी जाती है। इस पर कोई बिंदु $(6t-5, 2t, 3t-1)$ है। यह स्पर्श तल पर स्थित होगा यदि

$6(6t-5) + 2(2t) + 3(3t-1) + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{7}$.

अतः संपर्क बिंदु $\left(-\frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$ होगा।

E 18) उदाहरण 7 की तरह हल करने पर आप देख सकते हैं कि वे गोले

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ पर स्थित हैं।

E 19) ऐसा कोई गोला $x^2 + y^2 + z^2 - 5 + k(2x + y + 3z - 3) = 0$ से दिया जाता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$. इसका केन्द्र $\left(-k, \frac{-k}{2}, \frac{-3k}{2}\right)$ है। इसकी $3x + 4y = 15$ से दूरी गोले की त्रिज्या के बराबर है।

$$\therefore k^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^2}{4} + (3k + 5) = (k + 3)^2 .$$
$$\Rightarrow k = 2, \frac{-4}{5}$$

अतः दो गोले, जो दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं,

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 6z - 11 = 0$ और

$5(x^2 + y^2 + z^2) - 8x - 4y - 12z - 13 = 0$ हैं।

E 20) ऐसा कोई गोला

$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 + k(2x - 3y + 4z - 8) = 0$, जहाँ $k \in \mathbf{R}$, से दिया जाएगा।

चूँकि दिया गया वृत्त गोले का वृहत् वृत्त है, गोले का केन्द्र समतल $2x - 3y + 4z = 8$ पर स्थित होना चाहिए।

$$\therefore 2(-k) - 3\left(\frac{3k-7}{3}\right) + 4(1-2k) = 8$$
$$\Rightarrow k = \frac{13}{29} .$$

अतः गोले का समीकरण

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{26}{29}x + \frac{164}{29}y - \frac{6}{29}z - \frac{46}{29} = 0 \text{ है।}$$
$$\Rightarrow 29(x^2 + y^2 + z^2) + 26x + 164y - 6z - 46 = 0.$$

इकाई 6 शंकु और बेलन

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने एक आम पाए जाने वाले त्रिविम वस्तु की चर्चा की थी। इस इकाई में हम दो और आम पाए जाने वाले त्रिविम वस्तुओं, अर्थात् शंकु और बेलन, की चर्चा करेंगे। लेकिन इस इकाई में आप जो कुछ देखेंगे उससे शायद आपको आश्चर्य हो—जिन्हें लोग आमतौर पर शंकु या बेलन कहते हैं वे गणितज्ञों द्वारा माने जाने वाले शंकु और बेलन की अति विशिष्ट स्थितियाँ हैं।

शंकुओं पर हम अपनी चर्चा उनकी परिभाषा से शुरू करेंगे, और फिर उनके समीकरण मालूम करेंगे। फिर हम उन शंकुओं पर ध्यान केंद्रित करेंगे जिनके शीर्ष मूल बिंदु है। विशेष रूप से, हम ऐसे शंकुओं के स्पर्श तल प्राप्त करेंगे।

हम इस इकाई में एक और पृष्ठ की चर्चा करेंगे, अर्थात् बेलन की। हम एक व्यापक बेलन परिभाषित करेंगे और फिर लंब वृत्तीय बेलन पर चर्चा करेंगे।

इस इकाई की सामग्री निश्चित रूप से गणितीय रुचि की है। लेकिन यह खगोलशास्त्रियों, भौतिक विज्ञानियों, इंजीनियरों और वास्तुविदों की रुचि की भी है। ऐसा इसलिए है क्योंकि शंकुओं और बेलनों के विज्ञान और इंजीनियरिंग के विभिन्न क्षेत्रों में अनके अनुप्रयोग हैं।

जिन पृष्ठों के बारे में आप इस इकाई में पढ़ेंगे वे शांकवजों की विशेष स्थितियां हैं, जिनके बारे में आप अगले खंड में पढ़ेंगे। अतः यदि आप इस इकाई को ध्यान से पढ़ेंगे और यह सुनिश्चित करेंगे कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं, तो आपको अगले खंड को समझने में आसानी होगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- शंकु का समीकरण मालूम कर सकेंगे यदि आपको उसका शीर्ष और आधार वक्र मालूम हो;
- इस तथ्य को सिद्ध कर सकेंगे कि 3 चरों वाला कोई द्विघाती समीकरण मूल बिंदु पर शीर्ष वाले किसी शंकु को निरूपित करता है यदि और केवल यदि यह समघात हो, और इसे प्रयोग कर सकेंगे;
- शंकु के स्पर्श तल प्राप्त कर सकेंगे;
- एक लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण मालूम कर सकेंगे यदि आपको इसका अक्ष और आधार वक्र मालूम हो।

आइए अब हम देखें कि शंकु क्या है।

6.2 शंकु

जब आप एक आइसक्रीम कोन देखते हैं तो क्या आप कभी यह सोचते हैं कि यह रेखाओं का एक समुच्चय है? ऐसा ही है, जैसा कि आप इस भाग में देखेंगे।

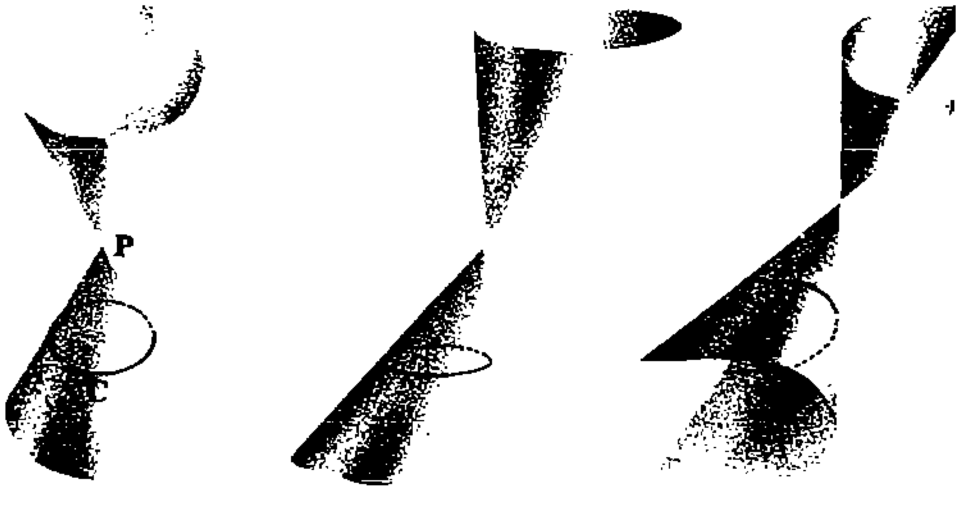
परिभाषा : शंकु (cone) ऐसी रेखाओं का समुच्चय है जो एक दिए गए वक्र को प्रतिच्छेदित करती हैं और एक नियत बिंदु (जो वक्र के तल में नहीं है) से होकर गुज़रती हैं। नियत बिंदु शंकु का **शीर्ष** (vertex) कहलाता है, और वक्र शंकु का **आधार वक्र** (base curve) (या **नियता**) कहलाता है।

प्रत्येक रेखा जो शंकु बनाती है, शंकु का **जनक** (generator) कहलाती है।

अतः शंकु को निम्न प्रकार भी परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा : शंकु एक ऐसा पृष्ठ है जो उस रेखा से जनित होता है जो एक दिए गए वक्र को प्रतिच्छेद करती है और एक ऐसे नियत बिंदु से होकर गुज़रती है जो वक्र के तल में स्थित नहीं है।

उदाहरण के लिए, चित्र 1 (क) में, हमने बिंदु P से होकर जाने वाली तथा वृत्त C को प्रतिच्छेदित करने वाली रेखा से जनित शंकु दिया है। चित्र 1 (ख) और चित्र 1 (ग) में दिए गए शंकुओं के आधार वक्र क्रमशः एक दीर्घवृत्त और एक परवलय हैं।



(क) (ख) (ग)

चित्र 1: (क) एक वृत्तीय शंकु, (ख) एक दीर्घवृत्तीय शंकु, (ग) एक परवलयिक शंकु।

चित्र 2: एक वृत्तीय शंकु जो लंब वृत्तीय नहीं है।

यहां पर हम एक महत्वपूर्ण टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 1: शंकु उन रेखाओं का एक समुच्चय होता है जो इसके शीर्ष और आधार वक्र से होकर गुज़रती हैं। अतः शंकु शीर्ष और आधार वक्र तक सीमित नहीं है। अतः हमारे चित्रों में दिए गए शंकु वास्तव में शंकु का केवल एक हिस्सा हैं।

अब आइए हम आपको कुछ नई शब्दावली से परिचित कराएं।

परिभाषा : एक शंकु, जिसका आधार वक्र एक वृत्त होता है, एक **वृत्तीय शंकु** (circular cone) कहलाता है। वृत्तीय शंकु के शीर्ष को आधार वक्र के केन्द्र से जोड़ने वाली रेखा शंकु का **अक्ष** कहलाती है। यदि वृत्तीय शंकु का अक्ष आधार वक्र के समतल पर लंब हो, तो शंकु **लंब वृत्तीय शंकु** कहलाती है।

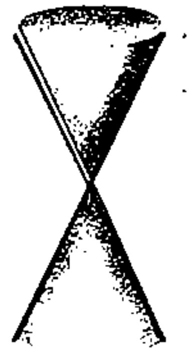
अतः चित्र 1 (क)य में दिया गया शंकु लंब वृत्तीय शंकु है, जबकि चित्र 2 में दिया गया शंकु नहीं है।

जो प्राचीन यूनानी घन को दुगुना करने की समस्या का अध्ययन कर रहे थे, उन्होंने शांकुओं को बहुत महत्व दिया। ऐसा माना जाता है कि सिकंदर महान के अध्यापक मेनेक्मस ने ज्यामितीय विधि से निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध किया। इसी परिणाम की वजह से शांकुओं का महत्व बना रहा है।

प्रमेय 1: शंकु का प्रत्येक समतल परिच्छेद एक शांकव होता है।

यह प्रमेय दीर्घवृत्त, परवलय या अतिपरवलय के शंकु परिच्छेद कहलाने का कारण है (इकाई 3 का चित्र 1 देखें)। इसे यूनानी खगोल शास्त्री एपलोनियस (लगभग 200 ई.पू.)ने सिद्ध किया था। हम इसकी उत्पत्ति यहाँ नहीं देंगे।

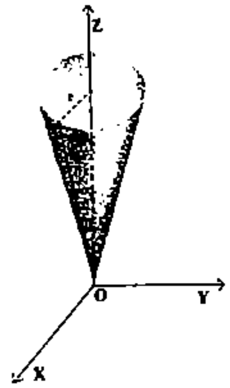
अब, प्रमेय 1 के अनुसार, क्या आप प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म को शांकव कहेंगे? यदि आप एक लंब वृत्तीय शंकु को ऐसे समतल से काटें जिसमें शंकु का अक्ष हो, तो परिणामी वक्र क्या होगा? चित्र 3 देखें।



चित्र 3: प्रतिच्छेदी रेखाओं का युग्म एक शंकु परिच्छेद होता है।

आइए अब हम देखें कि शंकु को बीजीय रूप में कैसे निरूपित करते हैं। हम पहले लंब वृत्तीय शंकु के बारे में चर्चा करेंगे।

तो, आइए हम एक लंब वृत्तीय शंकु लें। हम मान लेते हैं कि इसका शीर्ष मूल बिंदु पर है और इसका अक्ष z-अक्ष है (चित्र 4 देखें)। तब, आधार वक्र जो त्रिज्या r (कहिए) का एक वृत्त है, XY-समतल के समांतर समतल में स्थित है। मान लीजिए यह समतल $z = k$ है, जहाँ k एक स्थिरांक है। तब, कोई भी जनक इस वक्र को बिंदु (a, b, k) पर प्रतिच्छेदित करेगा, किन्हीं $a, b \in \mathbf{R}$ के लिए। अतः जनक और शंकु के अक्ष के बीच का कोण $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{r}{k}\right)$ होगा, जो एक स्थिरांक है।



चित्र 4: मूल बिंदु पर शीर्ष तथा आधार वक्र $x^2 + y^2 = r^2$, $z=k$ वाला लंब वृत्तीय शंकु।

यह शंकु के किसी भी जनक के लिए सत्य है। अतः शंकु के पृष्ठ पर प्रत्येक रेखा शंकु के अक्ष के साथ एक नियत कोण θ बनाती है। यह कोण शंकु का **अर्ध-शीर्ष कोण** (semi-vertical angle) (या **जनक कोण**) कहलाता है।

अब हम लंब वृत्तीय शंकु को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा: एक **लंब वृत्तीय शंकु** उस रेखा द्वारा जनित पृष्ठ है जो एक नियत बिंदु (उसके शीर्ष) से होकर जाती है और नियत बिंदु से जाने वाली एक नियत रेखा से अचर कोण बनाती है।

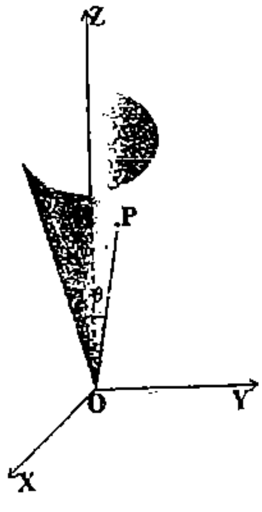
आइए हम लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण इसके अर्ध-शीर्ष कोण के पदों में प्राप्त करें।

मान लीजिए शंकु का शीर्ष O (0, 0, 0) है और अक्ष z-अक्ष है। (हम सदैव अपना निर्देशांक तंत्र इस प्रकार से चुन सकते हैं।) अब शंकु पर कोई बिंदु P (x, y, z) लीजिए (चित्र 5 देखें)। तब, OP के दिक्-अनुपात x, y, z होंगे और शंकु के अक्ष के दिक्-अनुपात 0, 0, 1 होंगे। इस प्रकार, इकाई 4 के समीकरण (9) से हम पाते हैं कि

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

अतः $x^2 + y^2 + z^2 = z^2 \sec^2\theta$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta \qquad \ldots (1)$$



चित्र 5: $x^2+y^2=z^2 \tan^2\theta$

(1) **लंब वृत्तीय शंकु के समीकरण का मानक रूप** कहलाता है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्न कीजिए।

E 1) दिखाइए कि शीर्ष (a, b, c), अक्ष $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ और अर्ध-शीर्ष कोण θ वाले लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण

$$[\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)]^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}\cos^2\theta, \qquad \ldots (2)$$

है।

E 2) क्या आप (2) से (1) प्राप्त कर सकते हैं?

E 3) उस लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण मालूम कीजिए जिसका अक्ष x-अक्ष है, शीर्ष मूल बिंदु है और अर्ध-शीर्ष कोण $\frac{\pi}{3}$ है।

आइए अब हम ऐसे शंकु को देखें जिसका शीर्ष मूल बिंदु है। इस स्थिति में हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है।

कोई घात दो वाला समीकरण समघात होगा यदि इसका प्रत्येक पद घात 2 का हो।

प्रमेय 2: उस शंकु का समीकरण, जिसका आधार वक्र एक शांकव है और जिसका शीर्ष (0, 0, 0) है, तीन चरों में घात दो वाला एक समघात समीकरण होता है।

उपपत्ति: मान लीजिए कि आधार वक्र शांकव

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \ z = k$ है।

शंकु का कोई भी जनक (0, 0, 0) से गुज़रता है। अतः यह

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \qquad \ldots (3)$$

के रूप का होगा। यह रेखा समतल $z = k$ को बिंदु

$\left(\frac{\alpha k}{\gamma}, \frac{\beta k}{\gamma}, k\right)$ पर प्रतिच्छेद करती है।

यह बिंदु शांकव पर स्थित होना चाहिए। अतः

$$\frac{k^2}{\gamma^2}(a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2) + \frac{k}{\gamma}(2g\alpha + 2f\beta) + c = 0.$$

इस समीकरण और (3) में से α, β, γ का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$$k^2\left(a\frac{x^2}{z^2} + 2h\frac{xy}{z^2} + b\frac{y^2}{z^2}\right) + k\left(2g\frac{x}{z} + 2f\frac{y}{z}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\frac{z}{k} + 2fy\frac{z}{k} + \frac{cz^2}{k^2} = 0.$$

यह शंकु का समीकरण है। जैसा कि आप देख सकते हैं, यह तीन चरों x, y, और z में घात 2 वाला समघाती समीकरण है।

उदाहरण के लिए, उस शंकु का समीकरण जिसका आधार वक्र समतल $z = 5$ में दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ है और जिसका शीर्ष मूल बिंदु है, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ है।

क्या आपको आधार वक्र के समीकरण से शंकु का समीकरण प्राप्त करने के हमारे तरीके में कोई व्यवस्था नज़र आती है? निम्नलिखित टिप्पणी इस बारे में है।

टिप्पणी 2: जिस शंकु का शीर्ष (0, 0, 0) पर है और आधार वक्र समतल $Ax + By + Cz = D, D \neq 0$, में है, उसका समीकरण प्राप्त करने के लिए हम केवल वक्र के समीकरण को निम्न प्रकार से समघात बनाते हैं। हम रैखिक पदों को $\frac{Ax + By + Cz}{D}$ से और अचर पद को $\left(\frac{Ax + By + Cz}{D}\right)^2$ से गुणा करते हैं और द्विघाती पदों को वैसा ही छोड़ देते हैं। इस प्रक्रिया से हमें जो समीकरण प्राप्त होता है वह घात 2 का समघात समीकरण है, और शंकु का ही समीकरण है।

आइए हम उन शंकुओं के कुछ उदाहरण देखें जिनके शीर्ष मूल बिंदु पर हैं।

उदाहरण 1: दिखाइए कि उस शंकु का समीकरण जिसके जनक निर्देशांक अक्ष हैं, $fyz + gzx + hxy = 0$ होता है, जहाँ $f, g, h \in \mathbf{R}$.

हल: प्रमेय 2 से शंकु का समीकरण

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gzx + 2hxy = 0$ होता है, किन्हीं $a, b, c, f, g, h \in \mathbf{R}$ के लिए।

चूँकि x-अक्ष एक जनक है, (1, 0, 0) इस पर स्थित है। इसलिए $a = 0$. इसी प्रकार चूंकि यह (0, 1, 0) और (0, 0, 1) से गुज़रती है, $b = c = 0$.

अतः समीकरण $fyz + gzx + hxy = 0$ हो जाता है।

उदाहरण 2: उस शंकु का समीकरण मालूम कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है और जिसका आधार वक्र वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x + 2y + 2z = 9$ है।

हल: गोले के समीकरण को समघात बनाने पर हम पाते हैं कि

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16\left(\frac{x + 2y + 2z}{9}\right)^2.$$

यह x, y, z में एक द्विघाती समघात समीकरण है और वृत्त से गुज़रता है। इसलिए, यह शंकु का वांछित समीकरण है।

निम्नलिखित प्रश्न समीकरणों को समघात बनाने का आपको अभ्यास कराएंगे।

E 4) उस शंकु का समीकरण मालूम कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है और आधार वक्र

क) परवलय $y^2 = 4ax,\ z = 3$ है,

ख) दीर्घवृत्त $\frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1,\ x = -2$ है।

E 5) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ और $x + y + z = 1$ से गुज़रने वाले शंकु का समीकरण मालूम कीजिए।

आइए अब हम प्रमेय 2 पर वापिस चलें। क्या आप समझते हैं कि इसका विलोम सत्य है? निम्नलिखित परिणाम पर विचार कीजिए।

प्रमेय 3: 3 चरों में एक द्विघाती समघात समीकरण एक ऐसे शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है।

उपपत्ति: मान लीजिए दिया गया समीकरण

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0, \qquad \dots (4)$$

है। मान लीजिए P (α, β, γ) इस पृष्ठ पर कोई बिंदु है और O मूल बिंदु है। तब OP, समीकरणों

$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = r$ (कहिए) द्वारा दिया जाता है। अतः OP पर कोई बिंदु $(r\alpha, r\beta, r\gamma)$ होगा। चूँकि P, (4) पर स्थित है,

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0. \qquad \dots (5)$$

संपूर्ण (5) को r^2 से गुणा करने पर, हम पाते हैं कि

$$a(r\alpha)^2 + b(r\beta)^2 + c(r\gamma)^2 + 2f(r\beta)(r\gamma) + 2g(r\gamma)(r\alpha) + 2h(r\alpha)(r\beta) = 0.$$

अतः, $(r\alpha, r\beta, r\gamma)$ भी (4) पर स्थित है, किसी भी $r \in \mathbf{R}$ के लिए।
विशेष रूप से, O, (4) पर स्थित है। अतः रेखा OP, (4) द्वारा दिए गए पृष्ठ पर स्थित है। दूसरे शब्दों में, OP, (4) का एक जनक है। अतः पृष्ठ (4) मूल बिंदु से होकर जाने वाली रेखाओं से जनित होता है। इनमें से प्रत्येक रेखा (4) के किसी समतल परिच्छेद में प्राप्त वक्र से होकर भी जाएगी, और इनमें से कोई भी वक्र आधार वक्र माना जा सकता है। अतः (4) एक ऐसे शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष मूलबिंदु है।

तो, अभी तक इस भाग में आपने जो देखा है उससे आप जानते हैं कि 3 चरों वाला द्विघाती समघात समीकरण एक शंकु को निरूपित करता है।

टिप्पणी 2: यदि $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$, तो (4) को

दो रैखिक व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। अतः इस स्थिति में, (4) मूल बिंदु को अंतर्विष्ट करने वाले समतलों के युग्म को निरूपित करता है। हम इस स्थिति को अपभ्रष्ट शंकु मानेंगे, और दोनों समतलों की प्रतिच्छेद रेखा पर किसी भी बिंदु को इसका शीर्ष माना जा सकता है।

प्रमेय 3 के प्रयोग से हम दिखा सकते हैं कि यदि $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, तो $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ में एक समघात समीकरण, शीर्ष (α, β, γ) वाले एक शंकु को निरूपित करता है। (इस प्रकार के स्थानांतरण की विस्तार से चर्चा हम इकाई 7 में करेंगे।)

अब आप कुछ प्रश्न कीजिए।

E.6) यदि $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ समीकरण (4) द्वारा दिए गए शंकु का एक जनक हो, तो दिखाइए कि (α, β, γ), (4) पर स्थित है।

E 7) निम्नलिखित समीकरणों में से कौन से शंकु को निरूपित करते हैं?

$3x + 4y + 5z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $3(x^2 + y^2 + z^2) = xy$;

$xyz = yz + zx + xy$.

E 8) यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$, तो दिखाइए कि

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

एक शंकु को निरूपित करता है।

आइए अब हम उदाहरण 1 पर वापिस चलें। यह तीन परस्पर लंब जनकों के शंकु का एक उदाहरण है। इसके समीकरण में x^2, y^2 या z^2 का कोई पद नहीं है। क्या इसका यह अर्थ है कि जब भी किसी शंकु के तीन परस्पर लंब जनक होते हैं तो इसके समीकरण में कोई x^2, y^2 या z^2 के पद नहीं होंगे? निम्नलिखित प्रमेय हमें इसका उत्तर देने में सहायता देता है।

प्रमेय 4: यदि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के 3 परस्पर लंब जनक हों, तो $a + b + c = 0$.

उपपत्ति: मान लीजिए तीन परस्पर लंब जनकों की दिक्कोज्याएं l_i, m_i, n_i हैं, जहां $i = 1, 2, 3$. चूंकि ये परस्पर लंब हैं, हम अपने निर्देशांक तंत्र को इस प्रकार घुमा सकते हैं कि ये रेखाएं नए निर्देशांक अक्ष बन जाएं।
तब पहले वाले निर्देशांक अक्षों की नए अक्षों के सापेक्ष दिक्कोज्याएं l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3 और n_1, n_2, n_3 होंगी।
इसलिए इकाई 4 (समीकरण (3) और (10) हमें बताते हैं कि

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0 \\ m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 &= 0 \\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 &= 0. \end{aligned}\right] \quad \ldots (6)$$

इसके अतिरिक्त, चूंकि लंब रेखाएं शंकु के जनक हैं, E 6 के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 + 2fm_1n_1 + 2gn_1l_1 + 2hl_1m_1 = 0$$
$$al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 + 2fm_2n_2 + 2gn_2l_2 + 2hl_2m_2 = 0$$
$$al_3^2 + bm_3^2 + cn_3^2 + 2fm_3n_3 + 2gn_3l_3 + 2hl_3m_3 = 0.$$

इन समीकरणों को जोड़ने पर और (6) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि $a + b + c = 0$.

यदि शंकु और शंकु के शीर्ष से गुज़रने वाले समतल के प्रतिच्छेद से प्राप्त रेखाएं अधिकल्पित हों, तो प्रतिच्छेद केवल एक बिंदु रह जाता है, जो कि शंकु का शीर्ष है (जैसे इकाई 3 के चित्र 1 (ङ)में)।

वास्तव में इस परिणाम का विलोम भी सत्य है। इसकी उत्पत्ति में हम एक तथ्य का प्रयोग करते हैं जिसे लंब वृत्तीय शंकु के संबंध में आप चित्र 3 में देख चुके हैं, अर्थात्

> शंकु के शीर्ष से गुज़रने वाला कोई समतल शंकु को दो अलग-अलग रेखाओं में या संपाती रेखाओं में प्रतिच्छेदित करता है।

निम्नलिखित परिणाम हमें प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच के कोण के बारे में बताता है। हम इसे यहां सिद्ध नहीं करेंगे, केवल इसका कथन देंगे।

प्रमेय 5: जिन दो रेखाओं में समतल $ux + vy + wz = 0$ शंकु

$C(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$

को प्रतिच्छेदित करता है, उनके बीच का कोण

$$\tan^{-1}\left|\frac{2P\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-C(u,v,w)}\right| \quad \dots (7)$$

है, जहां

$$P^2 = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

(7) को देखकर, क्या आप वह प्रतिबंध दे सकते हैं जिसके अधीन कोण $\frac{\pi}{2}$ होगा?

समतल और शंकु की प्रतिच्छेदी रेखाएं लंब होंगी यदि और केवल यदि

$$C(u, v, w) = (a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) \quad \dots (8)$$

आइए हम (8) के प्रयोग से निम्नलिखित उदाहरण को हल करें। इसमें प्रमेय 4 का विलोम भी शामिल है।

उदाहरण 3: दिखाइए कि यदि $a + b + c = 0$, तो शंकु
$C(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$
के तीन परस्पर लंब जनकों के अनंततः अनेक समुच्चय होते हैं।

हल: मान लीजिए $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ शंकु का कोई जनक है। तो, E6 से हम जानते हैं कि $C(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. इसलिए, तथ्य $a + b + c = 0$ और (8) का प्रयोग करके हम देखते हैं कि समतल $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ शंकु को दो परस्पर लंब जनकों में प्रतिच्छेदित करता है। इन्हें L और L′ कहिए।

अब $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ समतल $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ पर अभिलंब है। अतः यह L और L′ दोनों पर लंब होगा। अतः, ये तीन रेखाएं शंकु के तीन परस्पर लंब जनकों का समुच्चय बनाती हैं। नोट कीजिए कि $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ हमने स्वेच्छ ढंग से चुना था। अतः प्रत्येक चुने गए जनक के लिए हम तीन परस्पर जनकों का समुच्चय पाते हैं। अतः शंकु के जनकों के इस प्रकार के अनंततः अनेक समुच्चय हैं।

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास कीजिए।

E 9) $3x + y + 5z = 0$ और $6yz - 2zx + 5xy = 0$ की प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच का कोण मालूम कीजिए।

E 10) सिद्ध कीजिए कि $ax + by + cz = 0$, जहाँ $abc \neq 0$, शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लंब रेखाओं में काटता है यदि और केवल यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

E 11) सिद्ध कीजिए कि यदि किसी लंब वृत्तीय शंकु के तीन परस्पर लंब जनक हैं, तो इसका अर्ध-शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होगा।

आइए अब हम एक रेखा और एक शंकु के प्रतिच्छेद की चर्चा करें।

6.3 स्पर्श तल

पिछली इकाई में आपने देखा कि एक रेखा एक गोले को अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित कर सकती है। एक रेखा और एक शंकु के प्रतिच्छेद के संबंध में आप क्या अपेक्षा करते हैं? आइए देखें।

मान लीजिए शंकु का समीकरण (4) है, अर्थात्

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$

नोट कीजिए कि, यदि आवश्यक हो तो मूल बिंदु को स्थानांतरित करके, हम सदैव इस समीकरण को शंकु का समीकरण मान सकते हैं। सुविधा के लिए, हम

$C(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ लिखेंगे।

अब रेखा $\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$ पर विचार कीजिए। इस रेखा पर कोई बिंदु $(x_1 + r\alpha, y_1 + r\beta, z_1 + r\gamma)$ द्वारा दिया जाता है, किसी $r \in \mathbf{R}$ के लिए। अतः रेखा शंकु को प्रतिच्छेदित करेगी, यदि यह बिंदु, किसी $r \in \mathbf{R}$ के लिए, शंकु पर स्थित है। ऐसा होता है यदि

$$a(x_1 + r\alpha)^2 + b(y_1 + r\beta)^2 + c(z_1 + r\gamma)^2$$
$$+ 2f(y_1 + r\beta)(z_1 + r\gamma) + 2g(z_1 + r\gamma)(x_1 + r\alpha) + 2h(x_1 + r\alpha)(y_1 + r\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2C(\alpha, \beta, \gamma) + 2r\{\alpha(ax_1 + hy_1 + gz_1) + \beta(hx_1 + by_1 + fz_1)$$
$$+ \gamma(gx_1 + fy_1 + cz_1)\} + C(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad \ldots (9)$$

अब अगर (x_1, y_1, z_1) शंकु पर न हो, तो (9) r में द्विघाती है और इसलिए इसके दो मूल हैं। प्रत्येक मूल रेखा और शंकु के एक प्रतिच्छेद बिंदु के संगत है। इस प्रकार हमने निम्नलिखित परिणाम सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 6: एक सरल रेखा एक शंकु से अधिक से अधिक दो बिंदुओं पर मिलती है, यदि यह रेखा किसी ऐसे बिंदु से गुज़रती हो जो शंकु पर न हो।

अब मान लीजिए कि रेखा

$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$ बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर शंकु (4) की स्पर्श रेखा है। तो, चूंकि (x_1, y_1, z_1) शंकु पर स्थित है, $C(x_1, y_1, z_1) = 0$. अतः (9),
$r^2C(\alpha, \beta, \gamma) + 2r\{\alpha(ax_1 + hy_1 + gz_1) + \beta(hx_1 + by_1 + fz_1) + \gamma(gx_1 + fy_1 + cz_1)\} = 0$ बन जाता है।

इस समीकरण के संपाती मूल होने चाहिए, चूंकि रेखा (x_1, y_1, z_1) पर शंकु की स्पर्श रेखा है। इसके लिए प्रतिबंध

$$\alpha(ax_1 + hy_1 + gz_1) + \beta(hx_1 + by_1 + fz_1) + \gamma(gx_1 + fy_1 + cz_1) = 0 \quad \ldots (10)$$

है।

इसलिए, $\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$ शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ की स्पर्श रेखा होगी यदि और केवल यदि (10) संतुष्ट हो। नोट कीजिए कि (10) α, β, γ के अनंततः अनेक मानों से संतुष्ट होता है। अतः,
शंकु के प्रत्येक बिंदु पर अनंततः अनेक स्पर्शरेखाएं खींची जा सकती हैं।
अब भाग 4.3.3 से आप जानते हैं कि (10) हमें बताता है कि इसमें से प्रत्येक रेखा दिक्-अनुपातों $ax_1 + hy_1 + gz_1$, $hx_1 + by_1 + fz_1$, $gx_1 + fy_1 + cz_1$ वाली रेखा पर लंब है। अतः (x_1, y_1, z_1) पर सब स्पर्श रेखाओं का समुच्चय, समतल

$$(x-x_1)(ax_1+hy_1+gz_1)+(y-y_1)(hx_1+by_1+fz_1)+(z-z_1)(gx_1+fy_1+cz_1)=0$$

है, अर्थात्

$$x(ax_1+hy_1+gz_1)+y(hx_1+by_1+fz_1)+z(gx_1+fy_1+cz_1) = 0, \qquad \ldots (11)$$

चूंकि $C(x_1, y_1, z_1) = 0$.

यह समतल बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर शंकु का **स्पर्श तल** कहलाता है।

अतः (11) शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ का बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर स्पर्श तल है।

(11) को लिखने का एक बहुत सरल व्यावहारिक नियम है।

व्यावहारिक नियम: शंकु (4) का किसी बिंदु (α, β, γ) पर स्पर्श तल का समीकरण लिखने के लिए, x^2 की जगह αx, y^2 की जगह βy, z^2 की जगह γz, $2yz$ की जगह $\gamma y + \beta z$, $2zx$ की जगह $\alpha z + \gamma x$ और $2xy$ की जगह $\beta x + \alpha y$ रखिए।

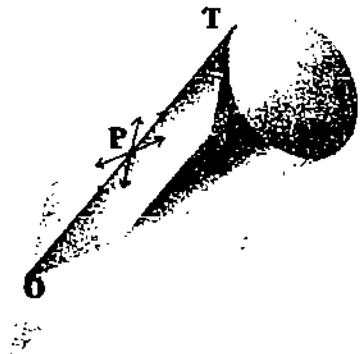
उदाहरण के लिए, शंकु $2x^2 + y^2 - 2xz = 0$ का बिंदु (1, 0, 1) पर स्पर्श तल
$2x(1) + y(0) - (x+z) = 0$ अर्थात्, $x=z$ है।

अभी तक हमने सिर्फ़ ऐसे शंकु का स्पर्श तल मालूम किया है जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है। एक व्यापक शंकु के बारे में हम क्या कह सकते हैं? निम्नलिखित टिप्पणी इसके बारे में है।

टिप्पणी 4: शीर्ष (a, b, c) वाले शंकु का स्पर्श तल हम उपरोक्त तरीके से मालूम कर सकते हैं। हमें केवल मूल बिंदु को (a, b, c) पर स्थानांतरित करना है और नए निर्देशांक तंत्र में स्पर्श तल मालूम करना है। और फिर समतल के समीकरण में आवश्यक रूपांतरण करके हम पुराने निर्देशांक तंत्र में वापस स्थानांतरित कर सकते हैं। इससे हमें वांछनीय समीकरण मिलेगा।

अब यदि आप (11) को ग़ौर से देखें तो आप पाएंगे कि (0, 0, 0) इसे संतुष्ट करता है। अतः **किसी शंकु का स्पर्श तल शंकु के शीर्ष से होकर जाता है।** अतः $P(x_1, y_1, z_1)$ पर स्पर्श तल P और शंकु का शीर्ष O दोनों को अंतर्विष्ट करता है। इस प्रकार शंकु का जनक OP स्पर्श तल में स्थित है। इस प्रकार,

> शंकु का स्पर्श तल शंकु को स्पर्श बिंदु से गुज़रने वाले जनक के साथ-साथ स्पर्श करता है।



चित्र 6: T शंकु का P पर स्पर्श तल है।

यह जनक समतल के **संपर्क का जनक** कहलाता है। चित्र 6 में OP स्पर्श तल T का संपर्क का जनक है।

अब आप कुछ प्रश्न कीजिए।

E 12) शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ का बिंदु $(\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, 1)$ पर स्पर्श तल का समीकरण मालूम कीजिए।

E 13) प्रमेय 5 के प्रयोग से वह प्रतिबंध प्राप्त करें जिसके अधीन एक दिया गया समतल एक शंकु का स्पर्श तल होगा।

यदि आपने E13 हल कर दिया है तो आपने देखा होगा कि $ux + vy + wz = 0$ के शंकु (4), अर्थात् $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0$ का स्पर्श तल होने के लिए प्रतिबंध

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ है, अर्थात्}$$

$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Huv + 2Fvw + 2Gwu = 0,$

जहाँ $A = bc - f^2$, $B = ca - g^2$, $C = ab - h^2$, $F = gh - af$, $G = hf - bg$, $H = fg - ch$.

अतः रेखा $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}$, जो स्पर्श तल पर (0, 0, 0) पर अभिलंब है, शंकु

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gzx = 0, \quad \dots (12)$$

की एक जनक होगी।

अतः (12) शंकु (4) के शीर्ष (0, 0, 0) पर स्पर्श तलों के अभिलंबों द्वारा जनित शंकु हैं। चूँकि यह समघात है, इसका शीर्ष भी (0, 0, 0) है।

नोट कीजिए कि (12) सारणिक समीकरण

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ है।}$$

अब, यदि हम (12) के स्पर्श तलों पर (0, 0, 0) पर अभिलंबों द्वारा जनित पृष्ठ पर विचार करें, तो हम क्या पाते हैं? गणना करने पर आपको आश्चर्य होगा। शंकु (4) है, क्योंकि

$BC-F^2 = a\Delta$, $CA-G^2 = b\Delta$, $AB-H^2 = c\Delta$,
$GH-AF = f\Delta$, $HF-BG = g\Delta$, $FG-CH = h\Delta$, जहाँ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

(4) और (12) के बीच इस संबंध के कारण हम उन्हें **व्युत्क्रम शंकु** (reciprocal cones) कहते हैं।

वास्तव में, निम्नलिखित उदाहरण यह दिखाता है कि यह नाम क्यों उपयुक्त है।

उदाहरण 4: दिखाइए कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ और $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$ व्युत्क्रम हैं। (यहाँ $abc \neq 0$.)

हल: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ का व्युत्क्रम शंकु सारणिक समीकरण

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & x \\ 0 & b & 0 & y \\ 0 & 0 & c & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

$$\Leftrightarrow a \begin{vmatrix} b & 0 & y \\ 0 & c & z \\ y & z & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow x^2bc + y^2ac + z^2ab = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$, पूरे समीकरण को abc से भाग करने पर।

यही वांछनीय समीकरण है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्न कर सकते हैं। इससे आपको व्युत्क्रम शंकु को बेहतर समझने में सहायता मिलेगी।

E 14) वह शंकु मालूम कीजिए जिस पर मूल बिंदु से शंकु $19x^2 + 11y^2 + 3z^2 + 6yz - 10zx - 26xy = 0$ के स्पर्श तलों पर डाले गए लंब स्थित हैं।

E 15) सिद्ध कीजिए कि शंकु (4) के तीन परस्पर लंब स्पर्श तल होंगे यदि और केवल यदि

$bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2$

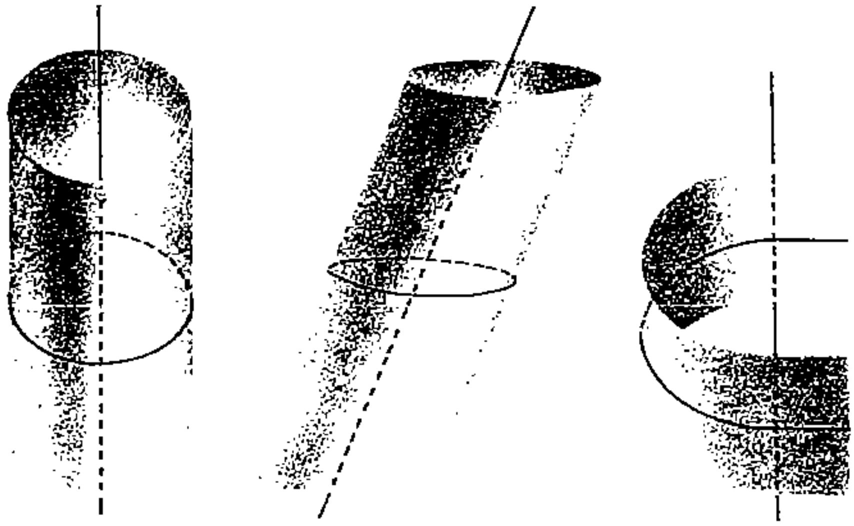
और अब हम रेखाओं द्वारा जनित एक दूसरे पृष्ठ पर ग़ौर करेंगे।

6.4 बेलन

आपके सामने उस पृष्ठ के अनेकों उदाहरण आए होंगे जिसकी हम इस भाग में चर्चा करने जा रहे हैं। उदाहरण के लिए, नाले का पाइप बेलन के आकार का होता है, और पेंसिल भी। लेकिन हमारे लिए पेंसिल बेलन नहीं होगी, केवल उसका पृष्ठ, निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार।

परिभाषा: **बेलन** (cylinder) उन सब रेखाओं का समुच्चय है जो एक दिए गए वक्र को प्रतिच्छेदित करती हैं और जो एक नियत रेखा के समांतर हैं (जो वक्र के तल में स्थित नहीं है)। नियत रेखा बेलन का **अक्ष** कहलाती है और वक्र बेलन का **आधार वक्र** (या **नियता**) कहलाता है।

चित्र 7 में दिए गए सभी आकृतियाँ बेलनों के भागों को निरूपित करती हैं।



(क) (ख) (ग)

चित्र 7: क) एक वृत्तीय बेलन, ख) एक दीर्घवृत्तीय बेलन, ग) एक परवलयिक बेलन।

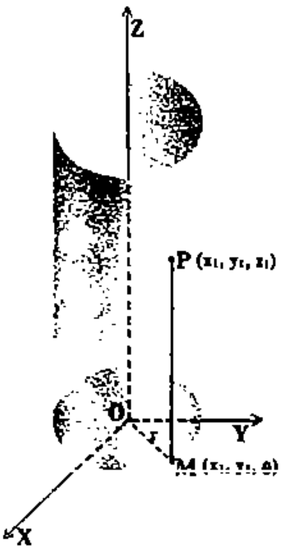
चित्र 7 (ख) में बेलन का आधार वक्र एक दीर्घवृत्त है, जबकि चित्र 7 (ग) में यह एक परवलय है। चित्र 7 (क) एक लंब वृत्तीय बेलन का उदाहरण है, निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार।

परिभाषा: एक बेलन, जिसका आधार वक्र एक वृत्त है और जिसका अक्ष आधार वक्र के केन्द्र से गुज़रता है और आधार वक्र के तल पर लंब है, एक **लंब वृत्तीय बेलन** (right circular cylinder) कहलाता है।

आप देख सकते हैं कि आम बोलचाल में जब लोग बेलन की बात करते हैं तो उनका मतलब एक लंब वृत्तीय बेलन के भाग से होता है।

अब से, इस भाग में, बेलन से हमारा मतलब एक लंब वृत्तीय बेलन से होगा।

आइए अब हम बेलन का समीकरण मालूम करें। हम पहले यह मानेंगे कि इसका अक्ष z-अक्ष है और इसका आधार वक्र वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ है (चित्र 8 देखें)।



चित्र 8: बेलन $x^2 + y^2 = r^2$

मान लीजिए $P(x_1, y_1, z_1)$ बेलन पर कोई बिंदु है। मान लीजिए P से होकर जाने वाला जनक आधार वक्र के तल (अर्थात् XY-समतल) को M में प्रतिच्छेदित करता है। तब P की अक्ष से लांबिक दूरी $OM = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ है।

लेकिन यह r भी है। अतः

$r^2 = x_1^2 + y_1^2$

यह समीकरण बेलन पर प्रत्येक बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ के लिए सत्य है।

अतः बेलन का समीकरण

$x^2 + y^2 = r^2$ है। ... (13)

आप सोच रहे होंगे कि समीकरण में z क्यों नहीं है। ऐसा इसलिए है क्योंकि आप z का कोई भी मान लें तो बेलन का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ ही रहता है। इसका ज्यामितीय अर्थ क्या है? इसका मतलब है कि XY-तल के समांतर आप कोई भी तल लें, मान लीजिए $z = t$, और इसका बेलन से प्रतिच्छेद लें, तो आपको हमेशा वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ मिलेगा।

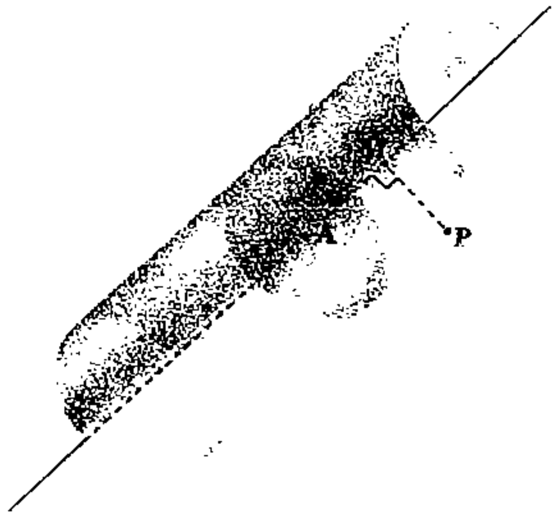
अतः एक प्रकार से, यह बेलन अनंततः अनेक वृत्तों से बना है, जो एक दूसरे के ऊपर रखे गए हैं।

नोट कीजिए कि समतल $z = t$ बेलन $x^2 + y^2 = r^2$ के अक्ष पर लंब है। यह भी नोट कीजिए कि **बेलन पर किसी बिंदु से उसके अक्ष पर लंब की लंबाई उसकी त्रिज्या के बराबर है।**

बेलन की त्रिज्या उसके आधार वक्र की त्रिज्या होती है।

इस तथ्य का प्रयोग करके, आइए हम उस बेलन का समीकरण मालूम करें जिसकी त्रिज्या r है और जिसका अक्ष

$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ है (चित्र 9 देखें)।



चित्र 9: अक्ष AM वाला एक लंब वृत्तीय बेलन

मान लीजिए $P(x_1, y_1, z_1)$ बेलन पर एक बिंदु है। मान लीजिए A एक बिंदु (a, b, c) है जो अक्ष पर स्थित है, और M, P से अक्ष पर डाले गए लंब का पाद है। तब $PM = r$.

और, $AM = AP\cos\theta$, जहाँ θ रेखाएं AM और AP के बीच का कोण है।

$$\therefore AM = \frac{(x_1-a)\alpha + (y_1-b)\beta + (z_1-c)\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$, इकाई 4 के समीकरण (9) के प्रयोग से।

चूँकि AMP एक समकोण त्रिभुज है, हम पाते हैं कि

$AP^2 = AM^2 + MP^2$. अतः

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \frac{\{(x_1-a)\alpha + (y_1-b)\beta + (z_1-c)\gamma\}^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} + r^2$$

यह समीकरण बेलन पर किसी भी बिंदु (x_1, y_1, z_1) के लिए सही है।

अतः लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण, जिसकी त्रिज्या r और अक्ष

$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ है,

$$\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2\}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
$$= \{(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma\}^2 \text{ है।} \quad ... (14)$$

आइए, अब एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 5: उस बेलन का समीकरण मालूम कीजिए जिसका आधार $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x-y+z = 3$ है।

हल: गोले का केन्द्र (0, 0, 0) है और त्रिज्या 3 है। (0, 0, 0) और समतल $x-y+z = 3$ के बीच की दूरी $\sqrt{3}$ है। इसलिए, आधार वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ है (चित्र 10 देखें)।

चित्र 10

बेलन का अक्ष समतल $x-y+z = 3$ पर लंब है और (0, 0, 0) से गुज़रता है। इसलिए इसके समीकरण $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ हैं।

अतः (14) के प्रयोग से, हम वांछनीय समीकरण पाते हैं, जो कि

$3(x^2 + y^2 + z^2 - 6) = (x - y + z)^2$ है।

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx - 9 = 0$

अब आप एक प्रश्न कीजिए।

E 16) उस बेलन का समीकरण मालूम कीजिए

(क) जिसका अक्ष $x = 2y = -z$ है और त्रिज्या 4 है।

(ख) जिसका अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ है और त्रिज्या 2 है।

यहाँ पर हम बेलनों पर अपनी चर्चा समाप्त करते हैं। अब आइए हम संक्षेप में देखें कि इस इकाई में हमने क्या अध्ययन किया है।

6.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित विषयों पर चर्चा की।

1) शंकु एक ऐसी रेखा से जनित पृष्ठ है जो एक नियत बिंदु (इसका शीर्ष) से होकर गुज़रती है और एक दिए गए वक्र (इसका आधार वक्र) को प्रतिच्छेदित करती है, जहां शीर्ष आधार वक्र के समतल में स्थित नहीं है।

2) एक शंकु जिसका आधार एक वृत्त है और जिसके लिए इसके शीर्ष को आधार वक्र के केन्द्र से मिलने वाली रेखा आधार वक्र के तल पर लंब है, एक लंब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

3) शंकु का समतल परिच्छेद एक शांकव होता है।

4) वह लंब वृत्तीय शंकु, जिसका अर्ध-शीर्ष कोण θ है, उसका समीकरण $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$ होता है।

5) x, y, z में एक द्विघाती समीकरण एक मूल बिंदु पर शीर्ष वाले शंकु को निरूपित करता है यदि और केवल यदि यह समघाती है।

6) शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के तीन परस्पर लंब जनक होते हैं यदि और केवल यदि $a + b + c = 0$.

7) किसी शंकु के शीर्ष से होकर जाने वाला कोई समतल शंकु को दो अलग-अलग रेखाओं में या दो संपाती रेखाओं में प्रतिच्छेदित करता है।

$ux + vy + wz = 0$ और $C(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के प्रतिच्छेद से मिलने वाली रेखाओं के बीच का कोण

$$\tan^{-1}\left|\frac{2P\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-C(u,v,w)}\right|$$

है, जहां

$$P^2 = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

अतः समतल शंकु का स्पर्श तल होगा, यदि और केवल यदि $P^2 = 0$.

8) शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ का बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर स्पर्श तल का समीकरण $(ax_1 + hy_1 + gz_1)x + (hx_1 + by_1 + fz_1)y + (gx_1 + fy_1 + hz_1)z = 0$ होता है।

इसमें रेखा OP अंतर्विष्ट है, जहाँ O शंकु का शीर्ष है।

9) दिए गए शंकु के शीर्ष पर स्पर्श तलों के अभिलंबों से बना शंकु दिए गए शंकु का व्युत्क्रम होता है। शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ का व्युत्क्रम शंकु

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$ से दिया जाता है।

10) बेलन एक ऐसी रेखा से जनित पृष्ठ है जो एक नियत रेखा (उसका अक्ष) के समांतर है और जो एक दिए गए वक्र (उसके आधार वक्र) को काटती है। (रेखा और वक्र एक समतल में नहीं होने चाहिए।)

11) एक लंब वृत्तीय बेलन वह बेलन है जिसका आधार वक्र एक वृत्त है और अक्ष के केन्द्र से होकर जाने वाली वृत्त समतल पर लंब रेखा है।

12) एक लंब वृत्तीय बेलन, जिसका आधार वक्र त्रिज्या r और केन्द्र (0, 0, 0) वाले समतल $z=0$ में स्थित वृत्त है, उसका समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ है।

13) त्रिज्या r और अक्ष $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$ वाले लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण

$\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2\}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

$= \{(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma\}^2$

होता है।

और अब आप **भाग 6.1 में दिए गए उद्देश्यों** को दोबारा पढ़ लीजिए, यह जांचने के लिए कि आपने उन्हें प्राप्त कर लिया है या नहीं। अगले भाग में हमने इकाई में दिए गए प्रश्नों के अपने हल दिए हैं। आप उन्हें भी देख लीजिए।

6.6 हल/उत्तर

E 1) मान लीजिए P (x, y, z) शंकु पर कोई बिंदु है। चूँकि V (a, b, c) इसका शीर्ष है, PV के दिक्-अनुपात $x-a$, $y-b$, $z-c$ होंगे। और, शंकु की अक्ष के दिक्-अनुपात α, β, γ हैं।

$$\therefore \cos\theta = \frac{\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

इस प्रकार, हमें (2) प्राप्त होता है।

2) हाँ। बस $\alpha = 0 = \beta$, $\gamma = 1$, a = b = c = 0, (2) में रखने पर प्राप्त होगा।

E 3) अक्ष के दिक्-अनुपात 1, 0, 0 हैं और शीर्ष (0, 0, 0) है। यदि (x, y, z) शंकु पर कोई बिंदु हो, तो

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{x.1 + y.0 + z.0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, जो वांछित समीकरण है।

E 4) क) $y^2 = 4ax\left(\frac{z}{3}\right)$ $\quad 3y^2 - 4azx = 0$

ख) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 0$

E 5) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = (x + y + z)^2$

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0.$

E 6) मान लीजिए $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = r$. तब (4) में $x = r\alpha$, $y = r\beta$, $z = r\gamma$ रखने पर पूरे समीकरण को r^2 से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0$

$\therefore (\alpha, \beta, \gamma)$, (4) पर स्थित है।

E 7) केवल $3(x^2 + y^2 + z^2) = xy$

E 8) समीकरण में d का मान रखने पर, हम इसे

$$a\left(x + \frac{u}{a}\right)^2 + b\left(y + \frac{v}{b}\right)^2 + c\left(z + \frac{w}{c}\right)^2 = 0$$

लिख सकते हैं, जो $x + \frac{u}{a}$, $y + \frac{v}{b}$, $z + \frac{w}{c}$ में घात 2 का एक समघात समीकरण है।

अतः यह शीर्ष $\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{b}, -\frac{w}{c}\right)$ वाला एक शंकु है।

E 9) वांछनीय कोण

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{2P\sqrt{3^2+1^2+5^2}}{0-6(1)(5)+2(5)(3)-5(3)(1)}\right| \text{ है,}$$

$$\text{जहाँ } P^2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -1 & 3 \\ \frac{5}{2} & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{225}{4} \text{ है।}$$

$\therefore P = \frac{15}{2}$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}\sqrt{35}$

E 10) इस स्थिति में (8) हमें बताता है कि रेखाएं लंब होंगी यदि और केवल यदि

$bc + ca + ab = 0.$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

E 11) मान लीजिए इसका अर्ध-शीर्ष कोण θ है। तो शंकु का समीकरण (1) होगा, अर्थात्

$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$

चूँकि इसके तीन परस्पर लंब जनक हैं, प्रमेय 4 हमें बताता है कि

$1 + 1 - \tan^2\theta = 0 \qquad \theta = \tan^{-1}\sqrt{2}.$

E 12) वांछनीय समीकरण

$x\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - 4(1)\right\} + y\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{5}{2}(1)\right\} + z\left\{(-4)\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = 0$

$\Leftrightarrow\ -245x + 128y + 3z = 0$

E 13) स्पर्श तल शंकु को एक जनक के अनुदिश स्पर्श करेगा। अतः समतल और शंकु की दो प्रतिच्छेद रेखाएं संपाती होनी चाहिए। अतः इन रेखाओं के बीच का कोण 0 होना चाहिए।

अतः प्रमेय 5 से हम देखते हैं कि

$ux + vy + wz = 0$ शंकु $C(x, y, z) = 0$ का स्पर्श तल है।

$\Leftrightarrow\ P = 0$ (चूंकि $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E 14) वांछनीय शंकु दिए गए शंकु का व्युत्क्रम है। अतः इसका समीकरण

$$\begin{vmatrix} 19 & -13 & -5 & x \\ -13 & 11 & 3 & y \\ -5 & 3 & 3 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ है।}$$

$\Leftrightarrow\ 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2yz + 4zx + 6xy = 0.$

E 15) शंकु के तीन परस्पर लंब स्पर्श तल होंगे यदि और केवल यदि व्युत्क्रम शंकु के तीन परस्पर लंब जनक हों। प्रमेय 4 और इसके विलोम का प्रयोग करके हम देखते हैं कि ऐसा होता है यदि और केवल यदि (12) में $A + B + C = 0$, अर्थात् यदि और केवल यदि

$(bc-f^2) + (ca-g^2) + (ab-h^2) = 0$, अर्थात् यदि और केवल यदि

$bc + ca + ab = f^2 + g^2 + h^2.$

E 16) क) समीकरण

$(x^2 + y^2 + z^2-16)\left(1 + \frac{1}{4} + 1\right) = \left(x + \frac{y}{2} - z\right)^2$

$\Leftrightarrow\ 5x^2 + 8y^2 + 5z^2-4xy + 4yz + 8xy-144 = 0$

ख) वांछित समीकरण

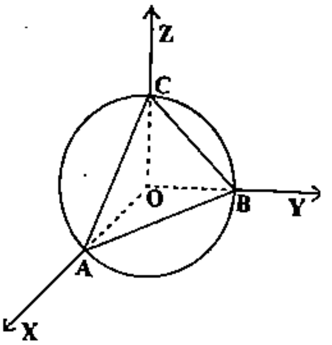
$14\{(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2-4\} = \{2(x-1) + 3y + (z-3)\}^2$ है

$\Leftrightarrow\ 10x^2 + 5y^2 + 13z^2-12xy-6yz-4xz-8x+30y-74z+59 = 0.$

विविध प्रश्नावली

(इस भाग को करना ऐच्छिक है।)

इस भाग में हमने इस खंड की पाठ्य सामग्री से संबद्ध कुछ प्रश्न एकत्रित किए हैं। इस सामग्री को और अच्छी तरह समझने के लिए आप इन्हें कर सकते हैं। प्रश्नों के हमारे हल प्रश्नों के बाद में दिए गए हैं, ताकि आप अपने उत्तरों की जांच कर सकें।



चित्र 1

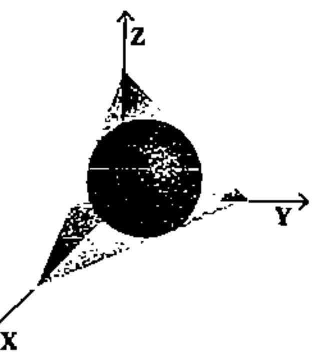
1. रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ से होकर जाने वाले उन समतलों के समीकरण मालूम कीजिए जो निर्देशांक अक्षों के समांतर हैं।

2. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ और बिंदु (0, 7, −7) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण मालूम कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि क्या $x = \frac{2-y}{3} = \frac{z+2}{2}$ इस समतल में स्थित है।

3. समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ अक्षों को बिंदुओं A, B और C पर काटता है। त्रिभुज ABC के परिवृत्त का समीकरण मालूम कीजिए (चित्र 1 देखें)।

4. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी द्विघाती समीकरण द्वारा निरूपित पृष्ठ का प्रत्येक समतल परिच्छेद एक वृत्त हो, तो पृष्ठ एक गोला होगा।

5. उन बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण मालूम कीजिए जिनकी मूल बिंदु से दूरी बिंदु (−1, 1, 1) से दूरी की दुगनी है।



चित्र 2

6. यदि गोला $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$ को वृहत् वृत्त में काटता हो, तो दिखाइए कि

   $2(uu' + vv' + ww') - (d + d') = 2r'^2$,

   जहाँ r' दूसरे गोले की त्रिज्या है।

7. उस चतुष्फलक के अंतर्गोले का समीकरण मालूम कीजिए जिसके तल $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ और $x + y + z = 1$ हैं (चित्र 2 देखें)।

8. दिखाइए कि किसी दिए गए गोले द्वारा एक नियत बिंदु से जाने वाली तीन परस्पर लंब रेखाओं पर बनाए गए अंतःखंडों के वर्गों का योग एक स्थिरांक होता है।

   (संकेत: स्थिर बिंदु को मूल बिंदु मान लीजिए।)

9. उन रेखाओं के समीकरण मालूम कीजिए जिनमें $2x + y - z = 0$ शंकु $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ को काटता है।

10. यदि $x = \frac{y}{2} = z$ शंकु $11yz + 6zx - 14xy = 0$ के तीन परस्पर लंब जनकों के समुच्चय में एक को निरूपित करता है, तो अन्य दो के समीकरण मालूम कीजिए।

    (संकेत: दी गई रेखा से होकर जाने वाला कोई समतल लीजिए और इस समतल और शंकु की प्रतिच्छेद रेखाओं के परस्पर लंब होने का प्रतिबंध लागू कीजिए।)

चित्र 3: गोले को अन्वालोप करता हुआ बेलन

11. उस लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण मालूम कीजिए जिसका शीर्ष (1, 1, 3) है, अक्ष रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ के समांतर है और एक जनक के दिक्-अनुपात 2, 1, −1 हैं।

12. उस शंकु का समीकरण मालूम कीजिए जो शंकुओं $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$ और $5xy - yz + 5xz = 0$ के उभयनिष्ठ जनकों और दिक्-अनुपातों 2, 1, −1 वाली रेखा से होकर जाता है।

    (संकेत: शंकुओं $C_1 = 0$ और $C_2 = 0$ के उभयनिष्ठ जनकों से होकर जाने वाले शंकु का समीकरण $C_1 + kC_2 = 0$ होता है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$.)

13. उस लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण मालूम कीजिए जो उन रेखाओं से जनित होता है जो $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ के समांतर हैं और गोले $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ की स्पर्श रेखाएं हैं (चित्र 3 देखें)।

    (**नोट:** ऐसा बेलन गोले को **अन्वालोपी बेलन** (enveloping cylinder) कहलाता है।)

14. त्रिज्या 3 वाले एक बेलन के अक्ष के समीकरण $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ हैं। बेलन का समीकरण मालूम कीजिए।
15. सिद्ध कीजिए कि किसी बेलन के किसी बिंदु पर स्पर्श तल उसके अक्ष के समांतर होता है (चित्र 4 देखें)।

चित्र 4: समतल बेलन पर स्पर्शी है।

हल

1. दी गई रेखा से होकर जाने वाले किसी समतल का समीकरण
$a(x-2) + b(y-3) + c(z-4) = 0$ होता है, जहाँ $2a + 4b + 5c = 0$ है।
यदि यह x-अक्ष के समांतर है तो

$a(1) + b(0) + c(0) = 0$ होना चाहिए,

$\Rightarrow a = 0.$

अतः ऐसे समतल का समीकरण

$5y-4z+1 = 0$ होगा।
इसी प्रकार आप जाँच कर सकते हैं कि y और z अक्षों के समांतर समतल क्रमशः
$5x-2z-2 = 0$ और $2x-y-1 = 0$ हैं।

2. समतल

$$a(x+1) + b(y-3) + c(z+2) = 0, \quad \ldots (1)$$

होगा, जहाँ $-3a + 2b + c = 0.$ ... (2)

चूँकि $(0, 7, -7)$ इस पर स्थित है, हम पाते हैं कि

$$a + 4b - 5c = 0 \quad \ldots (3)$$

(2) और (3) में से a, b और c का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{a}{-10-4} = \frac{b}{1-15} = \frac{c}{-12-2} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$$

$\therefore$ (1), $1(x+1) + 1(y-3) + 1(z+2) = 0$ बन जाता है।

$\Rightarrow x + y + z = 0.$

रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{2}$ इस समतल पर स्थित होगी, यदि यह समतल के समांतर है और इस पर स्थित कोई बिंदु समतल पर है।

चूँकि $1(1) + (-3)(1) + 2(1) = 0$, रेखा समतल के समांतर है और, $(0, 2, -2)$ एक उभयनिष्ठ बिंदु है। अतः रेखा समतल में स्थित है।

3. परिवृत्त, दिए गए समतल का बिंदुओं A, B और C से होकर जाने वाले किसी गोले के साथ प्रतिच्छेद होगा। इसलिए आइए हम O, A, B और C से होकर जाने वाला गोला लें। इन बिंदुओं के निर्देशांक (0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) और (0, 0, c) हैं। आप जाँच कर सकते हैं कि समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ है।

अतः परिवृत्त को निरूपित करने वाले समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ हैं।

4. मान लीजिए कि पृष्ठ का समीकरण

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gzx + 2fyz + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

यह $z = 0$ को शांकव

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2ux + 2vy + d = 0$

में प्रतिच्छेद करता है।

यह एक वृत्त होगा यदि और केवल यदि $a = b$ और $h = 0$.

इसी प्रकार, $x = 0$ और $y = 0$ के साथ प्रतिच्छेद लेने पर हम पाएंगे कि

$a = b = c$ और $f = 0 = g = h$.

अत: पृष्ठ का समीकरण

$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है, जो एक गोले को निरूपित करता है।

5. मान लीजिए (x, y, z) समुच्चय में कोई बिंदु है। तब,

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 8x - 8y - 8z + 12 = 0$,

जो एक गोले को निरूपित करता है।

6. यदि दो गोले $S = 0$ और $S_1 = 0$ हैं, तो $(-u', -v', -w')$, $S - S_1 = 0$ पर स्थित होगा, अर्थात्

$2(u-u')x + 2(v-v')y + 2(w-w')z + d - d' = 0$ पर।

$\therefore 2(u-u')u' + 2(v-v')v' + 2(w-w')w' = d - d'$

$\Rightarrow 2(uu' + vv' + ww') - d + d' = 2(u'^2 + v'^2 + w'^2)$

$= 2r'^2 + 2d'$

$\Rightarrow 2(uu' + vv' + ww') - (d + d') = 2r'^2$

7. मान लीजिए समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ है।

चूँकि दिए गए समतल इसके स्पर्श तल हैं, $(-u, -v, -w)$ की इन समतलों से दूरी $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ होगी। इस प्रकार हम देखते हैं कि

$u = v = w = -r$ और $|-u-v-w-1| = \sqrt{3}\ r$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$r = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

अत: गोले का समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 2r(x + y + z) + 2r^2 = 0$ है,

जहाँ $r = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

8. मान लीजिए कि नियत बिंदु $(0, 0, 0)$ है और तीन रेखाएं निर्देशांक अक्ष हैं। तब, मान लीजिए कि गोला

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ द्वारा निरूपित होता है।

x-अक्ष, अर्थात् $y = 0 = z$, पर इसका अंत:खंड $(2\sqrt{u^2 - d})$ है।

इसी प्रकार दूसरे अंत:खंड $2\sqrt{v^2 - d}$ और $2\sqrt{w^2 - d}$ हैं। अब

$(2\sqrt{u^2-d})^2 + (2\sqrt{v^2-d})^2 + (2\sqrt{w^2-d})^2 = 4(u^2 + v^2 + w^2 - 12d)$, जो एक स्थिरांक है क्योंकि गोला दिया हुआ है।

9. मान लीजिए कि एक प्रतिच्छेदी रेखा $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ है। तब $2l + m - n = 0$ और $ul^2 - m^2 + 3n^2 = 0$. इन समीकरणों को हल करने पर हम पातें हैं कि $m = -2l$, $n = 0$ या $m = -4l$, $n = -2l$. अत: रेखाएं

$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2}$, $z = 0$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-2}$ हैं।

10. $2x - y + k(y - 2z) = 0$, $k \in \mathbf{R}$, दी गई रेखा से होकर जाने वाला समतल निरूपित करता है। यह दिए गए शंकु को लंब रेखाओं में काटेगा यदि

$11(k-1)(-2k) + 6(-2k)(2) - 14(2)(k-1) = 0$

$\Rightarrow \quad k = -2, \ \frac{7}{11}$.

अतः समतल $2x-3y+4z = 0$ और $11x-2y-7z = 0$ हैं।
अब, $2x-3x+4z = 0$ शंकु को दो लंब रेखाओं में प्रतिच्छेद करता है जिनमें से एक दी हुई रेखा है, जो समतल में स्थित है। इसलिए, दूसरी रेखा समतल पर बिंदु (0, 0, 0) पर अभिलंब होगी। यह $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$ है। अतः यह परस्पर लंब जनकों के समुच्चय की दूसरी वांछनीय रेखा होगी।

इसी प्रकार, तीसरा जनक बिंदु (0, 0, 0) पर $11x - 2y - 7z = 0$ का अभिलंब होगा, अर्थात्

$$\frac{x}{11} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-7}$$

11. यदि θ इसका अर्ध-शीर्ष कोण हो, तो

$$\cos\theta = \frac{2+2-2}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

और, अक्ष

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$ द्वारा दिया जाता है। अतः लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण

$\{(x-1)+2(y-1)+2(z-3)\}^2 = 9\{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2\}\ \frac{4}{54}$ है।

$\Leftrightarrow \quad x^2+10y^2+10z^2+12xy+24yz+12xz-50x-104y-96z+221 = 0.$

12. मान लीजिए शंकु

$(x^2+y^2+3z^2)+k\,(5xy-yz+5zx)=0$ है, जहाँ $k \in \mathbf{R}$. चूँकि दिक्-अनुपात 1, 0, 1 वाली रेखा इस पर स्थित है, (1, 0, −1) इस समीकरण को संतुष्ट करेगा। यह हमें $k = \frac{-4}{5}$ देता है। अतः वांछनीय शंकु

$5\,(x^2+2y^2+3z^2)-4(5xy-yz+5xz) = 0$ है।

13. मान लीजिए (α, β, γ) बेलन पर स्थित कोई बिंदु है। इससे होकर जाने वाला जनक
$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$ द्वारा दिया जाएगा।

यह रेखा गोले को $(ak+\alpha, bk+\beta, ck+\gamma)$ पर प्रतिच्छेदित करती है, जहाँ k,

$(ak+\alpha)^2+(bk+\beta)^2+(ck+\gamma)^2 = r^2$ द्वारा दिया जाता है।

k में यह द्विघाती समीकरण k के दो मान देता है जो प्रतिच्छेद बिंदुओं के संगत हैं। अतः, जनक गोले को स्पर्श करेगा यदि और केवल यदि, ये बिंदु संपाती हों, अर्थात् यदि और केवल यदि $(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2 = (a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)$

अतः (α, β, γ) का बिंदुपथ, जो अन्वालोपी बेलन का समीकरण है,

$(ax+by+cz)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2-r^2) = 0$ होगा।

14. $3x^2+3y^2+8xy+4yz+4xz+4x+2y+4z+8 = 0.$

15. हम बेलन का समीकरण

$x^2+y^2 = r^2$

मान सकते हैं।

इसका अक्ष z-अक्ष है, अर्थात्, $x = 0, y = 0$. शंकु की तरह, आप दिखा सकते हैं कि बिंदु (x_1, y_1, z_1) पर इसका स्पर्श तल

$xx_1 + yy_1 = r^2$ होता है।

यह z-अक्ष के समांतर है। इस प्रकार हमें वांछित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

शब्दावली

अंतःखंड	Intercept
अन्वालोपी बेलन	Enveloping cylinder
अद्वितीय	Unique
अर्ध-शीर्ष कोण	Semi-vertical angle
अनंत समुच्चय	Infinite set
असंगत	Inconsistent
असरेख	Non-collinear
अष्टांश	Octant
आधार वक्र	Base curve
एकैकी संगति	One-to-one correspondence
कुल	Family
गोला	Sphere
छेदक रेखा	Secant line
जनक	Generator
जनक कोण	Generating angle
दक्षिणावर्ती पेंच	Right-handed screw
द्विबिंदु रूप	Two-point form
दिक्-अनुपात	Direction ratio
दिक्कोज्या	Direction cosine
दिष्ट रेखा	Directed line
दीर्घवृत्तज	Ellipsoid
दीर्घवृत्तीय	Elliptic
दूरी सूत्र	Distance formula
निरपेक्ष मान	Absolute value
परवलयिक	Parabolic
परिवृत्त	Circumcircle
प्रतिच्छेद कोण	Angle of intersection
प्रतिस्थापन	Substitution
प्रसामान्य रूप	Normal form
प्राचल	Parameter
बेलन	Cylinder
मूल समतल	Radical plane
युगपत् रैखिक समीकरण	Simultaneous linear equations
यौगिक	Compound (chemical)
रेखज पृष्ठ	Ruled surface
रेखा खंड	Line segment
लंबकोणिक समांतर षट्फलक	Cuboid
लंबकोणीय	Orthogonal
लंब वृत्तीय शंकु/बेलन	Right circular cone/cylinder
व्यापकीकरण	Generalisation
व्यास	Diameter
व्युत्क्रम शंकु	Reciprocal cone
वृत्तीय शंकु	Circular cone
वृहत् वृत्त	Great circle
वास्तुविद	Architect
विहित रूप	Canonical form
शंकु	Cone
शांकव	Conic
समघात	Homogeneous
समतल	Plane
समतल परिच्छेद	Planar section

समतलीय	Coplanar
समत्रिभाजित करना	To trisect
समानुपाती	Proportional
समीकरण	Equation
स्पर्श तल	Tangent plane
स्पर्शता बिंदु	Point of tangency
स्वेच्छ अचर	Arbitrary constant
सारणिक	Determinant
त्रिक	Triple
त्रिबिंदु रूप	Three-point form
त्रिविम समष्टि (या 3-समष्टि)	Three-dimensional space

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-05
वैश्लेषिक ज्यामिति

खंड

3

शांकवज

खंड 3 शांकवज

पिछले खंड में हमने आपको ठोस ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से परिचित कराया था। वहां आपने गोला, शंकु और बेलन जैसे कुछ सामान्य पृष्ठों के ज्यामितीय गुणों का भी अध्ययन किया था। इस खंड में आप देखेंगे कि ये पृष्ठ शांकवजों (conicoids) की विशेष स्थितियां हैं। शांकवज वे पृष्ठ होते हैं जो तीन चरों वाले व्यापक द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं। इनका अध्ययन करने के दौरान आप देखेंगे कि ये पृष्ठ शंकु-परिच्छेदों के अनुरूप होते हैं।

शांकवजों से संबंधित कुछ अन्वेषी लेख अठारहवीं शताब्दी के मध्य में प्रकाशित हुए थे। इस विषय पर पहली पुस्तक अलेक्सिस क्लेरॉ (1713–1765) की थी। पर, इस विषय का अधिक विस्तार और व्यवस्थित रूप में अध्ययन एल. ऑयलर की पुस्तक (Introductio) के दूसरे खंड में किया गया है।

इस खंड की पहली इकाई शांकवजों के व्यापक सिद्धांत पर है। इस इकाई में पहले हम शांकवजों को परिभाषित करेंगे और तब इन्हें दो वर्गों — केन्द्रीय शांकवज और अकेन्द्रीय शांकवज में वर्गीकृत करेंगे। इसके बाद हम आपको त्रिविम निर्देशांक-तंत्र के दो रूपांतरणों — अक्षों के स्थानांतरण और अक्षों के घूर्णन से परिचित कराएंगे। इन रूपांतरणों का प्रयोग व्यापक द्विघात समीकरण को "मानक रूप" में समानित करने के लिए किया जाता है।

इकाई 8 में हम केन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा करेंगे। वहां आप देखेंगे कि ऐसे शांकवज पांच प्रकार के होते हैं — शंकु, अधिकल्पित दीर्घवृत्तज, दीर्घवृत्तज, एकपृष्ठी अतिपरवलयज और द्विपृष्ठी अतिपरवलयज। क्योंकि खंड में आप शंकु के ज्यामितीय गुणों के बारे में पढ़ चुके हैं। इसलिए इस इकाई में हम ऊपर बताए गए केवल अंतिम तीन केन्द्रीय शांकवजो के ज्यामितीय गुणों पर चर्चा करेंगे।

इस खंड (और इस पाठ्यक्रम) की अंतिम इकाई में हम अकेन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा करेंगे। मोटे तौर पर ये पृष्ठ दो प्रकार के होते हैं — बेलन और परवलयज। बेलन के बारे में खंड 2 में आप पढ़ चुके हैं। इसलिए यहां हम परवलयजों पर ही चर्चा करेंगे। यहां आप देखेंगे कि परवलयजों को हम दीर्घवृत्तीय परवलयजों और अतिपरवलयिक परवलयजों में वर्गीकृत कर सकते हैं। इकाई 8 की तरह, इस इकाई में भी हम इन पृष्ठों के कुछ ज्यामितीय गुणों पर गौर करेंगे।

इस खंड के अंत में हमने **विविध प्रश्नावली** दी है जिसमें पूरे खंड की विषयवस्तु से संबंधित प्रश्न हैं। इन प्रश्नों को हल करने से आप शांकवजों को और अच्छी तरह से समझ सकेंगे। इन्हें हल करने के बाद आप इस भाग के अंत में दिए गए हमारे हलों से अपने हल मिला सकते हैं।

इस खंड की इकाइयों को पढ़ते समय, बीच-बीच में आने वाले प्रश्नों को अवश्य हल करते जाइए। और, इकाई को पढ़ने के बाद आप इकाई के उद्देश्यों को दोबारा देख लीजिए। ऐसा करने से आप यह जान जाएंगे कि आप इकाई की विषयवस्तु को कितना समझ पाए हैं।

इस खंड को पढ़ लेने के बाद आप इस पाठ्यक्रम पर आधारित सत्रीय कार्य को हल कर लीजिए।

इकाई 7 शांकवजों का व्यापक सिद्धांत

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

खंड 1 में आप यह पढ़ चुके है कि दो चरों और y वाला व्यापक द्विघात समीकरण एक शांकव (conic) को निरूपित करता है। इसे देखते हुए हम पूछ सकते हैं कि तीन चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण क्या निरूपित करेगा। खंड 2 में आप तीन चरों वाले द्विघात समीकरणों के कुछ विशेष रूपों, जैसे गोला (sphere), शंकु (cone) और बेलन (cylinder) के समीकरणों के बारे में पढ़ चुके हैं। इस इकाई में हम तीन चरों वाले द्विघात समीकरण के अतिव्यापक रूप के बारे में अध्ययन करेंगे। इन समीकरणों से निरूपित पृष्ठों (surfaces) को द्विघाती (quadric) या शांकवज (conicoid) कहते हैं। इस पृष्ठ को शांकवज कहना उपयुक्त है, और जैसाकि आप इकाई 8 में देखेंगे, ये पृष्ठ किसी शांकवज का किसी रेखा के प्रति परिक्रमण करके प्राप्त किए जा सकते हैं। इस रेखा को हम अक्ष कहते हैं।

इस रूप में द्विघात पृष्ठों का अध्ययन करने वाले अग्रणी गणितज्ञों में एक फ्रांसिसी गणितज्ञ एलेक्स क्लेरॉ (1713-1765) थे। उन्होंने यह विचार प्रस्तुत किया था कि व्यापक रूप में किसी पृष्ठों को तीन चरों वाले समीकरण से निरूपित किया जा सकता है। उन्होंने अपने विचारों को अपनी पुस्तक "Recherche Sur Les Courbes a Double Courbure" में प्रस्तुत किया था, जिसमें उन्होंने गोला, बेलन, अतिपरवलयज (hyperboloid) और दीर्घवृत्तज (ellipsoid) जैसे अनेक शांकवजों के समीकरण दिए।

इस इकाई में सबसे पहले हम शांकवज को परिभाषित करेंगे। इसके बाद हम त्रिविम-तंत्र (three-dimensional system) में दृढ़ पिंड गति (rigid body motion) पर चर्चा करेंगे। यहां हम दो प्रकार के रूपांतरणों — अक्षों का स्थानांतरण और अक्षों का घूर्णन पर विचार करेंगे। यहां आप यह भी देख सकते हैं कि इन रूपांतरणों के अधीन शांकवज के आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं आता। अंत में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किस प्रकार शांकवज के समीकरण को अधिक सरल बनाया जा सकता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- व्यापक शांकवज को परिभाषित कर सकेंगे,
- दिए हुए निर्देशांक-तंत्र (co-ordinate system) को स्थानांतरित करके या घुमाके नए निर्देशांक प्राप्त कर सकेंगे,
- इस तथ्य को लागू कर सकेंगे कि अक्षों का स्थानांतरण और घूर्णन दृढ़ पिंड गति है,
- देख सकेंगे कि दिए हुए शांकवज का केन्द्र है या नहीं,
- इस तथ्य को सिद्ध तथा लागू कर सकेंगे कि यदि शांकवज का एक केन्द्र है तो शांकवज को मानक रूप में समानित किया जा सकता है।

7.2 शांकवज क्या होता है?

इस भाग में हम त्रिविम निर्देशांक-तंत्र में पृष्ठों को परिभाषित करेंगे, जो कि द्विविम निर्देशांक-तंत्र में शंकु परिच्छेदों की परिभाषा के अनुरूप हैं।

आइए, पहले हम एक परिभाषा दें।

परिभाषा : तीन चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण निम्न रूप का एक समीकरण होता है :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \ldots (1)$$

जहां a, b, c, d, f, g, h, u, v, w वास्तविक संख्याएं हैं और a, b, c, f, g, h में से कम से कम एक शून्येतर है।

यहां हम यह देखते हैं कि यदि हम (1) में $z = k$ (एक अचर), $x = k$ या $y = k$ लें, तो यह समीकरण दो चरों वाले एक व्यापक द्विघात समीकरण में समानित हो जाता है और इस तरह यह समीकरण एक शांकव को निरूपित करता है।

अब हम यह देखेंगे कि तीन चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण क्या निरूपित करता है। आइए (1) की कुछ विशेष स्थितियों पर विचार करें।

स्थिति 1 : मान लीजिए हम (1) में $a = b = c = 1$ और $f = g = h = 0$ लेते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \ldots (2)$$

क्या आप इस समीकरण से परिचित हैं? इकाई 6 में आपने यह देखा है कि यदि $u^2 + v^2 + w^2 - d > 0$, तो (2) एक गोले को निरूपित करता है जिसका केन्द्र $(-f, -g, -h)$ है और जिसकी त्रिज्या $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ है।

स्थिति 2 : मान लीजिए हम (2) में $u = v = w = d = 0$ लेते हैं। तब हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

क्या आप बता सकते हैं कि यह समीकरण क्या निरूपित करता है? इकाई 6 में आप पढ़ चुके हैं कि यह समीकरण शंकु को निरूपित करता है।

स्थिति 3 : यदि (1) में हम $a = b = 1$, $h = 0$ और $z = k$ लें, तो यह निम्न रूप का हो जाएगा

$$x^2 + y^2 + 2ux + 2vy + d = 0,\ z = k \quad \ldots (3)$$

यह समीकरण एक लंब वृत्तीय बेलन (इकाई 6 का भाग 6.4 देखिए) को निरूपित करता है। इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि हम $x = k$ या $y = k$ और $a = b = 1$, $h = 0$ लें तो (3) एक बेलन को निरूपित करता है।

हम (1) से प्राप्त पृष्ठों पर अगली इकाई में विस्तार से चर्चा करेंगे।

विशेष स्थितियां 1, 2, और 3 से पता चलता है कि जिन बिन्दुओं के निर्देशांक (1) को संतुष्ट करते हैं, वे त्रिविम निर्देशांक-तंत्र के किसी पृष्ठ पर स्थित होते हैं। ऐसे पृष्ठ को शांकवज या द्विघाती पृष्ठ कहा जाता है। हम बीजीय रूप में शांकवज की परिभाषा निम्न प्रकार से देते हैं :

परिभाषा : X Y Z –निर्देशांक-तंत्र में **शांकवज (या द्विघाती पृष्ठ)** उन बिन्दुओं $(x, y, z) \in R^3$ का समुच्चय S होता है जो किसी तीन चरों वाले व्यापक द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि द्विघात समीकरण

$$F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

हो, तो $S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$.

चूंकि ऊपर दिया गया व्यंजक काफी बड़ा है, इसलिए सुविधा के लिए हम इस शांकवज को प्रायः $F(x, y, z) = 0$ से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि S रिक्त समुच्चय हो सकता है। उदाहरण के लिए यदि $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, तब $S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} = \phi$, रिक्त समुच्चय है। ऐसी स्थितियों में हम शांकवज को **अधिकल्पित शांकवज** कहते हैं।

टिप्पणी : आगे से, जब भी हम व्यंजक $F(x, y, z) = 0$ का प्रयोग करेंगे, तो हमारा मतलब समीकरण (1) से होगा।

इस इकाई में आप देखेंगे कि हम सदा ही $F(x, y, z)$ को काफी छोटे द्विघाती बहुपद (quadratic polynomial) में समानीत कर सकते हैं। इसके लिए हमें अक्षों का उपयुक्त रूपांतरण करना होता है। आइए, देखें कि इसका

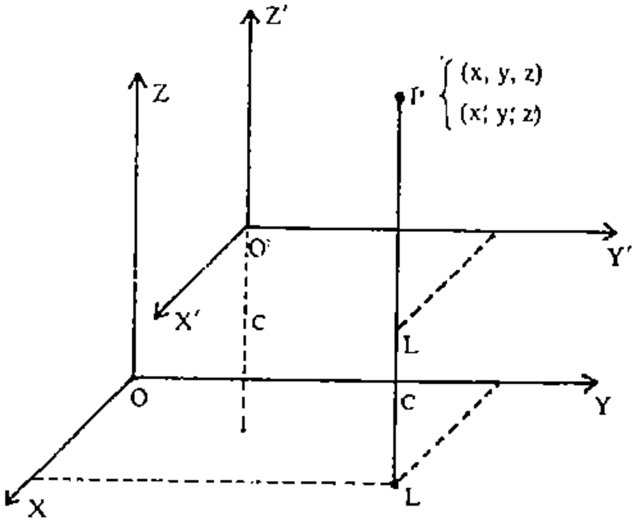
7.3 अक्षों का परिवर्तन

खंड 1 में आपने देखा है कि उपयुक्त अक्ष-परिवर्तन करके व्यापक द्विघात समीकरण को मानक रूप (standard form) में रूपांतरित किया जा सकता है। आपने यह भी देखा कि किसी शांकव के ज्यामितीय गुणों का अध्ययन करने में उसका मानक रूप काफ़ी उपयोगी सिद्ध होता है। यहां हम दर्शाएंगे कि त्रिविम निर्देशांक-तंत्र के संबंध में भी हम निर्देशांक अक्षों का उपयुक्त परिवर्तन करके समीकरण $F(x, y, z) = 0$ को संगत मानक रूप में रूपांतरित कर सकते हैं। द्विविम-तंत्र की तरह यहां भी हम दो प्रकार के रूपांतरणों को लागू करेंगे : मूल बिन्दु परिवर्तन और अक्षों का दिशा-परिवर्तन। आइए, हम नीचे के उपभागों में इन पर एक-एक करके विचार करें।

7.3.1 अक्षों का स्थानांतरण

यहां हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि यदि अक्षों की दिशा में परिवर्तन किए बिना मूल बिन्दु को किसी और बिन्दु पर स्थानांतरित करें, तो त्रिविम-तंत्र के बिन्दुओं के निर्देशांकों पर क्या प्रभाव पड़ता है। प्रक्रिया वही है जो कि हमने द्विविम-तंत्र की स्थिति में अपनाई थी।

मान लीजिए, OX, OY, OZ एक त्रिविम निर्देशांक-तंत्र के निर्देशांक अक्ष हैं। अब बताइए कि यदि मूल बिन्दु को O से हटकर एक अन्य बिन्दु O' पर ले जाएं (चित्र 1 देखिए) तो क्या होता?



चित्र 1 : O' से गुजरने वाले अक्षों में स्थानांतरण।

मान लीजिए XYZ-तंत्र में O' के निर्देशांक (a, b, c) हैं। और यह भी मान लीजिए कि O'X', O'Y' और O'Z' नए अक्ष हैं जो क्रमशः OX, OY और OZ के समांतर हैं। मान लीजिए P एक बिन्दु है जैसाकि चित्र 1 में दर्शाया गया है। मान लीजिए XYZ-तंत्र में P के निर्देशांक (x, y, z) है और X' Y' Z'-तंत्र में इस बिन्दु के निर्देशांक (x', y', z') हैं। पहले हम z और z' के बीच संबंध स्थापित करेंगे। इसके लिए हम P से हो के गुजरने वाली एक रेखा खींचते हैं जो समतल XY पर लंबवत है। मान लीजिए यह रेखा XY-समतल और X'Y'-समतल को क्रमशः L और L' पर काटती है। तब, PL = z और PL' = z'.

चित्र 1 से हम पाते हैं कि

PL = PL' + L'L

अब, क्योंकि L'L बिन्दु 'O' से XY-समतल पर डाले गए लंब की लंबाई है, इसलिए L'L = c.

अतः $z = z' + c$

इसी प्रकार हमें $x = x' + a$ और $y = y' + b$ प्राप्त होता है। अतः यदि हम अक्षों की दिशा बदले बिना मूल बिन्दु को O (0, 0, 0) से एक अन्य बिन्दु O' (a, b, c) पर स्थानांतरित करें, तो इस मूल बिन्दु O' के सापेक्ष किसी बिन्दु P(x, y, z) के नए निर्देशांक

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \text{ और } z' = z - c \qquad \dots (4)$$

उदाहरण के लिए, यदि हम मूल बिन्दु को (2, −1, 1) पर स्थानांतरित करें तो बिन्दु P (x, y, z) के नए निर्देशांक (x', y', z') क्या होंगे? ये होंगे

$x' = x-2$, $y' = y+1$ और $z' = z-1$

जब हम अक्षों का इस तरह से परिवर्तन करते हैं, तो हम कहते हैं कि हमने मूल बिन्दु को (2, −1, 1) पर स्थानांतरित कर दिया है।

अब बताइए कि x, y, z वाले समीकरण पर ऐसे रूपांतरण का क्या प्रभाव पड़ता है? यदि हम XYZ-तंत्र के समीकरण में x, y, z, के स्थान पर $x'+a$, $y'+b$, $z'+c$ प्रतिस्थापित करें, तो हमें नया समीकरण X' Y' Z'-तंत्र में प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए, जब हम मूल बिन्दु को (2, −1, 1) पर स्थानांतरित करते हैं तो समतल $3x + 2y - z = 5$ का समीकरण $3x' + 2y' - z' = 2$ हो जाता है

ध्यान दीजिए कि मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर x और x' के, y और y' के, और z और z' के गुणांकों में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस तरह हम पाते हैं कि मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर समतल के अभिलंब के दिक्-अनुपातों (direction ratios) में कोई अंतर नहीं आता। (आप इकाई 4 में दिक्-अनुपातों की परिभाषा से परिचित हो चुके हैं।) क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? ऐसा होने का स्पष्ट कारण यह है कि हम निर्देशांक-समतलों (co-ordinate planes) की दिशा को बदल नहीं रहे हैं, हम केवल मूल बिन्दु को विस्थापित कर रहे हैं।

आइए, अब हम व्यापक द्विघात समीकरण पर अक्षों के स्थानान्तरण के प्रभाव पर चर्चा करें।

प्रमेय 1 : मान लीजिए एक दिए हुए निर्देशांक-तंत्र X Y Z – के दिए हुए पृष्ठ S के निर्देशांक एक तीन चरों वाले द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं। और मान लीजिए कि मूल बिन्दु को O से एक अन्य बिन्दु O' पर स्थानांतरित कर देने से एक नया निर्देशांक-तंत्र X' Y' Z' प्राप्त होता है। तब इस निर्देशांक-तंत्र में भी पृष्ठ S तीन चरों वाले व्यापक द्विघात समीकरण से निरूपित होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए दिया हुआ पृष्ठ S, समीकरण

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

को संतुष्ट करता है।

सुविधा के लिए हम इस समीकरण को निम्न रूप में लिखते हैं।

$$F(x,y,z) = \sum ax^2 + \sum 2fyz + 2\sum ux + d = 0 \qquad \ldots (5)$$

मान लीजिए (p, q, r), XYZ-तंत्र में O' के निर्देशांक हैं। अब दिए हुए तंत्र के समांतर, मूल बिन्दु O' से होकर जाने वाला नए निर्देशांक-अक्ष O'X', O'Y', O'Z' लीजिए। आप जानते हैं कि मूल निर्देशांक-तंत्र और नए निर्देशांक-तंत्र के निर्देशांकों के बीच निम्नलिखित संबंध होता है

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + p \\ y &= y' + q \\ z &= z' + r \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (6)$$

x, y, z के इन व्यंजकों को (5) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\sum a(x' + p)^2 + \sum 2f(y' + q)(z' + r) + \sum 2u(x' + p) + d = 0$$

अब हम ऊपर दिए गए व्यंजक का विस्तार करते हैं और समान पदों (like terms) को एक साथ लेकर उसे सरल करते हैं। ऐसा करने पर हमें

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2fy'z' + 2gz'x' + 2hx'y' + 2u'x' + 2v'y' + 2w'z' + d' = 0 \qquad \ldots (7)$$

प्राप्त होता है। जहां

$$\left.\begin{aligned} u' &= (ap + hq + gr) + u \\ v' &= (hp + bq + fr) + v \\ w' &= (gp + fq + cr) + w \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (8)$$

और $d' = ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2fqr + 2grp + 2hpq + 2up + 2vq + 2wr + d$

मान लीजिए, G (x', y', z') (7) के वाम पक्ष में दिए गए व्यंजक को प्रकट करता है। तब हम पाते हैं कि S का कोई भी बिन्दु (x', y', z') समीकरण G (x', y', z') = 0 को संतुष्ट करता है, जो कि एक व्यापक द्विघात समीकरण है।

(5) के घात 2 वाले सभी पदों का जोड़ अर्थात् $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ को समीकरण का द्विघात वाला भाग कहा जाता है और पदों का जोड़ $2ux + 2vy + 2wz$ को समीकरण का एकघात वाला भाग कहा जाता है।

इस तरह, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

यदि आप (5) और (7) की तुलना करें, तो आप पाएंगे कि समीकरण का द्विघात वाला भाग अपरिवर्तित रहता है, जबकि एकघात वाले भाग में परिवर्तन होता है। इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि

निर्देशांक-तंत्र के मूल बिन्दु के विस्थापन करने पर प्राप्त रूपांतरण के अधीन व्यापक द्विघात समीकरण का द्विघात वाला भाग अपरिवर्तित रहता है।

E 1) क) यदि हम मूल बिन्दु को $(-1, 1, 0)$ पर विस्थापित करें, तो शीर्ष O, अक्ष OZ और अर्ध-शीर्षकोण α वाले लंब वृत्तीय शंकु का नया समीकरण क्या होगा?

ख) नया समीकरण किस पृष्ठ को निरूपित करता है? पृष्ठ का रेखाचित्र बनाइए।

E 2) मूल बिन्दु को $(1, -3, 2)$ पर विस्थापित करने से निम्नलिखित समीकरणों के रूपांतरित समीकरण प्राप्त कीजिए।

क) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$

ख) $x^2 - 2y^2 - 3z = 0$

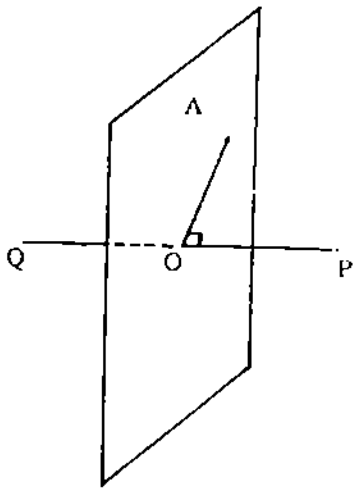
आइए, अब हम उस रूपांतरण पर विचार करें जिसमें अक्षों की दिशा में परिवर्तन हो। इस पर चर्चा करने से पहले हमारे लिए प्रक्षेप (projection) की संकल्पना को समझ लेना अति आवश्यक है। तो आइए देखें कि प्रक्षेप क्या होता है।

7.3.2 प्रक्षेप

इस भाग में हम ज्यामिति की एक महत्वपूर्ण संकल्पना के बारे में चर्चा करेंगे। अपनी कलाकृतियों को गहराई देने के लिए शताब्दियों से कलाकार भी इस संकल्पना का प्रयोग करते आए हैं। आइए, अब हम इसकी परिभाषा दें।

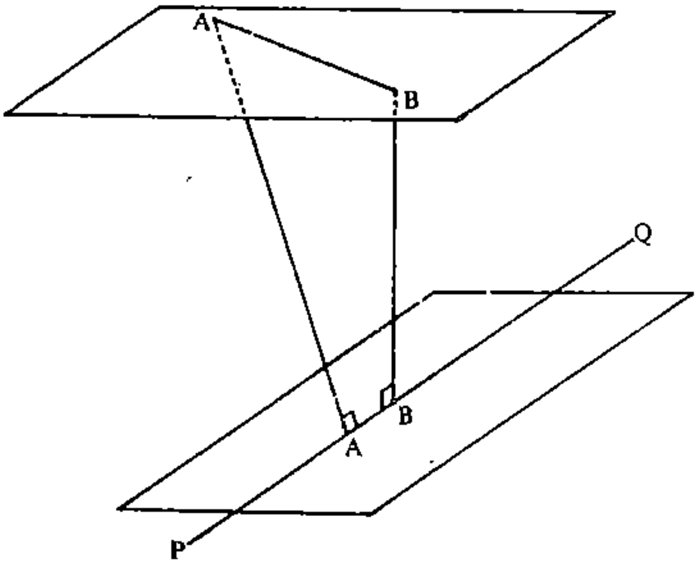
परिभाषा : मान लीजिए XYZ निर्देशांक-तंत्र में A एक बिन्दु है। रेखा-खंड PQ पर A का प्रक्षेप (projection) बिन्दु A से रेखा पर डाले गए लंब का पाद होता है।

चित्र 2 में आप देख सकते हैं कि PQ पर A का प्रक्षेप वह बिन्दु O होगा जहां A से होकर जाने वाला और PQ पर लंब समतल रेखा PQ से मिलता है।



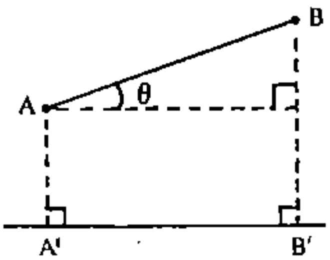
चित्र 2 : रेखा PQ पर बिन्दु A का प्रक्षेप O है।

परिभाषा : एक रेखा-खंड AB का किसी रेखा PQ पर प्रक्षेप, रेखा PQ का रेखा-खंड A'B' होता है, जहां A', B' रेखा PQ पर क्रमशः बिन्दुओं A और B के प्रक्षेप हैं (चित्र 3 देखिए)।



चित्र 3 : रेखा PQ पर रेखा-खंड AB का प्रक्षेप रेखा-खंड A'B' है।

टिप्पणी : चित्र 4 में से आप देख सकते हैं कि A'B' की लंबाई = |AB| cos θ जहां θ, AB और A'B' के बीच का कोण है। हम इस संख्या को भी PQ पर AB का प्रक्षेप कहते हैं।



चित्र 4

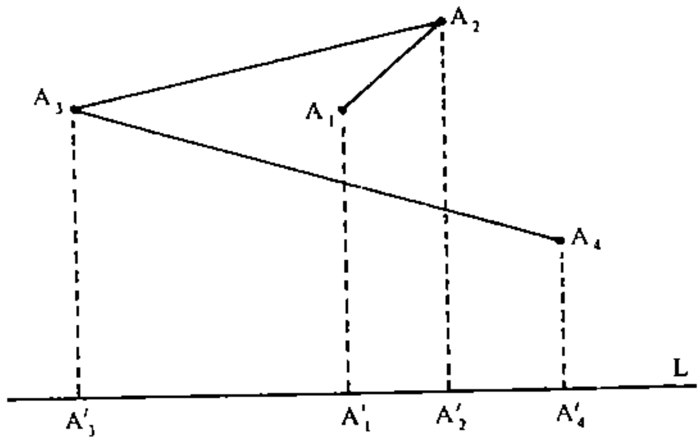
अब बताइए कि B A का प्रक्षेप क्या होगा? यह $|BA| \cos(\pi + \theta)$ होगा, अर्थात् $-AB \cos\theta$ इससे पता चलता है कि रेखा-खंड की दिशा के अनुसार प्रक्षेप धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। जब भी आप "प्रक्षेप" शब्द पढ़ेंगे, तो आपको संदर्भ से ही पता चल जाएगा कि हमारा मतलब रेखा-खंड से है या कि संख्या से।

अब हम एक सरल परिणाम का कथन देंगे जिसकी आवश्यकता हमें अक्षों के घूर्णन की चर्चा के दौरान पड़ेगी।

प्रमेय 2 : मान लीजिए $A_1, A_2, \ldots, A_n$ समष्टि में n बिन्दु हैं। तब किसी रेखा पर $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ के प्रक्षेपों का बीजीय योग उस रेखा पर $A_1 A_n$ के प्रक्षेप के बराबर होता है।

यहां पर हम इस परिणाम को व्यापक रूप में सिद्ध नहीं करेंगे। हम केवल एक विशेष स्थिति में इसकी उपपत्ति देंगे। वैसे, किसी भी स्थिति में उपपत्ति इसी प्रकार की होगी।

उपपत्ति : चित्र 5 वाली स्थिति लीजिए जिसमें 4 बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4 और दी हुई रेखा L पर इनके प्रक्षेप A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 हैं।



चित्र 5 : दी हुई रेखा L पर रेखा-खंडों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 के प्रक्षेप।

तब,

$$A'_1A'_2+A'_2A'_3+A'_3A'_4 = A'_1A'_2-(A'_3A'_1+A'_1A'_2)+(A'_3A'_1+A'_1A'_2+A'_2A'_4)$$
$$= A'_1A'_2 + A'_2A'_4 = A'_1A'_4$$

इससे पता चलता है कि रेखा-खंडों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 के प्रक्षेपों का जोड़ A_1A_4 के प्रक्षेप के बराबर है। इस तरह, हमने चित्र 5 वाली स्थिति का परिणाम सिद्ध कर दिया है।

अब प्रक्षेपों से संबंधित एक अन्य उपयोगी परिणाम लीजिए।

प्रमेय 3 : मान लीजिए P (x_1, y_1, z_1), और Q (x_2, y_2, z_2), XYZ निर्देशांक-तंत्र पर दो बिन्दु हैं। तब दिक्कोज्याओं l, m, n, वाली रेखा पर रेखा-खंड PQ का प्रक्षेप

$$(x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)\, m + (z_2 - z_1)\, n$$

होगा।

उपपत्ति : इकाई 4 के भाग 4.3.2 में आपने देखा है कि P और Q को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात (x_2-x_1), $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ हैं।

मान लीजिए P और Q के बीच की दूरी $|PQ|$ है, अर्थात्

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

तब रेखा PQ की दिक्कोजाएं

$$\frac{x_2 - x_1}{|PQ|}, \frac{y_2 - y_1}{|PQ|}, \frac{(z_2 - z_1)}{|PQ|}$$ होंगी।

मान लीजिए PQ और L के बीच का कोण θ है। तब रेखा L मिलानेवाली रेखा-खंड PQ का प्रक्षेप $PQ \cos\theta$ होगा।

लेकिन इकाई 4 के भाग 4.3.3. से हम जानते हैं कि

$$\cos\theta = \frac{x_2-x_1}{|PQ|}\, l + \frac{y_2-y_1}{|PQ|}\, m + \frac{z_2-z_1}{|PQ|}\, n$$

इसलिए, इच्छित प्रक्षेप $= (x_2 - x_1)\, l + (y_2 - y_1)\, m + (z_2 - z_1)\, n$.

उदाहरण के लिए एक प्रश्न के रूप में दिक्-अनुपातों 2, −3, 6 वाली रेखा पर बिन्दुओं O (0, 0, 0) और P (5, 2, 4) को मिलाने वाली रेखा-खंड का प्रेक्षप क्या होगा? हम जानते हैं कि दिक्-अनुपातों 2, −3, 6 वाली रेखा की दिक्कोजाएं

$$\frac{2}{7\times\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}}, \quad \frac{-3}{\sqrt{7\times(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}},$$
$$\frac{6}{7\times\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}}$$

अर्थात् $\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ है।

$\therefore$ OP का प्रेक्षप $= 5 \times \frac{2}{7} + 2 \times (-\frac{3}{7}) + 4 \times \frac{6}{7} = 4$

अब आप नीचे एक प्रश्न हल कीजिए।

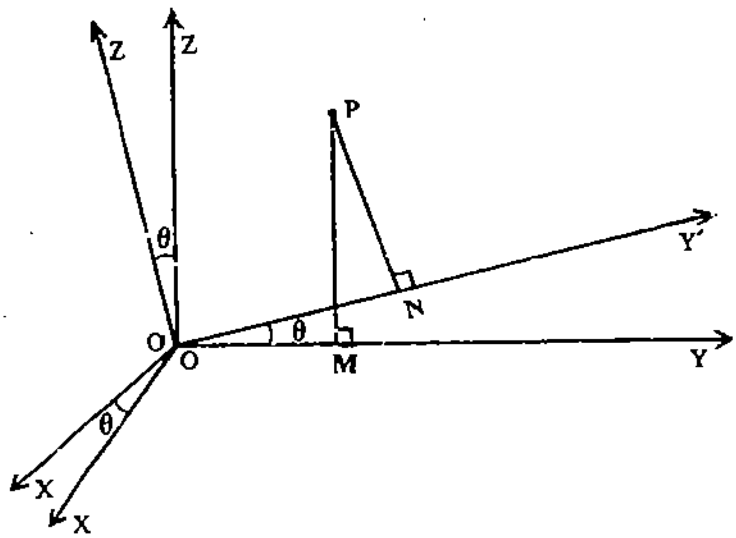
E 3) मान लीजिए P (6, 3, 2), Q (5, 1, 4), R (3, −4, 7) और S (0, 2, 5) त्रिविम समष्टि में चार बिन्दु हैं। RS पर रेखा-खंड PQ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

अब हम इस योग्य हो गए है कि हम मूल बिन्दु में परिवर्तन किए बिना अक्षों की दिशा के परिवर्तन का त्रिविम समष्टि में निर्देशांकों पर पड़ने वाले प्रभाव की चर्चा कर सकें।

7.3.3 अक्षों का घूर्णन

आइए, अब हम उस स्थिति में निर्देशांकों के रूपांतरणों पर विचार करें जबकि निर्देशांक-तंत्र को मूल बिन्दु के प्रति कोण θ से घुमाया गया हो। मान लीजिए मूल तंत्र X Y Z है और हम निर्देशांक-अक्षों को वामावर्त दिशा (anti-clockwise) में कोण θ से घुमाते हैं। मान लीजिए OX', OY', OZ' नए निर्देशांक अक्षों को प्रकट करते हैं (चित्र 6 देखिए)। मान लीजिए OX', OY' और OZ', की दिक्कोज्याएं क्रमशः

$l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ है।



चित्र 6 : अक्षों OX, OY और OZ को कोण θ से घुमाकर OX', OY' और OZ' प्राप्त किए गए हैं।

मान लीजिए P त्रिविम समष्टि में एक बिन्दु है जिसके पास निर्देशांक पुराने और नए निर्देशांक-तंत्रों के सापेक्ष क्रमशः (x, y, z) और (x', y', z') हैं। मान लीजिए PN, बिन्दु P से OY' पर डाला गया लंब है। तब
ON = y'.

रेखा-खंड ON भी दिक्कोज्याएं l_2, m_2, n_2 वाली रेखा OY पर OP का प्रक्षेप भी है। अतः प्रमेय 2 के अनुसार ON = $(x-0)\, l_2 + (y-0)\, m_2 + (z-0)\, n_2$

इस तरह हम पाते हैं कि

$$y' = xl_2 + ym_2 + zn_2 \quad \ldots(9)$$

इस प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि

$$x' = xl_1 + ym_1 + zn_1. \quad \ldots(10)$$

और

$$z' = xl_3 + ym_3 + zn_3 \quad \ldots(11)$$

अतः यदि (x, y, z) और नए अक्षों की दिक्कोज्याएं दी हुई हों, तो (9), (10), और (11) की सहायता से हम नए निर्देशांक (x', y', z') प्राप्त कर सकते हैं।

अब बताइए कि हम x', y', z' के पदों में x, y, z कैसे प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए हम OY पर लंब PM डालते हैं (चित्र 6 देखिए)। तब
OM = Y

OM, रेखा OY पर OP का प्रक्षेप भी है।

आइए, अब हम नए निर्देशांक अक्षों OX', OY', OZ' के सापेक्ष OY की दिक्कोज्याएँ मालूम करें। आप जानते हैं कि OY के सापेक्ष OX', OY', OZ' की दिक्कोज्याएं m_1, m_2 और m_3 हैं। क्या आप हमारे इस कथन से सहमत हैं कि OX', OY', OZ' के सापेक्ष OY की दिक्कोज्याएँ भी m_1, m_2, m_3 होती है? इसे आप सत्यापित कीजिए।

अतः प्रमेय 2 से हम पाते हैं कि

$$y = OM = (x' - 0)m_1 + (y' - 0)m_2 + (z' - 0)m_3$$

अर्थात् $y = m_1x' + m_2y' + m_3z'$ ... (12)

इसी प्रकार

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z'$$

और ... (13)

$$z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \qquad \text{... (14)}$$

इसी तरह, (12), (13) और (14) से x', y' और z' के पदों में हमें x, y, z के निर्देशांक प्राप्त हो जाते हैं।

शायद आप इन समीकरणों को आसानी से याद कर सकें, इसलिए इन्हें हम एक सारणी के रूप में लिख रहे हैं।

(सारणी 1 देखिए) जिससे कि इन्हें आसानी से याद किया जा सके।

सारणी 1 : निर्देशांकों का रूपांतरण

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

ध्यान दीजिए कि x, y, z ज्ञात करने के लिए हम सारणी में संबंधित स्तंभों (columns) के अवयवों का प्रयोग करते हैं, और x', y' और z' ज्ञात करने के लिए हम संबंधित पंक्तियों के अवयवों का प्रयोग करतें हैं।

आइए, हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण : शांकवज $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 1$ का नया समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि निर्देशांक तंत्र को वही मूल बिन्दु वाले और पुराने तंत्र के सापेक्ष −1, 0, 1; 1, −1, 1: 1, 2, 1 के दिक-अनुपात वाले निर्देशांक अक्षों के नए तंत्र में रूपांतरित किया जाता है।

हल : दिया हुआ पृष्ठ

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 1 \qquad \text{... (15)}$$

है।

मान लीजिए X' Y' Z' नया निर्देशांक-तंत्र है। तब मूल अक्षों के सापेक्ष OX', OY' और OZ' की दिक्कोज्याएँ

क्रमशः $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, $0, \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ होंगी।

हम निम्नलिखित रूपांतरण सारणी बनाते हैं :

	x	y	z
x'	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
z'	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

इस सारणी से हम पाते हैं कि

$$x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times x' + \frac{1}{\sqrt{3}} \times y' + \frac{1}{\sqrt{6}} \times z'$$

$$= -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}$$

और $y = 0 \times x' + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \times y' + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \times z'$

$$= -\frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}$$

और $z = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}$

नया समीकरण प्राप्त करने के लिए हम (15) में x, y, z के व्यंजक प्रतिस्थापित करते हैं। तब हमें

$$3\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)^2 + 5\left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)^2 + 2\left(-\frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}\right)$$
$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right) + 2$$
$$\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}}\right) = 1.$$

प्राप्त होता है।

ऊपर के व्यंजक के प्रत्येक पद को सरल करने और सदृश पदों के गुणांकों को एक साथ रखने पर हमें

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 1$$

प्राप्त होता है।
यह शांकवज का नया समीकरण है।

अब आप इसी प्रकार से नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E 4) निम्नलिखित शांकवजों के नए समीकरण प्राप्त कीजिए जबकि निर्देशांक-तंत्र को वही मूल बिन्दु वाले और पुराने तंत्र के सापेक्ष 1, 2, 3; 1, −2, 1; 4, 1, −2 के दिक्-अनुपात वाले नए तंत्र में परिवर्तित कर दिया जाए।

क) $x^2 - 5y^2 + z^2 = 1$
ख) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + x - y + z = 0$

E 5) उदाहरण 1 और E4 के शांकवजों के लिए मूल समीकरण और नए समीकरण के वर्ग पदों के गुणांकों का जोड़ मालूम कीजिए। क्या प्राप्त परिणाम से आप कोई निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

E 6) समतल $x+y+z = 0$ का नया समीकरण क्या होगा यदि निम्नलिखित समीकरणों से निर्देशांक-तंत्र XYZ को एक अन्य निर्देशांक-तंत्र X′ Y′ Z′ में रुपांतरित किया जाए?

$$x = \frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{z'}{\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{3}}$$

E 7) क्या अक्षों के वर्णन के अधीन शंकु शंकु ही बना रहता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

आइए, अब हम $F(x, y, z) = 0$ पर अक्षों के घूर्णन के प्रभाव पर विचार करें।

प्रमेय 4 : मान लीजिए S, निर्देशांक-तंत्र XYZ में द्विघात समीकरण को संतुष्ट करने वाला एक शांकवज है। यदि मूल बिन्दु में परिवर्तन किए बिना अक्ष की दिशा में परिवर्तन करके निर्देशांक-तंत्र को एक अलग निर्देशांक-तंत्र में परिवर्तित कर दिया जाए, तो S को एक द्विघात समीकरण से ही निरूपित किया जाएगा।

उपपत्ति : मान लीजिए XYZ-तंत्र में S को निम्नलिखित द्विघात समीकरण से निरूपित किया गया है :

$$\Sigma\, ax^2 + 2\,\Sigma\, fyz + \Sigma\, 2ux + d = 0$$

मान लीजिए l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 नए निर्देशांक अक्षों OX', OY', OZ' की क्रमशः दिक्कोज्याएँ हैं। तब आप जानते हैं कि पुराने और नए तंत्र में एक बिन्दु के निर्देशांक (x, y, z), (x', y', z') निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करते हैं :

$$x = l_1x' + l_2y' + l_3z'$$
$$y = m_1x' + m_2y' + m_3z'$$
$$z = n_1x' + n_2y' + n_3z'$$

आइए, हम इन व्यंजकों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करें। हम इस समीकरण के द्विघात वाले भाग और एकघात वाले भाग को अलग-अलग लेंगे।

द्विघात वाला भाग $\sum (ax^2 + 2fyz)$ है। इस भाग में x, y, z के व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\left\{ (l_1x' + l_2y' + l_3z')^2 + 2f(m_1x' + m_2y' + m_3z')(n_1x' + n_2y' + n_3z') \right\}$$

प्राप्त होता है।

इस व्यंजक में x'^2 का गुणांक

$(al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 + 2fm_1n_1 + 2gn_1l_1 + 2hl_1m_1)$ है।

इस प्रकार y'^2 का गुणांक

$\left\{ al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 + 2fm_2n_2 + 2gn_2l_2 + 2hl_2m_2 \right\}$, होगा

और z'^2 का गुणांक

$\left\{ al_3^2 + bm_3^2 + cn_3^2 + 2fm_3n_3 + 2gh_3l_3 + 2hl_3m_3^2 \right\}$, होगा

इसी प्रकार हम y' z', z' x' और x' y' के गुणांक इकट्ठा करते हैं। तब हमें निम्न रूप का व्यंजक प्राप्त होता है :

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z^2 + 2f'y'z' + 2g'z'x' + 2hx'y' \qquad \ldots (16)$$

आप यह भी देख सकते हैं कि एकघात वाला भाग

$$u'x' + v'y' + w'z' \qquad \ldots (17)$$

हो जाता है। जहां

$$u' = ul_1 + vm_1 + wn_1$$
$$v' = ul_2 + vm_2 + wn_2$$
$$w' = ul_3 + vm_3 + wn_3$$

(16) और (17) से हम पाते है कि रूपांतरित समीकरण एक व्यापक द्विघात समीकरण है।

व्यंजक (17) को देखकर क्या आप अचर पद में परिवर्तन के बारे में कुछ कह सकते हैं? यह अक्षों के घूर्णन के अधीन अपरिवर्तित रहता है। इस संबंध में आपने ऊपर दिए गये उपपत्ति में एक अन्य रोचक तथ्य नोट किया होगा जिसे हमने नीचे दिए गए प्रश्न में दिया है।

E 8) मान लीजिए कि अक्षों के घूर्णन से एक व्यापक द्विघाती समीकरण का द्विघात वाला भाग $\sum ax^2 + 2\sum fyz$, $\sum a'x'^2 + 2\sum f'y'z'$ में रूपांतरित हो जाता है। दिखाइए कि $a+b+c = a' + b' + c'$

चलिए अब देखें कि हमें प्रमेय 1 और 4 से क्या मिलता है। उनके मुताबिक यदि शांकवज S को एक निर्देशांक-तंत्र में द्विघात समीकरण F (x, y, z) = 0 से निरूपित किया गया है, तो अक्षों के घूर्णन या स्थानांतरण से प्राप्त किसी अन्य निर्देशांक-तंत्र में भी इसे द्विघात समीकरण से निरूपित किया जाता है। इस तरह

अक्षों के स्थानांतरण या घूर्णन के अधीन एक शांकवज शांकवज ही बना रहता है।

वास्तव में, अक्षों के स्थानांतरण या घूर्णन के अधीन प्रत्येक ज्यामितीय आकृति का आकार या माप अपरिवर्तित रहता है। इसलिए इन रूपांतरणों को दृढ़ पिंड गति कहते हैं।

इस भाग में हमने त्रिविम निर्देशांक-तंत्र के दो महत्वपूर्ण रूपांतरणों पर चर्चा की है। आपने यह भी देखा है कि इन रूपांतरणों का महत्व इस बात में है कि इनके प्रयोग से हम तीन चरों वाले किसी भी व्यापक द्विघात समीकरण को मानक रूप में समानीत कर सकते हैं।

आइए, देखें कि यह कैसे होता है।

7.4 मानक रूप में समानयन

इस भाग में हम दिखाएंगे कि रूपांतरणों को उपयुक्त ढंग से लागू करके शांकवज के व्यापक समीकरण को और अधिक सरल रूप में लिख सकते हैं।

आइए, निम्नलिखित समीकरण द्वारा दिया गया एक शांकवज लें :

$$F(x, y, z) = \sum ax^2 + \sum 2fyz + \sum 2ux + d = 0$$

मान लीजिए कि मूल बिन्दु का स्थानांतरण करने पर एक नया कार्तीय निर्देशांक-तंत्र प्राप्त होता है जिसमें $F(x, y, z) = 0$ के एकघात वाला भाग नहीं रहता। आप देखेंगे कि ऐसा केवल विशेष प्रकार के शांकवजों के लिए संभव होता है। .

मान लीजिह नए तंत्र में O के निर्देशांक (x_0, y_0, z_0) हैं। तब हम जानते है कि रूपांतरित समीकरण में द्विघात वाला भाग अपरिवर्तित रहता है और एकघात वाला भाग
$u'x' + v'y' + w'z'$ हो जाता है।

जहां u', v' और w' (8) में दी गई हैं। हमने माना है कि एकघात वाला भाग शून्य है। इसलिए $u' = v' = w' = 0$, अर्थात्,

युगपत् रैखिक समीकरणों के लिए एम.टी.ई. - 04 का खंड 2 देखिए।

$$\left.\begin{aligned} ax_0 + hy_0 + gz_0 + u = 0 \\ hx_0 + by_0 + fz_0 + v = 0 \\ gx_0 + fy_0 + cz_0 + w = 0 \end{aligned}\right\}$$

दूसरे शब्दों में, (x_0, y_0, z_0) समीकरण-निकाय

$$\left.\begin{aligned} ax+hy+gz+u = 0 \\ hx+by+fz+v = 0 \\ gx+fy+cz+w = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (18)$$

का एक हल है।

यदि समीकरण-निकाय (18) का एक हल $(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ होता हो, तो विन्दु (x_0, y_0, z_0) को दिए हुए शांकवज का केंद्र कहते हैं और तब हम कहते हैं कि शांकवज का (x_0, y_0, z_0) पर एक केंद्र है। आप इकाई 8 में जान जाएंगे कि इस विन्दु को केन्द्र क्यों कहा जाता है।

आइए, अब हम यह मान लें कि दिए हुए शांकवज S का एक केन्द्र है। हम मूल विन्दु को केन्द्र (x_0, y_0, z_0) पर विस्थापित करते हैं। तब रूपांतरित समीकरण

$$\sum ax^2 + 2\sum fyz + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

(ध्यान दीजिए कि मूल विन्दु को विस्थापित करने पर दो घात वाले भाग में परिवर्तन नहीं होता।)
क्योंकि (x_0, y_0, z_0), समीकरण-निकाय (18) का एक हल है, इसलिए $u' = v' = w' = 0$ अतः ऊपर का समीकरण

$\sum ax^2 + 2\sum fyz + d' = 0$ हो जाता है।

इसी समीकरण में कोई एकघात वाला भाग नहीं है। तो हमने निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध किया है।

प्रमेय 5 : मान लीजिए S एक शांकवज है जिसे निर्देशांक-तंत्र में व्यापक द्विघात समीकरण $F(x, y, z) = 0$ से निरूपित किया गया है। मान लीजिए S का एक केन्द्र O' है। (अर्थात् समीकरण-निकाय (18) का एक हल (x_0, y_0, z_0) है)। तब मूल बिन्दु को केन्द्र O' पर स्थानांतरित कर देने पर नए निर्देशांक-तंत्र X' Y' Z' में समीकरण

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + d' = 0$ हो जाता है।

आइए, अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : समीकरण

$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4x - 12y - 24z + 49 = 0$
से निरूपित एक शांकवज लीजिए। क्या इस शांकवज का एक केन्द्र है? यदि है, तो उसे ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण
$F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4x - 12y - 24z + 49 = 0$ है।

पहले हम यह देखेंगे कि दिए हुए समीकरण का एक केन्द्र है या नहीं, अर्थात् हम यह देखेंगे कि समीकरण-निकाय (18) का कोई हल है या नहीं। यहां $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $u = -2$, $v = -6$, $w = -12$, तब

$$2x - 2 = 0$$
$$3y - 6 = 0$$
$$4z - 12 = 0$$

इसी समीकरण-निकाय का एक हल है, जो कि (1, 2, 3) है। अतः (1, 2, 3) शांकवज S का एक केन्द्र है।

टिप्पणी: आइए, हम एक नज़र समीकरण-निकाय (18) पर फिर से डालें। वहां हमने देखा था कि यदि समीकरण-निकाय का एक हल (x_0, y_0, z_0) हो तो (x_0, y_0, z_0) शांकवज का एक केन्द्र होता है। पाठ्यक्रम "प्रारंभिक बीजगणित" की इकाई 5 में आपने देखा है कि समीकरण-निकाय का एक हल तभी होता है, यदि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & b \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$$

वास्तव में, जब $\Delta \neq 0$, तब एक अद्वितीय हल (unique solution) प्राप्त होता है।
अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E 6) बताइए कि निम्नलिखित शांकवजों के केन्द्र हैं या नहीं।

क) $3x^2+7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y + 4z + 1 = 0$
ख) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy - 2x + 2y - 2z - 3 = 0$
ग) $5x^2 + 6y^2 - 2z = 0$

E 10) शांकवज
$14 x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 4yz - 4zx - 8xy + 18x - 18y + 5 = 0$
का एक केन्द्र मालूम कीजिए।
यदि मूल बिन्दु को इस केन्द्र पर स्थानांतरित कर दिया जाए तो शांकवज का नया समीकरण क्या होगा?

अब हम एक प्रमेय का कथन देंगे, उपपत्ति बिना। इसे सिद्ध करने के लिए कलन के कुछ उच्च तकनीकों की जानकारी आवश्यक है, जो कि इस पाठ्यक्रम के अध्ययन-क्षेत्र से बाहर है।

प्रमेय 6 : मान लीजिए S एक शांकवज है, जिसका दिए हुए निर्देशांक-तंत्र XYZ के सापेक्ष समीकरण

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

है। तब मूल बिन्दु को बदले बिना दिए हुए तंत्र xyz के अक्षों को घुमाने पर एक ऐसा कार्तीय निर्देशांक-तंत्र $x' y' z'$ प्राप्त होता है जिसमें S का निरूपण निम्न रूप का हो जाता है।

$$G(x', y', z') = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2u'x' + 2v'y' + 2w'z' + d' = 0$$

अर्थात्, इस नए समीकरण में कोई
yz, zx और xy वाले पद नहीं है।
प्रमेय 5 और प्रमेय 6 को एक साथ लेने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 1 : मान लीजिए S समीकरण $F(x, y, z) = 0$ से निरूपित एक शांकवज है जिसका निर्देशांक-तंत्र XYZ में एक केन्द्र O' है। तब मूल बिन्दु को O से O' पर स्थानांतरित करने पर और तंत्र को O' के प्रति घुमाने पर एक नया निर्देशांक-तंत्र प्राप्त होता है, जिसमें समीकरण निम्नलिखित सरल रूप का हो जाता है :

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z^2 + d' = 0 \qquad \ldots (19)$$

यदि $d' \neq 0$, तो पूरे समीकरण को d' से भाग देने पर हमें निम्न रूप का समीकरण प्राप्त होता है।

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

जहां $a = \frac{-a'}{d'}$, $b = \frac{-b'}{d'}$ और $c = \frac{-c'}{d'}$.

(19) को **शांकवज का मानक समीकरण** कहते हैं।

आपको याद होगा कि द्विविम-तंत्र के संबंध में भी हमने यह देखा है कि किसी भी द्विघात समीकरण को सरल रूप में समानीत किया जा सकता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : दिखाइए कि समीकरण $x^2+2yz-4x+6y+2z = 0$
से निरूपित शांकवज का एक केन्द्र है। फिर मूल बिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित कीजिए और अक्षों को ऐसे घुमाइए कि नए अक्षों के दिक्-अनुपात मूल मंत्र के सापेक्ष

$$0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}};\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

को मानक रूप में समानीत कीजिए।

हल : यहां $a = 1, b = 0, c = 0, f = 1, g = 0, h = 0, u = -2, v = 3, w = 2.$

पहले हम देखेंगे कि शांकवज का एक केन्द्र है या नहीं। समीकरण-निकाय (18) का हल करने पर हम पाते है कि (2,0,0) दिए हुए शांकवज का एक केन्द्र है।

मूल बिन्दु को (0,0,0) से (2,0,0) पर विस्थापित करने पर हमें समीकरण
$x^2 + 2yz - 4 = 0$ प्राप्त होता है।

अब हम नए समीकरण पर अक्षों का घूर्णन लागू करते हैं। भाग 7.3.3 से हम पाते हैं कि

$$x = -\frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{4}}y' - \frac{1}{\sqrt{4}}z'$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{4}}y' - \frac{1}{\sqrt{4}}z'$$

इन समीकरणों को शांकवज के दिए हुए समीकरणों में प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z''}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{4}}y' - \frac{1}{\sqrt{4}}z'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{4}}z'\right) - 4 = 0.$$

अर्थात्, $\frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{2} - x'^2 - 4 = 0$

अर्थात्, $y'^2+z'^2-2x'^2 = 8.$

जो कि मानक रूप है।

अब आप एक प्रश्न हल कीजिए।

E 11) निम्नलिखित शांकवजों के मानक समीकरण प्राप्त कीजिए

क) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0,$

मूल विन्दु को केंद्र पर स्थानांतरित करके।

ख) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy + 2x + 12y + 10z + 20 = 0$
मूल बिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित करके और तब तंत्र को इस तरह घुमाकर कि नए अक्ष के दिक अनुपात $-1, 0, 1; 1,1,1; 1,-2,1$ हों।

अब हम शांकवजों के व्यापक सिद्धांत पर अपनी चर्चा यहीं समाप्त करेंगे, हालांकि अगली इकाइयों में हम बीच-बीच में इनका उल्लेख करेंगे। अगली इकाई में हम (19) से प्राप्त पृष्ठों पर चर्चा करेंगे।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए, उसका संक्षिप्त विवरण यहां दें।

7.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है:

1) तीन चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$
एक शांकवज को निरूपित करता है।

2) अक्षों का स्थानांतरण : निर्देशांक-तंत्र का रूपांतरण जिसमें अक्षों की दिशा में परिवर्तन लाए बिना मूल बिन्दु को एक अन्य बिन्दु पर स्थानांतरित किया जाता है। रूपांतरण के समीकरण

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$
$$z = z' + c$$

से दिए जाते हैं।

3) अक्षों का घूर्णन : निर्देशांक तंत्र का रूपांतरण जिसमें मूल बिन्दु को स्थानांतरित किए बिना अक्षों की दिशा परिवर्तित की जाती है। रूपांतरण के समीकरण निम्नलिखित सारणी से प्राप्त होते हैं :

	x	y	z
x′	l_1	m_1	n_1
y′	l_2	m_2	n_2
z′	l_3	m_3	n_3

जहां l_i, m_i, n_i (i = 1,2,3) अक्षों की दिक्कोज्याएं हैं।

4) अक्षों के स्थानांतरण या घूर्णन के अधीन शांकवज शांकवज ही रहता है।

5) एक ऐसा कार्तीय निर्देशांक तंत्र होता है जिसमें केन्द्र वाले शांकवज के समीकरण का मानक रूप

$a'x' + b'y'^2 + c'z'^2 + d' = 0$ हो जाता है।

और अब आप भाग 7.1 में दिए गए इस इकाई के उद्देश्यों को दोबारा पढ़ लीजिए, और देखिए कि आपने इन्हें प्राप्त कर लिया है या नहीं। हमने अगले भाग में इकाई के प्रश्नों के अपने हल दिए हैं, यदि आप उन्हें देखना चाहें।

7.6 हल/उत्तर

E 1) क) खंड 2 की इकाई में आपने देखा है कि शीर्ष 0, अक्ष OZ और अर्ध-शीर्ष कोण α वाले लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ है।

जब हम मूल बिन्दु को (−1,1,0) पर स्थानांतरित करते हैं, तब नए तंत्र में निर्देशांक

$$x' = x+1, \quad y' = y-1, \quad z' = z,$$

अर्थात्, $x = x'-1, \quad y = y'+1, \quad z = z'$. हो जाते हैं।

x, y, z के इन मानों को शंकु के दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें

$(x' - 1)^2 + (y' + 1)^2 = z'^2 \tan^2 \alpha$ प्राप्त होता है।

ख) यह समीकरण एक लंब वृत्तीय शंकु को निरूपित करता है जिसका शीर्ष बिन्दु (−1, 1, 0) पर है, अक्ष z-अक्ष की समांतर शीर्ष बिन्दु से गुज़रने वाले रेखा है और अर्ध-शीर्ष कोण α है (खंड 2 की इकाई 6 के भाग 6.2 का E_1, देखिए)।

E 2) रूपांतरण के समीकरण

$x = x'+1, y=y'-3, z = z'+2$ है।

क) दिया हुआ समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$ है।

इस समीकरण में x, y, z के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें

$(x' + 1)^2 + (y' -3)^2 + (z' +2)^2 -4 (x' +1) +6 (y' - 3) -2 (z' +2) + 5 = 0$

प्राप्त होता है।

सरल करने पर हमें

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x' + 2z' - 7 = 0$

प्राप्त होता है, जो एक गोले को निरूपित करता है।

ख) रूपांतरित समीकरण

$x'^2 - 2y'^2 + 2x'-4y' - 3z' - 7 = 0$ है।

E 3) RS के दिक्-अनुपात −3, 6, −2 हैं। इसलिए RS की दिक्कोज्याएँ $-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$ होंगी।

अतः RS पर PQ का प्रक्षेप

$$(5-6)\times(-\frac{3}{7})+(1-3)\times\frac{6}{7}+(4-2)\times(-\frac{2}{7})=\frac{3}{7}-\frac{12}{7}-\frac{4}{7}=-\frac{13}{7}$$

होगा।

E 4) क) दिया हुआ समीकरण

$x^2 - 5y^2 + z^2 = 1$ है।

अक्षों के दिक्-अनुपात 1,2,3, 1,−2,1, 4,−1,−2 है।

इसलिए अक्षों की दिक्कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}},$

$\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}$ होंगी।

रूपांतरण सारणी निम्नलिखित है :

	x	y	z
x′	$\frac{1}{\sqrt{14}}$	$\frac{2}{\sqrt{14}}$	$\frac{3}{\sqrt{14}}$
y′	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{-2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
z′	$\frac{4}{\sqrt{21}}$	$\frac{1}{\sqrt{21}}$	$\frac{-2}{\sqrt{21}}$

तब,

$$x = \frac{1}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{\sqrt{21}}z'$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{14}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{21}}z'$$

$$z = \frac{3}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{2}{\sqrt{21}}z'$$

दिए हुए समीकरण में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$(\frac{1}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{\sqrt{21}}z')^2$$
$$-5(\frac{2}{\sqrt{14}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{21}}z')^2$$
$$+(\frac{3}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{2}{\sqrt{21}}z')^2 = 1$$

प्राप्त होता है।

इसे सरल करने पर हमें

$$\frac{10}{14}x'^2 - 3y'^2 + \frac{15}{21}z'^2 + \frac{48}{\sqrt{4}\sqrt{6}}x'y' + \frac{24}{\sqrt{6}\sqrt{21}}y'z' - \frac{24}{\sqrt{21}\sqrt{14}}x'z' =$$

प्राप्त होता है।

ख) नया समीकरण

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{21}}y'z' - \frac{8}{\sqrt{21}\sqrt{14}}x'z' = 1$$ है।

E 5) E4 क) से हमें

$a + b + c = 5 + 2 = -3$

और $a' + b' + c' = \frac{10}{4} - \frac{18}{6} + \frac{15}{21} = -3$ प्राप्त होता है।

इससे पता चलता है कि घूर्णन के अधीन वर्ग पदों के गुणांकों का जोड़ अपरिवर्तित रहता है, अर्थात् $a + b + c = a' + b' + c'$ यही बात आप E 4 (ख) और उदाहरण 1 के लिए भी देख सकते हैं।

E 6) दिए हुए रूपांतरण के समीकरणों से हम पाते हैं कि निर्देशांक-तंत्र एक अन्य निर्देशांक-तंत्र में परिवर्तित हो जाता है जिसका मूल बिन्दु वही रहता है और नए अक्षों की दिक्कोज्याएं पुराने अक्षों के सापेक्ष

$$\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$ हैं।

नया समीकरण प्राप्त करने के लिए हम x, y, z के मानों को समीकरण $x + y + z = 0$ में प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर हमें

$$\frac{x'}{\sqrt{6}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} x' + \frac{x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{3}} = 0$$

अर्थात् $\frac{z'}{\sqrt{3}} = 0$ या $z' = 0$ प्राप्त होता है।

अतः रूपांतरण के अधीन समतल $x + y + z = 0$ समतल $z' = 0$ हो जाता है।

E 7) हाँ। ऐसा इसलिए है, क्योंकि शंकु निम्नलिखित समघात द्विघात समीकरण से निरूपित होता है।

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0$$

अब प्रमेय 2 की उपपत्ति से हम पाते हैं कि अक्षों को घुमाने पर ऊपर दिया गया समीकरण

$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2h'x'y' + 2f'y'z' + 2g'z'x' = 0$. हो जाता है जो कि एक समघात द्विघात समीकरण है। अतः यह एक शंकु को निरूपित करता है।

E 8) प्रमेय 2 की उपपत्ति से हम देखते हैं कि

$$a' = al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 + 2fm_1n_1 + 2gn_1l_1 + 2hl_1m_1$$
$$b' = al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 + 2fm_2n_2 + 2gn_2l_2 + 2hl_2\ m_1$$
$$c' = al_3^2 + bm_3^2 + cn_3^2 + 2fm_3n_3 + 2gn_3l_3 + 2hl_3m_3$$

तब $a'+b'+c' = a(l_1^2+l_2^2+l_3^2)$
$+b(m_1^2+m_2^2+m_3^2) + c(n_1^2+n_2^2+n_3^2) + 2f\ (m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3)+$

$2g\ (n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3) + 2h(l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3)$

हम जानते हैं कि

$$\sum_{i=1}^{3} l_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2$$

(खंड 2 की इकाई 4 देखिए।)

और क्योंकि अक्ष परस्पर लंब हैं, इसलिए खंड 2 की इकाई 4 में दिए गए लांबिकता प्रतिबंध से हमें

$$\sum_{i=1}^{3} m_i n_i = 0 = \sum_{i=1}^{3} n_i l_i = \sum_{i=1}^{3} l_i m_i$$ प्राप्त होता है।

अतः $a' + b' + c' = a + b + c$

E 9) क) हमें देखना है कि निम्नलिखित रैखिक समीकरण-निकाय संगत है या नहीं।

$$ax+hy+gz+u = 0$$
$$hx+by+fz+v = 0$$
$$gx+fy+cz+w = 0$$

यहां $a = 3, b = 7, c = 3, f = 5, g = -1, h = 5, u = 2, v = -6, w = -2$

इसलिए समीकरण

$$3x+5y-z+2 = 0$$
$$5x+7y+5z-6 = 0$$
$$-x+5y+3z-2 = 0$$

बन जाते हैं।

इसी समीकरण निकाय को हल करने पर हम देखते हैं कि इसका एक अद्वितीय हल

$x = \frac{1}{3}$ $y = -\frac{1}{3}$ और $z = \frac{4}{3}$ है। अतः दिए हुए शांकवज का

एक अद्वितीय केन्द्र $(-\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{3})$ है।

ख) इस शांकवज के अनंततः अनेक केन्द्र हैं।

ग) इस शांकवज का कोई भी केन्द्र नहीं है, क्योंकि इस स्थिति में समीकरण-निकाय (18) असंगत है।

10) शांकवज का $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ पर एक केन्द्र है। अब हम मूल बिन्दु को (0,0,0) से $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ पर विस्थापित करते हैं। रूपांतरण-समीकरण

$x = x' - \frac{1}{2}$, $y = y' + \frac{1}{2}$, $z = z'$ है।

x, y, z के इन मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित नया समीकरण प्राप्त होता है।

$$14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 4yz - 4zx - 8xy = 4$$

11) क) हम जानते हैं कि दिया हुआ समीकरण एक गोले को निरूपित करता है, जिसका केन्द्र (1, 1, 1) पर है। (इकाई 5 देखिए)। तब मूल बिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित करने पर हमें निम्नलिखित मानक समीकरण प्राप्त होता है:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4$$

ख) दिया हुआ समीकरण

$3x^2+5y^2+3z^2-2yz+2zx-2xy+2x+12y+10z+20 = 0$. है।

पहले हम यह देखेंगे कि इस समीकरण से दिए गए शांकवज का एक केन्द्र है या नहीं।

यहां $a = 3$, $b = 5$, $c = 3$, $h = -1$, $g = 1$, $f = -1$, $u = 1$

$v = 6$, $w = 5$ और $d = 20$, रूपांतरणों का समीकरण-निकाय

$$3x-y+z+1 = 0$$
$$-x+5y-z+6 = 0$$
$$x-y+3z+5 = 0$$ है।

इन समीकरणों को हल करने पर हमें

$x = -\frac{1}{6}$, $y = -\frac{5}{3}$ और $z = -\frac{13}{6}$ मिलता है।

अतः केन्द्र $(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{13}{6})$

है। अब हम मूल विन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित करते हैं। तब हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$3x^2+5y^2+3z^2-2yz+2zx-2xy+d' = 0$$

जहाँ $d' = 3(-\frac{1}{6})^2 + 5(-\frac{5}{3})^2 + 3(-\frac{13}{6})^2 - 2(-\frac{5}{3})(-\frac{13}{6}) + 2(-\frac{13}{6})(-\frac{1}{6})$

$-2(-\frac{1}{6})(-\frac{5}{3}) + 2(-\frac{1}{6}) + 12(-\frac{5}{3}) + 10(-\frac{13}{6}) + 20.$

अब हम अक्षों को घुमाते हैं। रूपांतरण के समीकरण

$$x = -x'+y'+z'$$
$$y = y' -2z'$$
$$z = x'+y'+z'$$ हैं।

x, y, z के इन मानों को शांकवज के दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें

$3(-x'+y'+z')^2+5(y'-2z')^2+3(x'+y'+z')^2-2(y'-2z')(x'+y'+z')$

$+2(x'+y'+z')(-x'+y'+z') -2(-x'+y'+z')(y'-2z')+d' = 0$

अर्थात् $4x'^2+9y'^2+36z'^2+d' = 0$ प्राप्त होता है।

यह दिए हुए शांकवज का मानक रूप है।

इकाई 8 केन्द्रीय शांकवज

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपको त्रिविम-तंत्र के कुछ पृष्ठों यानी शांकवज या द्विघाती पृष्ठ से परिचित कराया गया था। वहां हमने शांकवजों से संबंधित कुछ सिद्धांत पर चर्चा की थी और यह दिखाया था कि अक्षों के स्थानांतरण या घूर्णन के अधीन शांकवज ही रहता है। आपने यह भी देखा कि कई शांकवजों के केंद्र होते हैं, और कइयों के नहीं। इस गुण के आधार पर हम शांकवजों को दो वर्गों में बांटते हैं — केन्द्रीय शांकवज और अकेन्द्रीय शांकवज। इस इकाई में हम केवल केन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा करेंगे।

पहले आप देखेंगे कि उपयुक्त अक्ष-परिवर्तन करके केन्द्रीय शांकवज को और सरल रूप में समानीत किया जा सकता है। इसके बाद हम इन सरल रूपों का प्रयोग विभिन्न प्रकार के केन्द्रीय शांकवजों के ज्यामितीय गुणों पर चर्चा करने के लिए करेंगे। आप देखेंगे कि केन्द्रीय शांकवज पांच प्रकार के होते हैं — शंकु, अधिकल्पित दीर्घवृत्तज, दीर्घवृत्तज, एकपृष्ठी अतिपरवलयज और द्विपृष्ठी अतिपरवलयज। आप इकाई 6 में शंकु के बारे में विस्तार से पढ़ चुके हैं। शेष चार शांकवज खंड 1 में बताए गए केन्द्रीय शांकवों अर्थात् दीर्घवृत्तों और अतिपरवलयों के त्रिविम रूपांतरण हैं।

यूक्लिड, आर्किमिडीज़, ऐपलोनियस जैसे प्राचीन गणितज्ञ ऊपर बताई गई ज्यामितीय संरचनाओं से परिचित तो थे, पर उन्होंने इनका वैश्लेषिक रूप से अध्ययन नहीं किया था। इनका वैश्लेषिक अध्ययन तो बहुत बाद में चलकर ही हुआ, त्रिविम निर्देशांक-तंत्र का प्रयोग ज्यामितीय संरचनाओं को समझने के लिए किया गया। स्विटजरलैंड के जॉन बर्नौली (1667-1748) पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने बताया कि कार्तीय द्विविम निर्देशांक-तंत्र का विस्तार त्रिविम समष्टि में कैसे किया जाए। लेकिन ज्यामिति के त्रिविम समष्टि निर्देशांक का वास्तविक अनुप्रयोग स्विटजरलैंड के अन्य गणितज्ञ जैकब हरमन (1678-1733) ने ही किया। उन्होंने कई तरह के द्विघाती पृष्ठों के समीकरणों को प्राप्त करने के लिए इन निर्देशांकों का प्रयोग किया।

हालांकि, इस इकाई में हम केवल केन्द्रीय शांकवजों पर ही चर्चा करेंगे, फिर भी पहले भाग में हम शांकवजों के कुछ ऐसे जरूरी व्यापक सिद्धांतों पर चर्चा करेंगे जिन पर हमने पिछली इकाई में चर्चा नहीं की है। यहां हम शांकवज के केन्द्र की परिभाषा देंगे और केन्द्रीय शांकवजों का एक अभिलक्षण प्राप्त करेंगे। इसके बाद हम चारों प्रकार के केन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा अलग-अलग भागों में करेंगे। इकाई के अंत में हम एक रेखा या एक समतल से केन्द्रीय शांकवज का प्रतिच्छेद करने से प्राप्त परिच्छेदों पर चर्चा करेंगे। इस संबंध में हम केन्द्रीय शांकवज की स्पर्श रेखाओं पर भी चर्चा करेंगे।

अगली इकाई में हम अकेन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा करेंगे। यदि आप नीचे दिए गए उद्देश्यों को प्राप्त कर लें तो आपको अगली इकाई को समझने में आसानी हो जाएगी।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- शांकवज के समीकरण से जांच कर सकेंगे कि वह केन्द्रीय है या नहीं,
- दीर्घवृत्तज, एकपृष्ठी अतिपरवलयज और द्विपृष्ठी अतिपरवलयज के मानक रूप प्राप्त कर सकेंगे,

- ऊपर बताए गए तीन शांकवजों का अनुरेखण कर सकेंगे,
- केन्द्रीय शांकवज के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखाएं और स्पर्श समतल प्राप्त कर सकेंगे,
- यह जांच कर सकेंगे कि दिया हुआ समतल शांकवज पर स्पर्श है या नहीं,
- इस बात का प्रयोग कर सकेंगे कि केन्द्रीय शांकवज का समतलीय परिच्छेद एक शांकव होता है।

8.2 शांकवज का केन्द्र

पिछली इकाई में आपने देखा है कि बिन्दु P को शांकवज F (x, y, z) = 0 का केन्द्र कहा जाता है यदि P के निर्देशांक के रूप में दिए गए एक युगपत् समीकरण-निकाय को संतुष्ट करें (इकाई 7 का समीकरण (18) देखिए)। इस इकाई में हम केन्द्र की ज्यामितीय परिभाषा देंगे। और तब ज्यामितीय और वैश्लेषिक परिभाषाओं के संबंध पर चर्चा करेंगे।

आइए, एक प्रमेय से शुरू करें। यहां पर हम इसकी उपपत्ति नहीं देंगे। भाग 8.7 में हमने एक विशेष प्रकार के शांकवज के लिए इसकी उपपत्ति दी है।

प्रमेय 1 : एक रेखा एक शांकवज को दो बिन्दुओं पर काटती है। ये बिन्दु अलग-अलग वास्तविक, या संपाती वास्तविक या अधिकल्पित हो सकते हैं।

टिप्पणी : यदि कोई रेखा L किसी शांकवज S को दो अधिकल्पित बिन्दुओं पर काटती है, तो हम कहते हैं कि L, S को कटती नहीं है।

आइए, हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : समीकरण $ax^2+by^2+cz^2=1$, $a,b,c \neq 0$ द्वारा दिया गया शांकवज लीजिए। मान लीजिए P (x_1, y_1, z_1) इस शांकवज पर एक बिन्दु है और O, (0,0,0) है।

दिखाइए कि रेखा OP शांकवज को जिस दूसरे बिन्दु पर काटती है, वह P' $(-x_1, -y_1, -z_1)$ है।

हल : इकाई 4 में आप पढ़ चुके हैं कि बिन्दु (0,0,0) और (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$ है।

स्पष्ट है कि बिन्दु $(-x_1, -y_1, -z_1)$ इस रेखा पर स्थित है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि यदि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को संतुष्ट करता हो, तो बिन्दु $(-x_1, -y_1, -z_1)$ भी इसको संतुष्ट करेगा। अतः P' $(-x_1, -y_1, -z_1)$ शांकवज का एक अन्य बिन्दु है, जहां रेखा OP शांकवज को काटती है। लेकिन, प्रमेय 1 से आप जानते हैं कि केवल दो प्रतिच्छेदी बिन्दु हो सकते हैं। इसलिए प्रतिच्छेदी बिन्दु P और P' हैं।

ऊपर दिए गए उदाहरण से पता चलता है कि मूल बिन्दु O से गुज़रने वाली कोई भी रेखा शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को मूल बिन्दु से समान दूरी पर दो बिन्दुओं पर काटती है। ऐसे बिन्दु O को शांकवज का केन्द्र कहते हैं, निम्न परिभाषा के अनुसार।

परिभाषा : बिन्दु P को शांकवज **S का केन्द्र** कहते हैं, यदि P से गुजरने वाली प्रत्येक रेखा

i) S को ऐसे दो बिंदुओं पर काटती हो जिससे कि P इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा खंड का मध्य बिन्दु हो, या

ii) शांकवज S को बिल्कुल काटती ही न हो।

ध्यान दीजिए कि यह परिभाषा द्विविम-तंत्र में केन्द्र की परिभाषा के समान है।

ऊपर दी गई परिभाषा को लागू करके हम यह आसानी से कह सकते हैं कि मूल बिन्दु (0, 0, 0) गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का केन्द्र है। क्या इस गोले का कोई और भी केन्द्र है? इसका जवाब आपको E1 को हल करने पर मिलेगा।

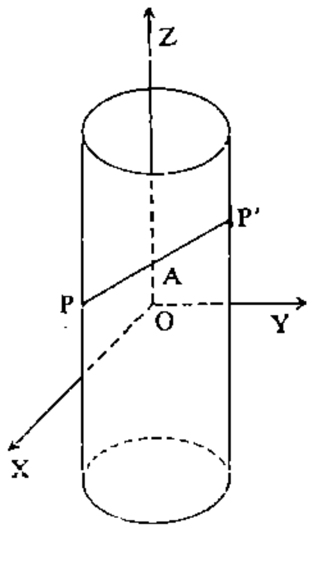
E 1) दिखाइए कि गोला

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d = 0.$$

का एक ही केन्द्र है, जो कि $(-u, -v, -w)$ है।

E 2) दिखाइए कि z-अक्ष का प्रत्येक बिन्दु बेलन

$$x^2+y^2-r^2 = 0$$ (चित्र 1 को देखिए) का एक केन्द्र है।



चित्र 1 : z-अक्ष अक्ष वाला बेलन।

अब हम एक परिणाम को सिद्ध करेंगे जो ऐसे शांकवज के समीकरण से संबंधित है जिसका एक केन्द्र मूल बिन्दु है।

प्रमेय 2 : मूल बिन्दु O, शांकवज

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d = 0 \quad \ldots (1)$$

का केन्द्र होता है यदि और केवल यदि $u = v = w = 0$.

उपपत्ति : मान लीजिए $u = v = w = 0$. तब शांकवज का दिया हुआ समीकरण

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+d = 0.$$

रह जाता है। मान लीजिए L, बिन्दु O से होकर जाने वाली एक रेखा है। तब प्रमेय 1 के अनुसार यह रेखा शांकवज को दो बिन्दुओं; मान लीजिए P और Q पर काटती है। अब हमें यह दिखाना है कि रेखा PQ का मध्य बिन्दु है।

मान लीजिए P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) हैं। तब

$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2fy_1z_1+2gz_1x_1+2hx_1y_1+d = 0$$

इस समीकरण को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$a(-x_1)^2+b(-y_1)^2+c(-z_1)^2+2f(-y_1)(-z_1)+2g(-z_1)(-x_1)+2h(-x_1)(-y_1)+d = 0$$

इससे पता चलता है कि बिन्दु $(-x_1, -y_1, -z_1)$ दिए हुए शांकवज पर स्थित है। आप यह भी देख सकते हैं कि बिन्दु $(-x_1, -y_1, z_1)$ रेखा OP पर भी स्थित है। अतः बिन्दु Q $(-x_1, -y_1, -z_1)$ होगा। इससे पता चलता है कि बिन्दु O रेखा PQ का मध्य बिन्दु है।

ऊपर दिया गया तर्क बिन्दु O से होकर जाने वाली किसी भी रेखा के लिए सत्य है। अतः बिन्दु O शांकवज का केन्द्र है।

विलोमतः मान लीजिए O, (1) द्वारा दिए गए शांकवज का एक केन्द्र है। मान लीजिए P, इस शांकवज पर स्थित कोई बिन्दु (x_1, y_1, z_1) है। तब बिन्दु P' $(-x_1, -y_1, z_1)$ भी शांकवज पर स्थित होता है, क्योंकि O शांकवज का केन्द्र है। इसलिए

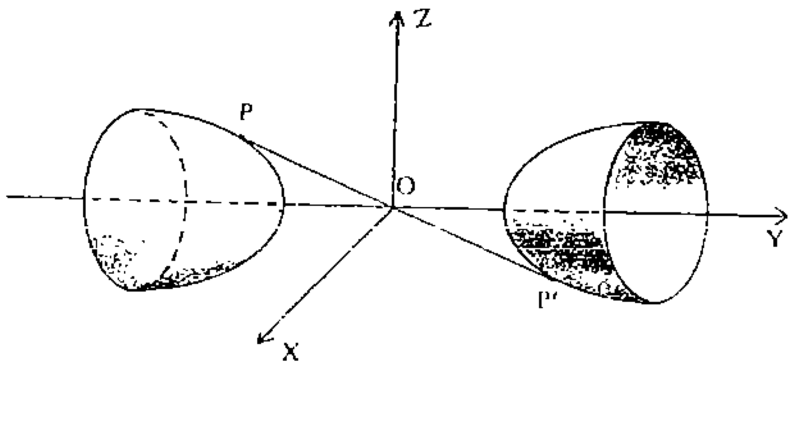
$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2fy_1z_1+2gz_1x_1+2hx_1y_1+2u_1x_1+2v_1y_1+2w_1z_1+d = 0 \quad \ldots (2)$$

$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2fy_1z_1+2gz_1x_1+2hx_1y_1-2u_1x_1+2v_1y_1-2w_1z_1+d = 0 \quad \ldots (3)$$

(2) में से (3) को घटाने पर हम पाते हैं कि $ux_1+vy_1+wz_1 = 0$.

इससे पता चलता है कि (x_1, y_1, z_1) समतल $ux + vy + wz = 0$ पर स्थित है। यह बात शांकवज के प्रत्येक बिन्दु के लिए सत्य है। इसका मतलब हुआ कि शांकवज, समतल $ux + vy + wz = 0$ का हिस्सा है। लेकिन यह कैसे हो सकता है? यह सिर्फ तब हो सकता है जबकि $u = v = w = 0$.
इस तरह हमें परिणाम प्राप्त हो जाता है।
क्या प्रमेय 2 से आप समझ सकते हैं कि केन्द्र को केन्द्र क्यों कहा जाता है? यह बात आप नीचे दी गई टिप्पणी में देख सकते हैं।

टिप्पणी : मान लीजिए मूल बिन्दु, शांकवज S का केन्द्र है। तब हम जानते हैं कि यदि बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ शांकवज S पर स्थित हो, तो P' $(-x_1, -y_1, -z_1)$ भी S पर स्थित होता है। इसका अर्थ है कि यदि मूल बिन्दु शांकवज, समतल S का केन्द्र हो, तो S केन्द्र के सापेक्ष सममित है। यही कारण है कि इस बिन्दु को केन्द्र कहा जाता है (चित्र 2 देखिए)।



चित्र 2 : बिन्दु-युग्म P और P' शांकवज के केन्द्र O के प्रति सममित हैं।

अब नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E 3) बताइए कि निम्नलिखित शांकवजों में से किन-किन शांकवजों के केन्द्र मूल बिन्दु पर हैं :

क) $x^2+y^2+z^2-23x = 0.$

ख) $2x^2+3y^2-z^2 = 1.$

ग) $14x^2+26y^2+2\sqrt{91}\, z^2 = 1.$

घ) $41x^2-28y = 0.$

इकाई 7 में आपने देखा है कि केन्द तब होता है जबकि एक समीकरण निकाय को हल किया जा सके। इस तथ्य को हम अगले प्रमेय में स्थापित करेंगे।

प्रमेय 3 : समीकरण

$$F(x, y, z) = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d = 0$$

द्वारा दिए गए शांकवज S का बिन्दु $P(x_0, y_0, z_0)$, S का केन्द्र होता है, यदि और केवल यदि

$$\left.\begin{array}{l} ax_0+hy_0+gz_0+u = 0 \\ hx_0+by_0+fz_0+v = 0 \\ gx_0+fy_0+cz_0+w = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (4)$$

उपपत्ति : आइए, पहले हम यह मान लें कि निर्देशांक-तंत्र XYZ में बिन्दु $P(x_0, y_0, z_0)$ दिए हुए शांकवज का केन्द्र है। अब हम मूल बिन्दु को 0 से केन्द्र P पर स्थानांतरित करते हैं। तब इकाई 7 से आप जानते हैं कि नए निर्देशांक-तंत्र में शांकवज का समीकरण

$$ax'^2+by'^2+cy'^2+2fy'z' + 2gz'x' +2hx'y'+2u'x'+2v'y' + 2w'z' + d' = 0 \quad \ldots(5)$$

हो जाता है, जहां

$$u' = ax_0 + hy_0 + gz_0 + u$$
$$v' = hx_0 + by_0 + fz_0 + v$$
$$w' = gx_0 + fy_0 + cz_0 + w$$

और

$$d' = ax_0^2+ by_0^2 + cz_0^2 + 2fy_0z_0 + 2gz_0x_0 + 2hx_0y_0 + 2ux_0 + 2vy_0 + 2wz_0 + d$$

क्योंकि अब, इस शांकवज का केन्द्र मूल बिन्दु पर है, इसलिए प्रमेय 2 के अनुसार, $u' = v' = w' = 0$, अर्थात्

$$ax_0+hy_0+gz_0+u = 0$$
$$hx_0+by_0+fz_0+v = 0$$
$$gx_0+fy_0+cz_0+w = 0$$

विलोमतः मान लीजिए कि (4) किसी बिन्दु $P(x_0, y_0, z_0)$ से संतुष्ट होता है। हम मूल बिन्दु को O से P पर स्थानांतरित करते हैं। तब हमे (5) के रूप का एक समीकरण प्राप्त होता है। परंतु, क्योंकि (4), P के लिए लागू होता है, इसलिए

$$u' = v' = w' = 0.$$

अतः समीकरण

$$a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2+2f'y'z'+2g'z'x'+2h'x'y'+d' = 0$$

हो जाता है।

इस समीकरण का एकघात वाला भाग शून्य है। अतः प्रमेय 2 के अनुसार मूल बिन्दु P एक केन्द्र है।

क्या आपको प्रमेय 2 और प्रमेय 3 में कुछ संबंध नज़र आता है? शायद आपने ध्यान दिया होगा कि प्रमेय 2, प्रमेय 3 की एक विशेष स्थिति है, जबकि बिन्दु P मूल बिन्दु है।

आइए, अब हम फिर से E 1 और E 2 को देखें।

उनसे आप यह जानते हैं कि शांकवज का एक अद्वितीय केन्द्र हो सकता है या अंततः अनेक केन्द्र हो सकते हैं। आपने इकाई 3 में ऐसे शांकवजों के भी उदाहरण देखे हैं जिनका कोई केन्द्र नहीं है। गणितज्ञों ने अद्वितीय केन्द्र के होने या न होने के अनुसार सभी शांकवजों को दो प्रकार के शांकवजों में वर्गीकृत कर दिया है। हम इन शांकवजों को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

परिभाषा : यदि किसी शांकवज का एक अद्वितीय केन्द्र हो, तो हम उसको **केन्द्रीय शांकवज** (central conicoid) कहते हैं। जबकि या तो यदि किसी शांकवज का कोई केन्द्र न हो या इसके अंततः अनेक केन्द्र हों, तो उसको **अकेन्द्रीय शांकवज** (non-central conicoid) कहते हैं।

अतः गोला केन्द्रीय शांकवज का एक उदाहरण है, और बेलन अकेन्द्रीय शांकवज का।

शंकु के बारे में क्या कहा जा सकता है? इसे हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं (E 4 देखिए)।

E 4) बताइए कि शंकु केन्द्रीय है या नहीं।

8.3 केन्द्रीय शांकवजों का वर्गीकरण

इस भाग में हम शांकवजों के विभिन्न रूप प्राप्त करेंगे। हम इन शांकवजों के आकार के बारे में भी बताएंगे। आइए, हम एक केन्द्रीय शांकवज को लें। तब पहले मूल बिन्दु को केन्द्र पर स्थानांतरित करके और फिर केन्द्र के प्रति अक्षों का घूर्णन करके हम समीकरण को उसके मानक रूप

$$ax^2+by^2+cz^2+d = 0 \qquad \ldots(6)$$

में समानीत कर सकते है (इकाई 7 के भाग 7.4 का उपप्रमेय 1 देखिए)। आइए, अब हम प्रमेय 3 पर फिर गौर करें। वहां पर आपने देखा कि शांकवज $F(x, y, z) = 0$ का एक अद्वितीय केन्द्र होता है यदि और केवल यदि समीकरण-निकाय

$$ax+hy+gz+u = 0$$
$$hx+by+fz+v = 0$$
$$gx+fy+cz+w = 0$$

का एक अद्वितीय हल हो। इसका अर्थ है कि

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$$

अब यदि शांकवज समीकरण (6) के रूप का हो, तो प्रतिबंध

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \neq 0$$ हो जाता है, अर्थात्

$abc \neq 0$

इसका अर्थ है कि $a \neq 0$, $b \neq 0$ और $c \neq 0$.

तब a, b, c और d के चिह्नों के अनुसार निम्नलिखित पांच संभावनाएं होती हैं :

स्थिति 1 ($d = 0$) : इस स्थिति में समीकरण

$ax^2+by^2+cz^2 = 0$ हो जाता है।

और, इकाई 6 से आप जानते हैं कि a, b और c के चिह्न कुछ भी क्यों न हों, यह समीकरण एक शंकु को निरूपित करता है।

स्थिति 2 ($d \neq 0$ और a, b, c, d समान चिह्न वाले हों): इस स्थिति में (x, y, z) के कोई ऐसा वास्तविक मान नहीं होते जो समीकरण (6) को संतुष्ट करते हों। ऐसा होने का कारण यह है कि किसी भी $(x, y, z) \in R^3$ के लिए वाम पक्ष (left hand side) या तो धनात्मक होता है या ऋणात्मक, शून्य कभी नहीं। इस प्रकार के शांकवज को हम अधिकल्पित दीर्घवृत्तज कहते हैं।

स्थिति 3 ($d \neq 0$, और गुणांकों a, b, c के चिह्न d के चिह्न से अलग हों) : इस स्थिति में हम समीकरण (6) को निम्न रूप में लिखते हैं :

$ax^2+by^2+cz^2 = -d$,

अर्थात् $\frac{x^2}{-d/a} + \frac{y^2}{-d/b} + \frac{z^2}{-d/c} = 1$.

ध्यान रहे कि संख्याएं $-\frac{d}{a}$, $-\frac{d}{b}$ और $-\frac{d}{c}$ धनात्मक हैं।

मान लीजिए $a_1 = \sqrt{\frac{-d}{a}}$, $b_1 = \sqrt{\frac{-d}{b}}$ और $c_1 = \sqrt{\frac{-d}{c}}$

तब समीकरण (6)

$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$ हो जाता है।

यह समीकरण दीर्घवृत्त समीकरण का त्रिविम समष्टि में अनुरूप है। इस समीकरण से निरूपित शांकवज को **दीर्घवृत्तज** (ellipsoid) कहते हैं।

स्थिति 4 (d ≠ 0, और चार गुणांकों a, b, c और d में दो गुणांक समान चिह्न वाले हों) : मान लीजिए कि
$a > 0, b > 0, c < 0$ और $d < 0$ तब $-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}$ और $\frac{d}{c}$ धनात्मक होंगे। यहां हम
$a_2 = \sqrt{\frac{-d}{a}}$, $b_2 = \sqrt{\frac{-d}{b}}$, और $c_2 = \sqrt{\frac{d}{c}}$ लेते हैं।

तब (6) से हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} - \frac{z^2}{c_2^2} = 1.$$

इस समीकरण से निरूपित शांकवज को **एकपृष्ठी अतिपरवलयज** (hyperboloid of one sheet) कहा जाता है। (आप भाग 8.5 में देखेंगे कि इसका यह नाम क्यों है।) इसी प्रकार हम स्थिति $a < 0, b < 0, c > 0$, $d > 0$ और अन्य स्थितियों में एकपृष्ठी अतिपरवलयज के समीकरण प्राप्त कर सकते हैं।

स्थिति 5 : (d ≠ 0 और गुणांकों a, b और c में से किन्हीं दो के चिह्न d के चिह्न के समान हों) : अन्य स्थितियों की तरह यहां भी हम यह मान लेते हैं कि $a > 0, b < 0, c < 0$ और $d < 0$. तब

$$-\frac{d}{a} > 0, \quad \frac{d}{b} > 0, \quad \frac{d}{c} > 0.$$

यहां $a_3 = \sqrt{\frac{-d}{a}}$, $b_3 = \sqrt{\frac{d}{b}}$, और $c_3 = \sqrt{\frac{d}{c}}$ लीजिए।

तब हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2}{a_3^2} - \frac{y^2}{b_3^2} - \frac{z^2}{c_3^2} = 1.$$

इस शांकवज को **द्विपृष्ठी शांकवज** (hyperboloid of two sheets) कहा जाता है।
(भाग 8.6 से आप समझ जाएंगे कि इसी प्रकार से आप द्विपृष्ठी अतिपरवलयजों के अन्य रूप प्राप्त कर सकते हैं।)
इस तरह, आपने देखा कि केन्द्रीय शांकवजों को पांच प्रकार के शांकवजों में वर्गीकृत किया जा सकता है : शंकु, अधिकल्पित दीर्घवृत्तज, दीर्घवृत्तज, एकपृष्ठी अतिपरवलयज और द्विपृष्ठी अतिपरवलयज। इस वर्गीकरण को हमने सारणी 1 में दिया है।

सारणी 1 : केन्द्रीय शांकवजों के मानक रूप

प्रकार	मानक रूप
शंकु	$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$
अधिकल्पित दीर्घवृत्तज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
दीर्घवृत्तज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
एकपृष्ठी अतिपरवलयज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
द्विपृष्ठी अतिपरवलयज	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

E 5) बताइए कि निम्नलिखित समीकरण किन शांकवजों को निरूपित करते हैं :

क) $x^2+4y^2-z^2=1$

ख) $16z^2=4x^2+y^2+16$

ग) $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$

घ) $z^2=3x^2+3y^2$

च) $x^2-y^2-z^2=9$

यदि आप उन स्थितियों को ध्यान से देखें जहां $d \neq 0$, तो आप देखेंगे कि ये चारों निम्नलिखित समीकरण की विशेष स्थितियां हैं : $ax^2+by^2+cz^2=1$.
यह समीकरण निम्नलिखित शांकवजों को निरूपित करता है :

i) दीर्घवृत्तज, जबकि a, b, c सभी धनात्मक हों,
ii) एकपृष्ठी-अतिपरवलयज जबकि a, b, c में कोई दो धनात्मक हों और तीसरा ऋणात्मक
iii) द्विपृष्ठी अतिपरवलयज जबकि a, b, c में कोई दो ऋणात्मक हों और तीसरा धनात्मक
iv) एक अधिकल्पित दीर्घवृत्तज जबकि a, b, c सभी ऋणात्मक हों।

अब हम ऊपर दिए गए वास्तविक शांकवजों के आकार के बारे में बारी-बारी से अध्ययन करेंगे। आइए दीर्घवृत्तज से शुरू करें।

8.4 दीर्घवृत्तज

आइए हम समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots (8)$$

जहां $a, b, c > 0$
से निरूपित दीर्घवृत्तज को लें।
मान लीजिए S इस समीकरण से निरूपित पृष्ठ है।
क्या इकाई 2 में किए गए अध्ययन के आधार पर ऊपर दिए गए समीकरण से आप S के कुछ ज्यामितीय गुण बता सकते हैं? इतना तो जरूरी है कि यदि $a = b = c$ तो यह समीकरण एक गोले को निरूपित करता है। और आप गोले की ज्यामिती का विस्तार से अध्ययन खंड 2 में कर चुके हैं।
तो आइए हम व्यापक स्थिति पर गौर करें। निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने से आप दीर्घवृत्त के कई ज्यामितीय पहलुओं को जान जाएंगे।

समीकरण $F(x, y, z) = 0$ से निरूपित पृष्ठ XY- समतल के प्रति सममित कहते हैं। यदि $F(x, y, z)$ में z के स्थान पर $-z$ रखने पर समीकरण बदलता नहीं। इसी प्रकार हम YZ- समतल और XZ- समतल के प्रति $F(x, y, z) = 0$ की सममिति परिभाषित कर सकते हैं।

E 6) दिखाइए कि (8) से निरूपित पृष्ठ XY-समतल, YZ-समतल और ZX-समतल के प्रति सममित होता है।

E 7) क्या सभी निर्देशांक समतल पृष्ठ (18) को प्रतिच्छेद करते हैं? यदि हो, तो इन प्रतिच्छेदों से प्राप्त परिच्छेद ज्ञात कीजिए।

E 8) बताइए कि निर्देशांक अक्ष पृष्ठ (18) को प्रतिच्छेद करते हैं या नहीं।

यदि आपने प्रश्नों को हल कर लिया है, तो आपने ध्यान दिया होगा कि पृष्ठ (8) निर्देशांक अक्षों को $A(a, 0, 0)$ और $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ और $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$ और $C'(0, 0, -c)$ पर काटता है।

आइए, अब हम निर्देशांक समतलों के समांतर समतलों से किए गए पृष्ठ (8) के प्रतिच्छेद लें। यहां हम $a \neq b$ मान लेते हैं।
आइए पहले हम XY-समतल के समांतर एक समतल लें, मान लीजिए $z = k$, जहां k एक अचर है। (8) में $z = k$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2} \quad \ldots (9)$$

यदि $\frac{k^2}{c^2} < 1$, अर्थात् $-c < k < c$ तो समीकरण एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है।
यह k के सभी मानों के लिए सत्य होता है, जिससे कि $|k| \le c$ यदि हम $k = 0$ लें तो हमें अर्ध अक्षों a और b वाला एक दीर्घवृत्त प्राप्त होता है।

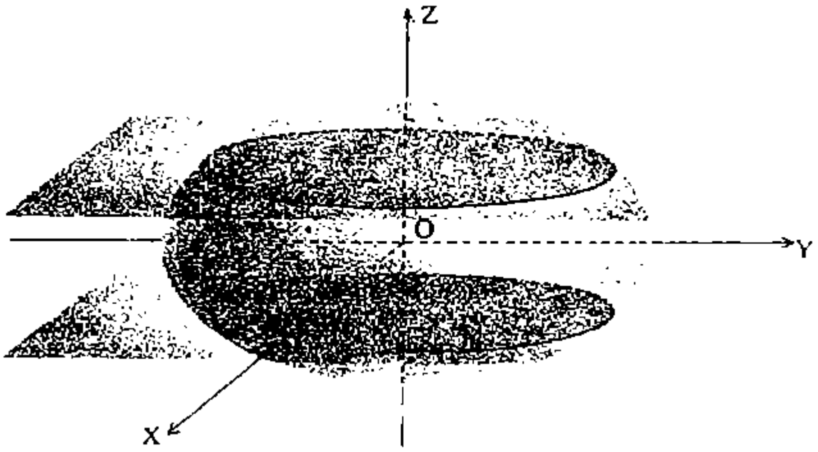
अतः इस पृष्ठ को ऐसे हम समतलों $z = c$ और $z = -c$ के बीच स्थित एक के ऊपर एक रखे गए दीर्घवृत्तों का कुल मान सकते हैं। अब, यदि (9) में $k > c$ हो, तो क्या होगा? तब समीकरण के केवल अधिकल्पित मूल

होंगे। अतः पृष्ठ का कोई भी भाग समतल $z = c$ के परे नहीं होगा। इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि पृष्ठ का कोई भी भाग समतल $z = -c$ के नीचे नहीं होगा। आप यह भी सत्यापित कर सकते है कि यह पृष्ठ समतलों $y = -b$, $y = b$ के बीच और समतलों $x = -a$ और $x = a$ के बीच स्थित है। अतः यह पृष्ठ दीर्घवृतों

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \ z = k, \text{ जहां } |k| \leq |c|.$$

से बना एक परिबद्ध पृष्ठ (bounded surface) होता है।

(8) के बारे में यह सभी जानकारी इकट्ठी करके हमें चित्र 3 में दिया गया पृष्ठ प्राप्त होता है।



चित्र 3 : दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, समतलों $z = \frac{c}{2}$ और $z = -\frac{c}{2}$ से इसका प्रतिच्छेद क्रमशः दीर्घवृत्त E_1 और E_2 है।

यहां हम कुछ टिप्पणी दे रहे हैं।

टिप्पणी : मान लीजिए समीकरण (8) में $a > b = c$ तब (8) को हम

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

लिख सकते हैं।

समतल $z = 0$ से इस दीर्घवृत्तज का प्रतिच्छेद दीर्घवृत

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ है।}$$

यदि हम इस दीर्घवृत को इसके दीर्घ अक्ष, अर्थात् x-अक्ष के प्रति घुमाएं तो आप देख सकते हैं कि इस तरह प्राप्त पृष्ठ दिया हुआ दीर्घवृत्तज है। यही कारण है कि इस पृष्ठ को दीर्घवृत्तज कहा जाता है।

अब यदि (8) में $a = b > c$ तो आप कैसा दीर्घवृत्त पाएंगे? इस स्थिति में अपने लघु (अर्थात् z अक्ष) के प्रति

दीर्घवृत्त $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

को घुमाने पर दीर्घवृत्तज प्राप्त किया जा सकता है।

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : शांकवज $\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1 \qquad (10)$

का अनुरेखन कीजिए।

हल : आप जानते हैं कि यह समीकरण एक दीर्घवृत्तज को निरूपित करता है। आइए हम इसे अनुरेखित करने की कोशिश करें। इसके लिए पहले हम निर्देशांक अक्षों से इस पृष्ठ का प्रतिच्छेद देखें। समीकरण (10) से हम पाते हैं कि पृष्ठ को x-अक्ष विन्दुओं (3, 0, 0) और (−3, 0, 0) पर काटता है, y-अक्ष विन्दुओं (0, 4, 0) और

$(0, -4, 0)$ पर काटती है और z-अक्ष बिन्दुओं $(0, 0, 1)$ और $(0, 0, -1)$ पर काटती है। आइए अब देखें कि निर्देशांक समतलों के समांतर समतलों से इस दीर्घवृत्तज का प्रतिच्छेद क्या होगा?

समतल $z = h$, जहां h एक अचर है लीजिए। (10) में $z = h$ रखने पर हमें

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1-h^2 \qquad \dots (11)$$

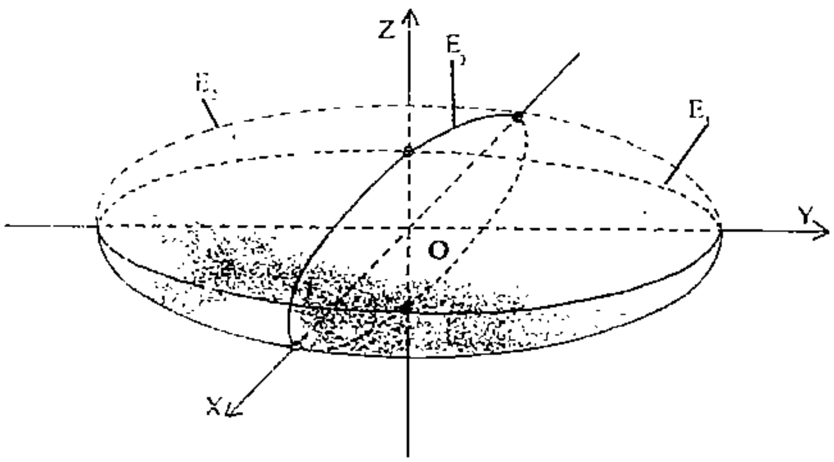
प्राप्त होता है। आप जानते हैं कि यह समीकरण एक दीर्घवृत्त को निरूपित करेगा, यदि $|h| < 1$ यदि $h = 1$, तो पृष्ठ और समतल $z = 1$ का प्रतिच्छेद केवल बिन्दु $(0,0,1)$ होता है। इसी प्रकार, $h = -1$ के लिए, हमें $(0,0,-1)$ प्राप्त होता है। यदि $|h| > 1$, तब ऐसा कोई बिन्दु (x, y) नहीं होता है जो (11) को संतुष्ट करता हो। इससे यह पता चलता है कि पृष्ठ का कोई भी भाग समतल $z = 1$ के ऊपर और समतल $z = -1$ के नीचे स्थित नहीं होता।

इसके बाद हम $z = 0$ के संगत एक दीर्घवृत्त खींचते हैं (चित्र 4 में E_1) ध्यान दीजिए कि इस दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष 4 है और लघु-अक्ष 3 है। इस चित्र में $z = 0$ के समांतर कुछ समतलों के संगत कुछ और दीर्घवृत्त दिखाए गए हैं। ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे h बढ़ता है, वैसे-वैसे दीर्घवृत्त छोटे होते जाते हैं।

इसी प्रकार, यदि $x = h$, एक अचर है, तो $|h| < 3$ के लिए हमें फिर दीर्घवृत्त प्राप्त होते हैं। चूंकि ऐसा कोई $(x; y)$ नहीं होता जो $|h| > 3$ पर (10) को संतुष्ट करता हो, इसलिए पृष्ठ का ऐसा कोई भी भाग नहीं होता जो समतल $x = 3$ के दायीं ओर और समतल $x = -3$ के बायीं ओर पर स्थित हो। $x = 0$ पर हमें दीर्घवृत्त प्राप्त होता है जैसाकि चित्र 4 में दिखाया गया है।

इसी प्रकार, समतलों $y = h$ के प्रतिच्छेद भी $|h| \leq 4$ पर दीर्घवृत्त होते हैं और पृष्ठ का कोई ऐसा भाग नहीं होता जो समतल $y = 4$ के दायीं ओर और समतल $y = -4$ के बायीं ओर पर स्थित हो। $y = 0$ के संगत दीर्घवृत्त को चित्र 4 में दिखाया गया है।

निर्देशांक समतलों और निर्देशांक अक्षों के साथ प्रतिच्छेदन प्राप्त हो जाने पर हम पृष्ठ को आसानी से खींच सकते हैं, जैसाकि चित्र 4 में दिखाया गया है।



चित्र 4 : दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ से निर्देशांक समतलों का प्रतिच्छेद दीर्घवृत्त E_1, E_2 और E_3 हैं।

अब आप एक दीर्घवृत्तज अनुरेखित कीजिए।

E 9) क) दीर्घवृत्तज $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ अनुरेखित कीजिए।

ख) बताइए कि (क) में दिए गए दीर्घवृत्तज को किसी दीर्घवृत्त से अपने किसी अक्ष के प्रति घूर्णन कराकर प्राप्त किया जा सकता है या नहीं।

तो आपने मानक रूप में दीर्घवृत्तज के अनुरेखन करने का तरीका देखा। वास्तव में, अब आप किसी भी दीर्घवृत्तज को अनुरेखित कर सकते हैं। कैसे? सिर्फ इकाई 7 के भाग 7.3 में दिए गए रूपांतरणों को लागू करके दिए गए दीर्घवृत्तज के समीकरण को मानक रूप में समानीत करने की जरूरत है। लेकिन हम इस पाठ्यक्रम में इस पर और चर्चा नहीं करेंगे।

आइए अब हम दीर्घवृत्तजों के एक अनुप्रयोग पर विचार करें। इकाई 2 में आप दीर्घवृत्त का परावर्ती गुण देख चुके हैं इस गुण का प्रयोग "विस्परिंग गैलरी" के बनाने में किया जाता है। "विस्परिंग गैलरी" वे गैलरी होते हैं जिनका फर्श आयताकार होता है और छत दीर्घवृत्तजीय पृष्ठ। चूंकि छत का कोई भी उर्ध्वाधर अनुप्रस्थ-परिच्छेद दीर्घवृत्तीय है, इसलिए एक नाभि से निकलने वाली आवाज परावर्तित होकर दूसरी नाभि पर स्पष्ट रूप से सुनी जा सकती है। इस गुण को दीर्घवृत्तज का परावर्ती गुण (reflecting property) कहते हैं। इस गुण का प्रयोग स्थापत्य इंजीनियरी में करते हैं।

अब हम दीर्घवृत्तज पर अपनी चर्चा समाप्त करेंगे और एक अन्य केन्द्रीय शांकवज पर ध्यान देंगे।

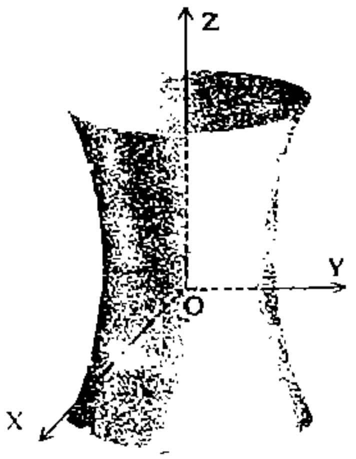
8.5 एकपृष्ठी अतिपरवलयज

इस भाग में हम एकपृष्ठी अतिपरवलयज के आकार और कुछ गुणों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे। दीर्घवृत्तज की तरह हम यहां भी केवल मानक रूपों पर गौर करेंगे।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots (12)$$

से दिए गए एकपृष्ठी अतिपरवलयज को लें।

क्या आप मानते हैं कि इस चित्र 5 में इस पृष्ठ का अनुरेक्षण किया गया है।



चित्र 5 : एकपृष्ठी अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

इस पृष्ठ के कुछ ज्यामितीय गुण आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करके पा सकते हैं।

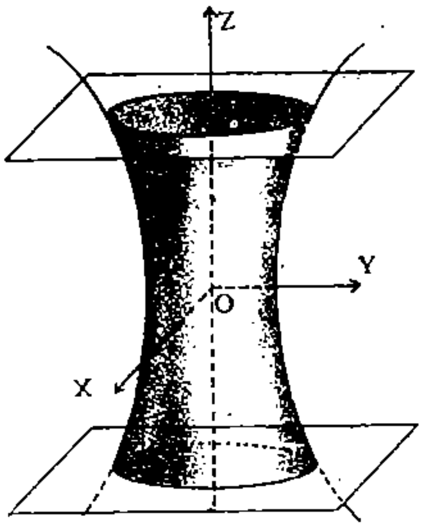
E 10) दिखाइए कि (12) से बना पृष्ठ निर्देशांक समतलों के प्रति सममित है।

E 11) जाँच कीजिए कि निर्देशांक अक्ष पृष्ठ (12) को काटते हैं या नहीं। यदि काटते हैं, तो प्रतिच्छेद क्या होंगे?

अब हमने देखा है कि (12) और निर्देशांक समतलों का प्रतिच्छेद क्या है?
समतल $z = 0$ से इसका प्रतिच्छेद दीर्घवृत्त

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, है।

इसी प्रकार समतल $z = h$ के साथ इस अतिपरवलयज का प्रतिच्छेद एक दीर्घवृत्त होगा (चित्र 6 देखिए), और जैसे-जैसे धनात्मक या ऋणात्मक दिशा में बढ़ता जाता है, वैसे-वैसे दीर्घवृत्त भी बड़े होते जाते हैं।

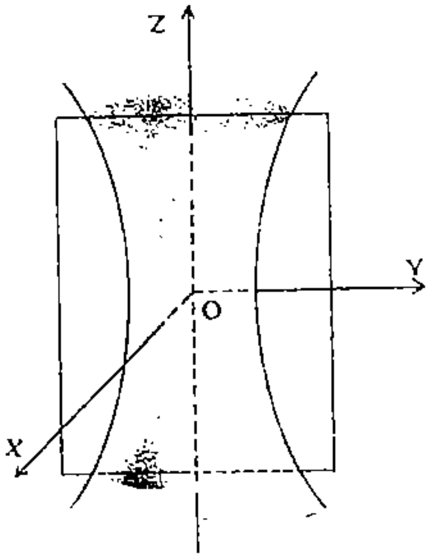


चित्र 6 : XY-समतल के समांतर समतलों से प्राप्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के परिच्छेद।

शायद आप सोच रहे होंगे कि इस पृष्ठ को भी दीर्घवृत्तज क्यों नहीं कहते। लेकिन, अब देखिए कि पृष्ठ को YZ-समतल से प्रतिच्छेद करते हैं, तो क्या होता है। हमें

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, प्राप्त होता है।

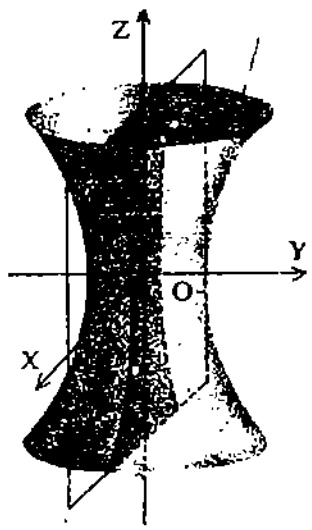
जो कि अतिपरवलय का समीकरण है (चित्र 7 देखिए)।



चित्र 7 : YZ-समतल से प्राप्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ का परिच्छेद।

इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि समतल $y = 0$ के साथ पृष्ठ का प्रतिच्छेद अतिपरवलय

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ होगा (चित्र 8 देखिए)।



चित्र 8 : XZ-समतल से प्राप्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ का परिच्छेद।

ऊपर दिए गए गुणों को देखकर, अब आप मान ही गए होंगे कि चित्र 5 का पृष्ठ 12 को निरूपित करता है। हम अक्सर कहते हैं कि पृष्ठ (12) बदलते हुए दीर्घवृत्त (variable ellipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h,$$

से जनित होता है, जो कि XY-समतल के समांतर है और जिसका केन्द्र (0,0,h), z-अक्ष पर गतिमान होता है। हम ऐसा कहते हैं क्योंकि जैसा आप देख सकते हैं, इन दीर्घवृत्तों को एक के ऊपर एक रखकर हम पृष्ठ बना सकते हैं।

अब बताइए कि आपके हिसाब से इस पृष्ठ को एकपृष्ठी अतिपरवलयज क्यों कहा जाता है? पहले तो, हम इसे एकपृष्ठी इसलिए कहते हैं, क्योंकि यह संबद्ध (connected) है। इसका अर्थ यह है कि पृष्ठ पर से हटे बिना इसके एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक जाया जा सकता है। अगले भाग में आप देखेंगे कि दो पृष्ठों वाला अतिपरवलयज भी होता है।

यह जानने के लिए कि (12) को अतिपरवलयज क्यों कहा जाता है, आप (12) में a = b लीजिए। तब समीकरण

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots (13)$$

हो जाएगा। यदि हम इसमें x = 0 लें, तो हमें निम्नलिखित अतिपरवलयज प्राप्त होगा।

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0,$$

जिसका संयुग्मी अक्ष, z-अक्ष है। यदि हम इस अतिपरवलयज को उसके संयुग्मी अक्ष के प्रति घुमाएं तो हमें अतिपरवलयज (13) प्राप्त होगा। इसी प्रकार, किसी अतिपरवलय को अपने अनुप्रस्थ अक्ष के प्रति घुमाने से भी हमें कुछ ऐसे अतिपरवलयज मिलते हैं।

अभी तक हम एकपृष्ठी अतिपरवलयज का केवल एक मानक रूप पर ही चर्चा करते आए हैं। सारणी 1 से आप जानते हैं कि एकपृष्ठी अतिपरवलयजों के दो और प्रकार होते हैं। निम्नलिखित प्रश्न इनके बारे में और मानक रूप (12) के बारे में हैं।

E 12) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ से निरूपित एकपृष्ठी अतिपरवलयज लीजिए।

क) $z = \pm 3, \pm 6$ के लिए इसके क्षैतिज अनुप्रस्थ-परिच्छेद (horizontal cross-section) क्या होंगे?

ख) x = 0 या y = 0 के लिए इसके उर्ध्वाधर अनुप्रस्थ-परिच्छेद ज्ञात कीजिए।

(क) और (ख) में प्राप्त परिच्छेदों को ज्यामितीय रूप से व्यक्त कीजिए।

E 13) क) समीकरण

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

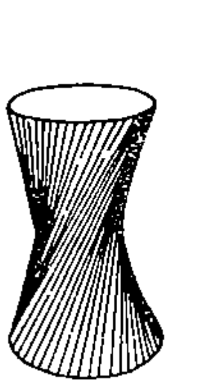
से परिभाषित पृष्ठ का आरेख बनाइए।

ख) समतल $z = k$ द्वारा प्राप्त (क) के पृष्ठ के प्रतिच्छेदन-वक्र अनुरेखित कीजिए, जबकि $|k| = 3$, $|k| < 3$ और $|k| > 3$.

E 14) क) समीकरण $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

से परिभाषित पृष्ठ प्राप्त कीजिए।

ख) इस पृष्ठ और समतल $x = 1$ के प्रतिच्छेद से बना वक्र ज्ञात कीजिए।



चित्र 9 : एकपृष्ठी अतिपरवलयज का मॉडल।

एकपृष्ठी अतिपरवलयज का एक अन्य रोचक गुण है, जिसका वास्तुकला में काफी उपयोग होता है। यह गुण है कि यह एक रेखज पृष्ठ (ruled surface) है। इसका अर्थ है कि यह पृष्ठ सरल रेखाओं से बना है। अत: इसे आसानी से धागे से बनाया जा सकता है (चित्र 9 देखिए)।

आइए अब हम एक और तरह के अतिपरवलयज पर चर्चा करें।

8.6 द्विपृष्ठी अतिपरवलयज

इस भाग में हम मुख्यतः द्विपृष्ठी अतिपरवलयज के ज्यामितीय लक्षणों पर चर्चा करेंगे। इसके वैश्लेषिक गुण एकपृष्ठी अतिपरवलयज या दीर्घवृत्तज के वैश्लेषिक गुणों से बहुत कुछ मिलते-जुलते हैं। अतः आप इन गुणों को आसानी से स्वयं प्राप्त कर सकते हैं।

आइए पहले हम समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots (14)$$

से निरूपित द्विपृष्ठी अतिपरवलयज लें।

ध्यान दीजिए कि इस समीकरण के दो ऋणात्मक गुणांक है, जबकि एकपृष्ठी अतिपरवलयज के समीकरण का सिर्फ एक ऋणात्मक गुणांक होता है।

तो आइए देखें कि (14) कैसे दिखता है। पहले तो आप (14) से संबंधित कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 15) निर्देशांक समतलों के सापेक्ष (14) से प्राप्त पृष्ठ के सममिति पर चर्चा कीजिए।

E 16) क्या सभी निर्देशांक अक्ष और निर्देशांक समतल पृष्ठ को प्रतिच्छेदित करते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

E 16 में आपने देखा होगा कि XZ-समतल और XY-समतल पृष्ठ को अतिपरवलयजों में प्रतिच्छेदित करते हैं और YZ-समतल का परिच्छेद क्या होगा? आपने नोट किया होगा कि यह समतल पृष्ठ को काटता ही नहीं है।

तो अब आप जान गए होंगे कि इस पृष्ठ को अतिपरवलयज क्यों कहते हैं। लेकिन, शायद आप सोच रहे हों कि इस पृष्ठ को द्विपृष्ठी अतिपरवलयज क्यों कहा जाता है। ऐसा कहने का कारण निम्नलिखित गुण है।

पृष्ठ और समतल $x = h$ का प्रतिच्छेद लीजिए जहां h अचर है। आप देख सकते हैं कि प्रतिच्छेदी-वक्र दीर्घवृत्त

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1, \; x = h \text{ है।} \qquad \ldots (15)$$

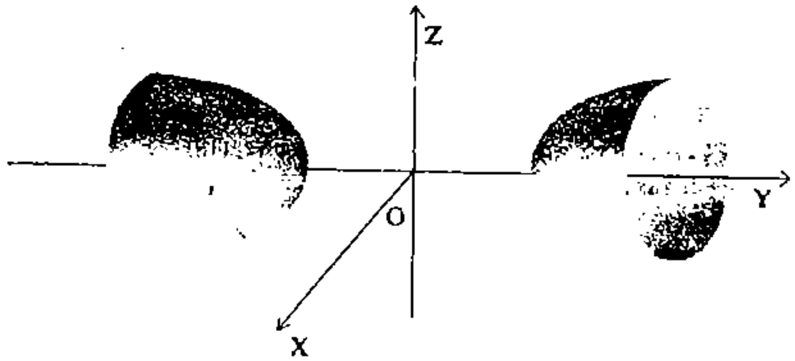
यह दीर्घवृत्त वास्तविक केवल तब होता है, जबकि $\frac{h^2}{a^2} > 1$,

अर्थात् $h > a$ या $h < -a$ अतः वे समतल जो $x = 0$ के समांतर हैं और जो समतलों $x = -a$ और $x = a$ के बीच स्थित है, पृष्ठ को काटते नहीं हैं। इसका अर्थ है कि पृष्ठ का ऐसा कोई भाग नहीं है जो समतलों $x = -a$ और $x = a$ के बीच स्थित हो।

समीकरण (15) से हम देखते हैं कि दीर्घवृत्त के अर्ध-अक्ष

$$b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}, \; c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$$

हैं, और h में वृद्धि होने पर अर्ध-अक्षों में वृद्धि होती है। इस तरह हम देखते हैं कि इस पृष्ठ की दो शाखाएं हैं : एक समतल $x = -a$ के बायीं ओर और दूसरी समतल $x = a$ के दायीं ओर। ये दोनों शाखाएं बदलते हुए दीर्घवृत्त से जनित होती हैं। हमने पृष्ठ (14) का आकार चित्र 10 में दिखाया है।



चित्र 10 : पृष्ठी अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

नीचे दिए गए प्रश्न द्विपृष्ठी अतिपरवलयज के अन्य दो रूपों

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

और

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

के अनुरेखन के बारे में हैं।

E 17) बताइए कि पृष्ठ

क) $z^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

ख) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - z^2 = 1$

को निर्देशांक समतल प्रतिच्छेद करते हैं या नहीं। यदि प्रतिच्छेद करते हैं तो प्रतिच्छेदी वक्र ज्ञात कीजिए।

E 18) E 17 में दिए गए पृष्ठों का आरेख बनाइए।

तो आपने विभिन्न प्रकार के केन्द्रीय शांकवजों के मानक रूपों का आकार देखा। आइए अब देखें कि अलग-अलग रेखाओं और समतलों से इनका प्रतिच्छेद क्या है।

8.7 रेखा या समतल से प्रतिच्छेद

इस भाग में पहले हम एक रेखा और एक केन्द्रीय शांकवज के प्रतिच्छेद पर चर्चा करेंगे। इससे हमें प्रतिबंधों को प्राप्त करने में मदद मिलेगी जिनके अधीन एक रेखा पर केन्द्रीय शांकवज की स्पर्श रेखा होती है, और स्पर्श समतलों को प्राप्त करने के लिए भी मदद मिलेगी। इसके बाद हम समतल और केन्द्रीय शांकवज के प्रतिच्छेद पर चर्चा करेंगे।

8.7.1 रेखा से प्रतिच्छेद

आइए पहले हम समीकरण

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \ldots (16)$$

से निरूपित केन्द्रीय शांकवज लें।

प्रमेय 1 के अनुसार, इस शांकवज को कोई भी रेखा दो बिन्दुओं पर काटती है। आइए हम इस तथ्य को सिद्ध करें।

मान लीजिए L एक दी हुई रेखा है जिसके दिक्-अनुपात α, β, γ है और बिन्दु $A(x_0, y_0, z_0)$ से गुजरती है। तब रेखा L का समीकरण

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \qquad \ldots (17)$$

होगा।

यदि $B(x, y, z)$ रेखा L पर एक अन्य बिन्दु है, जो A से दूरी r पर स्थित है, तो B के निर्देशांक $x = x_0 + \alpha r$, $y = y_0 + \beta r$, $z = z_0 + \gamma r$ होंगे।

यदि B रेखा L और शांकवज का एक प्रतिच्छेद बिन्दु हो, तो इसके निर्देशांक समीकरण (17) को अवश्य संतुष्ट करेंगे। इसका अर्थ है कि

$$r^2(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) + 2r(ax_0\alpha + by_0\beta + cz_0\gamma) + ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1 = 0 \qquad \ldots (18)$$

(18), r में एक द्विघाती समीकरण है। इसलिए इससे r के दो मान प्राप्त होंगे। प्रत्येक मान से हम L और शांकवज (16) का एक प्रतिच्छेदी बिन्दु मिलेगा।

इस तरह, L शांकवज (16) को दो बिन्दुओं पर काटती है, जो कि वास्तविक और भिन्न संपाती या अधिकल्पित हो सकते हैं।

यह बात किसी भी रेखा के लिए सत्य है। अतः प्रमेय 1 केन्द्रीय शांकवजों के लिए सत्य है।

अब मान लीजिए कि बिन्दु $A(x_0, y_0, z_0)$ शांकवज (16) पर स्थित है। तब (18)

$$r^2 (a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2)+2r\,(ax_0\alpha+by_0\beta+cz_0\gamma) = 0 \qquad \ldots (19)$$

हो जाएगा।

रेखा L बिन्दु-A पर शांकवज की स्पर्शरेखा तब होगी जबकि उनके प्रतिच्छेद बिन्दु आपस में संपाती होते है और वह बिन्दु $A(x_0, y_0, z_0)$ के भी संपाती हों। अर्थात् (17) के संपाती मूल हों। जैसाकि आप देख सकते हैं कि ऐसा होने का प्रतिबंध होगा

$$ax_0\alpha+ by_0\beta+cz_0\gamma = 0 \qquad \ldots (20)$$

इस तरह रेखा

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$

का शांकवज $ax^2+by^2+cz^2 = 1$ के बिन्दु $A(x_0, y_0, z_0)$ पर स्पर्शरेखा होने का प्रतिबंध (20) है।

उदाहरण के लिए, रेखा $x = z$, $y = 4$ दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ की बिन्दु (0,4,0) पर स्पर्श रेखा है क्योंकि $\alpha = 1 = \gamma$, $\beta = 0$. आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि (0,4,0) से गुजरने वाली और x-अक्ष के समांतर रेखा भी इस दीर्घवृत्तज की स्पर्श रेखा है। वास्तव में ऐसी अनंततः अनेक रेखाएं हैं, जो बिन्दु (0,4,0) पर उस दीर्घवृत्तज की स्पर्श रेखाएं हैं।

इससे यह अर्थ निकलता है कि इस दीर्घवृत्तज के प्रत्येक बिन्दु पर हम इसकी अनंततः अनेक स्पर्श रेखाएं खींच सकते हैं। यह बात सिर्फ इस दीर्घवृत्तज के लिए सत्य नहीं है, बल्कि किसी भी शांकवज के लिए सही है।

आइए देखें कि शांकवज के किसी बिन्दु पर सभी स्पर्श रेखाओं का समुच्चय क्या है?

आइए हम (17) और (20) से α, β, γ का निराकरण करें।

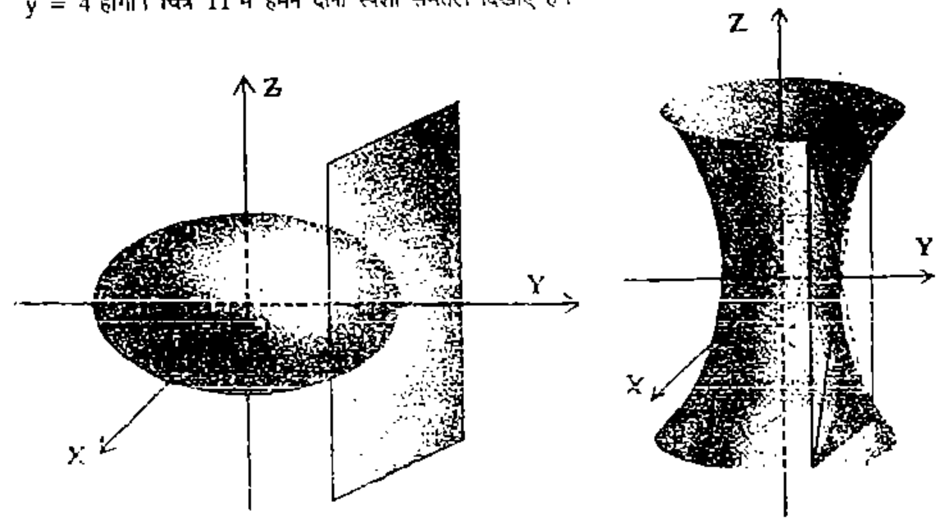
हम पाते हैं कि

$$ax_0 (x-x_0) + by_0 (y-y_0) + cz_0 (z-z_0) = 0$$
$$\Longleftrightarrow ax_0x+by_0y+cz_0z - ax_0^2-by_0^2-cz_0^2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1, \qquad \ldots (21)$$

क्योंकि (x_0, y_0, z_0) (17) पर स्थित है। (20) एक समतल का समीकरण है। अतः शांकवज (16) के सभी स्पर्श रेखाओं का समुच्चय समतल (21) है।

परिभाषा : शांकवज के किसी बिन्दु पर खींची गई शांकवज की सभी स्पर्श रेखाओं के समुच्चय को **स्पर्शतल (tangent plane)** कहते हैं।

उदाहरण के लिए, दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ के बिन्दु (0,4,0) पर स्पर्शतल का समीकरण $y = 4$ होता है। इसी प्रकार एकपृष्ठी अतिपरवलयज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ के बिन्दु (0,4,0) पर स्पर्शतल $y = 4$ होगा। चित्र 11 में हमने दोनों स्पर्शी समतल दिखाए हैं।



चित्र 11 : π स्पर्शी समतल है (क) दीर्घवृत्तज पर, (ख) अतिपरवलयज पर।

ध्यान दीजिए कि स्पर्शतल $y = 4$ दिए हुए दीर्घवृत्तज को केवल एक बिन्दु पर काटता है। लेकिन, यह समतल दिए हुए अतिपरवलयज को बिन्दु (0,4,0) पर दो स्पर्श रेखाओं $x = \pm 3z$, $y = 4$ में काटता है। इसमें हैरान होने की कोई बात नहीं है, क्योंकि यह समतल तो स्पर्श रेखाओं से ही बना है।

अब मान लीजिए कि हमें एक समतल और एक शांकवज दिया हुआ है। क्या हम बता सकते हैं कि समतल शांकवज पर स्पर्शी कब होगा?

आइए देखें।

मान लीजिए कि दिए हुए समतल का समीकरण

$ux + vy + wz = P$ है ... (22)

और शांकवज का समीकरण

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ है।

(20) से आप जानते हैं कि समतल $ux + vy + wz = p$ दिए हुए शांकवज के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्शतल होता है।

यदि और केवल यदि इसका समीकरण

$axx_0+byy_0+czz_0 = 1$ ... (23)

के रूप का हो।

अतः यदि (22) एक स्पर्शतल को निरूपित करता हो, तो (22) और (23) के गुणांक समानुपाती होने चाहिए, अर्थात्

$$\frac{ax_0}{u} = \frac{by_0}{v} = \frac{cz_0}{w} = \frac{1}{p}, P \neq 0$$

$$x_0 = \frac{u}{ap}, y_0 = \frac{v}{bp}, z_0 = \frac{w}{cp} \qquad \dots (24)$$

(याद रहे कि $a \neq 0$, $b \neq 0$ और $c \neq 0$.)

अब, क्योंकि बिन्दु (x_0, y_0, z_0) दिए हुए शांकवज पर स्थित है, इसलिए

$$ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow a\frac{u^2}{a^2p^2} + b\frac{v^2}{b^2p^2} + c\frac{w^2}{c^2p^2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = p^2 \qquad \dots (25)$$

जो कि इस बात का अपेक्षित प्रतिबंध है कि समतल $ux + vy + wz = p$ शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करता है। और आप यह भी देख सकते हैं कि समतल और शांकवज का संपर्क बिन्दु (24) से प्राप्त हो जाता है।

आइए हम इससे संबंधित कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : दिखाइए कि समतल $3x+12y-6z=17$ अतिपरवलयज $3x^2-6y^2+9z^2+17=0$ को स्पर्श करता है। और स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम अतिपरवलयज के समीकरण को निम्नलिखित मान रूप में लिखते हैं :

$$\left(-\frac{3}{17}\right)x^2+\frac{6}{17}y^2+\left(-\frac{9}{17}\right)z^2 = 1$$

$3x+12y-6z = 17$ का शांकवज को स्पर्श करने का प्रतिबंध समीकरण (25) से प्राप्त होता है।

यहाँ $a = \left(-\frac{3}{17}\right)$, $b = \frac{6}{17}$, $c = \left(-\frac{9}{17}\right)$, $u = 3$, $v = 12$, $w = -6$, $p = 17$. तब

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = \frac{9 \times (-17)}{3} + \frac{144 \times 17}{6} + \frac{36 \times (-17)}{9}$$

$$= 17\,\{-3+24-4\} = 17^2 = p^2.$$

इस तरह, प्रतिबंध (25) संतुष्ट हो जाता है। अतः शांकवज को समतल स्पर्श करता है।

स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक

$$x_0 = \frac{3 \times (-17)}{3 \times 17} = -1$$

$$y_0 = \frac{12 \times 17}{6 \times 17} = 2$$

$$z_0 = \frac{(-6) \times (-17)}{9 \times 17} = \frac{2}{3} \text{ हैं।}$$

उदाहरण 5 : शांकवज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ के इन स्पर्शी समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x + 10y - 30 = 0,\ 5y - 3z = 0$ से गुजरते हों।

हल : खंड 1 से आप जानते हैं कि दी हुई रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$7x + 10y - 30 + \lambda(5y-3z) = 0,$

के रूप का होता है, जहां λ एक वास्तविक संख्या है। क्योंकि यह समतल दिए हुए शांकवज पर स्पर्शी समतल है इसलिए समतल का समीकरण

$\frac{7xx_0}{60} + \frac{5yy_0}{60} + \frac{3yy_0}{60} = 1$, होगा, किसी बिन्दु (x_0, y_0, z_0) के लिए। गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{7x_0}{7} = \frac{5y_0}{10+5\lambda} = \frac{3z_0}{-3\lambda} = \frac{60}{30}$$

अर्थात् $x_0 = 2,\ y_0 = 2\lambda + 4,\ z_0 = -2\lambda.$

क्योंकि (x_0, y_0, z_0) दिए हुए शांकवज पर स्थित है, इसलिए

$7 \times 4 + 5(2\lambda + 4)^2 + 12\lambda^2 = 60$

$\Rightarrow 28 + 20\lambda^2 + 80\lambda + 80 + 12\lambda^2 = 60$

$\Rightarrow 32\lambda^2 + 80\lambda + 48 = 0$

$\Rightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

यह λ में एक द्विघात समीकरण है। मूल -1 और $-\frac{3}{2}$ है। λ के इनमें से प्रत्येक मान पर हमें एक स्पर्शी समतल प्राप्त होता है। इसलिए ऐसे दो स्पर्शी समतल होते हैं जो दी हुए रेखा से होकर जाते हैं। अतः समतल के अभीष्ट समीकरण $7x + 3y + 3z = 30$ और $14x + 5y + 9z = 60$ हैं।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E 19) अतिपरवलयज $x^2 + 3y^2 - 3z^2 = 1$ के बिन्दु $(1, -1, 1)$ पर स्पर्शी समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

E 20) शांकवज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के उन स्पर्शी समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 9y - 3z = 0,\ 3x - 3y + 6z - 5 = 0$ से होकर जाते हैं।

अभी तक हमने केन्द्रीय शांकवज के स्पर्शी समतलों पर चर्चा की है। आपने देखा कि ऐसे समतल शांकवज को कभी तो बिन्दु में प्रतिच्छेदित करते हैं और कभी रेखा-युग्म में। यह जानने के बाद, आप $\pi \cap S$ के बारे में क्या कह सकते हैं, जहाँ π एक समतल है और S एक शांकवज? इस बात पर हम अब चर्चा करेंगे।

8.7.2 समतलीय प्रतिच्छेद

इस इकाई में आपने देखा है कि निर्देशांक समतलों के समांतर समतल से प्राप्त मानक दीर्घवृत्तज या अतिपरवलयज के परिच्छेद एक दीर्घवृत्त, या अतिपरवलय होता है, या इनकी अपभ्रष्ट स्थितियां (degenerate cases) होती हैं अर्थात् परिच्छेद एक शांकव होता है। किसी अन्य तरह के समतल परिच्छेद का आकार कैसा होगा? क्या यह भी शांकव होगा? आइए देखें।

आइए हम

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,\ abc \neq 0.$

से निरूपित एक केन्द्रीय शांकवज लें।

हम समतल $ux + vy + wz = p$ से प्राप्त इस शांकवज का परिच्छेद ज्ञात करना चाहते हैं। निम्नलिखित प्रमेय हमें इसके बारे में बताता है। (हम इसे यहां सिद्ध नहीं करेंगे। यदि आप प्रमेय की उपपत्ति जानना चाहते हैं, तो आप इस खंड के अंत में दी गई विविध प्रश्नावली देख सकते हैं।)

प्रमेय 4 : किसी दिए हुए समतल से प्राप्त केन्द्रीय शांकवज का परिच्छेद एक शांकव होता है। और, यदि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ से दिया हुआ हो और समतल $ux + vy + wz = p$ तो $bcu^2 + cav^2 + abw^2 < 0,\ bcu^2 + cav^2 + abw^2 = 0,\ bcu^2 + cav^2 + abw^2 > 0$ के अनुसार शांकव अतिपरवलय, परवलय या दीर्घवृत्त होगा।

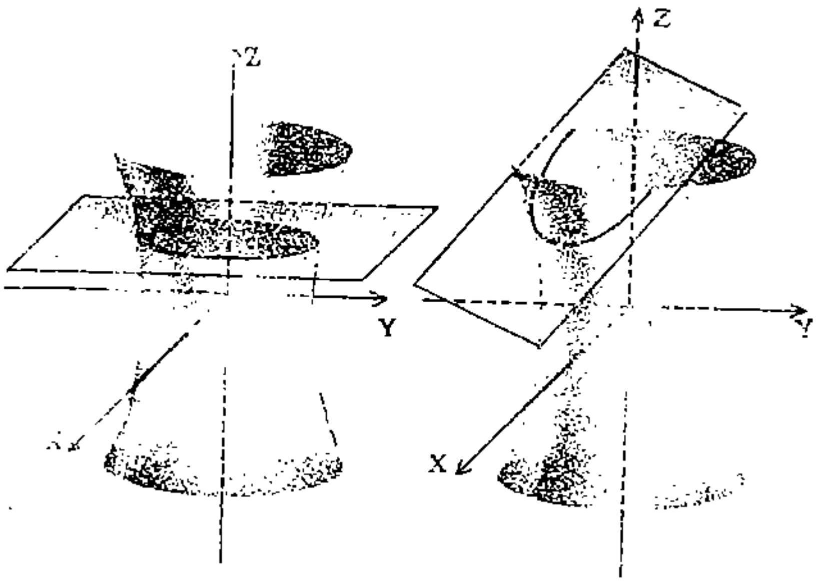
यदि $abc > 0$, तो प्रतिबंध

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} < 0,\ \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0,\ \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} > 0$$

हो जाता है।

इस प्रमेय को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है। समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ और $ux + vy + wz = p$ से x,y या z का निराकरण करके हम प्रतिबंध प्राप्त कर सकते हैं क्योंकि यह काफी लंबी प्रक्रिया है, इसलिए हमने इसे यहां शामिल नहीं किया है।

प्रमेय 4 से आप जान गए हैं कि यह आवश्यक नहीं है कि केन्द्रीय शांकवज का समतल परिच्छेद एक केन्द्रीय शांकव हो। इस बात को हमने चित्र 12 में दिखाया है।



चित्र 12 : अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ का समतलीय परिच्छेद एक (क) दीर्घवृत्त है, (ख) परवलय हो सकता है।

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : दिखाइए कि समतल $x + y + z = 1$ से प्राप्त अतिपरवलयज $9x^2 + 6y^2 - 14z^2 = 3$ का परिच्छेद एक अतिपरवलय है।

हल : यहां $a = 3$, $b = 2$, $c = -\frac{14}{3}$ और $u = v = w = 1$.

$\therefore bcu^2 + cav^2 + abw^2 = 2 \times (-\frac{14}{3}) - 14 + 6 < 0$.

अतः प्रमेय 4 के अनुसार परिच्छेद एक अतिपरवलय है।

अब आप नीचे कुछ प्रश्नों को हल कीजिए।

E 21) साथ में दिए गए समतलों से प्राप्त निम्नलिखित शांकवजों के परिच्छेद ज्ञात कीजिए :

क) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $3x + 4y + 5z = 0$.

ख) $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 10$; $x + y + z = 1$.

अब हम केन्द्रीय शांकवजों पर अपनी चर्चा इस इकाई में बताई गई बातों से संक्षिप्त विवरण से समाप्त करें।

8.8 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर विचार किया है :

1) शांकवज के केन्द्र की परिभाषा

2) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ का एक केन्द्र होने की आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$$

3) शांकवजों को दो वर्गों में बांटा गया है — अद्वितीय केन्द्र वाले (अर्थात् केन्द्रीय शांकवज) और बिना केन्द्र वाले या अनंततः अनेक केन्द्र वाले (अर्थात् अकेन्द्रीय शांकवज).

4) केन्द्रीय शांकवज का मानक रूप
$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ है, जहां $abc \neq 0$
यदि $d \neq 0$, तब तीन वर्ग होते हैं, जैसाकि हमने निम्नलिखित सारणी में दिया है :

सारणी 1 : केन्द्रीय शांकवजों के मानक रूप

प्रकार	मानक रूप
शंकु	$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$
अधिकल्पित दीर्घवृत्तज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
दीर्घवृत्तज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
एकपृष्ठी अतिपरवलयज	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
द्विपृष्ठी अतिपरवलयज	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

यदि $d = 0$, तो समीकरण एक शंकु को निरूपित करता है।

5) दीर्घवृत्तज, एकपृष्ठी अतिपरवलयज और द्विपृष्ठी अतिपरवलयज का अनुरेखण करने का तरीका।

6) दिक्-अनुपात α, β, γ वाली रेखा का केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ पर स्पर्श रेखा होने का प्रतिबंध $ax_0\alpha + by_0\beta + cz_0\gamma = 0$ है।

7) केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के विन्दु (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्शी समतल का समीकरण $axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1$ है।

8) समतल $ux + vy + wz = p$ का केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ पर स्पर्शी समतल होने का प्रतिबंध
$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = p^2$ है।

9) केन्द्रीय शांकवज का समतलीय परिच्छेद एक शांकव होता है।

अब आप भाग 8.1 को फिर से देख लीजिए, यह जानने के लिए कि उसमें बताए गए उद्देश्यों को आपने प्राप्त कर लिया है या नहीं। जैसे-जैसे आप इस इकाई में दिए गए प्रश्नों पर पहुंचे होंगे, आपने उन्हें अवश्य हल किया होगा। यदि आप इन प्रश्नों के हमारे उत्तर जानना चाहें तो आप अगला भाग पढ़ सकते हैं।

8.9 हल/उत्तर

E 1) मान लीजिए, O विन्दु $(-u, -v, -w)$ है। मान लीजिए गोले का एक अन्य बिन्दु O, इसका केन्द्र है। मान लीजिए O और O' को जोड़ने वाली रेखा पृष्ठ को p और p' पर प्रतिच्छेदित करती है। तब, परिभाषा

के अनुसार, O और O′ दोनों ही रेखा-खंड के मध्य बिन्दु होंगे। यह केवल तब हो सकता है जबकि O = O′ अतः O, ही गोले का एक मात्र केन्द्र है।

E 2) मान लीजिए बेलन का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ है।
मान लीजिए : A $(0, 0, z_1)$, z-अक्ष पर बिन्दु है। और मान लीजिए कि A से होकर जाने वाली कोई रेखा बेलन को दो बिंदुओं P और P′ पर काटती है। मान लीजिए P के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) हैं। तब जीवा (chord) का समीकरण

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ होगा।

अब, बिन्दु $(-x_2, -y_2, 2z_1 - z_2)$ लीजिए। यह बिन्दु रेखा और बेलन दोनों पर स्थित होगा। अतः बिन्दु P′, $(-x_2, -y_2, 2z_1 - z_2)$ होगा। और, हम यह भी देख सकते हैं कि A रेखा PP′ का मध्य बिन्दु है।

ऊपर दिया गया तर्क बिन्दु A से होकर जाने वाली सभी रेखाओं पर लागू होता है। अतः A, बेलन का एक केन्द्र होगा। इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि z-अक्ष के सभी बिन्दु दिए गए बेलन के केन्द्र हैं।

E 3) क) मूल बिन्दु केन्द्र नहीं है।

ख) मूल बिन्दु केन्द्र है।

ग) मूल बिन्दु केन्द्र है।

घ) मूल बिन्दु केन्द्र नहीं है।

E 4) शंकु का एक अद्वितीय केन्द्र है, अतः यह केन्द्रीय है।

E 5) क) एकपृष्ठी अतिपरवलयज
ख) एकपृष्ठी अतिपरवलयज
ग) दीर्घवृत्तज
घ) शंकु
च) द्विपृष्ठी अतिपरवलयज

E 6) यदि हम x के स्थान पर −x लें, तो समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता। इससे पता चलता है कि पृष्ठ (8) YZ-समतल के प्रति सममित है। इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि XZ-समतल और XY-समतल के प्रति पृष्ठ सममित है।

E 7) हां, सभी निर्देशांक-समतल पृष्ठ को प्रतिच्छेद करते हैं। मान लीजिए, दीर्घवृत्तज का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ है।

yz-समतल का समीकरण $x = 0$ है। प्रतिच्छेद मालूम करने के लिए हम दीर्घवृत्तज के समीकरण में $x = 0$ रखते हैं। तब हमें

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ प्राप्त होता है

जो दीर्घवृत्त (या वृत्त) को निरूपित करता है।

इसी प्रकार, $y=0$, या $z=0$ रखने पर XZ-समतल या XY-समतल में हमें दीर्घवृत्त (या वृत्त) प्राप्त होता है।

E 8) दीर्घवृत्तज का समीकरण (8) है। पहले हम यह देखेंगे कि पृष्ठ को x-अक्ष प्रतिच्छेद करता है या नहीं। x-अक्ष का कोई भी बिन्दु $(r, 0, 0)$ के रूप का होता है। अतः x-अक्ष का प्रतिच्छेद मालूम करने के लिए हम (8) में $(r, 0, 0)$ प्रतिस्थापित करते हैं तब हमें

$$\frac{r^2}{a^2} = 1,$$ अर्थात् $r = \pm a$ प्राप्त होता है।

इस तरह, हम पाते हैं कि पृष्ठ को x-अक्ष दो बिन्दुओं $(a, 0, 0)$ और $(-a, 0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

इसी प्रकार पृष्ठ को y-अक्ष दो बिन्दुओं $(0, b, 0)$ और $(0, -b, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है, और पृष्ठ को z-अक्ष दो बिन्दुओं $(0, 0, c)$ और $(0, 0, -c)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

E 9) क) दिया हुआ समीकरण $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ है।

शांकवज

पहले हम निर्देशांक समतलों से दीर्घवृत्तज का प्रतिच्छेद मालूम करते हैं।
मान लीजिए $z = h$, एक अचर। तब हमें

$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 - h^2$ प्राप्त होता है।

यदि $h < 1$, तो यह ऐसे दीर्घवृत्त का समीकरण है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर होता है।
इसी प्रकार, यदि $x = h$, एक अचर, तो हमें

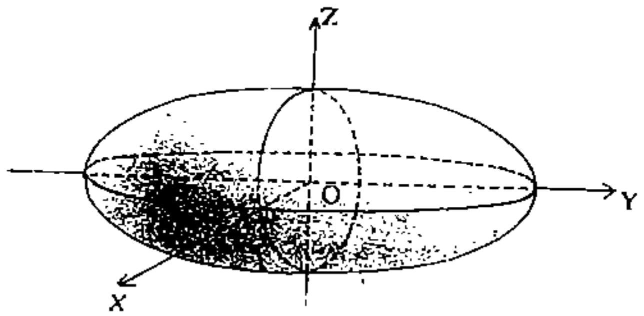
$\frac{y^2}{4} + z^2 = 1 - h^2$,

प्राप्त होता है।

यह भी एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है, यदि $h < 1$-$y=h$ रखने पर हमें $h \leq 4$ के लिए वृत्त प्राप्त होते है जिनका समीकरण

$x^2 + z^2 = 1 - \frac{h^2}{4}$ है।

आइए, अब हम नीचे दिए गए चित्र में $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ के लिए क्रमशः दीर्घवृत्त और वृत्त खींचे (चित्र 13 देखिए)।



चित्र 13 : दीर्घवृत्तज $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

चित्र में छायादार भाग दीर्घवृत्तज को प्रकट करता है।

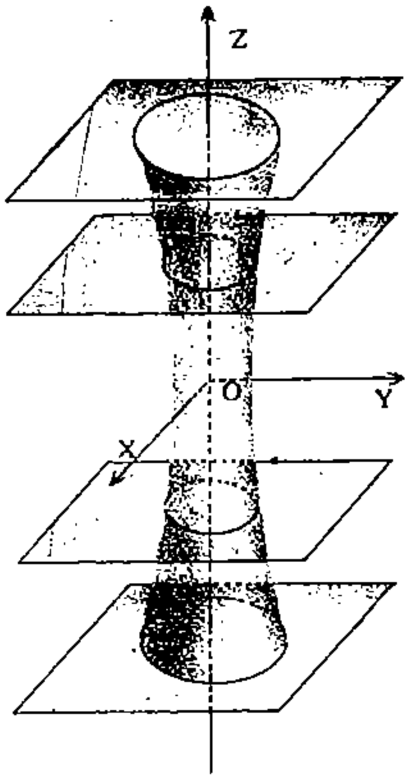
ख) अगर हम वृत्त $x^2 + z^2 = 4$ को y -अक्ष के प्रति घुमाएं तो हमें दीर्घवृत्तज प्राप्त होता है।

E 10) मान लीजिए पृष्ठ का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. है x के स्थान पर $-x$, y के स्थान पर $-y$ और z के स्थान पर $-z$ रखने पर समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं आता। अतः XY, YZ और ZX-समतलों के प्रति पृष्ठ सममित है।

E 11) मान लीजिए पृष्ठ का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ है। तब हम पाते हैं कि पृष्ठ को x-अक्ष बिन्दुओं $(a, 0, p)$ और $(-a, 0, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।
इसी प्रकार, पृष्ठ को y-अक्ष बिन्दुओं $(0, b, 0)$ और $(0, -b, 0)$ पर प्रतिच्छेद करता है।

अब, शांकवज के समीकरण में $z = 0$ रखने पर हमें $z^2 = -c^2$ प्राप्त होता है। इससे पता चलता है कि प्रतिच्छेद बिन्दु अधिकल्पित हैं। अर्थात् पृष्ठ को z-अक्ष प्रतिच्छेद नहीं करता।

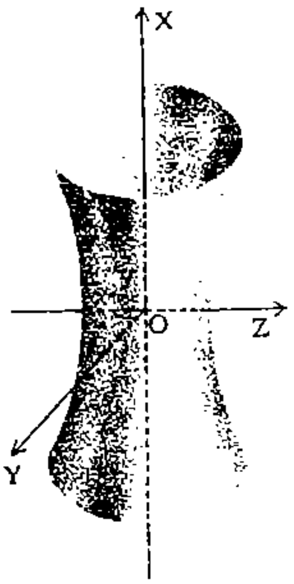
E 12) क) दिया हुआ समीकरण $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. $z = \pm 3, \pm 6$, के लिए क्षैतिज अनुप्रस्थ परिच्छेद z -अक्ष पर केन्द्र वाले और त्रिज्या 3 और 6 वाले वृत्त होते हैं (चित्र 14 देखिए)।



चित्र 14 : समतलों $z = \pm 3, \pm 6$ से एकपृष्ठी अतिपरवलयज $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त वृत्त।

ख) जब $x = 0$, तब समीकरण $y^2 - z^2 = 1$ है। यह समतल $x = 0$ में अतिपरवलय को निरूपित करता है। जब $y = 0$, तब समीकरण $x^2 - z^2 = 1$ है। यह भी समतल $y = 0$ में अतिपरवलय को निरूपित करता है।

E 13) क) अक्षों को पुनः नाम देकर हमने पृष्ठ को चित्र 15 में दिखाया है।



चित्र 15 : एकपृष्ठी अतिपरवलयज $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$

ख) जब $k = 3$ तब हमें

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0$$ प्राप्त होता है

अर्थात् $(\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}x)(\frac{1}{3}y - \frac{1}{4}x) = 0,$
जो एक रेखा-युग्म को निरूपित करता है। जब $|k| < 3$ तब हमें

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9}$$ प्राप्त होता है,

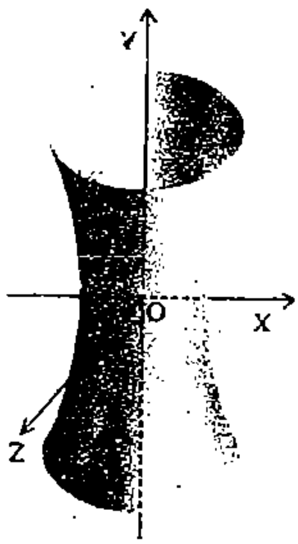
जो एक अतिपरवलय को निरूपित करता है जिसका अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष के समांतर है।
जब $|k|>3$ तब हमें

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9}$$ प्राप्त होता है,

अर्थात् $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \frac{k^2}{9} - 1$ जो एक अतिपरवलय को निरूपित करता है। जिसका अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष के समांतर है।

अनुप्रस्थ प्रतिछेदों को चित्र 15 में दिखाया गया है।

E 14) क)



चित्र 16 : एकपृष्ठी अतिपरवलयज $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

ख) अतिपरवलय $\frac{z^2}{8} - \frac{y^2}{32/9} = 1$, YZ-समतल में।

E 15) निर्देशांक समतलों के प्रति पृष्ठ सममित है।

E 16) निर्देशांक समतल $y = 0$ और $z = 0$, पृष्ठ को क्रमशः अतिपरवलयों

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ और } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

में प्रतिच्छेदित करते हैं।

पृष्ठ को समतल $x = 0$ प्रतिच्छेदित नहीं करता। (पृष्ठ को x-अक्ष बिन्दुओं $(a, 0, 0)$ और $(-a, 0, 0)$ पर प्रतिच्छेदित करता है। y-अक्ष और z-अक्ष पृष्ठ को प्रतिच्छेदित नहीं करते।

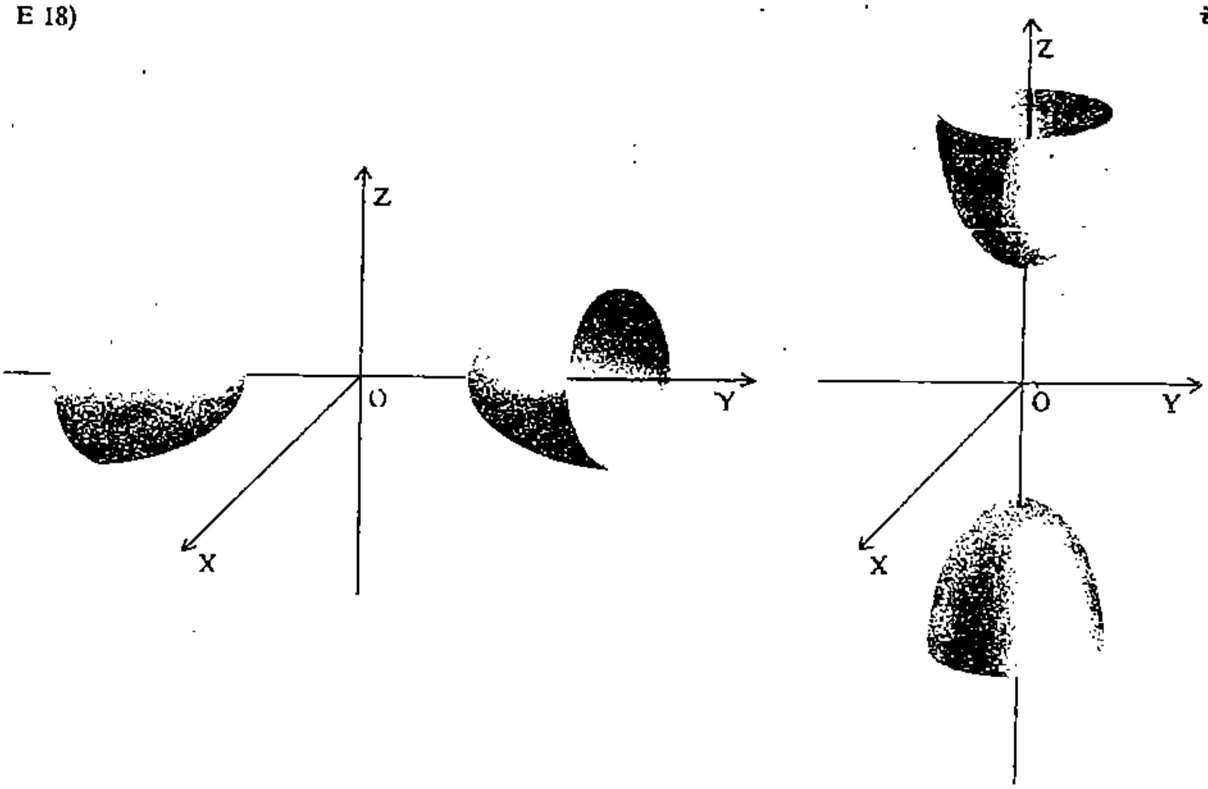
E 17) क) पृष्ठ को XY-समतल प्रतिच्छेदित नहीं करता। YZ-समतल और XZ-समतल पृष्ठ को अतिपरवलयों $z^2 - y^2 = 1$ और $z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ में प्रतिच्छेदित करता है।

ख) XZ-समतल पृष्ठ को प्रतिच्छेदित नहीं करता। XY और YZ समतल पृष्ठ को अतिपरवलयों

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \text{ और } \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

में प्रतिच्छेदित करता है।

E 18)



(क) (ख)

चित्र 17 : द्विपृष्ठी अतिपरवलयज (क) $z^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, (ख) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - z^2 = 1$.

E 19) (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्श समतल का समीकरण $axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1$ है।
दिया हुआ समीकरण $x^2 + 3y^2 - 3z^2 = 1$ है। इसलिए, यहां $a = 1, b = 3,$
$c = -3, x_0 = 1, y_0 = -1$ और $z_0 = 1$ है। अतः अपेक्षित
समतल $x - 3y - 3z = 1$ है।

E 20) रेखा $x + 9y - 3z = 0, 3x - 3y + 6z - 5 = 0$ से होकर जाने वाला कोई भी समतल
$x + 9y - 3z + \lambda(3x - 3y + 6z - 5) = 0$ होगा,
जहां λ एक वास्तविक संख्या है।

अब, हम जानते हैं कि यह समतल दिए हुए शांकवज को स्पर्श करता है। इसलिए, किसी (x_0, y_0, z_0) के लिए

$\frac{2xx_0}{5} - \frac{6yy_0}{5} + \frac{3zz_0}{5} = 1$ होगा। तब

$$\frac{2x_0}{1 + 3\lambda} = \frac{6y_0}{9 - 3\lambda} = \frac{3z_0}{-3 + 6\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$=> x_0 = \frac{1 + 3\lambda}{2\lambda}, y_0 = \frac{9 - 3\lambda}{6\lambda}, z_0 = \frac{-3 + 6\lambda}{3\lambda}$$

$$=> x_0 = \frac{1 + 3\lambda}{2\lambda}, y_0 = \frac{3 - \lambda}{2\lambda}, z_0 = \frac{-1 + 2\lambda}{\lambda}$$

समीकरण $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें $\lambda = 1$ और $\lambda = -1$ प्राप्त होता है। अतः दो इच्छित स्पर्श समतल हैं जिनके समीकरण
$4x + 6y + 3z = 5$ और $2x - 12y + 9z = 5$.

E 21) क) यहां $a = 2, b = 1, c = -1, u = 3, v = 4, w = 5$
तब $bcu^2 + cav^2 + abw^2 = -9 - 32 + 50 < 0$
अतः परिच्छेद एक दीर्घवृत्त है।

ख) परिच्छेद एक दीर्घवृत्त है।

इकाई 9 परवलयज

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने केन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा की थी। इस इकाई में, जो कि इस पाठ्यक्रम की अंतिम इकाई है, हम अकेन्द्रीय शांकवजों पर चर्चा करेंगे। आप एक प्रकार के अकेन्द्रीय शांकवज अर्थात् वेलन से तो परिचित है ही। इस इकाई में हम इस प्रकार के एक अन्य शांकवज अर्थात् परवलयज पर चर्चा करेंगे।

इस इकाई में सबसे पहले हम परवलयज के मानक रूपों पर चर्चा करेंगे। आप देखेंगे कि दो प्रकार के परवलयज होते हैं — दीर्घवृत्तीय और अतिपरवलयिक। भाग 9.3 में हम इन दो प्रकार के परवलयजों के आकार के बारे में चर्चा करेंगे। इस इकाई के अंतिम भाग में एक रेखा से और एक समतल से परवलयज के प्रतिच्छेद के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे।

केन्द्रीय शांकवजों की तरह परवलयजों का भी प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों में होता है। परवलयिक पृष्ठ का एक आम उदाहरण डिश एन्टिना (dish antenna) है, जिससे हम सभी अच्छी तरह से परिचित हैं। आप इकाई में इसके और भी अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ सकते हैं।

इस इकाई में हमने विषयवस्तु को पिछली इकाई की तरह ही प्रस्तुत किया है। इस इकाई में हम यह मानकर चले हैं कि अब तक आप इस योग्य हो चुके होंगे कि आप स्वयं ही पृष्ठ के अनेक गुण स्पष्ट कर सकें। यही कारण है कि हमने अधिकांश परिणामों को सिद्ध करना आपके लिए छोड़ दिया है।

अब आप नीचे दिए गए उद्देश्यों को अच्छी तरह से देख लीजिए। यदि आप इन्हें प्राप्त कर लेते हैं, तो समझ लीजिए कि आपने इस इकाई में दिए गए तथ्यों को अच्छी तरह से भांप लिया है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- जांच कर सकेंगे कि शांकवज का दिया हुआ समीकरण एक दीर्घवृत्तीय परवलयज को निरूपित करता है या अतिपरवलयिक परवलयज को,
- मानक दीर्घवृत्तीय या अतिपरवलयिक परवलयज का अनुरेखण कर सकेंगे,
- मानक परवलयज की स्पर्श रेखाएं और स्पर्श समतल प्राप्त कर सकेंगे।

9.2 परवलयज के मानक समीकरण

इस भाग में हम अकेन्द्रीय शांकवज (non-central conicoid) के मानक समीकरण प्राप्त करेंगे। इसके बाद हम परवलयज (paraboloid) को परिभाषित करेंगे और उसके मानक समीकरणों पर चर्चा करेंगे।

आइए हम पहले इकाई 7 के प्रमेय 4 को देखें। इस प्रमेय के अनुसार किसी भी द्विघात समीकरण को

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \ldots (1)$$

के रूप के समीकरण में समानीत किया जा सकता है।

आइए अब हम मान लें कि (1) एक अकेन्द्रीय शांकवज को निरूपित करता है। चूंकि इस शांकवज का कोई केन्द्र नहीं है, इकाई 8 के प्रमेय के अनुसार या तो

i) a, b और c में से ठीक दो शून्य होंगे, या

ii) a, b और c में से केवल एक शून्य होगा।

आइए हम इन स्थितियों को एक-एक करके देखें।

पहले हम स्थिति (i) पर विचार करेंगे। आइए हम यह मान लें कि $a = 0$, $b = 0$ और $c \neq 0$ (हम इसी प्रकार से $a, c = 0, b \neq 0$; $b, c = 0, a \neq 0$ वाली स्थितियों पर भी चर्चा कर सकते हैं।) इस स्थिति में (1)

$$cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$\Rightarrow c \left[z + \frac{w}{c} \right] = -2ux - 2vy - d + \frac{w}{c}$$ हो जाता है।

$(0,0, -\frac{w}{c})$ पर मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर हमें

$$cZ^2 + 2uX + 2vY + d_0 = 0$$

प्राप्त हो जाता है,

जहां X, Y, Z नए तंत्र में निर्देशांक हैं। यह समीकरण किस पृष्ठ को निरूपित करता है। आइए देखें। यदि u और v दोनों शून्य हों, तो पृष्ठ एक रेखा-युग्म को निरूपित करता है।

यदि गुणांकों u और v में से एक शून्येतर हो, मान लीजिए और $u = 0$, तब आप देख सकते हैं कि पृष्ठ x-अक्ष के समांतर रेखा के अनुदिश अनके परवलयजों से बना हुआ है। इस तरह हम पाते हैं कि यह एक परवलयिक बेलन (parabolic cylinder) है। वास्तव में, जब u और v दोनों शून्येतर हों, तब भी पृष्ठ एक परवलयिक बेलन होता है।

आइए अब हम स्थिति (ii) पर विचार करें। यहां हम यह मान लेते हैं कि $a = 0$ और $b, c, \neq 0$. (इसी प्रकार हम अन्य दो स्थितियां $b = 0$ और $c, a \neq 0$ और $c = 0, a, b \neq 0$ पर भी चर्चा कर सकते हैं।) इस स्थिति में समीकरण (1) निम्न रूप का हो जाता है:

$$by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d = 0.$$

अर्थात् $b\left(y + \frac{v}{b}\right)^2 + c\left(z + \frac{w}{c}\right)^2 = -2ux - d + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c}$

$$= -2ux + d_1,$$

जहां $d_1 = \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} - d$

$(0, -\frac{v}{b}, -\frac{w}{c})$ पर मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर ऊपर दिया गया समीकरण

$$bY^2 + cZ^2 + 2uX + d_1 = 0 \qquad \ldots (2)$$

हो जाता है, जहां X, Y, Z नए तंत्र में निर्देशांक हैं।

उदाहरण के लिए, समीकरण $y^2 + 10z^2 = 2$ और $2y^2 + z^2 = 12x$ अकेन्द्रीय शांकवजों को निरूपित करते हैं। लेकिन, क्या इन समीकरणों द्वारा निरूपित शांकवजों के प्रकार में कोई अंतर है? आइए देखें।

2

मान लीजिए (2) में $u = 0$. इस स्थिति में हमें इस समीकरण से निरूपित पृष्ठ को पहचानना है? यह समीकरण एक बेलन या समतल युग्म को निरूपित करता है। इन पृष्ठों के बारे में हम खंड 2 में विस्तार से चर्चा कर चुके हैं।

आइए, अब हम मान लें कि $u \neq 0$, तब हम (2) को
$by^2 + cz^2 = -2ux - d$ लिख सकते हैं,
अर्थात् $by^2 + cz^2 = 2u'\left(x - \frac{d}{2u}\right)$, जहां $u' = -u$

अब, बिन्दु $\left(\frac{d}{2u}, 0, 0\right)$ पर मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर समीकरण

$$bY^2 + cZ^2 = 2u'X \qquad \ldots(3)$$

हो जाता है।

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि यह समीकरण परवलय के मानक समीकरण का एक त्रिविम रूपांतर है? इस पृष्ठ को हम **परवलयज** (paraboloid) कहते हैं।

उदाहरण के लिए, समीकरण $2y^2 + z^2 = 12x$ एक परवलयज को निरूपित करता है।
अब बताइए कि परवलयज के समीकरण के अन्य रूप क्या हैं? हमने आपसे यही बात नीचे के प्रश्न में पूछी है।

E 1) बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में (1) क्या निरूपित करता है :

क) $b = 0, a, c \neq 0$

ख) $c = 0, a, b \neq 0$

यदि आपने E 1 को हल किया है तो आपने यह अवश्य देखा होगा कि दो और प्रकार के समीकरण होते हैं, जो परवलयज को निरूपित करते हैं, अर्थात्

$$ax^2 + by^2 = 2wz \text{ और} \qquad \ldots(4)$$
$$ax^2 + cz^2 = 2vy$$

आइए, अब हम केन्द्रीय शांकवजों की तरह यहां भी इन समीकरणों के गुणांकों पर विचार करें। आइए हम समीकरण (4) लें। यहां दो स्थितियां हो सकती हैं।

स्थिति 1 (a और b दोनों समान चिह्न वाले हों): मान लीजिए a और b धनात्मक हैं। मान लीजिए $a_1 = \sqrt{a}$ और $b_1 = \sqrt{b}$ तब (4)

$$\frac{x^2}{1/a_1^2} + \frac{y^2}{1/b_1^2} = 2wz \text{ हो जाएगा।}$$

इसी प्रकार, यदि a और b दोनों ही ऋणात्मक हों, तो भी हम (4) को ऊपर दिए गए रूप में लिख सकते हैं। इस तरह, जब a और b समान चिह्न वाले हों, तो (4) निम्न रूप का हो जाता है।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2wz \qquad \ldots(5)$$

इस समीकरण से निरूपित परवलयज को **दीर्घवृत्तीय परवलयज** (elliptic paraboloid) कहते हैं।

स्थिति 2 (a और b विपरीत चिह्न वाले हों) : इस स्थिति में आप देख सकते हैं कि (4) निम्न रूप का हो जाता है।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2wz. \qquad \ldots(6)$$

इस समीकरण से निरूपित पृष्ठ को **अतिपरवलयिक परवलयज** (hyperbolic paraboloid) कहते हैं।

E 2 को हल करने पर आप जान जाएंगे कि विशेषण "दीर्घवृत्तीय" और "अतिपरवलयिक" का प्रयोग क्यों उचित है।

E 2) दिखाइए कि XY-समतल के समांतर किसी समतल से परवलयज

i) $x^2 + 2y^2 = 3z$ का प्रतिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है।

ii) $3x^2 - y^2 = 4z$ का प्रतिच्छेद एक अतिपरवलय होता है।

E 3) जांच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण परवलयज को निरूपित करते हैं या नहीं। जो करते हैं, उन्हें दीर्घवृत्तीय परवलयज और अतिपरवलयिक परवलयज में वर्गीकृत कीजिए।

क) $4y^2 - 4z^2 - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$

ख) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1$

ग) $4x^2 - y^2 - z^2 - 8x - 4y + 8z - 2 = 0$

घ) $9x^2 + 4z^2 - 36 = 0$

च) $2x^2 + 20y^2 + 22x + 6y - 2z - 2 = 0.$

E2 से आप समझ गए होंगे कि दोनों प्रकार के परवलयजों की ज्यामिति अलग-अलग है। आइए, हम देखें कि इनमें और भी अंतर होते हैं या नहीं।

9.3 परवलयजों का अनुरेखण

इस भाग में हम दोनों प्रकार के परवलयजों की ज्यामिति पर विचार करेंगे, और देखेंगे कि इनके मानक रूप का अनुरेखण किस प्रकार किया जाता है। यहां हम दीर्घवृत्तीय परवलयज का अनुरेखण करेंगे और अतिपरवलयिक परवलयज के अनुरेखण को आप पर छोड़ देंगे।

तो आइए हम दीर्घवृत्तीय परवलयज का मानक समीकरण (5) लें। हम इकाई 8 में दिए गए दीर्घवृत्तज या अतिपरवलयज के गुणों के समान कुछ ज्यामितीय गुण यहां भी देख सकते हैं। पिछली इकाइयों से प्राप्त जानकारी के आधार पर हमने E 4 में आपसे इन गुणों को प्राप्त करने के लिए कहा है।

E 4) बताइए कि निर्देशांक-समतलों के प्रति पृष्ठ (5) सममित है या नहीं।

E 5) क्या सभी निर्देशांक-अक्ष पृष्ठ (5) को प्रतिच्छेदित करते हैं? यदि हां, तो प्रतिच्छेदों को प्राप्त कीजिए।

E 6) XZ-समतल और YZ-समतल से पृष्ठ (5) के प्रतिच्छेद प्राप्त कीजिए।

यदि आपने E6) को हल कर लिया है, तो आप अवश्य जान गए होंगे कि इस पृष्ठ को परवलयज क्यों कहा जाता है। आप E 2 से तो जानते ही हैं कि पृष्ठ को दीर्घवृत्तीय क्यों कहा जाता है? नीचे दिए गए गुण को देखकर आपको और अधिक स्पष्ट हो जाएगा कि इसे दीर्घवृत्तीय परवलयज क्यों कहा जाता है।

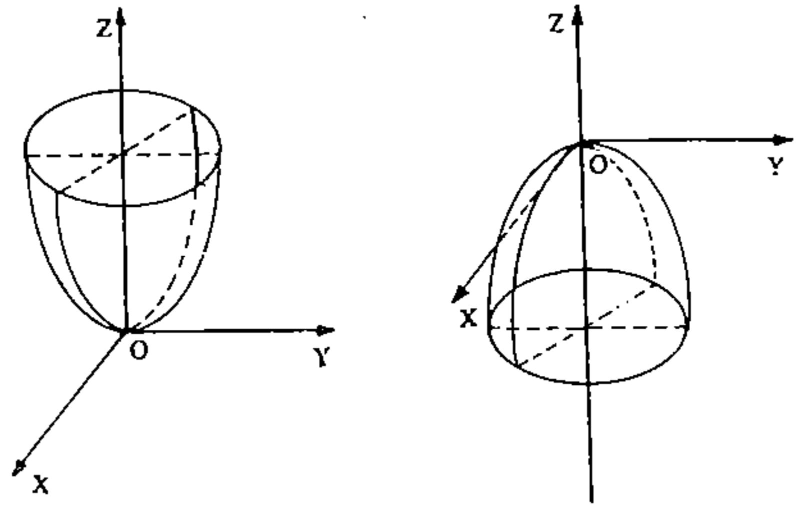
आइए, हम समतल $z = k$ से जहां k अचर है, पृष्ठ के परिच्छेद को देखें। परिच्छेद का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2wk \qquad \ldots (7)$$

होगा। x और y के सभी मानों के लिए (7) का वाम पक्ष धनात्मक होता है। अतः w और k समान चिह्न वाले होंगे। इसलिए, यदि $w > 0$ तो $k > 0$. इस स्थिति में (7) से हमें दीर्घवृत्त (या वृत्त, जबकि $a = b$) प्राप्त होता है। इसका केन्द्र z-अक्ष की धनात्मक दिशा में बिन्दु $(0,0,k)$ पर है। ध्यान दीजिए कि जैसे-जैसे k बढ़ता जाता है, वैसे-वैसे दीर्घवृत्त का आकार भी बढ़ता जाता है।

यदि $k = 0$ तो समतल $z = 0$ पृष्ठ को बिन्दु $(0, 0, 0)$ पर ठीक स्पर्श करता है।

यदि $k < 0$ तो समतल $z = k$ पृष्ठ को प्रतिच्छेदित नहीं करता। अतः पृष्ठ (5) का कोई भी भाग समतल $z = 0$ के नीचे नहीं होगा। हमने इस पृष्ठ को चित्र 1 (क) में दिखाया है।



क ख

चित्र 1 : दीर्घवृत्तीय परवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2wk$, जबकि (क) $w > 0$, (ख) $w < 0$.

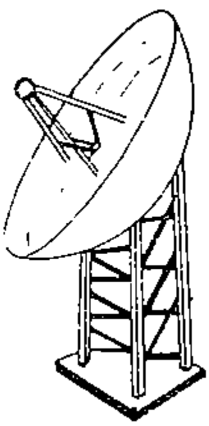
अब, यदि (7) में $w < 0$, तो क्या होता है? इस स्थिति में k ऋणात्मक होगा। और, तब हमें ऐसा दीर्घवृत्त प्राप्त होता है जिसका केन्द्र z-अक्ष पर स्थित है, ऋणात्मक दिशा में ऊपर की तरह यहां भी आप देख सकते हैं कि पृष्ठ (5) का कोई भी भाग समतल $z = 0$ के ऊपर नहीं होता। हमने पृष्ठ को चित्र 1 (ख) में दिखाया है।

अब आप इस पृष्ठ को दीर्घवृत्तीय परवलयज कहने का ज्यामितीय कारण जान गए हैं।

अब आप कुछ परवलयजों को अनुरेखित करने का प्रयास करें।

E 7) क) $x^2 + y^2 = z$ द्वारा दिए गए परवलयज को अनुरेखित कीजिए, और समतलों $x = 0$ और $y = 0$ से प्राप्त इसके परिच्छेदों का विवरण दीजिए।

ख) $y^2 + 4z^2 = x$ द्वारा दिए गए परवलयज को अनुरेखित कीजिए और समतलों $y = 0$ और $z = 0$ से प्राप्त इसके परिच्छेदों का विवरण दीजिए।



चित्र 2 : वृत्तीय परवलयज के आकार का ऐन्टेना

E 7 (क) में प्राप्त परवलयज **वृत्तीय परवलयज** (circular paraboloid) कहते हैं। यहां आप देख सकते हैं कि समतल $x = 0$ से प्राप्त पृष्ठ का समतलीय परिच्छेद एक परवलय है जिसकी नाभि विन्दु $(0, 0, \frac{1}{4})$ पर है। और, इस परवलय को z-अक्ष के प्रति घुमाने पर हमें वही पृष्ठ प्राप्त होता है जिसे आपने E 7 (क) मे अनुरेखित किया है। अतः इस पृष्ठ को हम **परिक्रमण परवलयज** (paraboloid of revolution) भी कहते हैं।

परिक्रमण परवलयजों के अनेक अनुप्रयोग होते हैं। वृत्तीय परवलयजों का प्रयोग डिश ऐन्टेना और रेडियो-दूरबीन की ऐन्टेना (चित्र 2 देखिए) बनाने में किया जाता है। ऐसा करने का कारण इसका यह गुण है कि समान क्षेत्रफल वाले सभी परवलयजों मे वृत्तीय परवलयज का परावर्ती पृष्ठ सबसे बड़ा होता है। वृत्तीय परवलयजों का प्रयोग उपग्रह अन्वेषकों और सूक्ष्म तरंग रेडियो लिंक के लिए भी किया जाता है।

आइए अब हम समीकरण (6), अर्थात्

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2wz$$

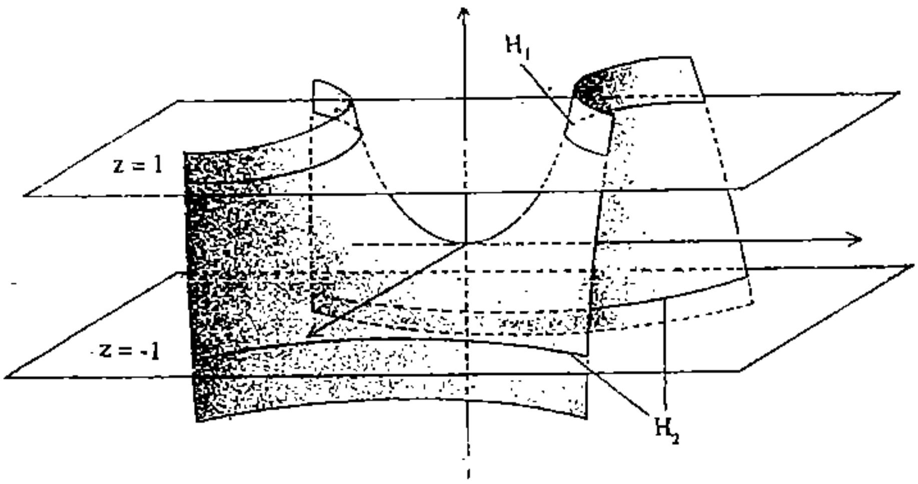
द्वारा दिए गए अतिपरवलयज पर गौर करें।

दीर्घवृत्तीय परवलयज की तरह यहां भी दो स्थितियां $w < 0$ और $w > 0$ होती हैं। यहां हम अपनी चर्चा केवल $w < 0$ वाली स्थिति तक ही सीमित रखेंगे। (ठीक इसी प्रकार के गुण $w > 0$ वाली स्थिति के भी होते हैं।) इस स्थिति के गुण मालूम करना हम आपके लिए छोड़ रहे हैं (निम्नलिखित प्रश्न देखिए)।

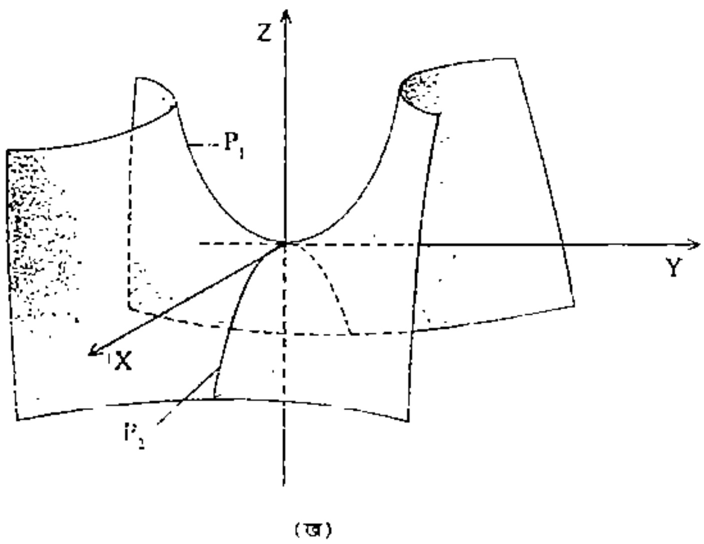
E 8) क) अतिपरवलयिक परवलयज के कौन-कौन से गुण E 4 में आपके द्वारा प्राप्त किए गए दीर्घवृत्तीय परवलयज के गुणों के अनुरूप हैं?

ख) $z = k$ से परवलयज (6) के परिच्छेद ज्ञात कीजिए, जबकि $k < 0$ और $k > 0$.

E 8 (ख) में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि समतल $z = k$ $(k \neq 0)$ द्वारा अतिपरवलयिक परवलयज का परिच्छेद अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2wk$ है। शून्येतर k के सभी धनात्मक या ऋणात्मक मानों के लिए यह अतिपरवलय वास्तविक होता है। यदि $k > 0$ तो इसका अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष के समांतर होगा, और यदि $k < 0$ तो इसका अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष के समांतर होगा (चित्र 3 (क) देखिए)। चित्र 3 (ख) में आप उन परवलयों को देख सकते हैं, जो समतलों $x = 0$ और $y = 0$ से प्राप्त परवलयज के परिच्छेद हैं।



(क)



(ख)

चित्र 3 : अतिपरवलयिक परवलयज $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2wz$ के समतलीय परिच्छेद जो समतलों (क) $z = 1$ और $z = -1$ से प्राप्त होते हैं वे अतिपरवलयज H_1 और H_2 है। (ख) $x = 0$ और $y = 0$ से प्राप्त होते हैं, वे परवलयज P_1 और P_2 हैं।

आप यह भी देख सकते हैं कि $k > 0$ के लिए अतिपरवलय के अर्ध अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई $\sqrt{2\,ka}$ होती है जिसमें, k में वृद्धि होने पर, वृद्धि होती रहती है। इसी प्रकार $k < 0$ के लिए k में वृद्धि होने पर अक्ष की लंबाई में वृद्धि होती है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E 9) $x^2 - 2y^2 = z^2$ द्वारा दिया गया अतिपरवलयिक परवलयज लीजिए।
- क) समतलों $x = 0$ और $y = 0$ से प्राप्त इसके परिच्छेद ज्ञात कीजिए।
- ख) समतलों $z = 0, \pm 1$ से प्राप्त इसके परिच्छेद ज्ञात कीजिए।
- ग) समीकरण द्वारा दिए गए पृष्ठ का रेखाचित्र बनाइए।

E 10) समीकरण $2z^2 - y^2 = x$ द्वारा दिए गए पृष्ठ का रेखाचित्र बनाइए।

अभी तक हमने देखा है कि मानक परवलयजों को अनुरेखित कैसे किया जाए। इसके लिए हमने निर्देशांक समतलों के समांतर समतलों से इनके परिच्छेद लिए थे। अब हम किसी व्यापक समतल से और किसी रेखा से परवलयज के प्रतिच्छेद पर चर्चा करेंगे।

9.4 रेखा या समतल से प्रतिच्छेद

इस भाग में हम इकाई 8 के भाग 8.7 में केंद्रीय शांकवजों के लिए प्राप्त किए गए परिणामों के समान परवलयजों के कुछ परिणामों पर चर्चा करेंगे। इनमें से कुछ परिणामों को हम प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ देंगे। आइए पहले हम

$$ax^2 + by^2 = 2z \qquad \dots (8)$$

द्वारा दिए गए परवलयज के लिए इकाई 8 के प्रमेय 1 के अनुरूप पर एक प्रश्न से शुरू करें।

E 11) सिद्ध कीजिए कि एक परवलयज को एक रेखा दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, जो कि वास्तविक या अधिकल्पित हो सकते हैं।

अब बताइए कि z-अक्ष के समांतर एक रेखा से दीर्घवृत्तीय परवलयज (8) (जब a और b समान चिह्न वाले हों) के प्रतिच्छेद के बारे में आप क्या बता सकते हैं? कुछ समय के लिए चित्र 1 को देखिए। उस चित्र में आप देख सकते हैं कि परवलयज पर प्रतिच्छेद का केवल एक वास्तविक बिन्दु होता है। आइए देखें कि x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेद से क्या प्राप्त होता है। फिर, चित्र 1 और E7 से हम जानते हैं कि ये रेखाएं परवलयज को ठीक स्पर्श करती है, अर्थात् प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती हैं। आप जानते हैं कि ऐसी रेखाओं को **स्पर्श रेखाएं** कहते हैं। केन्द्रीय शांकवजों की तरह, यहां भी पृष्ठ के किसी बिन्दु पर सभी स्पर्श रेखाओं का समुच्चय एक समतल होता है, जिसे **स्पर्शतल** कहते हैं। केन्द्रीय शांकवजों के परिणामों को देखकर आपको स्पर्श समतल के समीकरण को लिखने में आसानी होगी। वास्तव में, नीचे दिए गए प्रश्न इसी के बारे में हैं।

E 12) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (x_0, y_0, z_0) से गुज़रने वाली और दिक्-अनुपातों α, β, γ वाली रेखा का परवलयज (8) पर एक स्पर्श रेखा होने का प्रतिबंध,

$ax_0\,\alpha + by_0\,\beta - \gamma = 0$ है।

E 13) सिद्ध कीजिए कि परवलयज (8) के बिन्दु पर स्पर्शतल का समीकरण

$axx_0 + byy_0 = (z + z_0)$ होता है।

E 14) क) सिद्ध कीजिए कि तल $ux + vy + wz = p$ परवलयज (8) पर एक स्पर्शतल होगा यदि और केवल यदि

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + 2\,pw = 0 \qquad \dots (9)$$

ख) स्पर्श बिन्दु प्राप्त कीजिए।

यदि आपने E 14 को हल कर लिया है, तो आप यह अवश्य जान गए होंगे कि वहां पर स्पर्श बिन्दु

$\left(\frac{-u}{aw}, \frac{-v}{bw}, \frac{-p}{w}\right)$ होगा।

आइए, हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1: दिखाइए कि समतल $8x - 6y - z - 5 = 0$ परवलयज $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z$ को स्पर्श करता है, और स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : आइए, हम (9) में दिए गए प्रतिबंध की जांच करें। यहां $a = 1, b = -\frac{2}{3}, u = -8, v = -6,$ $w = -1, p = 5$ समीकरण (9) में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर हमें $64 - 54 - 10 = 0$ प्राप्त होता है, जो कि सही है।
अतः परवलयज को समतल स्पर्श करता है।
स्पर्श बिन्दु (8, 9, 5) है।
नीचे दिए गए प्रश्नों को आप E 13 और E 14 की मदद से हल कर सकते हैं।

E 15) दिए हुए शांकवज के बताए गए बिन्दु पर स्पर्श समतल के समीकरण ज्ञात कीजिए।

क) $x^2 + y^2 = 4z$, $(2, -4, 5)$
ख) $x^2 - 3y^2 = z$, $(3, 2, -3)$

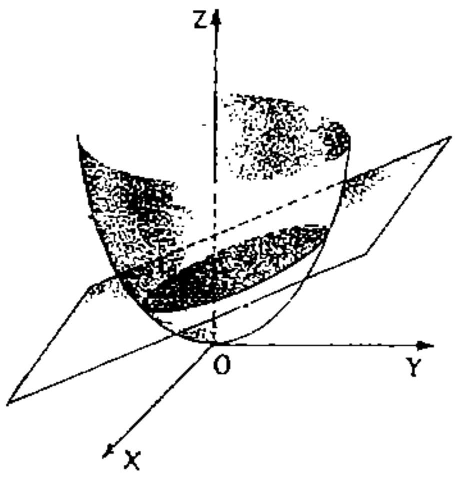
E 16) दिखाइए कि समतल $2x - 4y - z + 3 = 0$, परवलयज $x^2 - 2y^2 = 3z$ को स्पर्श करता है और स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

आइए, अब हम देखें कि किसी व्यापक समतल से परवलयज का प्रतिच्छेद क्या होता है। निम्नलिखित प्रमेय लीजिए जो कि इकाई 8 के प्रमेय 4 के अनुरूप है। यहां हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे, बल्कि एक प्रश्न के रूप में आपके लिए इसे हम छोड़ रहे हैं (इसके लिए विविध प्रश्नावली देखिए)।

प्रमेय 4 (क) समतल $ux + vy + wz = p$ से प्राप्त परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ का परिच्छेद एक शांकवज होता है।

(ख) यदि $w = 0$, तो परिच्छेद सदा ही एक परवलय होता है।
(ग) यदि $w \neq 0$, परिच्छेद
i) एक अतिपरवलय होता है यदि a और b विपरीत चिह्न वाले हो,
ii) एक परवलय होता है, यदि a और b में से कम से कम एक अवश्य शून्य हो,
iii) एक दीर्घवृत्त होता है यदि a और b समान चिह्न वाले हों।

चित्र 4 में हमने कुछ विशेष स्थितियों को दिखाया है।



(क) (ख)

चित्र 4 : समतल $ux + vy + wz = p$ द्वारा $ax^2 + by^2 = 2z$ का समतलीय परिच्छेद जबकि $u, v, w, p \neq 0$ और जबकि (क) a और b समान चिह्न वाले हों, (ख) a और b विपरीत चिह्न वाले हों।

चित्र 4 (क) में आप प्राप्त किया गया दीर्घवृत्तीय परिच्छेद देख सकते हैं, और चित्र 4 (ख) में आप देख सकते हैं कि समतलीय परिच्छेद एक अतिपरवलय है।
अब आप एक प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 17) XY-समतल पर लंब किसी समतल से प्राप्त निम्नलिखित शांकवजों के परिच्छेदों का रेखाचित्र बनाइए।

क) $3x^2 - y^2 = z$
ख) $2x^2 + y^2 = z$

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, उसका संक्षिप्त विवरण देते हुए इस इकाई को हम यहीं समाप्त कर रहे हैं।

9.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है :

1) अकेन्द्रीय शांकवज का मानक रूप
   $ax^2 + by^2 + 2wz + d = 0$ होता है।
   यदि $w = 0$, तो यह समीकरण एक बेलन या एक सरल रेखा-युग्म हो निरूपित करता है।
   यदि $w \neq 0$, तो समीकरण द्वारा निरूपित पृष्ठ को परवलयज कहते हैं।

2) परवलयज का मानक समीकरण
   $ax^2 + by^2 = 2wz,\ w \neq 0$ होता है।
   परवलयज दो प्रकार के होते हैं।
   जब a और b समान चिह्न वाले होते हैं, तब हमें दीर्घवृत्तीय परवलयज प्राप्त होता है।
   जब a और b विपरीत चिह्न वाले होते हैं, तब हमें अतिपरवलयिक परवलयज प्राप्त होता है।

3) दीर्घवृत्तीय परवलयज और अतिपरवलयिक परवलयज का अनुरेखण किस प्रकार करते हैं।

4) दिक्-अनुपात α, β, γ वाली रेखा का केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 = 2z$ के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्शरेखा होने का प्रतिबंध $ax_0\alpha + by_0\beta = \gamma$ होता है।

5) परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्श समतल का समीकरण
   $axx_0 + byy_0 = (z + z_0)$ होता है।

6) समतल $ux + vy + wz = p$ का परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ का स्पर्श समतल होने का प्रतिबंध
   $\frac{v^2}{a} + \frac{v^2}{b} + 2wp = 0$ होता है।

7) परवलयज का समतलीय परिच्छेद एक शंकु-परिच्छेद होता है।

अब आप भाग 9.1 में बताए गए उद्देश्यों को दोबारा पढ़ लीजिए, यह जांचने के लिए कि आपने उन्हें प्राप्त कर लिया है या नहीं। इस इकाई में दिए गए प्रश्नों को आपने अवश्य हल कर लिया होगा। अगले भाग में हमने प्रश्नों के अपने उत्तर दिए हैं। शायद आप इन्हें देखना चाहें।

9.6 हल/उत्तर

E 1) क) (1) में $b = 0$, $a, c \neq 0$ रखने पर हमें $ax^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ प्राप्त होता है। अर्थात्

$$a\left[x + \frac{u}{a}\right]^2 + c\left[z + \frac{w}{c}\right]^2 = -2vy - d + \frac{u^2}{a} + \frac{w^2}{c}$$

$$= -2vy + d_2, \qquad d_2 = \frac{u^2}{a} + \frac{w^2}{c} - d$$

$\left(\frac{-u}{a}, 0, \frac{-w}{c}\right)$ पर मूल बिन्दु को स्थानांतरित करने पर ऊपर दिया गया समीकरण

$aX^2 + cZ^2 + 2vY^2 + d = 0$ हो जाता है

जहां X, Y, Z नए तंत्र में निर्देशांकों को प्रकट करते हैं।

ख) (1) में $c = 0$, $a, b \neq 0$ रखने पर समीकरण

$aX^2 + bY^2 + 2wZ + d = 0$, हो जाता है,

जहां X, Y, Z मूल बिन्दु को $\left(\frac{-u}{a}, \frac{-v}{a}, 0\right)$ पर स्थानांतरित करने पर प्राप्त तंत्र में निर्देशांक को प्रकट करते हैं

E 2) XY-समतल के समांतर कोई भी समतल $z = k$ के रूप का होता है, जहां k एक शून्येतर अचर है।

i) दिया हुआ दीर्घवृत्तज $x^2 + 2y^2 = 3z$ है। इस समीकरण में $z = k$ रखने पर हमें

$\frac{x^2}{3k} - \frac{y^2}{2k} = 1$, प्राप्त होता है, जो कि एक दीर्घवृत्तज है,

ii) इसी प्रकार, अतिपरवलयज के समीकरण में $z = k$ रखने पर हमें

$\frac{x^2}{4/3k} - \frac{y^2}{4k} = 1$ प्राप्त होता है।

जो कि अतिपरवलय का समीकरण है।

E 3) (क) और (ङ) परवलयज को निरूपित करते हैं। (ख), (ग), और (घ), परवलयज को निरूपित नहीं करते। (क) एक अतिपरवलयिक परवलयज को निरूपित करता है, जबकि (ङ) एक दीर्घवृत्तीय परवलयज को निरूपित करता है।

E 4) YZ और ZX-समतल के प्रति पृष्ठ (5) सममित है जबकि XY-समतल के प्रति पृष्ठ (5) सममित नहीं है।

E 5) हां। (5) में $y = 0$ और $z = 0$ रखने पर हमें $x = 0$ प्राप्त होता है। अतः सिर्फ (0,0,0) ही (5) के साथ x-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इसी प्रकार, हम दिखा सकते हैं कि (0,0,0) ही y-अक्ष और z-अक्ष के साथ एकमात्र प्रतिच्छेद बिन्दु है।

E 6) क) (5) में $z = 0$ रखने पर हमें

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ प्राप्त होता है।}$$

केवल (0, 0, 0) ही ऊपर दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः पृष्ठ को XY-समतल बिन्दु (0, 0, 0) पर प्रतिच्छेद करता है।

ख) (5) में $y = 0$ रखने पर हमें

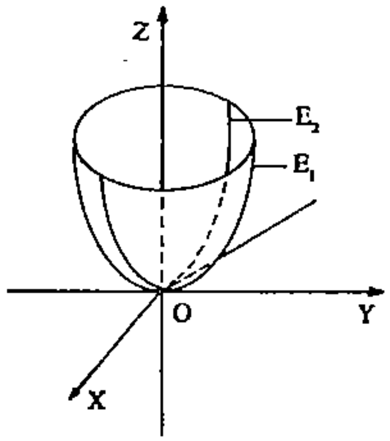
$$\frac{x^2}{a^2} = 2wz$$

अर्थात् $x^2 = 2a^2wz$ प्राप्त होता है।

जो एक परवलय को निरूपित करता है।

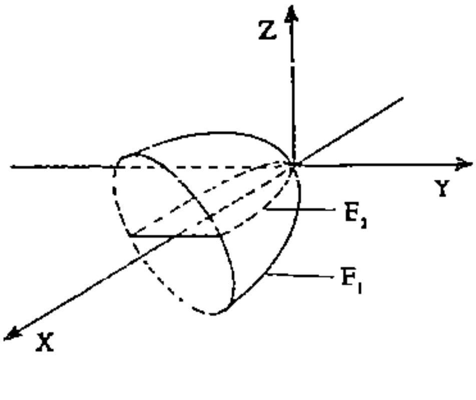
ग) इसी प्रकार पृष्ठ को YZ-समतल एक परवलय में प्रतिच्छेदित करता है।

E 7) क)



चित्र 5 : समतलों $x = 0$ और $y = 0$ से दीर्घवृत्तीय परवलयज को प्रतिच्छेदित करने पर प्राप्त परिच्छेद क्रमशः E_1 और E_2 है।

ख)



चित्र 6 : समतलों $y = 0$ और $z = 0$ से दीर्घवृत्तीय परवलयज को प्रतिच्छेदित करने पर प्राप्त परिच्छेद क्रमशः F_1 और F_2 है।

E 8) क) पृष्ठ के निम्नलिखित गुण हैं :

i) यह XZ-समतल और YZ-समतल के प्रति सममित होता है।

ii) पृष्ठ को निर्देशांक-अक्ष बिन्दु (0, 0, 0) पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

iii) (6) में $z = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि पृष्ठ को XY-समतल दो रेखाओं

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

में प्रतिच्छेदित करता है।

इसी प्रकार, (6) में $x = 0$ रखने पर हमें $y^2 = -2b^2 wz$ प्राप्त होता है, जो एक परवलय को निरुपित करता है। अर्थात् YZ-समतल से (6) का प्रतिच्छेद एक परवलय होता है। ZX-समतल से (6) का प्रतिच्छेद भी एक परवलय होता है जिसका समीकरण $x^2 + 2a^2wz$ है।

(ख) (6) में $z = k$ रखने पर हमें

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2wk$ प्राप्त होता है।

अब $k<0$ और $k>0$, तब यह एक अतिपरवलय को निरुपित करता है।

जब $k = 0$, तब यह रेखा-युग्म $y = \pm \frac{b}{a} x$ को निरुपित करता है।

E 9) क) समतल $x = 0$ से प्राप्त परिच्छेद परवलय $y^2 = \frac{1}{2} z$ होता है (चित्र 1 देखिए)।

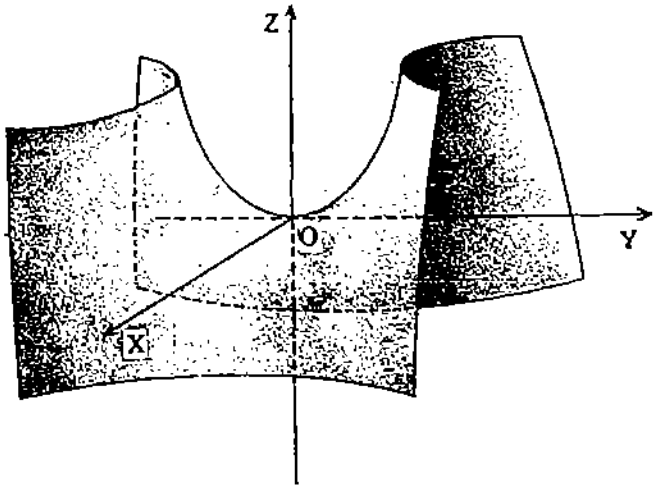
समतल $y = 0$ से प्राप्त परिच्छेद $x^2 = z$ होता है (चित्र 1 देखिए)।

(ख) समतल $z = 0$ से प्राप्त परिच्छेद रेखा-युग्म $y = \pm \frac{1}{2} x$ होता है

समतल $z = 1$ से प्राप्त परिच्छेद अतिपरवलय $x^2 - 2y^2 = 1$ होता है,

और समतल $z = -1$ से प्राप्त परिच्छेद अतिपरवलय $2y^2 - x^2 = 1$ होता है।

ग)



चित्र 7 : अतिपरवलयिक परवलयज

E 10) यह चित्र E9 में दिए गये चित्र के समान ही है सिर्फ निर्देशांक-अक्षों में बदलाव है।

E 11) (x_0, y_0, z_0) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण जिसकी दिक्कोज्याएं α, β, γ हैं,

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \text{ है।}$$

किसी r के लिए इस रेखा का कोई भी बिन्दु, $(\alpha r + x_0, \beta r + y_0, \gamma r + z_0)$ के रूप का होगा। जब परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ को यह रेखा काटती है, तब हमें

$a(\alpha r + x_0)^2 + b(\beta r + y_0)^2 = 2\alpha(\gamma r + z_0)$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $(a\alpha^2 + b\beta^2) r^2 + 2r(a\alpha x_0 + b\beta y_0 - \gamma) + ax_0^2 + by_0^2 - 2z_0 = 0$ ...(10)

यह r में एक द्विघात समीकरण है जिससे r के दो मान प्राप्त होते हैं, जो वास्तविक या अधिकल्पित हो सकते हैं। इस तरह परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E 12) (x_0, y_0, z_0) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण जिसके दिक्-अनुपात α, β, γ हैं।

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \text{ है।}$$

E 11) में हमने देखा है कि यह रेखा L, शांकवज को दो बिन्दुओं पर काटती है जो वास्तविक और अलग-अलग, वास्तविक और संपाती या अधिकल्पित हो सकते हैं।
यदि पृष्ठ के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर यह रेखा स्पर्श रेखा हो, तो प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती होते हैं।
अर्थात् E 11 के (10) के वास्तविक संपाती मूल हैं। ऐसा होने का प्रतिबंध
$a\alpha x_0 + b\beta x_0 - \gamma = 0$ है। ... (11)
ध्यान दीजिए कि क्योंकि (x_0, y_0, z_0) शांकवज पर स्थित हैं, इसलिए हमें $ax_0^2 + by_0^2 - 2z_0 = 0$ प्राप्त होगा।

E 13) शांकवज $ax^2 + by^2 = 2z$ है। ... (12)

हम जानते हैं कि स्पर्श समतल (x_0, y_0, z_0) पर पृष्ठ की सभी स्पर्श रेखाओं का समुच्चय होता है। आइए, हम यह मान लें कि रेखा

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

जहां α, β, γ रेखा के दिक्-अनुपात हैं, शांकवज (11) पर स्पर्श रेखा है।
(11) और (12) से α, β, γ का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$ax_0(x - x_0) + by_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$
$\Rightarrow axx_0 + byy_0 - (ax_0^2 + by_0^2) = z - z_0$
$\Rightarrow axx_0 + byy_0 - 2z_0 = z - z_0, \qquad ax_0^2 + by_0^2 = 2z_0$
$\Rightarrow axx_0 + byy_0 = z + z_0$

इससे पता चलता है कि सभी स्पर्श रेखाओं का समुच्चय, अर्थात् स्पर्श समतल का समीकरण
$axx_0 + byy_0 = z + z_0$ होता है।

E 14) क) E 13) के अनुसार, समतल $ux + vy + wz = p$ शांकवज $ax^2 + by^2 = 2z$ पर स्पर्श समतल होगा, यदि यह शांकवज के किसी बिन्दु (x_0, y_0, z_0) के लिए
$axx_0 + byy_0 = (z + z_0)$ के रूप का हो।

अर्थात् $\dfrac{ax_0}{u} = \dfrac{by_0}{v} = \dfrac{-1}{w} = \dfrac{z_0}{p}$

$\Rightarrow x_0 = -\dfrac{u}{aw}, y_0 = -\dfrac{v}{bw}, z_0 = -\dfrac{p}{w}$

क्योंकि (x_0, y_0, z_0) शांकवज $ax^2 + by^2 = 2z$ पर स्थित है, इसलिए

$$a\left(\frac{u^2}{a^2w}\right) + b\left(\frac{v^2}{b^2w}\right) = -\frac{2p}{w}$$

अर्थात् $\dfrac{u^2}{aw} + \dfrac{v^2}{bw} = -2p$

अर्थात् $\dfrac{u^2}{a} + \dfrac{v^2}{b} + 2pw = 0$ ... (13)

ख) स्पर्श बिन्दु $\left(\dfrac{u}{aw}, \dfrac{v}{bw}, \dfrac{-p}{w}\right)$ है।

E 15) स्पर्श समतल का समीकरण
$axx_0 + byy_0 = (z + z_0)$ है। ... (14)
क) दिए हुए समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2z.$$

यहां $a = \frac{1}{2} = b$ और $x_0 = 2, y_0 = -4$ और $z_0 = 5$
तब, (14) से

$$\frac{1}{2} \times x \times 2 + \frac{1}{2} \times y \times (-4) = z + 5.$$

अर्थात् $x - 2y - z = 5.$

E 16) दिए हुए शांकवज को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{2x^2}{3} - \frac{4y^2}{3} = 2z$$

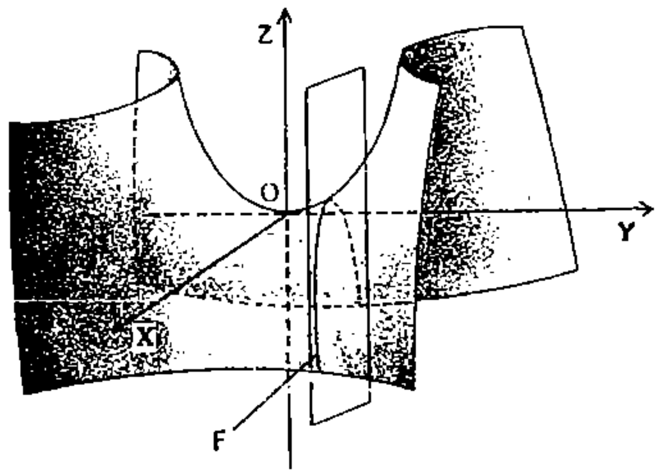
दिया हुआ समतल $2x - 4y - z = -3$ है। यह समतल परवलयज को स्पर्श करेगा अगर E 14 के (13) में दिया गया प्रतिबंध संतुष्ट हो। यहां $u = 2, v = -4, w = -1, p = -3, a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ तब

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + 2pw = 6 - 12 + 6 = 0$$

इससे पता चलता है कि परवलयज को समतल स्पर्श करता है।

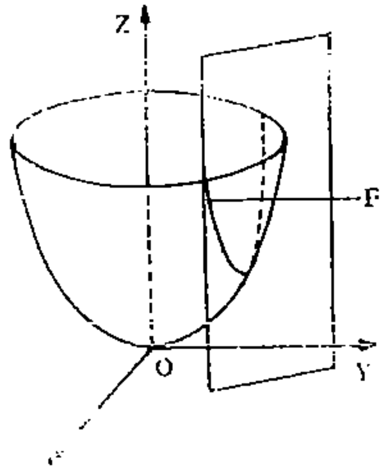
स्पर्श बिन्दु $(3, 3, -3)$ है।

E 17) क)



चित्र 8 : XY-समतल पर लंब समतल के परवलयज $3x^2 - y^2 = z$ का परिच्छेद F_1 है।

ख)



चित्र 9 : XY-समतल पर लंब समतल से परवलयज $2x^2 + y^2 = z$ का परिच्छेद F_2 है।

विविध प्रश्नावली

(यह भाग ऐच्छिक है।)

इस भाग में हमने इस खंड की विषयवस्तु से संबंधित कुछ प्रश्न दिए हैं। शांकवजों को और अच्छी तरह से समझने के लिए आप इन्हें हल करना चाहेंगे। इन प्रश्नों के हल प्रश्न-सूची के बाद दिए गए हैं ताकि आप अपने उत्तरों की जांच कर सकें।

1. बताइए कि निम्नलिखित समीकरण किस प्रकार के शांकवजों को निरूपित करते हैं?
   i) $x^2 - 16z^2 = 4y^2$
   ii) $5x^2 + 2y^2 - 6z^2 = 10$
   iii) $4y^2 = x$
   iv) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 12$
   v) $2y^2 + x^2 = 4z$
   vi) $4x^2 - 3y^2 - 6z^2 = 10$
   vii) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   viii) $2z^2 + x = y^2$
   ix) $4y^2 + 9x^2 - 36z^2 + 36 = 0$
   x) $25x^2 - 9y^2 = 225$

2. क) अतिपरवलयज $\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ को z -अक्ष के प्रति घुमाया जाता है। इस स्थिति में किस प्रकार पृष्ठ प्राप्त होता है? पृष्ठ का समीकरण प्राप्त कीजिए।

   ख) x_0 का ऐसा मान प्राप्त कीजिए जिससे कि समतल $x = x_0$ (क) में प्राप्त किए गए पृष्ठ को एक सरल रेखा-युग्म में प्रतिच्छेद करें।

3. क) शांकवज S पर स्थित बिन्दु P पर S का अभिलंब (normal) बिन्दु P से होकर जाने वाली एक रेखा है जो P के स्पर्शी समतल पर लंब होता है। केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर अभिलंब का समीकरण प्राप्त कीजिए।

   ख) (क) की सहायता से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ के बिन्दु $(1, 1, \frac{1}{2})$ पर अभिलंब ज्ञात कीजिए।

4. परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ के बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. मान लीजिए कि XYZ निर्देशांक-तंत्र को वही मूल बिन्दु वाले एक अन्य निर्देशांक-तंत्र में रूपांतरित किया जाता है जिसके अक्ष पुराने तंत्र के सापेक्ष दिक्कोज्याएँ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ और $(0, 0, 1)$ हैं। बताइए कि नए निर्देशांक-तंत्र में समीकरण $xy = z$ क्या निरूपित करता है?

6. दिए गए पृष्ठों के स्पर्शी समतल के समीकरण साथ में दिए गए बिन्दुओं पर ज्ञात कीजिए।
   क) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5$; $(1,1,1)$
   ख) $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0$; $(2, -3, 2)$
   ग) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$; $(2,1,1)$

7. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए समतल से केन्द्रीय शांकवज का परिच्छेद एक शंकु-परिच्छेद होता है। और, यदि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ हो, और समतल $ux + vy + wz = p$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि परिच्छेद
   i) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} > 0$
   ii) एक अतिपरवलय होगा, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} < 0$
   iii) एक परवलय होगा, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0$

8. क) सिद्ध कीजिए कि समतल $ux + vy + wz = p$ से परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ का परिच्छेद एक शंकु-परिच्छेद होता है।

   ख) यदि $w = 0$, तो दिखाइए कि परिच्छेद सदा ही एक परवलयज होता है।

   ग) यदि $w \neq 0$, तो दिखाइए कि परिच्छेद
      i) एक अतिपरवलय होता है, यदि a और b विपरीत चिह्न वाले हों।

ii) एक परवलय होता है, यदि a और b में से कम से कम एक शून्य हो।

iii) एक दीर्घवृत्त होता है, यदि a और b समान चिह्न वाले हों।

9. क) दिखाइए कि समतल $y = 2$ और दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, का प्रतिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है।

ख) (क) में प्राप्त किए गए दीर्घवृत्त के अर्ध दीर्घ-अक्ष और अर्ध लघु-अक्ष की लंबाइयां, केन्द्र के निर्देशांक और नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

10. दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, निर्देशांक-अक्षों को बिन्दुओं A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (centroid) पृष्ठ

$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$, पर स्थित होता है। (त्रिभुज का केन्द्रक उसके मीडियन का संच्छेदन बिन्दु है।)

उत्तर

1. (i) शंकु, (ii) एकपृष्ठी अतिपरवलयज, (iii) बेलन, (iv) दीर्घवृतज, (v) दीर्घवृत्तीय परवलयज, (vi) द्विपृष्ठी अतिपरवलयज, (vii) गोला, (viii) अतिपरवलयिक परवलयज, (ix) द्विपृष्ठी अतिपरवलयज, (x) बेलन

2. क) प्राप्त पृष्ठ एकपृष्ठी अतिपरवलयज है। इसका समीकरण

$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$ है।

ख) ऊपर के समीकरणों में $z = z_0$ रखने पर हमें

$\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$ प्राप्त होता है।

यह समीकरण केवल तब एक सरल रेखा-युग्म को निरूपित करता है, जबकि $z_0 = \pm a$.

3. क) (x_0, y_0, z_0) पर स्पर्शी समतल का समीकरण

$axx_0 + byy_0 + czz_0 = 1$ है।

जहां ax_0, by_0 और cz_0 समतल के अभिलंब के दिक्-अनुपात हैं। इसका अर्थ है कि समतल पर लंब किसी भी रेखा के दिक्अनुपात ax_0, by_0 और cz_0 हैं। क्योंकि (x_0, y_0, z_0) पर शांकवज का अभिलंब स्पर्शी समतल पर एक लंब एक रेखा होता है और (x_0, y_0, z_0) से होकर जाता है, इसलिए इसका समीकरण

$\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}$ होगा।

ख) बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अभिलंब का समीकरण

$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/b^2} = \frac{z - z_0}{z_0/c^2}$ है।

यहां $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$.तब

$$\frac{x - 1}{1/4} = \frac{y - 1}{1/4} = \frac{z - 1/\sqrt{1}}{1/\sqrt{2}}$$

यह बिन्दु $(1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ पर अभिलंब का समीकरण है।

4. $\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{-1}$

5. रूपांतरण के समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$z = z'.$$

x, y और z के इन मानों को समीकरण $xy = z$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\, y' \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\, y' \right] = z' \text{ प्राप्त होता है।}$$

अर्थात् $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{2} = z'$

जो कि एक अतिपरवलयिक प्रवलयज को निरूपित करता है।

6. i) समीकरण एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है। अतः स्पर्शी समतल $x + 2y + 2z = 5$ होगा।

   ii) समीकरण एक दीर्घवृत्तीय परवलयज को निरुपित करता है। स्पर्शी समतल का समीकरण $3x - 2y - 3z = 4$ होगा।

   iii) समीकरण एक एकपृष्ठी अतिपरवलयज को निरुपित करता है। स्पर्शी समतल का समीकरण $x + 2y - 2z = 0$ होगा।

7. मान लीजिए केन्द्रीय शांकवज का समीकरण
$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ है, जहां $abc \neq 0$
मान लीजिए समतल $ux + vy + wz - p = 0$ $(u \neq 0)$ शांकवज को प्रतिच्छेद करता है।

$$ux + vy + wz - p = 0 \Rightarrow x = \frac{-vy - wz + p}{u}$$

x के इस मान को शांकवज के समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{a}{u^2}(-vy - wz + p)^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

$$\left[\frac{av^2}{u^2} + b \right] y^2 + \left[\frac{aw^2}{u^2} + c \right] z^2 + \frac{2avw}{u^2}\, yz - \frac{2avp}{u^2} - y$$

$$- \frac{2awp'}{u^2}\, z + \frac{a}{u^2}\, p^2 - 1 = 0.$$

यह एक व्यापक द्विघात समीकरण है और इसलिए यह एक शंकु-परिच्छेद को निरूपित करता है। इस तरह परिणाम प्राप्त हो जाता है।

आइए अब हम शंकु-परिच्छेद की प्रकृति ज्ञात करें।

i) खंड 1 की इकाई 3 में आपने देखा है कि ऊपर दिया गया समीकरण एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है, यदि

$$\frac{av^2 + bu^2}{u^2} \quad \frac{aw^2 + cu^2}{u^2} - \frac{a^2v^2w^2}{u^4} > 0$$

अर्थात् $(av^2 + bu^2)(aw^2 + cu^2) - a^2v^2w^2 > 0$
अर्थात् $a^2v^2w^2 + acv^2u^2 + abu^2w^2 + bcu^4 - a^2v^2w^2 > 0$
क्योंकि $abc \neq 0$, इसलिए हम पूरे वामपक्ष को abc से भाग दे सकते हैं। ऐसा करने पर हमें
$\dfrac{u^2}{a} + \dfrac{v^2}{b} + \dfrac{w^2}{c} > 0$ प्राप्त होता है।

ii) इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि परिच्छेद एक अतिपरवलय होगा, यदि
$\dfrac{u^2}{a} + \dfrac{v^2}{b} + \dfrac{w^2}{c} < 0$ प्राप्त होता है।

iii) परिच्छेद एक परवलय होगा, यदि
$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0$$

8. क) दिया हुआ परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ है। दिया हुआ समतल $ux + by + wz = p$ है।
अब, $ux + vy + wz = p \Longrightarrow wz = -ux - vy + p$, wz के इस मान को शांकवज के दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें $ax^2 + by^2 + 2(ux + vy - p)$ प्राप्त होता है।
अर्थात् $wax^2 + wby^2 + 2ux + 2vy - 2p = 0$ यह एक व्यापक द्विघात समीकरण है। अतः यह एक शंकु-परिच्छेद को निरुपित करता है। यदि $w^2 ab < 0$ तो परिच्छेद अतिपरवलय होगा।
यदि $w^2 ab = 0$, तो परिच्छेद परवलय होगा और यदि $w^2 ab > 0$, तो परिच्छेद दीर्घवृत्त होगा।

ख) यदि $w = 0$ तो हमें $w^2 ab = 0$ प्राप्त होता है। अतः इस स्थिति में परिच्छेद सदा ही एक परवलय होता है।

ग) यदि $w \neq 0$, तो (क) का प्रतिबंध $ab < 0$, $ab = 0$ या $ab > 0$ हो जाता है। इस स्थिति में परिच्छेद

i) एक अतिपरवलय होगा, यदि $ab < 0$ अर्थात् a और b विपरीत चिह्न वाले हों।

ii) एक परवलय होगा, यदि $ab = 0$, अर्थात् a और b में से कम से कम एक शून्य अवश्य हो।

iii) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $ab > 0$, अर्थात् a और b समान चिह्न वाले हों।

9 क) दीर्घवृत्तज के दिए हुए समीकरण में $y = 2$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$\text{i.e. } \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{9}{80} z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{z^2}{80/9} = 1$$

यह समीकरण एक दीर्घवृत्त को निरुपित करता है।

ख) अर्ध दीर्घ-अक्ष की लंबाई $= 80/9$

अर्ध लघु-अक्ष की लंबाई $= 5$

(0, 0) केन्द्र है।

नाभियाँ $(0, \pm c)$ हैं, जहां $c = \sqrt{\left(\frac{80}{9}\right)^2 - 5^2} = \frac{25}{9}\sqrt{7}$

अर्थात् $(0, \frac{25}{9}\sqrt{7})$ और $(0, -\frac{25}{9}\sqrt{7})$ हैं।

10) मान लीजिए $ux + vy + wz = p$ दिए हुए दीर्घवृत्तज,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर एक स्पर्शी समतल हैं।

तब हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$p^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2 \qquad \ldots(*)$$

अब हम समतल और निर्देशांक अक्षों का प्रतिच्छेद ज्ञात करेंगे। x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष को समतल क्रमशः बिन्दुओं

$A(\frac{p}{u}, 0, 0)$, $B(0, \frac{p}{v}, 0)$, $c(0, 0, \frac{p}{w})$

पर काटता है।

मान लीजिए (x_0, y_0, z_0), $\triangle ABC$ का केन्द्रक है। तब

$$x_0 = \frac{p/u + 0 + 0}{3} \text{ अर्थात् } u = \frac{p}{3x_0}$$

$$y_0 = \frac{0 + p/v + 0}{3} \text{ अर्थात् } v = \frac{p}{3y_0}$$

$$z_0 = \frac{0 + 0 + p/w}{3} \text{ अर्थात् } w = \frac{p}{3z_0}$$

समीकरण (*) में u, v और w को प्रतिस्थापित करने पर हम पाते है कि

$$p = \sqrt{\frac{a^2p^2}{9x_0^2} + \frac{b^2p^2}{9y_0^2} + \frac{c^2p^2}{9z_0^2}}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{y_0^2} + \frac{c^2}{z_0^2} = 9$$

इससे पता चलता है कि केन्द्रक (x_0, y_0, z_0) समीकरण

$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ से निरूपित पृष्ठ पर स्थित है।

शब्दावली

अकेंद्रीय शांकवज	non-central conicoid
अतिपरवलयज	hyperboloid
अतिपरवलयिक परवलयज	hyperbolic paraboloid
अद्वितीय केन्द्र	unique centre
अधिकल्पित शांकवज	imaginary conicoid
अधिकल्पित दीर्घवृत्तज	imaginary ellipsoid
अनन्ततः अनेक	infinitely many
अनुरेखण	trace
अपभ्रष्ट स्थिति	degenerate case
एकपृष्ठी अतिपरवलयज	hyperboloid of one sheet
केन्द्रीय शांकवज	central conicoid
घूर्णन	rotation
दिक्-अनुपात	direction ratio
दिक्कोज्या	direction cosine
दीर्घवृत्तज	ellipsoid
दीर्घवृत्तीय परवलयज	elliptic paraboloid
दृढ़ पिंड गति	rigid body motion
द्विघाती	quadric
द्विपृष्ठी अतिपरवलयज	hyperboloid of two sheets
नाभी	focus
निर्देशांक तंत्र	co-ordinate system
निर्देशांक समतल	co-ordinate plane
परवलयज	paraboloid
परिक्रमण-परवलयज	paraboloid of revoluation
परिच्छेद	section
परिबद्ध पृष्ठ	bounded surface
पृष्ठ	surface
प्रक्षेप	projection
प्रतिच्छेद	intersection
पाद	foot
मानक रूप	standard form
मानक समीकरण	standard equation
मूल बिन्दु	origin
रूपांतरण	transformation
रेखज वृत्तीय शंकु	ruled surface
लंब वृत्तीय शंकु	right circular cone
वृत्तीय परवलयज	circular paraboloid
शंकु-परिच्छेद	conic section
शांकव	conic
शांकवज	conicoid
संयुग्मी	conjugate
समानयन	reduction
समीकरण निकाय	system of equation
स्थानांतरण	translation
स्पर्शता	tangency
स्पर्श बिन्दु	point of contact
स्पर्शतल	tangent plane

NOTES